Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων
2η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

1)Όνομα: Σερλής Εμμανουήλ Αναστάσιος
2)Αριθμός Μητρώου: el18125
3) Εξάμηνο: 6ο
4) Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021
5)Email: manosanastassis@hotmail.com

Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03118175.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων.
2η Σειρά Ασκήσεων.

Άσκηση 2.1

(α) Min-Phase: Πόλοι και μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου

All-Pass: Πόλοι και μηδενικά σε ζεύγη αντίστροφων συζυγών θέσεων (ώστε $|H_{ap}(e^{j\omega})|=A$), της μορφής:

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1}-d_k}{1-d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1}-e_k^*)(z^{-1}-e_k)}{(1-e_k z^{-1})(1-e_k^* z^{-1})}$$

Υποθέτουμε $|H_{ap}(z)| = A = 1$

Συνεπώς, έχουμε:

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})} = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}, \text{ με:}$$

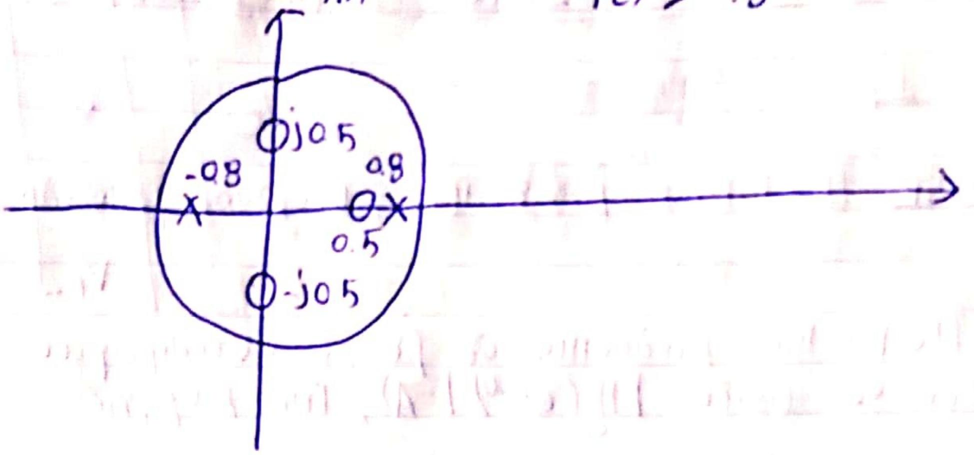
$$(1+2jz^{-1})(1-2jz^{-1}) = 4(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}+j0.5)$$

Άρα: $$H(z) = \frac{4(1-0.5z^{-1})(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}+j0.5)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = 4\cdot \underbrace{\frac{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1}j0.5)(1+z^{-1}j0.5)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}}_{\text{Min-Phase}} \underbrace{\frac{(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}+j0.5)}{(1-z^{-1}j0.5)(1+z^{-1}j0.5)}}_{\text{All-pass}}}$$

