

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος <https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=16> και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: dsp21_hwk3_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, ΑΜ, και email address σας.

Ασκηση 3.1: (Γραμμική Πρόβλεψη) [τα μέρη (α),(β) είναι ανεξάρτητα]

(α) Για τον σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι παραθυρωμένες τιμές της αυτοσυσχέτισης του σήματος :

$$r_x[0] = 1.2, \quad r_x[1] = 0.75, \quad r_x[2] = 0.6, \quad r_x[3] = 0.5.$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

(β) Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές είναι

$$\alpha_1 = -0.3775, \quad \alpha_2 = -0.23, \quad \alpha_3 = 0.4825, \quad \alpha_4 = 0.6,$$

χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin για να βρείτε του αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Ασκηση 3.2: (Σχεδιασμός και Σύγκριση FIR vs. IIR Wiener φίλτρων)

Εστω μια στοχαστική ανέλιξη $d[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$d[n] = 0.6d[n-1] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_w^2 = 1$. Παρατηρούμε το σήμα

$$x[n] = d[n] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ και ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.

(α) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_d[k]$. Εν συνεχεία, για αποθορυβοποίηση του σήματος $x[n]$ και προσεγγιστική εκτίμηση του $d[n]$ σχεδιάζουμε τα εξής τρία διαφορετικά φίλτρα:

(β) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-2** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir2} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * w[n]$.

(γ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-3** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir3} = E\{|e[n]|^2\}$.

(δ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **μη-αιτιατό IIR** φίλτρο Wiener. Να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του βέλτιστου φίλτρου, την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n]$, και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{iir,nc} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * h_{nc}[n]$.

Συγκρίνετε τα λάθη των τριών ανωτέρω φίλτρων που σχεδιάσατε.

Εξηγείστε την εργασία σας.

Σημείωση: Η θεωρία των Wiener φίλτρων εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

Άσκηση 3.3 Υπολογιστική Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος τυχαίων σημάτων

Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας με δύο διαφορετικές μη-παραμετρικές μεθόδους και η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Οι δυο μέθοδοι που θα δοκιμαστούν είναι η μέθοδος του Περιοδογράμματος (Periodogram) και η μέθοδος Welch (Averaged Modified Periodogram).

Το Περιοδόγραμμα ενός σήματος $x[n]$ μήκους N δειγμάτων υπολογίζεται από την σχέση:

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad (1)$$

όπου στην πράξη ο DTFT $X_N(e^{j\omega})$ του σήματος αντικαθίσταται από τον DFT $X_N[k]$, οπότε υπολογίζουμε το $\hat{P}_{per}(e^{j2\pi k/N})$.

Στην μέθοδο Welch, για την εκτίμηση του φάσματος ισχύος, υπολογίζεται ένας μέσος όρος των επιμέρους εκτιμήσεων σε διαδοχικά επικαλυπτόμενα παράθυρα:

$$\hat{P}_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{K-1} \hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega}), \quad (2)$$

όπου $\hat{P}_M^{(m)}(e^{j\omega})$ είναι το τροποποιημένο περιοδόγραμμα (modified periodogram) για το m -οστό πλαίσιο ανάλυσης :

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad (3)$$

όπου U η ενέργεια του σήματος παραθύρου $w[n]$. Το παράθυρο μπορεί να είναι οποιοδήποτε, και στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιηθεί το Hamming. Η μέθοδος Welch υλοποιείται στην MATLAB με χρήση της συνάρτησης “**P = pwelch(x, window, noverlap)**”, με τις παραμέτρους *window* και *noverlap* να ρυθμίζουν το μήκος των πλαισίων και την επικάλυψη τους. Σε Python η μέθοδος Welch υλοποιείται στην βιβλιοθήκη `scipy.signal`:

<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.signal.welch.html>

Το σήμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το άθροισμα τριών ημιτόνων με τυχαία φάση, με παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας:

$$x[n] = 3 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + \sin(\omega_2 n + \phi_2) + 5 \sin(\omega_3 n + \phi_2) + v[n] \quad (4)$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Θεωρήστε $\omega_1 = 0.4\pi$, $\omega_2 = 0.5\pi$, $\omega_3 = 0.8\pi$, και μήκος σήματος $N = 1024$. Ο λευκός θόρυβος μπορεί να υλοποιηθεί με μια γεννήτρια ασυσχέτιστων τυχαίων αριθμών με μηδενική μέση τιμή. Π.χ. στην MATLAB με χρήση της εντολής “ $u = \text{randn}(1, N)$ ” και στην Python βιβλιοθήκη `scipy.signal` με το built-in module “`random`”.

Ζητούμενα:

(α) Κώδικας Python ή MATLAB που να δημιουργεί το σήμα $x[n]$ και να παράγει τις δύο διαφορετικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος.

(β) Διαγράμματα για τις δύο εκτιμήσεις.

(γ) Σχολιασμός αποτελεσμάτων: Συγκρίνετε τα δύο διαγράμματα ως προς το resolution και το variance του φάσματος ισχύος. Συμφωνούν οι παρατηρήσεις σας με το θεωρητικά αναμενόμενο? Σε ποιά από τις δύο μεθόδους παρατηρείτε περισσότερη μείωση θορύβου?

Σημείωση: Η θεωρία των μη-παραμετρικών εκτιμητών φάσματος εξηγείται στο Κεφ. 8.2 [1].

Ασκηση 3.4: (PCA, SVD)

Δίνεται μια ακολουθία δεδομένων (τυχαία διανύσματα με μηδενικό μέσο) $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, \dots, N$, και θέλουμε να βρούμε μια κατεύθυνση (μοναδιαίο διάνυσμα) $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$ και σταθερές a_n έτσι ώστε, αν προσεγγίσουμε κάθε δεδομένο μας (διάνυσμα στήλης) \mathbf{x}_n με ένα διάνυσμα $a_n \mathbf{e}$, το συνολικό μέσο τετραγωνικό λάθος J να είναι ελάχιστο:

$$J(a_1, \dots, a_n, \mathbf{e}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}_n - a_n \mathbf{e}\|^2, \quad \|\cdot\| = \text{Euclidean norm}$$

(α) Θεωρήστε γνωστό το \mathbf{e} και αποδείξτε ότι τα βέλτιστα a_n που ελαχιστοποιούν το J είναι

$$a_n = \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{e} \rangle = \mathbf{x}_n^T \mathbf{e}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα βέλτιστα a_n στο J , αποδείξτε ότι αποκτούμε ένα λάθος

$$J_1(\mathbf{e}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{R}_x \mathbf{e} + (1/N) \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}_n\|^2, \quad \mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T,$$

όπου \mathbf{R}_x είναι ο εμπειρικός πίνακας αυτοσυσχέτισης (sample autocorrelation matrix) των δεδομένων.

Σημείωση: Ως συνέχεια της ανωτέρω ανάλυσης, σας δίνεται ότι το βέλτιστο \mathbf{e} που ελαχιστοποιεί το J_1 είναι το ιδιοδιάνυσμα του \mathbf{R}_x που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή λ_1 .

(γ) Τι σχέση έχει η ανωτέρω λύση με PCA (Principal Component Analysis)?

(ε) Πως σχετίζεται η ανωτέρω λύση με την SVD (Singular Value Decomposition) του $N \times d$ πίνακα \mathbf{X} που σχηματίζεται σιτίζοντας τα διανύσματα \mathbf{x}_n , $n = 1, \dots, N$, ως γραμμές?

(ε) Βρείτε αριθμητικά τα βέλτιστα a_n , \mathbf{e} για τα εξής δεδομένα ($N = 4, d = 3$):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

