# Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ

## Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων
## 1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

**1)Όνομα:** Σερλής Εμμανουήλ Αναστάσιος
**2)Αριθμός Μητρώου:** el18125
**3) Εξάμηνο:** 6ο
**4) Ακαδημαϊκό έτος:** 2020-2021
**5)Email:**manosanastassis@hotmail.com

**Άσκηση 1.1** (a) Ισχύει ότι: $y[n] \xleftrightarrow{DFT} Y[k]=X[k]\cdot H[k]$

και

$x_1[n] \circledast x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k]\, X_2[k]$

$\xrightarrow{IDFT} \Rightarrow y_c[n]= x[n] \; (10) \; h[n] \Rightarrow$ Κυκλική συνέλιξη 10 σημείων

Υπολογισμός Κυκλικής Συνέλιξης:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ x[n]= [ & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & 2 & -4 \; ] \end{array} \Rightarrow 8 \text{ σημεία}$$

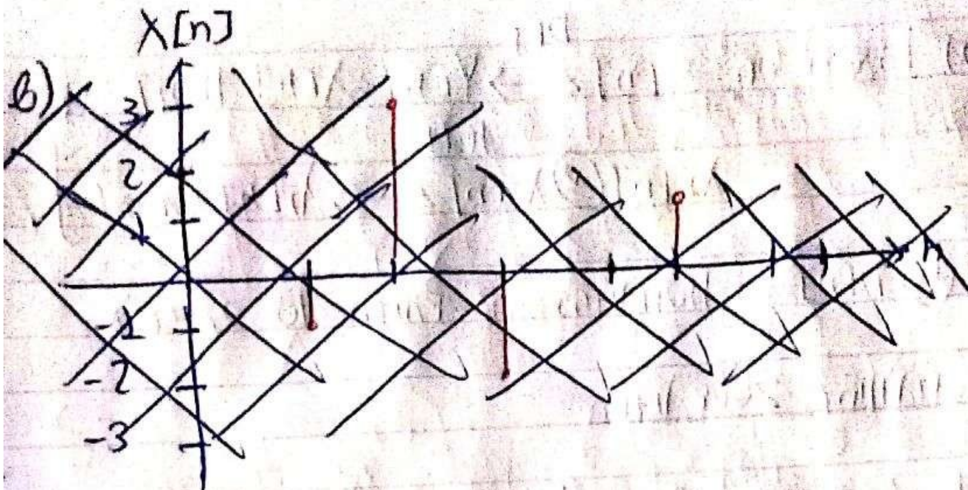
$h[n]= [1 \; -2 \; 1] \Rightarrow 3$ σημεία

zero pad. $\longrightarrow h_z[n] = [1 \; -2 \; 1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0] \Rightarrow 8$ σημεία

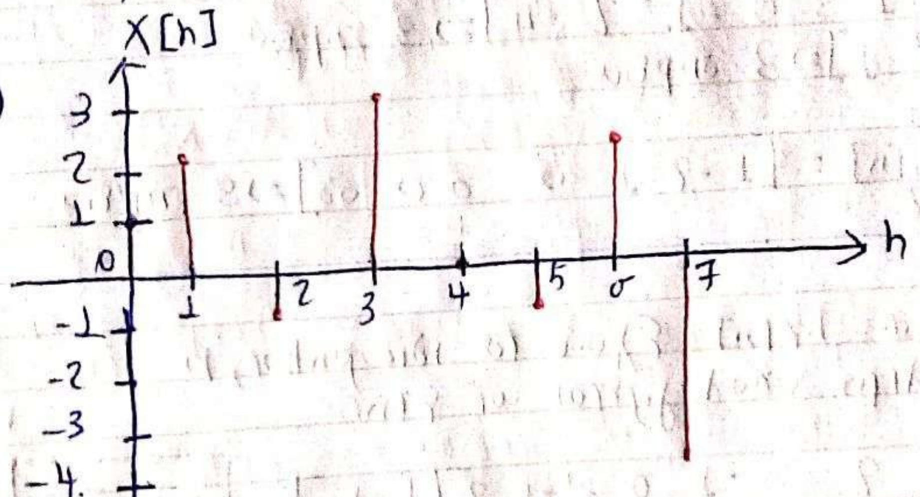
Αφού $x[n]$ και $h_z[n]$ έχουν το ίδιο μήκος, η κυκλική συνέλιξη υπολογίζεται ως εξής:

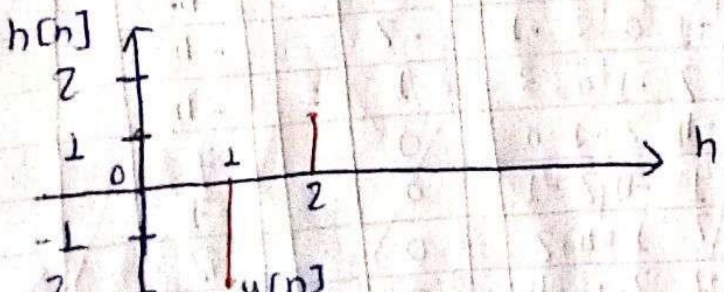
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{x[n]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{h_z[n]} = \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ -4 \\ 7 \\ -7 \\ 2 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}}_{y_c[n]}}$$

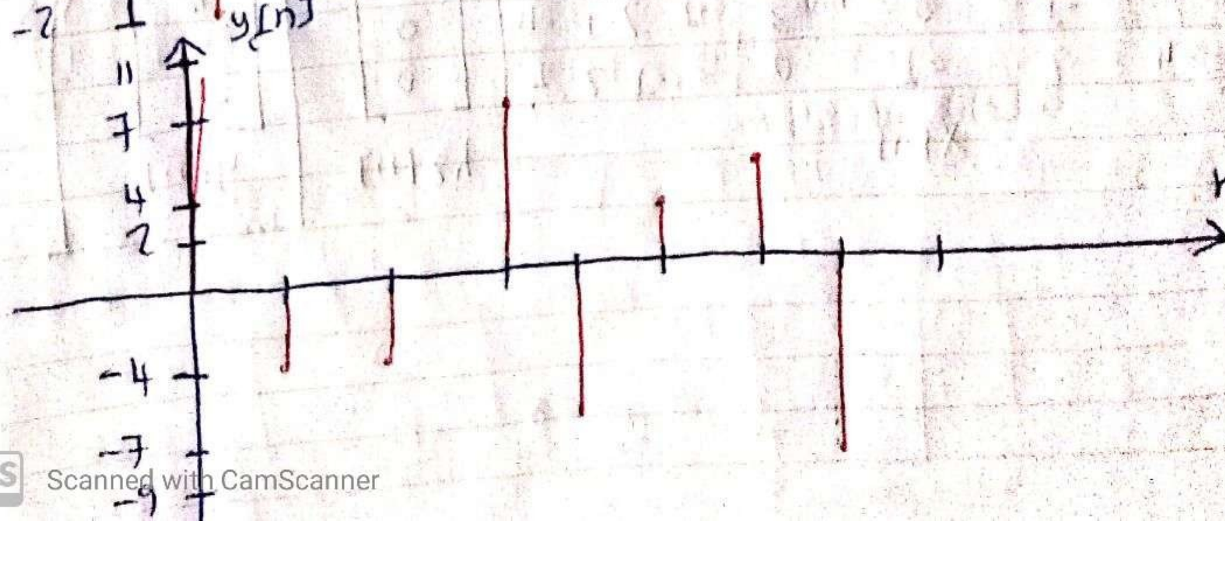
B)




