Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ. & Μ.Υ. ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ.Ετος 2020-**2021**
Ημερ/νια: 06-04-2021 **1ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 16-04-2021

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος `https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=16` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `dsp21_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 1.1: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5] + 2\delta[n-6] - 4\delta[n-7], \\ h[n] &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]. \end{aligned}$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 8-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγείστε.
(β) Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n]$, $h[n]$ και $y[n]$.
(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, ..., N-1$. Εξηγείστε.
(δ) Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζομε τις ακολουθίες

$$\begin{aligned} P[k] &= j^k X[k], \quad k = 0, ..., 7. \\ Q[k] &= \mathrm{Re}\{X[2k]\}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντιστρόφους DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο τις ιδιότητες του DFT:
(δ.1) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.
(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

Ασκηση 1.2: Για το ακόλουθο σύστημα αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας, σας δίνεται το σήμα εισόδου $x[n]$ και οι παράγοντες υπερδειγματοληψίας (interpolation) L και υποδειγματοληψίας (decimation) M, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1:

$$x[n] = \sin^2(\pi n/4)/(\pi n)^2, \quad L = 3, \ M = 5$$

(α) Να σχεδιάσετε τα φάσματα (DTFT) των σημάτων $x_e[n]$, $\tilde{x}_i[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(β) Να βρείτε το σήμα εξόδου $\tilde{x}_d[n]$. Εξηγήστε.

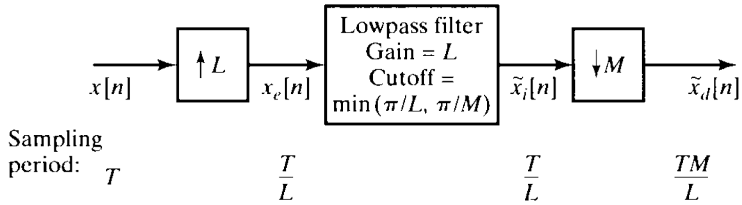

Figure 1: Παρεμβολή και Αποδεκατισμός σε διακριτό χρόνο.

Ασκηση 1.3: (Ψηφιακή Επεξεργασία Αναλογικών Σημάτων) Επιθυμούμε με την γνωστή διαδικασία Ψηφιακής Επεξεργασίας Αναλογικών Σημάτων (Σ/Δ -> ΔΧ ΓΧΑ σύστημα -> Δ/Σ) να σχεδιάσομε ένα διακριτού-χρόνου ΓΧΑ σύστημα τέτοιο ώστε η αναλογική έξοδος $y_c(t)$ να ισούται με την 2η χρονική παράγωγο της αναλογικής εισόδου $x_c(t)$:

$$y_c(t) = \frac{d^2 x_c(t)}{dt^2}$$

Αν τα αναλογικά σήματα εισόδου είναι ζωνοπεριορισμένα σε συχνότητες $|\omega| < \pi/T$ και η περίοδος δειγματοληψίας (για την Σ/Δ μετατροπή) είναι T, και το βαθυπερατό φίλτρο ανακατασκευής (για την Δ/Σ μετατροπή) είναι ιδανικό με κέρδος T και συχνότητα αποκοπής π/T, να βρεθούν αναλυτικά η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και η κρουστική απόκριση $h[n]$ του διακριτού ΓΧΑ συστήματος. Εξηγήστε την εργασία σας.

Ασκηση 1.4: (DCT)
(α) Έστω σήμα $x[n]$, και $X^{c2}[k]$ ο DCT-2 του. Να αποδειχθεί η σχέση ορισμού του αντίστροφου DCT-2:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] X^{c2}[k] \cos(\pi k(2n+1)/2N) \tag{1}$$

όπου

$$\beta[k] = \begin{cases} 1/2, & k = 0 \\ 1, & 1 \le k \le N-1 \end{cases} \tag{2}$$

εκκινώντας από τη σχέση μεταξύ του DFT 2N σημείων του $x[n], X_2[k]$, και του DCT-2:

$$X_2[k] = e^{(j\pi k/2N)} X^{c2}[k], k = 0, ..., N-1 \tag{3}$$

και την ιδιότητα συμμετρίας του DCT-2:

$$X^{c2}[2N-k] = -X^{c2}[k], k = 0, ..., 2N-1 \tag{4}$$

(β) Δίνεται το σήμα $y[n] = (0.8)^n \cos(0.15\pi n)$, $n = 0, 1, ..., 31$. Χρησιμοποιώντας κάποιο πακέτο λογισμικού (π.χ. την γλώσσα Python ή Matlab):
(β.1) Σχεδιάστε το σήμα $y[n]$.
(β.2) Υπολογίστε τον DFT 32 σημείων του σήματος, $Y[k]$ και σχεδιάστε το μέτρο του, σε γραμμική κλίμακα.
(β.3) Υπολογίστε τον DCT-2 32 σημείων του σήματος, $Y^{c2}[k]$ και σχεδιάστε το μέτρο του, σε γραμμική κλίμακα.
(β.4) Ορίζουμε τα σήματα:

$$y_M[n] = \frac{1}{32} \sum_{k=0}^{M} Y[k] e^{j2\pi kn/32} + \frac{1}{32} \sum_{k=32-M}^{31} Y[k] e^{j2\pi kn/32}, M = 0, ..., 15 \tag{5}$$