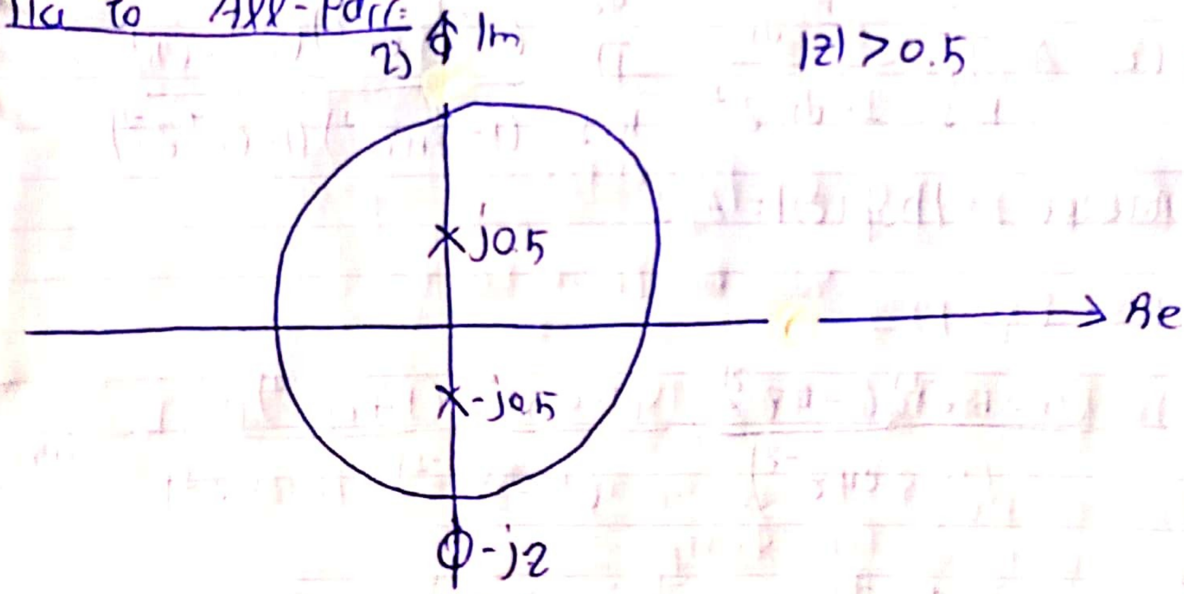
(β) <u>Για το Min-Phase:</u>

$|z| > 0.8$



<u>Για το All-Pass:</u>

$|z| > 0.5$



(γ) <u>FIR:</u> Πόλοι και μηδενικά στις θέσεις $z = 1, -1, 0, \infty$ ή σε αντίστροφα συζυγή ζεύγη

<u>Έχουμε</u> $H(z) = \dfrac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})} =$

$$= \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})(1+1/4\,z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})(1+1/4\,z^{-2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \overbrace{\left[\frac{(1-0.5z^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.9z^{-1})(1-j0.8z^{-1})(1+j0.8z^{-1})}\right]}^{\text{Min-Phase}} \cdot \underbrace{\left[(1-2jz^{-1})(1+2jz^{-1})(1-j0.5z^{-1})(1+j0.5z^{-1})\right]}_{\text{Linear}}}$$

· — ·

Άσκηση 2.5

(α) Ιδιότητα ~~Μετασχηματισμού~~ Z:

$$a^{|n|} \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$$

και

$$(1)\quad x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z) \quad (2)$$

Εφαρμογή της (1) και (2) στην $r_x[n]$:

$$R_x(z) = \left[17 + 4z^{-1} + 4z^{+1}\right]\left[\frac{1-(1/3)^2}{(1-1/3 z^{-1})(1-1/3 z)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{8}{9}\,\frac{(1+4z)(1+4z^{-1})}{(1-1/3 z)(1-1/3 z^{-1})} = R_x(z)} \boxed{,\ 1/3 < |z| < 3}$$

(β) Η περιοχή $1/3 < |z| < 3$ περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο. Συνεπώς, ορίζεται η $P_x(z)$ με:

$$\boxed{P_x(e^{j\omega}) = \frac{8}{9}\,\frac{(1+4e^{j\omega})(1+4e^{-j\omega})}{(1-1/3 e^{j\omega})(1-1/3 e^{-j\omega})}}$$

(γ) Από ερώτημα (α) + Φασματική Παραγοντοποίηση

$$P_X(z) = \sigma_0^2 \frac{B(z)}{A(z)} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{8}{9} \cdot \frac{(1+4z)}{(1-1/3\, z^{-1})} \frac{(1+4z^{-1})}{(1-1/3 \cdot z)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_0^2 = \frac{8}{9} \\ B(z) = 1+4z \\ A(z) = 1 - 1/3\, z^{-1} \end{cases}$$