(B)



(γ) Γνωρίζουμε ότι η κυκλική συνέλιξη περιόδου $N$ αντιστοιχεί σε ~~κυκλική~~ αναδιπλωμένη γραμμική συνέλιξη. Η ταύτιση των 2 συνελίξεων έρχεται όταν το μήκος της κυκλικής είναι τουλάχιστον ίσο με αυτό της γραμμικής:

$$N \ge len(x) + len(h) - 1 \Rightarrow N \ge 8+3-1 \Rightarrow \boxed{N \ge 10}$$

Με αυτόν τον τρόπο, δεν υπάρχει συγκάλυψη καμμίας εκ των δεξιά και αριστερών μετατοπίσεων με την μη μετατοπισμένη

<u>Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης</u> $y_l[n] = h[n] * x[n]$

| h[n] \ x[n] | 1 | 2 | -1 | 3 | 0 | -1 | 2 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | 3 | 0 | -1 | 2 | -4 |
| -2 | -2 | -4 | 2 | -6 | 0 | 2 | -4 | 8 |
| 1 | 1 | 2 | -1 | 3 | 0 | -1 | 2 | -4 |

$$\boxed{y_l[n] = [1, 0, -4, 7, -7, 2, 4, -9, 10, -4]}$$


Παρατηρούμε ότι οι $y_c$ και $y_l$ ταυτίζονται με εξαίρεση τα 2 πρώτα και τα 2 τελευταία σημεία της $y_l$, στα οποία οι μετατοπίσεις συμπίπτουν με την μη μετατοπισμένη ακολουθία (δ1) $P[k] = j^k X[k] = j^k [\mathrm{Re}\{X[k]\} + j\,\mathrm{Im}\{X[k]\}]$

$= \underbrace{j^k \mathrm{Re}\{X[k]\}}_{A} + \underbrace{j^{k+1}\mathrm{Im}\{X[k]\}}_{B}$, με

Για το A: $A[k] = \mathrm{Re}\{X[k]\} \xleftrightarrow{IDFT} \frac{1}{2}[x[n] + x^*[((-n))_N]]$

$= \frac{1}{2}\{x[n] + x[8-n]\} = a[n]$

Άρα: $(j)^k A[k] = \exp\left\{\frac{4j\pi k}{8}\right\} \cdot A[k] \xleftrightarrow{IDFT} a[((n+2))_8]$ (1), $n \in [0,7]$

Για το B: $j^{k+1}\mathrm{Im}\{X[k]\} = j^k \cdot j \cdot \mathrm{Im}\{X[k]\}$

$B[k] = j \cdot \mathrm{Im}\{X[k]\} \xleftrightarrow{IDFT} \frac{1}{2}[x[n] - x[8-n]] = b[n]$

Άρα: $(j)^k B[k] = \exp\left\{\frac{4j\pi k}{8}\right\} B[k] \xleftrightarrow{IDFT} b[((n+2))_8]$ (2)

Σύνολο: 
$$\boxed{\begin{aligned} &p[n] \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} a[((n+2))_8] + b[((n+2))_8], \text{ με} \\ &a[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[8-n]\},\ n\in[1,7] \text{ και } a[0] = x[0] \\ &b[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[8-n]\},\ n\in[1,7] \text{ και } b[0] = 0 \end{aligned}}$$

(δ2) $Q[k] = \mathrm{Re}\{X[2k]\}$, $k \in [0,3]$

Ορίζουμε: $X_2[k] = X[2k]$ και $x_2[n] \longleftrightarrow X_2[k]$

Το $x_2[n]$ προκύπτει με περιοδική αναδίπλωση του $x[n]$ $(N=4)$

: $x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-4k],\ n\in[0,3]$

Άρα: $Q[k] = \mathrm{Re}\{X_2[k]\} \xleftrightarrow{IDFT} q[n] = \frac{x_2[(n)_4] + x_2^*[(-n)_4]}{2j}$

$$\Rightarrow \boxed{q[n] = \frac{x_2[n] + x_2[4-n]}{2},\ \text{με } x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-4k]}$$

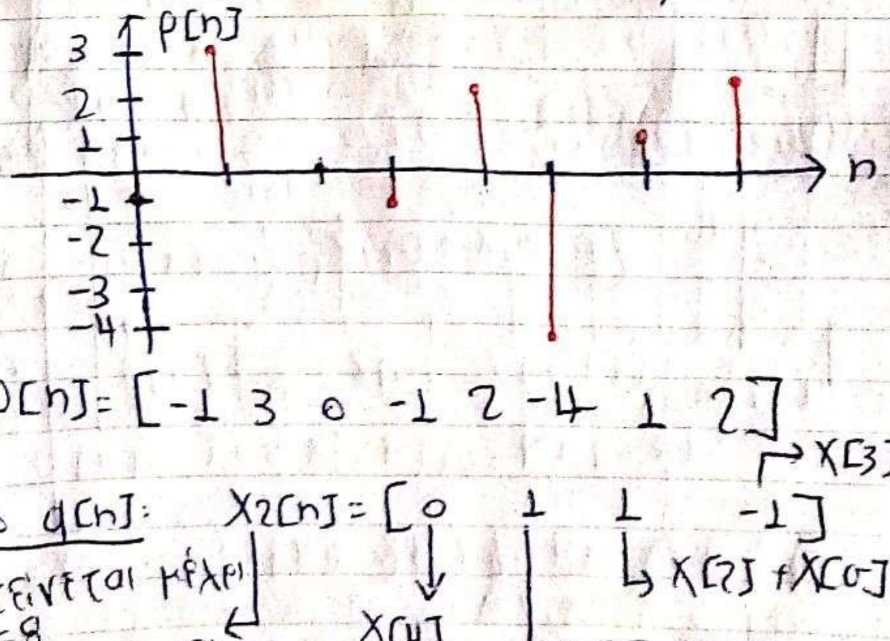
↳ $n\in[1,3]$ και $q[0] = x_2[0]$

Υπολογισμός και σχεδιασμός των $q[n]$, $p[n]$:

