
Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος `https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=16` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `dsp21_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 2.1: (Ελάχιστη φάση, Γραμμική Φάση): Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}.$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_1(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z).$$

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_1(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των Z μετ/σμών.
(γ) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_2(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{\text{lin}}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_2(z)H_{\text{lin}}(z).$$

Ασκηση 2.2: (Cepstrum): **(α)** Να βρείτε αναλυτικά το complex cepstrum $\hat{h}[n]$ του σήματος που έχει τον Z-μετασχηματισμό $H(z)$ της Ασκησης 2.1, και εν συνεχεία το απλό cepstrum $c[n]$.
(β) Εστω ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ IIR σύστημα μοντελοποίησης του ηχητικού σωλήνα παραγωγής φωνής με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{G}{1-\sum_{k=1}^{p}\alpha_k z^{-k}}$$

όπου $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση. Αν $\hat{h}[n]$ είναι το complex cepstrum του σήματος $h[n]$, να αποδείξετε αναλυτικά ότι αυτό το cepstrum του γραμμικού μοντέλου μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά με την σχέση

$$\hat{h}[n] = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{h}[k]\alpha_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Ασκηση 2.3: (Σχεδιασμός FIR συστήματος για Αποδιαμόρφωση)
Ένα ιδανικό σύστημα διακριτού-χρόνου *μετασχηματισμού Hilbert* (ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως σε τηλεπικοινωνίες) δημιουργεί ιδανική μετατόπιση φάσης -90 μοίρες ($-\pi/2$ ακτίνια) για $0 < \omega < \pi$ και μετατόπιση φάσης $+90$ μοίρες ($+\pi/2$ ακτίνια) για $-\pi < \omega < 0$. Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι σταθερό (μονάδα) για τις τιμές $0 < \omega < \pi$ και $-\pi < \omega < 0$. Συστήματα σαν αυτό ονομάζονται *ideal 90-degree phase shifters*.
(α) Βρείτε αναλυτικά την απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$ ενός ιδανικού διακριτού-χρόνου μετασχηματισμού Hilbert ο οποίος περιλαμβάνει σταθερή (μη-μηδενική) καθυστέρηση ομάδας ίση με τ. Σχεδιάστε την απόκριση φάσης του συστήματος για $-\pi < \omega < \pi$.
(β) Υποθέστε ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο παραθύρωσης για τον σχεδιασμό της προσέγγισης γραμμικής φάσης για τον ιδανικό Hilbert μετασχηματισμό. Χρησιμοποιήστε $H_d(e^{j\omega})$ από το ερώτημα (α) για την εύρεση της ιδανικής κρουστικής απόκρισης $h_d[n]$, εάν το FIR σύστημα είναι τέτοιο ώστε $h[n] = 0$ για $n < 0$ και $n > M$.
(γ) Ποιά είναι η καθυστέρηση του συστήματος εάν $M = 21$? Σχεδιάστε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας της FIR προσέγγισης, θεωρώντας τετραγωνικό παράθυρο.
(δ) Εφαρμογή: Θεωρήστε το AM-FM σήμα $x[n] = a[n]\cos(\phi[n])$, $n = 0, 1, \ldots, 400$, με

$$a[n] = 1 + 0.6\cos(\pi n/100), \quad \phi[n] = \cos(\pi n/5 + 4\sin(3\pi/n/200)) \ .$$

ως είσοδο στο ψηφιακό σύστημα του μετασχηματισμού Hilbert που σχεδιάσατε ανωτέρω με $M = 21$ και έστω $y[n]$ η έξοδος. Με βάση το αναλυτικό σήμα $x_{\text{anal}}[n] = x[n] + jy[n]$, μπορούμε να κάνομε αποδιαμόρφωση που θα μας δώσει μια εκτίμηση για το σήμα στιγμιαίου πλάτους $a[n]$ και το σήμα στιγμιαίας συχνότητας $\omega_i[n] = d\phi[n]/dn$ ως εξής:

$$\hat{a}[n] = \sqrt{x^2[n] + y^2[n]}, \quad \hat{\phi}[n] = \arctan(\frac{y[n]}{x[n]}), \ \ \hat{\omega}_i[n] = \frac{\hat{\phi}[n+1] - \hat{\phi}[n-1]}{2}$$

Με την βοήθεια κάποιου πακέτου λογισμικού (π.χ. Matlab ή Python), υπολογίστε τα σήματα $y[n], \hat{a}[n], \hat{\omega}_i[n]$ και σχεδιάστε τα γραφήματα των σημάτων $x[n], \hat{a}[n], \omega_i[n]$. Επίσης να υπολογίστε το ποσοστιαίο rms λάθος εκτίμησης του στιγμιαίου πλάτους και της στιγμιαίας συχνότητας, δηλ. τις rms τιμές των λαθών $a[n] - \hat{a}[n]$ και $\omega_i[n] - \hat{\omega}_i[n]$ κανονικοποιημένες επί της % ως προς τις τις rms τιμές σημάτων $a[n]$ και $\omega_i[n]$ αντίστοιχα.

Ασκηση 2.4: (Τυχαία διακριτά σήματα: φιλτράρισμα, αυτοσυσχέτιση και φάσμα ισχύος)
Πρόβλημα 3.4 από βιβλίο [1], σελ.120-121. Εξηγήστε την εργασία σας.
[1] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.

Ασκηση 2.5: (Φάσμα Ισχύος και Παραγοντοποίηση)
Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 17\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.
(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.
(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση. Εξηγήστε την εργασία σας.