Απόκριση φίλτρου:

$$\boxed{H(z) \overset{\Delta}{=} \frac{B(z)\cdot \sigma_0}{A(z)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \frac{1+4z}{1-1/3\, z^{-1}}, \quad |z| > 1/3}$$

Ευσταθές ΓΧΑ

$\oplus$

RoC περιλαμβάνει το ∞

$\oplus$

RoC περιλαμβάνει μον. κύκλο

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Αιτιατό ΓΧΑ.}}$

$\boxed{\text{Άσκηση 2.4.}}$

(α)

Ιδιότητα: $a^{|n|} \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, \ |a|<z<1/|a| \quad (1)$

Προκύπτει: $P_X(z) = \dfrac{1-(1/2)^2}{(1-1/2z^{-1})(1-1/2z)} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{(1-1/2z^{-1})(1-1/2z)}$

$$H(z) = \frac{1-1/2z^{-1}}{1-1/3z^{-1}} \Leftrightarrow H^*(1/z^*) = \frac{1-1/2 \cdot z}{1-1/3 \cdot z}$$

Γνωρίζουμε ότι: $P_Y(z) = P_X(z) \cdot H(z) \cdot H^*(1/z^*) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P_Y(z) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1-1/3z)(1-1/3z^{-1})}}$$

(β) $P_Y(z) \underset{\text{ερωτ. (α)}}{=\!=\!=} \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{(1-1/3z)(1-1/3z^{-1})} =$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-(1/3)^2} \cdot \frac{1-(1/3)^2}{(1-1/3z)(1-1/3z^{-1})} = \frac{27}{32} \cdot \frac{1-(1/3)^2}{(1-1/3z)(1-1/3z^{-1})}$$

$$\xleftrightarrow[z^{-1}]{(1)} \boxed{r_Y[k] = \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|k|}}$$

(γ) Γνωρίζουμε ότι:

$$r_{YX}(k) = r_X(k) * h(k) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} P_X(z) \cdot H(z) = P_{YX}(k)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1-\cancel{1/2 z^{-1}})(1-1/2 z)} \cdot \frac{1-\cancel{1/2} z^{-1}}{1-1/3 z^{-1}} =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{(1-1/2 z)(1-1/3 z^{-1})} = \frac{9}{10} \left[\frac{1}{1-1/2 z} + \frac{1}{1-\frac{1}{3} z^{-1}} \right]$$

$$= \frac{9}{10} \left[\frac{1}{1-1/3 z^{-1}} - 2 \cdot \frac{1}{z-2} \right]$$

<u>Αντίστροφοι Z</u>: $-\frac{1}{1-az^{-1}} \longleftrightarrow -a^n u[-n-1], \ |z|<|a|$ (2)

$\frac{1}{z-a} \longleftrightarrow a^{n-1} u[n-1], \ |z|>|a|$ (3)

$$\Rightarrow r_{yx}[k] = -\frac{9}{10} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-k-1] + 2^n u[k-1] \right] \Rightarrow$$

<u>Ιδιότητα ετεροσυσχέτισης</u>: $r_{yx}(k) = r^*_{xy}(-k)$

$$\Rightarrow \boxed{r_{xy}(k) = r^*_{yx}(-k) = -\frac{9}{10} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-k} u[+k-1] + 2^{-k} u[-k-1] \right]}$$

(δ) $r_{xy}(k) = -\frac{9}{10} \left[(3)^k u[+k-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^k u[-k-1] \right] =$

$$= -\frac{9}{10}\left[3\cdot(3)^{k-1}u[k-1] - \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[-k-1]\right\}\right]$$

$$\xleftrightarrow[Z]{\text{ιδιότητες (2),(3)}} P_{xy}(z) = -\frac{9}{10}\left[3\cdot\frac{1}{z-3} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{xy}(z) = \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{3}{z-3}\right]\cdot\frac{9}{10}}$$

Άσκηση 2.2 (α).