Για το $p[n]$:

$a[n] = [1\ \ -1\ \ 0.5\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0.5\ \ -1]$

$b[n] = [0\ \ 3\ \ -1.5\ \ 2\ \ 0\ \ -2\ \ 1.5\ \ -3]$ } (*)



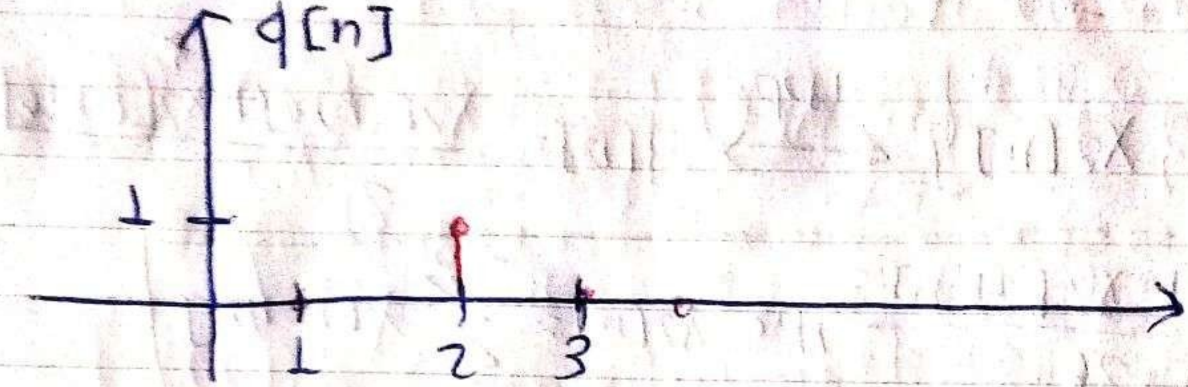

(*) $p[n] = [-1\ \ 3\ \ 0\ \ -1\ \ 2\ \ -4\ \ 1\ \ 2]$

Για το $q[n]$: $x_2[n] = [0\ \ 1\ \ 1\ \ -1]$

$0 \to x[4]$, $1 \to x[1]+x[5]$, $1 \to x[2]+x[6]$, $-1 \to x[3]+x[7]$

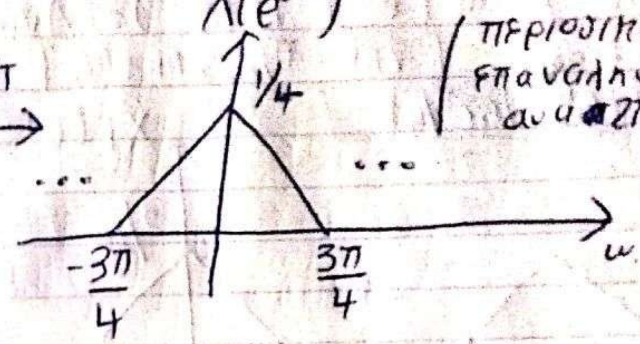
Επεκτείνεται μέχρι $n=8$. Εδώ μας νοιάζει για $n\in[0,3]$.

$$\boxed{q[n] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]}$$

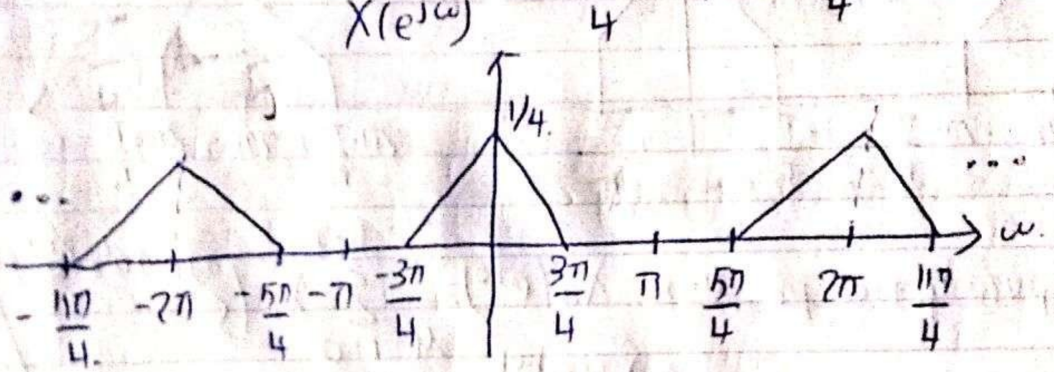


$\boxed{\text{Άσκηση 1.2}}$

$$x[n] = \frac{\sin^2(\pi n/4)}{(\pi n)^2} \xleftrightarrow{DTFT}$$

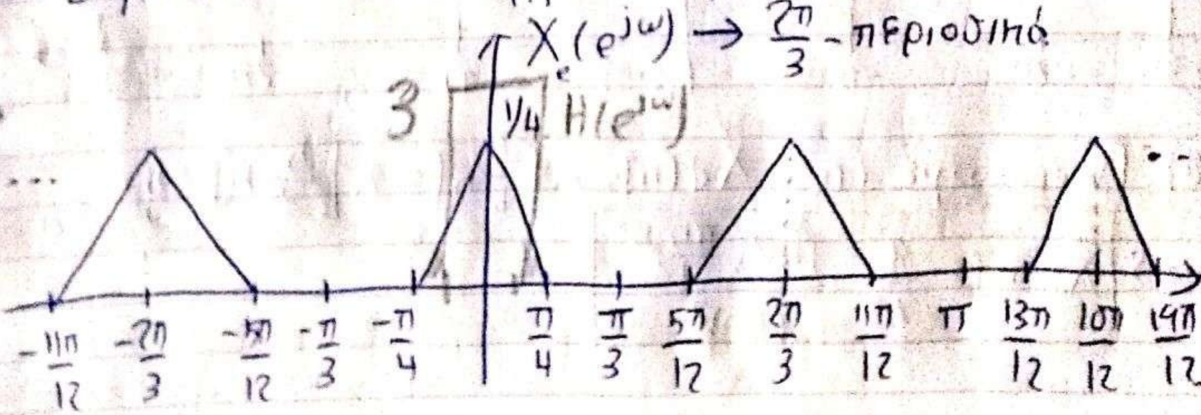



(περιοδική επανάληψη ανά 2π)