και:

$$y_{cM}[n] = \frac{1}{32}\sum_{k=0}^{M}\beta[k]Y^{c2}[k]\cos(\pi k(2n+1)/64), M = 0, ..., 30 \quad (6)$$

που αποτελούν ελλιπείς ανακατασκευές του σήματος $y[n]$ με χρήση $2M+1$ DFT συντελεστών και M DCT συντελεστών αντίστοιχα και η $\beta[k]$ ορίζεται όπως στο (1.4α). Υπολογίστε και σχεδιάστε, σε κοινό διάγραμμα, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (σφάλμα ανακατασκευής) μεταξύ του σήματος $y[n]$ και των σημάτων $y_M[n]$ και $y_{cM}[n]$ αντίστοιχα, ως συνάρτηση του πλήθους συντελεστών που έχουμε χρησιμοποιήσει. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας. Εξηγήστε την εργασία σας και συμπεριλάβετε και τον κώδικα.

Ασκηση 1.5:

(α) Διακριτός Short-time Fourier Transform (STFT)

Να αποδειχθεί το Θεώρημα 4.2 στην ενότητα 4.2.3 του Κεφ.4 στο βιβλίο [3], το οποίο αφορά τον **διακριτό STFT**. Το θεώρημα αυτό ισχυρίζεται ότι:

(α.1) Αν υπολογίσουμε τον STFT ενός διακριτού σήματος $f[n]$ διακριτοποιώντας την χρονική μεταβλητή και την συχνότητα (μεσω DFT), μπορούμε από τον να ανακατασκευάσουμε πλήρως το αρχικό σήμα. **(α.2)** Επίσης η ενέργεια του αντιστοίχου φασματογραφήματος (spectrogram) ισούται με την ενέργεια του σήματος.

(β) Multiresolution Analysis, Wavelets: Θεωρούμε την scaling function ϕ του Haar κυματιδίου:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(β.1) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός στο άρθρο [2]=[Mallat, 1989]

$$h[n] = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle$$

όπου $\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t)\overline{g(t)}dt$ και $f_s(t) = s \cdot f(s \cdot t)$, καταλήγει στο βαθυπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1])/2$$

(β.2) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός της Εξ.(19) στο άρθρο [2]

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2), \quad G(\omega) = e^{-j\omega}\overline{H(\omega-\pi)},$$

όπου $\hat{\psi}(\omega) = \int \psi(t)e^{-j\omega t}dt$, $H(\omega) = \sum_n h[n]e^{-j\omega n}$, και $\overline{(\cdot)}$ συμβολίζει μιγαδικό συζυγή, καταλήγει στο mother wavelet ψ

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1/2 \\ +1, & 1/2 \le t < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Σημ.: Οι Fourier μετ/σμοί $\hat{\phi}(\omega), \hat{\psi}(\omega)$ συνεχούς χρόνου εμφανίζονται ως συναρτήσεις της 'ψηφιακής' συχνότητας ω γιατί υποθέτομε περίοδο δειγματοληψίας $T = 1$.

(β.3) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός της Εξ.(27) στο άρθρο [2]

$$g[n] = \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle$$

καταλήγει στο υψιπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$g[n] = (-\delta[n] + \delta[n-1])/2$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και μέσω της Εξ.(29) στο άρθρο [2].
(β.4) Στο διακριτό σήμα $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας με τις ακόλουθες τιμές:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x[n]$	8	2	5	-3	-1	9	7	5	9	3	2	-2	-6	4	0	6

να εφαρμόσετε τον Haar Discrete Wavelet Transform για Multiresolution Decomposition ώστε να αναλυθεί το αρχικό σήμα $A_0 = x[n]$ σε ένα δέντρο από διαδοχικά σήματα Προσέγγισης (Approximation) A_j και Λεπτομέρειας (Detail) D_j σε resolutions 2^{-j}, $j = 1, 2, ..., J$, όπως στο Σχήμα 5 του άρθρου [2], όπου αν N είναι ο αριθμός δειγμάτων του αρχικού σήματος $A_0 = x[n]$, με τον όρο resolution 2^{-j} εννοούμε ότι ο αντίστοιχος αριθμός δειγμάτων είναι $N2^{-j}$. Δηλ. να βρεθούν αριθμητικά τα σήματα $A_1, D_1, A_2, D_2, ..., A_J, D_J$ όπου καθώς αυξάνει το j υποδιπλασιάζεται το resolution σε κάθε επόμενο επίπεδο, και τα τελικά σήματα προσέγγισης A_J, D_J αποτελούνται το καθένα μόνο από ένα δείγμα. Εξηγήστε.
(β.5) Να δείξετε αριθμητικά (με όλα τα ενδιάμεσα βήματα) την διαδικασία σύνθεσης, όπως στο Σχήμα 7 του άρθρου [2], δηλ. πως από τα σήματα $A_1, D_1, A_2, D_2, ..., A_J, D_J$ του (β.4) μπορεί να ανακατασκευασθεί το αρχικό σήμα $x[n]$. Εξηγήστε.

Wavelet References:

[1] I. Daubechies, “The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Information Theory, Sep. 1990.

[2] S. Mallat, “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans. PAMI, July 1989.

[3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Acad.Press, 1999, Κεφ.4.

[4] Διαφάνειες Διαλέξεων.