Από άσκηση 2.1: $H(z) = \dfrac{4 \cdot (1-0.5z^{-1})(z^{-1}-j0.5)(z^{-1}+j0.5)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})}$

$= 4 \cdot \dfrac{(1-0.5z^{-1})z^{-2}(1-j0.5z)(1+j0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1+0.8z^{-1})} =$

$= 4 \cdot z^{2} \dfrac{\overset{a}{(1-0.5z^{-1})}(1-j0.5z)\overset{b}{(1+j0.5z)}}{\underset{c}{(1-0.8z^{-1})}(1+0.8z^{-1})}$

Γενική Μορφή: $X(z) = A z^{r} \dfrac{\prod^{M_i}(1-a_n z^{-1})\prod^{M_o}(1-b_n z)}{\prod_1^{N_i}(1-c_n z^{-1})\prod_1^{N_o}(1-d_n z)}$

Τότε το Cepstrum είναι:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log A, & n=0 \\ \sum_1^{N_i} \frac{c_k^n}{n} - \sum_1^{M_i} \frac{a_k^n}{n}, & n>0 \\ \sum_1^{M_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_1^{N_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n<0 \end{cases}$$

Εν προκειμένω:

$$\boxed{\hat{h}[n] = \begin{cases} \log 4, & n=0 \\ \dfrac{(0.8)^n + (-0.8)^n - (0.5)^n}{n}, & n>0 \\ \dfrac{(-j0.5)^n + (j0.5)^n}{n}, & n<0 \end{cases}}$$

<u>...πλό cepstrum:</u> $c[n] = \dfrac{\hat{h}[n] + \hat{h}[-n]}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{c[n] = \begin{cases} \log 4, & n=0 \\ \dfrac{(0.8)^n + (-0.8)^n - (0.5)^n - (j0.5)^{-n} - (-j0.5)^{-n}}{2n}, & n> \\ \dfrac{(-j0.5)^n + (j0.5)^n + (0.5)^{-n} - (0.8)^{-n} - (0.8)^{-n}}{2n}, & n<0 \end{cases}}$$

(ε). <u>Ορισμός cepstrum:</u>

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{h}[n] z^{-n} = \log H(z) = \log \frac{G}{A(z)} = \log G - \log A(z), \text{με}$$

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}$$

$$\frac{d\hat{H}(z)}{dz} = -\frac{dA(z)}{dz} \cdot \frac{1}{A(z)} \Rightarrow \left[-z \cdot \frac{d\hat{H}(z)}{dz}\right] A(z) = z \cdot \frac{dA(z)}{dz}$$

$$\xleftrightarrow{z^{-1}} \quad \left[n \hat{h}[n]\right] * a[n] = -n\, a[n]$$

$$n x[n] \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$X_1(z) X_2(z) \longleftrightarrow x_1 * x_2$$

<u>Υπολογισμός a[n]:</u> $A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_n z^{-k}$

<u>Ορισμός Z μετασχ.</u> $X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$

$$\Rightarrow a[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -a_n, & n=1,2,\dots,p \\ 0, & n<0 \text{ και } n>p \end{cases} \quad (1)$$

<u>Τελικά, έχουμε</u> $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\, \hat{h}[k]\, a[n-k]}_{\pi[k]} = -n\,a[n]$

<u>Για $k=0$:</u> $\pi[0]=0$

<u>Για $k=n$:</u> $\pi[n] = n \cdot \hat{h}[n]\, a[0] = n\hat{h}[n]$

$\Rightarrow$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} n\hat{h}[n] - \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \hat{h}[k]\, a_{n-k} = n\, a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{h}[n] = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}[k]\, a_{n-k} + a_n}$$

Άσκηση 2.3

(α). <u>Θέλουμε</u>: $|H_d(e^{j\omega})| = 1$

$$\angle H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega \in (-\pi, 0) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \in (0, \pi) \end{cases}$$