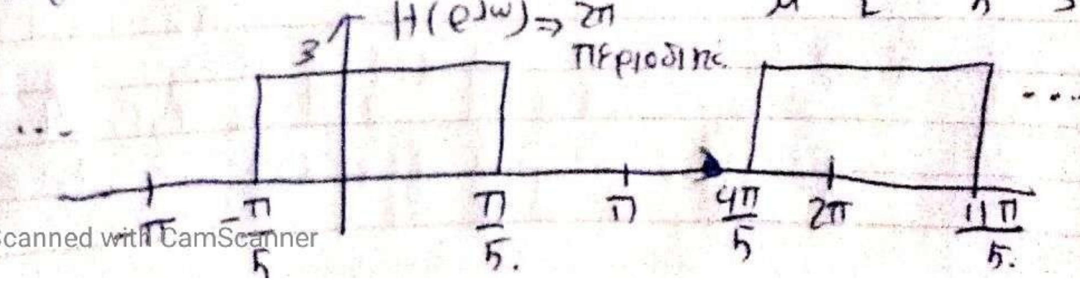



<u>Υπερδειγματοληψία με L=3:</u> $X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) = X(e^{3j\omega}) \Rightarrow$

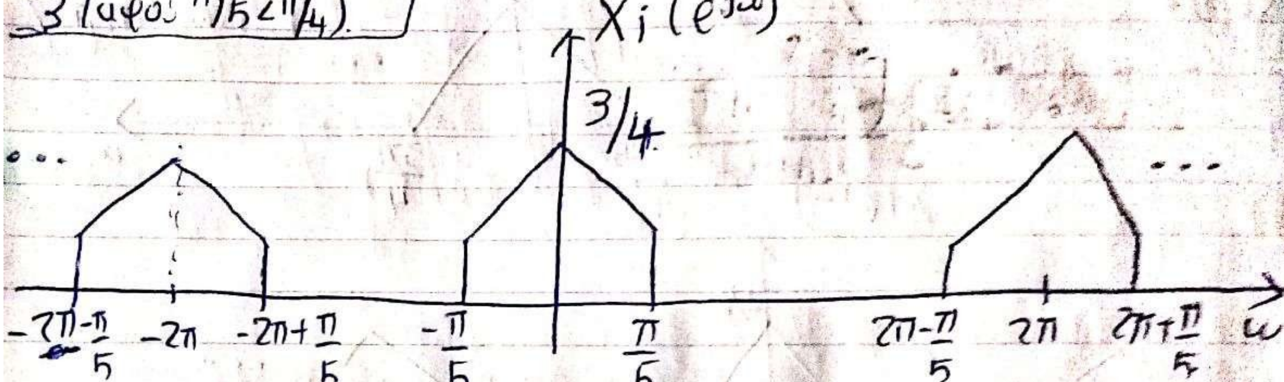
$\Rightarrow$ "Συμπίεση" του αρχικού σήματος κατά L=3.



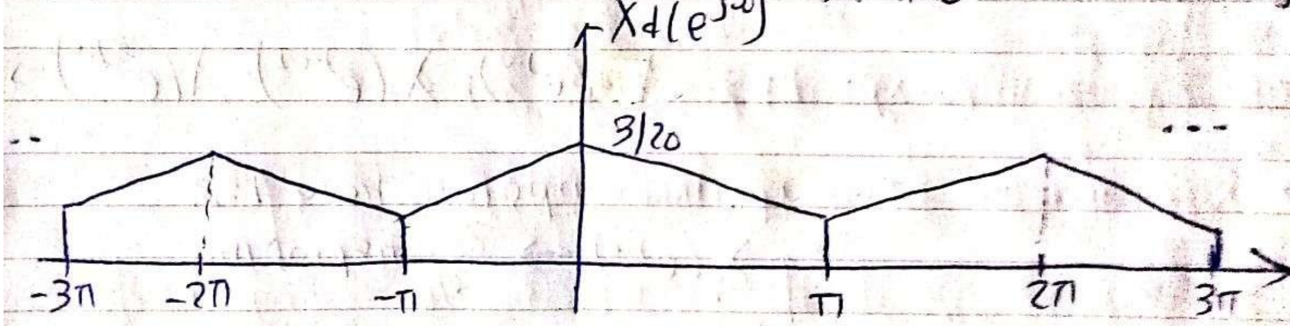

<u>Πέρασμα από βαθυπερατό φίλτρο:</u> $\frac{\pi}{M} < \frac{\pi}{L} \Rightarrow \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{3}$



$\tilde{X}_i(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow$ Ανά $2\pi$, μένει η φασματική περιοχή $[2\pi k - \pi/5, 2\pi k + \pi/5]$, πολλαπλασιασμένη με 3 (αφού $\pi/5 < \pi/4$).



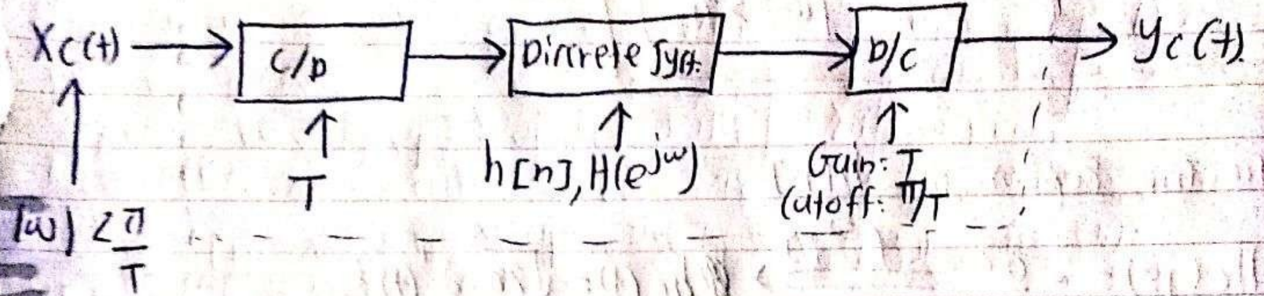

Υποδειγματοληψία με $M=5$: $\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{r=0}^{M-1} \tilde{X}_i\left(e^{j(\omega/M - \frac{2\pi r}{M})}\right)$




(ε) Γνωρίζουμε ότι $\tilde{x}_d[n] = x[\frac{M}{L}n] = x[\frac{5}{3}n] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{x}_d[n] = \frac{9}{25}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n \cdot 5}{12}\right)}{(\pi n)^2}}$$

Άσκηση 13 Το ζητούμενο σύστημα:




Για το αναλογικό σύστημα (σαν σύνολο):

$$y_c(t) = \frac{d^2 x_c(t)}{dt^2} \xrightarrow[s=j\Omega]{\text{Laplace}} Y_c(j\Omega) = (j\Omega)^2 X_c(j\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_c(j\Omega) \triangleq \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = -\Omega^2 \quad (1)$$

Όσον αφορά το θεώρημα δειγματοληψίας:

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_m, \text{ με: } \omega_m = \frac{1}{T} \text{ (από το C/D σύστημα)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \geq \frac{2}{T} \Rightarrow \pi \geq 1,$$ που ισχύει ⇒ Καλύπτεται το θεώρημα δειγματοληψίας

Από θεωρία διαφανειών ("Δειγματοληψία και ψηφιακή επεξεργασία αναλογικών σημάτων": Διαφ. 18-24) και εφόσον καλύπτεται το θεώρημα δειγματοληψίας ισχύει ότι:

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \xrightarrow[\omega = \Omega T]{(1)}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\dfrac{\omega^2}{T^2}, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}}$$

Για την εύρεση του $h[n]$:

$$\left.\begin{aligned} H_c(j\Omega) = -\Omega^2 \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} h_c(t) &= \sqrt{2\pi}\,\delta''(t) \\ \text{και} \\ h[n] &= T \cdot h_c(nT) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h[n] = T\sqrt{2\pi}\cdot \delta''(nT)}$$

**Άσκηση 1.4.**

Μιας και διαθέτουμε τον DFT 2N σημείων $X_2[k]$, για να μεταβούμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα (1), πρέπει να εφαρμόσουμε IDFT 2N σημείων. Κατ'επέκταση, οφείλουμε να επεκτείνουμε την σχέση (3) για 2N σημεία, κάτι που θα πραγματοποιηθεί μέσω της σχέσης (4):

$$X_2[k] = \begin{cases} \exp\left(\frac{j\pi k}{2N}\right) \cdot X^{c2}[k], & k \in [0, N-1] \\ -X^{c2}[2N-k] \cdot \exp\left(\frac{j\pi k}{2N}\right), & k \in [N, 2N-1] \end{cases} \quad (5)$$

IDFT 2N σημείων

$$x_2[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} X^{c2}[k] \cdot \exp\left(\frac{j\pi k}{2N}\right) \exp\left(\frac{j2\pi k n}{2N}\right) \overset{(5)}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{2N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} X^{c2}[k] \exp\left(\frac{j\pi k}{2N}\right) \exp\left(\frac{j\pi k 2n}{2N}\right) \underbrace{- \sum_{k=N}^{2N-1} X^{c2}[2N-k] \exp\left(\frac{j\pi k}{2N}\right) \exp\left(\frac{j\pi k 2n}{2N}\right)}_{B} \right\}$$

Για το B: $2N-k=\lambda \Rightarrow k = 2N-\lambda \Rightarrow \lambda \in [N,1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = -\sum_{\lambda=N}^{1} X^{c2}[\lambda] \exp\left[\frac{j\pi(2N-\lambda)}{2N}\right] \exp\left[\frac{j2\pi(2N-\lambda)n}{2N}\right]$$

$$B = -\sum_{\lambda=1}^{\nu} X^{C2}[\lambda] \exp\left[j\pi + j2\pi n\right] \cdot \exp\left[\frac{-j\pi\lambda(1+2n)}{2\nu}\right]$$

$$\overset{\|}{-1}$$

Note: Για $\lambda = \nu$: $X^{C2}[2\nu - \nu] = -X^{C2}[\nu]$, από (4)

$\Rightarrow X^{C2}[\nu] = 0 \Rightarrow \lambda \in [1, \nu-1]$

Συνολικά, έχουμε:

Για $k=0$: $B=0 \Rightarrow \boxed{X_2[n] = \frac{1}{2\nu} X^{C2}[0] \cdot 1 \cdot 1}$

Για $k \in [1, \nu-1]$:

$$X_2[n] = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{k=1}^{\nu-1} X^{C2}[k] \cdot \frac{\exp\left(\frac{j\pi k}{2\nu}\right)\cdot\exp\left(\frac{j2\pi nk}{2\nu}\right) + \exp\left(-\frac{j\pi k}{2\nu}\right)\exp(\cdot)}{2}\right.$$

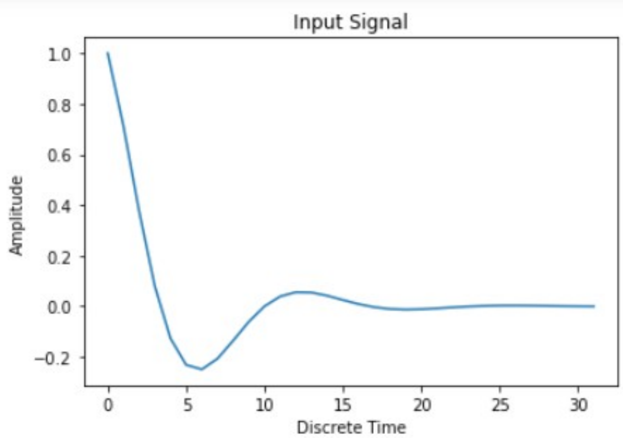
$$\Rightarrow \boxed{X_2[n] = X[n] = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{k=1}^{\nu-1} X^{C2}[k] \cdot \cos\left[\frac{\pi k}{2\nu}(2n+1)\right]\right.}$$

Ισοδύναμα: Γράφουμε $x[n]$ αντί για $x_2[n]$, αφού έγινε μετατροπή σε $[0, \nu-1]$ (αντί για $[0, 2\nu-1]$)

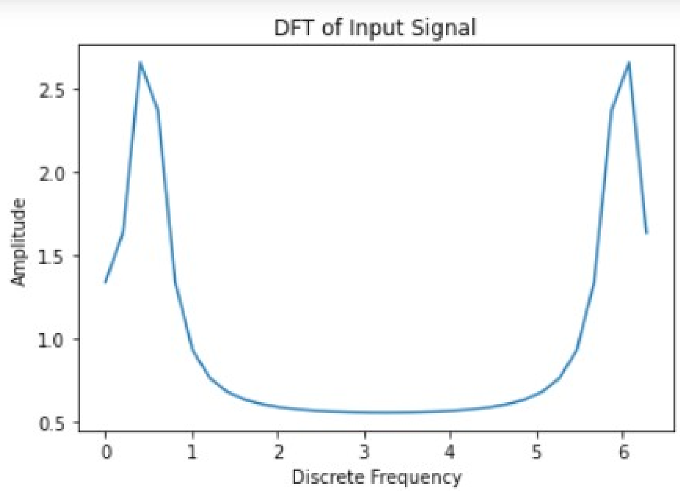
$$\boxed{X[n] = \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} \beta[k] \cdot X^{C2}[k] \cdot \cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2\nu}\right], \text{ με: } \beta[k] = \begin{cases} 1/2, & k=0 \\ 1, & 1 \le k \le \nu-1 \end{cases}}$$