<u>Άρα</u>: $\omega \in (-\pi, 0)$: $H_d(e^{j\omega}) = \pm 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\omega \in (0, \pi)$: $H_d(e^{j\omega}) = +1 \; e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\quad -1 = e^{j\pi} = e^{-j\pi}$ $\Rightarrow$

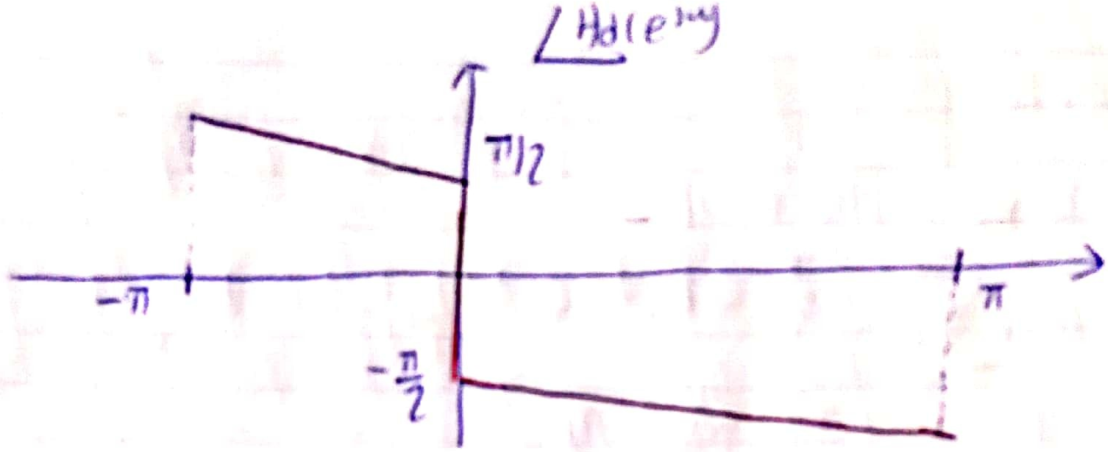
$= 1 \cdot e^{-j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = -1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow H_d(e^{j\omega}) = [1 - 2u(\omega)] \, e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$

<u>Προσθήκη καθυστέρησης τ</u>: $x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0}$

$$\Rightarrow \boxed{H_d(e^{j\omega}) = [1 - 2u(\omega)] \exp[j[\pi/2 - \tau\omega]], \omega \in (-\pi, \pi)}$$

<u>Απόκριση φάσης</u>: $$\angle H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tau\omega, & \omega \in (-\pi, 0) \\ -\frac{\pi}{2} - \tau\omega, & \omega \in (0, \pi) \end{cases}$$



(b) IDTFT $\quad h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}\, e^{j[\pi/2 - \tau\omega]}\,[1-2u(\omega)]\,d\omega$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j[\pi/2-\tau\omega]}\, e^{j\omega n}\, d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{j[\frac{\pi}{2}-\tau\omega]}\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\overset{e^{j\frac{\pi}{2}}=j}{=} \frac{j}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} e^{j\omega(n-\tau)}\,d\omega - \int_{0}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}\,d\omega\right]$$

$$= \frac{j}{2\pi}\left[\left[\frac{e^{j\omega(n-\tau)}}{j(n-\tau)}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{e^{j\omega(n-\tau)}}{j(n-\tau)}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-\tau)}\cdot\left\{2 - e^{-j\pi(n-\tau)} - e^{j\pi(n-\tau)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-\tau)}\left\{2 - 2\cos[\pi(n-\tau)]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h_d[n] = \begin{cases} \dfrac{1-\cos[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, & n \neq \tau \\ 0, & n = \tau \end{cases}}$$

Γραμμική φάση σε FIR σύστημα $\rightarrow$ Αντί-Συμμετρία συντελεστών φίλτρου (εκτός απτον συντελεστή για $n=\tau$).