<u>Άσκηση 1.4(συνέχεια):</u>

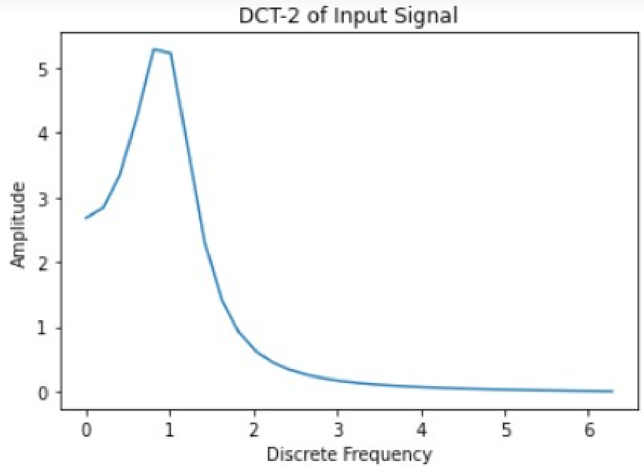
(β1) Το ζητούμενο σήμα




(β2) Ο ζητούμενος DFT 32 σημείων

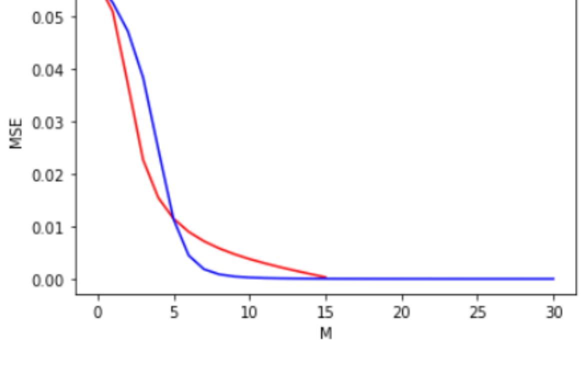



(β3) Ο ζητούμενος DCT 32 σημείων




Παρατηρούμε ότι-σε αντίθεση με τον DFT-ο DCT-2 δίνει παραπάνω έμφαση στο χαμηλό συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος, μιας και στην σχέση ορισμού του διαθέτει συνημίτονο. Το γεγονός αυτό τον καθιστά χρήσιμο σε εφαρμογές που σχετίζονται με επεξεργασία ήχου/ομιλίας, όπου εστιάζουμε παραπάνω στις χαμηλές συχνότητες. Απεναντίας, ο DFT παραθέτει το ολικό φασματικό περιεχόμενο, εξού και η ευρύτητα των εφαρμογών όπου χρησιμοποιείται.

(β4) Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις (ενοποιημένες):



Παρατηρούμε ότι-και στις δύο περιπτώσεις- αύξηση του αριθμού των δειγμάτων M συνεπάγεται μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος(MSE) και κατ’επέκταση όλο και καλύτερη προσέγγιση του σήματος εισόδου από τις ελλιπείς ανακατασκευές του ym και ycm.

<u>Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε:</u>

In [1]:
```
import os
import numpy as np
import librosa
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import pywt
import sounddevice as sd
import soundfile as sf
import string
from scipy import signal
```

In [2]:
```
#A

n=np.linspace(0,31,32)
print(n)
y=((0.8)**n)*(np.cos(0.15*np.pi*n))
plt.plot(n,y)
plt.xlabel('Discrete Time')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Input Signal')
plt.show()
```

In [3]:
```
#B

Y1=np.fft.fft(y)
w1=np.linspace(0,2*np.pi,32)
plt.plot(w1,Y1)
plt.xlabel('Discrete Frequency')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('DFT of Input Signal')
plt.show()
```

In [4]:
```
#C

Y2= sp.fftpack.dct(y, type=2)
plt.plot(w1,Y2)
plt.xlabel('Discrete Frequency')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('DCT-2 of Input Signal')
plt.show()
```

In [10]:
```
def mse(actual, pred):
    actual, pred = np.array(actual), np.array(pred)
    return np.square(np.subtract(actual,pred)).mean()

mse_ym=np.zeros(16)
for M in range (0,16):
    ym_k1=np.zeros(32)
    ym_k2=np.zeros(32)
    for k1 in range(0,M+1):
        np.add(ym_k1,1/32*Y1[k1]*np.exp(1j*np.pi*k1*n/16),out=ym_k1,casting="unsafe")
    for k2 in range(32-M,32):
        np.add(ym_k2,1/32*Y1[k2]*np.exp(1j*np.pi*k2*n/16),out=ym_k2,casting="unsafe")
    ym_2=ym_k1+ym_k2
    result=mse(y,ym_2)
    mse_ym[M]=abs(result)

print(mse_ym)
nm=np.linspace(0,15,16)
plt.plot(nm,mse_ym,'r')
plt.xlabel('M')
plt.ylabel('MSE')
plt.title('MSE after comparison of ym-y(blue)and ycm-y(red)')
#plt.show()

mse_ycm=np.zeros(31)
for M in range (0,31):
    ycm=np.zeros(32)
    for k3 in range(0,M+1):
        if(k3==0):
            np.add(ycm,1/32*Y2[k3]*0.5*np.cos(np.pi*k3*(2*n+1)/64),out=ycm,casting="unsafe")
        else:
            np.add(ycm,1/32*Y2[k3]*1*np.cos(np.pi*k3*(2*n+1)/64),out=ycm,casting="unsafe")
    result=mse(y,ycm)
    mse_ycm[M]=abs(result)

print(mse_ycm)
ncm=np.linspace(0,30,31)
plt.plot(ncm,mse_ycm,'b')
plt.xlabel('M')
plt.ylabel('MSE')
plt.title('MSE after comparison of ym-y(red)and ycm-y(blue)')
plt.show()
```

Άσκηση 1.5.