<u>Επιλέγουμε $\tau = M/2$:</u>

$$h_d[0] = \frac{1-\cos[\pi M/2]}{-\pi \frac{M}{2}}$$

$$h_d[M] = \frac{1-\cos[\pi M/2]}{\pi M/2}$$

$h_d[0] = -h_d[M]$

ομοίως και για τα ζεύγη:

1 και $M-1$

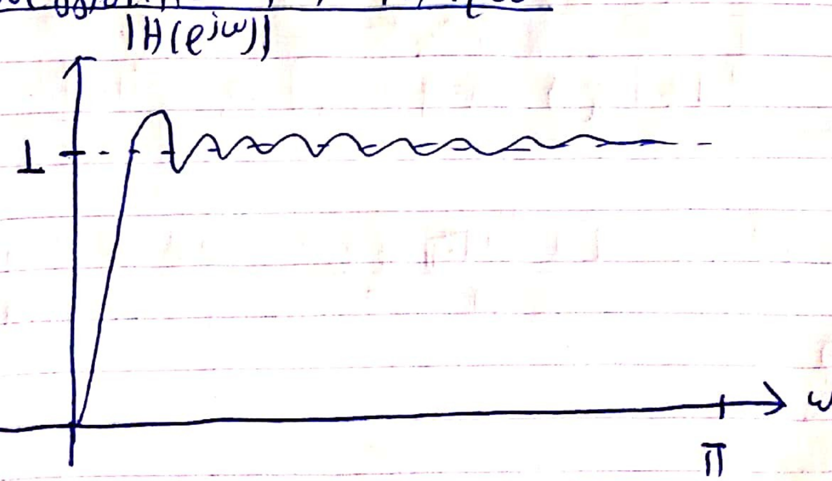
2 και $M-2$.

⋮

(γ) $M=21 \Rightarrow \boxed{\tau = 10.5 \text{ δείγματα. καθυστέρηση.}}$

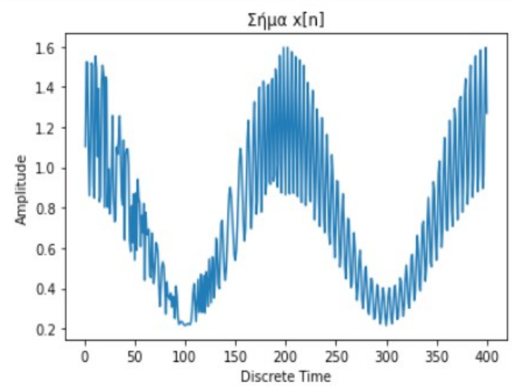
Παρατηρούμε ότι τ: μη-ακέραιος + 90° - Phase Shift $\Rightarrow$ FIR Φίλτρο τύπου IV.

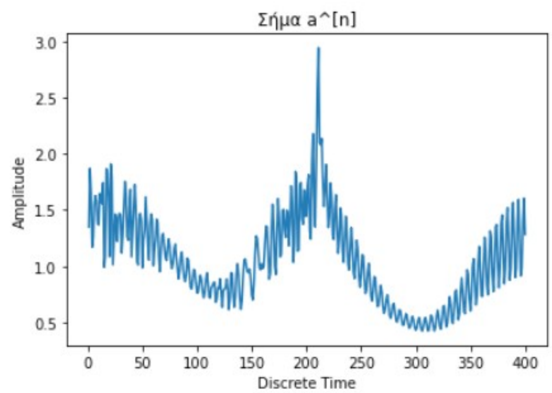
<u>Για το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του Προσεγγιστικού FIR Φίλτρου:</u>