(β.1) $h[n] = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{2^{-1}}(t)\, \phi^{*}(t-n)\, dt \underset{\phi(t)\in\mathbb{R}}{=}$

$\xrightarrow[\phi^{*}(t)=\phi(t)]{f_r(t)=r\cdot f(rt)} 2^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^{-1}t)\cdot \phi(t-n)\, dt =$

$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t/2)\cdot \phi(t-n)\, dt$, με:

$\phi(t/2) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ και $\phi(t-n) = \begin{cases} 1, & n \le t \le n+1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

<u>n=0</u>: $h[0] = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} 1\cdot 1\, dt = 1/2$

<u>n=1</u>: $h[1] = \frac{1}{2} \int_{1}^{2} 1\cdot 1\, dt = 1/2$

<u>n>1</u>: $h[n] = 0 \Rightarrow$ κανένα διάστημα $[t_1, t_2]$ όπου $(\phi(t/2) \neq 0) \cap (\phi(t-n) \neq 0)$

<u>Τελικά</u>: $\boxed{h[n] = \frac{1}{2}\left[\delta[n] + \delta[n-1]\right]}$

(β2) <u>Από (β1)</u>: $H(\omega) = h[0] + h[1] e^{-j\omega}$, αφού

$\delta[n] \leftrightarrow 1$ και $x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0}$

$H(\omega-\pi) = h[0] + h[1]\, e^{-j\omega} \cdot \underbrace{e^{j\pi}}_{-1} = h[0] - h[1]\, e^{-j\omega}$

$$\overline{H(\omega-\pi)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{j\omega}$$

Άρα: $G(\omega) = e^{-j\omega}\,\overline{H(\omega-\pi)} = \left[e^{-j\omega} - 1\right]\frac{1}{2} \xrightarrow[T=1]{\omega = \theta\cdot T}$

$$\Rightarrow G(\theta/2) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{j\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \xrightarrow[x(t-t_0)\xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(\omega)]{x(at)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\theta}{a}\right)}$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$2g(2t) = -\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t-1/2)$$

Επίσης: $\phi(t) \xleftrightarrow{F} \hat{\phi}(\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(\omega/2) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{4\sin(\omega/2)}{\omega} \xleftrightarrow{IF}$$

$$\xleftrightarrow{IF} 2\phi(2t) = \begin{cases} 2, & t\in[0,1/2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = b(t)$$

~~⇒ φ(2t) = 1, 0 ≤ t ≤ 1/2 ; 0, αλλού~~

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega/2)\,\hat{\phi}(\omega/2) \xleftrightarrow{IF} \psi(t) = a(t) * b(t)$$

$$\xrightarrow[x(t)*\delta(t-T) = x(t-T)]{} \psi(t) = -\frac{1}{2}b(t) + \frac{1}{2}b(t-1/2)$$

$$\boxed{\Rightarrow \psi(t) = \begin{cases} -1, & t\in[0,1/2] \\ 1, & t\in[1/2,1] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}}$$

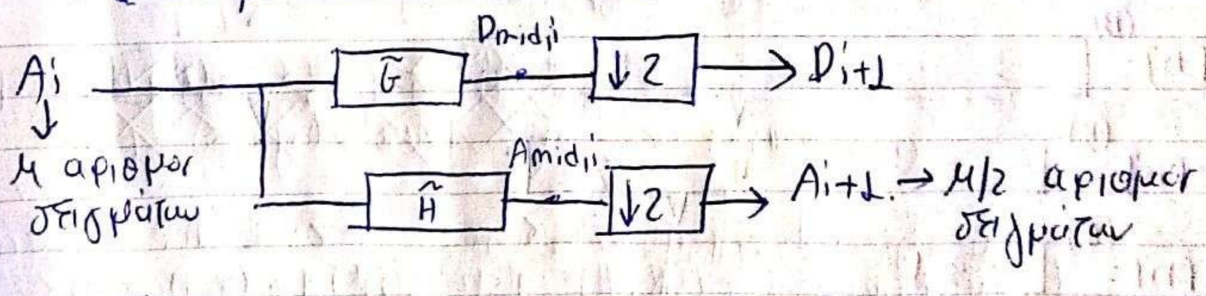
(β3) Όμοιως με απόδειξη του (β1)

$$g[n]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\,\psi(t/2)\,\phi^*(t-n)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t/2)\,\phi(t-n)\,dt,\ \text{με}$$

$$\psi(t/2)=\begin{cases}-1, & 0\le t\le 1\\ +1, & 1\le t\le 2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\quad \text{και}\quad \phi(t-n)=\begin{cases}1, & n\le t\le n+1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\underline{n=0}:\ g[0]=-1/2\\ &\underline{n=1}:\ g[1]=1/2\\ &\underline{n>1}:\ g[n]=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{g[n]=\frac{1}{2}\left[-\delta[n]+\delta[n-1]\right]}$$

(β4) Σύστημα αποσύνθεσης




με: $\tilde{g}[n]=g[-n]=\frac{1}{2}\left[-\delta[-n]+\delta[-n-1]\right]=\frac{1}{2}\left[-\delta[n]+\delta[n+1]\right]$

$\tilde{h}[n]=h[-n]=\frac{1}{2}\left[\delta[-n]+\delta[-n-1]\right]=\frac{1}{2}\left[\delta[n]+\delta[n+1]\right]$

Συσχέτιση $A_i$ με $D_{i+1}$ - $A_{i+1}$:

① $\left.\begin{aligned}&D_{mid,i}[n]=A_i[n]*\tilde{g}[n]\\ &D_{i+1}[n]=D_{mid,i}[2n]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$D_{mid,i}[2n] = A_i[2n] * \tilde{g}[2n] = D_{i+1}[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{D_{i+1}[n] = \frac{1}{2}\left[-A_i[2n] + A_i[2n+1]\right]}$ (A), $n \in [0, M/2 - 1]$

⊙ Ομοίως: $\left.\begin{array}{l} A_{mid,i}[n] = A_i[n] * \tilde{h}[n] \\ A_{i+1}[n] = A_{mid,i}[2n] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{mid,i}[2n] = A_i[2n] * \tilde{h}[2n] = A_{i+1}[n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A_{i+1}[n] = \frac{1}{2}\left[A_i[2n] + A_i[2n+1]\right]}$ (B), $n \in [0, M/2 - 1]$

Ξεκινώντας από $N = M = 16$:

$A_0[n] \overset{(\circledast)}{=} [8\ 2\ 5\ -3\ -1\ 9\ 7\ 5\ 9\ 3\ 1\ 2\ -2\ -6\ 4\ 0\ 0]$

$A_1[n] \overset{(B)}{=} [5\ \ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 6\ \ 0\ \ -1\ \ 3]$

$A_2[n] \overset{(B)}{=} [3\ \ 5\ \ 3\ \ 1]$

$A_3[n] \overset{(B)}{=} [4\ \ 2]$

$A_4[n] \overset{(B)}{=} [3]$

και

$D_0[n] \rightarrow$ δεν υπάρχει

$D_1[n] = [-3\ \ -4\ \ 5\ \ -1\ \ -3\ \ -2\ \ 5\ \ 3]$

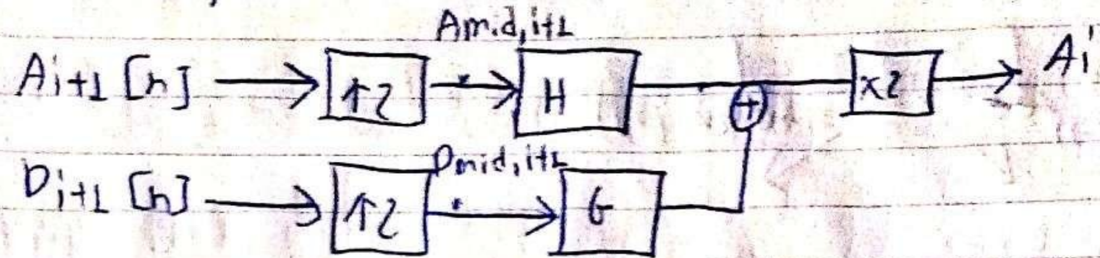
$D_2[n] = [-2\ \ 1\ \ -3\ \ 2]$

$D_3[n] = [1\ \ -1]$

$D_4[n] = [-1]$

{ Note: Παρατηρούμε ότι $J = 4 = \log_2(2^N)$ }

(β5) <u>Σύστημα επανασύνθεσης</u>:




<u>Έχουμε</u>: $A_{i+1,mid}[n] = A_{i+1}[n/2] \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$ (α) ⊛

$D_{i+1,mid}[n] = D_{i+1}[n/2] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$ (b)

⊛ Η άπειρη σειρά από dirac μηδενίζεται για περιττά k, ενώ ισούται με 1 για άρτια n. Έτσι, το oversampling επιτυγχάνεται, αφού μετά από κάθε δείγμα των $A_{i+1}$, $B_{i+1}$ προσθέτουμε ένα μηδενικό.

<u>Σύνολο</u>: $A_i = 2 \cdot \left\{ h[n] * A_{i+1,mid}[n] + g[n] * D_{i+1,mid}[n] \right\}$

$$\xrightarrow[(β3)]{(β1)} 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \left[ A_{i+1,mid}[n] + A_{i+1,mid}[n-1] - B_{i+1,mid}[n] + D_{i+1,mid}[n-1] \right] \right] = \dots$$

$$\boxed{\Rightarrow A_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ A_{i+1}[n/2] - D_{i+1}[n/2] \right] \delta[n-2k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ A_{i+1}\left[\frac{n-1}{2}\right] + D_{i+1}\left[\frac{n-1}{2}\right] \right] \delta[n-(2k+1)]}$$

<u>Στο δοθέν παράδειγμα:</u>

$A_4[n] = [\ 3\ ]$

$-(-1) \qquad (-1)$

$A_3[n] = [\ 4 \quad 2\ ]$

$-1 \quad +1 \quad -(-1) \quad -1$

$A_2[n] = [\ 3 \quad 5 \quad 3 \quad 1\ ]$

$-(-2) \quad -2 \quad -1 \quad +1 \quad -(-3) \quad -3 \quad -2 \quad +2$

$A_1[n] = [\ 5 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad -1 \quad 3\ ]$

$-(-3) \quad -3 \quad -(-4) \quad -4 \quad -5 \quad +5 \quad -(-1) \quad -1 \quad -(-3) \quad +3 \quad +2 \quad -2 \quad -5 \quad +5 \quad -3 \quad +3$

$A_0[n] = [\ \underline{8 \quad 2} \quad \underline{5 \quad -3} \quad \underline{-1 \quad 9} \quad \underline{7 \quad 5} \quad \underline{9 \quad 3} \quad \underline{2 \quad -2} \quad \underline{-04 \quad 0 \quad 0}\ ]$

↳ Προκύπτει η ακολουθία $X[n]$ της εκφώνησης, γεγονός που επαληθεύει τις μεθόδους των ερωτημάτων (e4), (e5).

(1α) <u>Διακριτός STFT</u>: $Sf(m,l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \cdot g[n-m]\, e^{-jln}$

$$= \exp\{-jml\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\, \underbrace{g(n-m)}_{= g(m-n)} \exp[j \cdot l\,[m-n]] =$$

$$= \exp\{-jml\} \cdot (f * g_l)(m), \text{ με}$$

$$g_l(m) = g(m) \cdot \exp(jml) \xleftrightarrow{DTFT} \hat{g}_l(\omega) = \hat{g}(\omega - l) \quad (1)$$

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες του DTFT:

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow \cancel{X_1[n]\,X_2[n]}\ X_1(\omega)X_2(\omega) \\ e^{-j\omega_0} x[n] \xleftrightarrow{\text{H}(6)} X(\omega-\omega_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{DTFT}\{Sf(m,l)\} = \hat{f}(\omega+l)\cdot \hat{g}_l(\omega+l) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \text{DTFT}\{Sf(m,l)\} = \hat{f}(\omega+l)\cdot \hat{g}(\omega) \quad (2)$$

Επίσης: $\text{DTFT}\{g[n-m]\} \underset{\text{ως προς } m}{=\!=} \hat{g}(\omega)\cdot \exp\{-j\omega n\}$ (3)

Για DFT, θέτουμε: $\omega = \dfrac{2\pi k}{N}$ (4)

Ξεκινώντας από το δεξί μέλος, έχουμε:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} Sf[m,l]\cdot g[n-m]\exp\left(j\cdot\frac{2\pi}{N}\,l\cdot n\right) \overset{(2),(3)}{\underset{(4)}{=\!=}}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k+l]\cdot|G[k]|^2\exp\left[jn\left[\frac{2\pi k}{N}+l\right]\right]\right\} \quad (5)$$

, με $F = \text{DTF}\{f\}$
$G = \text{DFT}\{G\}$

Γνωρίζουμε ότι: $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}|G[k]|^2 = 1$ (6). Άρα:

(5),(6): $\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} F[k+l]\exp\left[in\left[\frac{2\pi n}{N}+l\right]\right] \overset{IDFT}{=} f[n]$

(a.2) 'Έχουμε: $\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} \left|Sf(m,l)\right|^2 \underset{\cancel{IDFT}\,(2),(3),(4)}{\overset{(a.1)}{=\!=}}$

$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|F[k+l]\cdot G[k]\right|^2 \overset{(6)}{=}$

$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left|F[k+l]\right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|f[n]\right|^2$ (λόγω Plancherel formula)