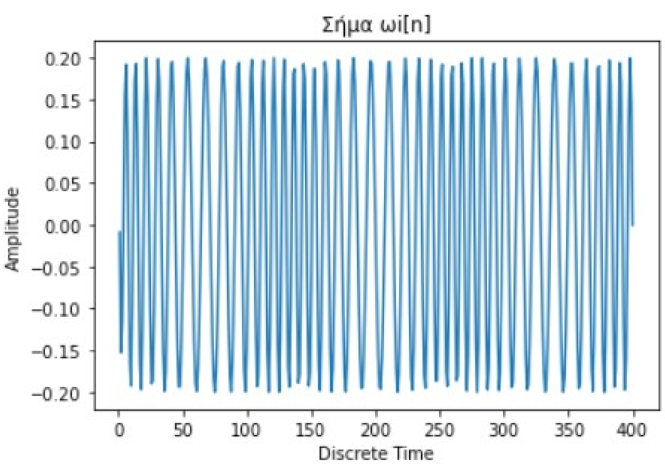


Άσκηση 2.3δ/Εφαρμογή:

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις:







Οι ζητούμενες % RMS τιμές των λαθών:

RMS(%) του λάθους a[n]-a^[n] είναι: 28.14509483865404 6 %

RMS(%) του λάθους ωi[n]-ωi^[n] είναι: 113.756214422530 7 %

Ο πηγαίος κώδικας:

In [1]:
```
import os
import numpy as np
import librosa
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import pywt
import sounddevice as sd
import soundfile as sf
import string
from scipy import signal
import sympy as sp
```

In [2]:
```
n=np.linspace(1,400,400) #skip to miden giati ginetai diairesi me 0 stin phi
M=21
t=M/2 #delay erwtimatos 2.3.B

a=1+0.6*np.cos(np.pi*n/100)
phi=np.cos((np.pi*n/5)+4*np.sin(3*np.pi/n*200))
x=a*np.cos(phi)
hd=(1-np.cos(np.pi*(n-t)))/(np.pi*(n-t)) #filtro erwtimatos 2.3.B
y=np.convolve(x,hd,mode='same') #eksodos filtrou

a_mom=(x**2+y**2)**(0.5) #mom==momentary=="^"
phi_mom=np.arctan(y/x)
wi_arith=(-np.sin((np.pi*n/5)+4*np.sin(3*np.pi*n/200))) * (10*n**2-3*np.pi*np.cos((3*np.pi*n)/(200)))
wi_paron=50*(n**2)
wi=wi_arith/wi_paron #paragwgos tis φ[n] (manually ypologismos typou)
phi_plus_1=[] #φ^[n+1]
phi_minus_1=[] #φ^[n-1]

for i in range(0,400):
    if(i==399):
        phi_plus_1.append(0)
        break
    else:
        phi_plus_1.append(phi_mom[i])
```

```
for i in range(0,400):
    if(i==0):
        phi_minus_1.append(0)
    else:
        phi_minus_1.append(phi_mom[i-1])

wi_mom=[]
for i in range(0,400):
    wi_mom.append((phi_plus_1[i]-phi_minus_1[i])/2)
#print(phi_plus_1)
```

```python
plt.plot(n,x)
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlabel("Discrete Time")
plt.title("Σήμα x[n]")
plt.show()

plt.plot(n,a_mom)
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlabel("Discrete Time")
plt.title("Σήμα a^[n]")
plt.show()

plt.plot(n,wi)
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlabel("Discrete Time")
plt.title("Σήμα ωi[n]")
plt.show()
```

```python
#rms values
def root_mean(in_array):
    in_array=np.asanyarray(in_array)
    ms = 0
    for i in range(0,len(in_array)):
        ms += (in_array[i])**2
    ms = ms / len(in_array)
    rms = np.sqrt(ms)
    return(rms)



a_error=a-a_mom
wi_error=wi-wi_mom
print("RMS(%) του λάθους a[n]-a^[n] είναι:", (root_mean(a_error)/root_mean(a))*100,"%")
print("RMS(%) του λάθους ωi[n]-ωi^[n] είναι:", (root_mean(wi_error)/root_mean(wi))*100,"%")
```