Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων
3η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

1)Όνομα: Σερλής Εμμανουήλ Αναστάσιος
2)Αριθμός Μητρώου: el18125
3) Εξάμηνο: 6ο
4) Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021
5)Email:manosanastassis@hotmail.com

No. Date

Άσκηση 3.1 (α) Αλγόριθμος:

(i) $\epsilon_0 = r_x[0]$

(ii) for i in range [1, p]:

$$k_i = -\frac{r_x[i] - \sum^{i-1} a_j^{i-1} r_x[i-j]}{\epsilon_{i-1}}$$

$$a_i^{(i)} = -k_i$$

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} + k_i \, a_{i-j}^{(i-1)}, \quad j \in [1, i-1]$$

$$\epsilon_i = (1 - k_i^2)\epsilon_{i-1}$$

Εν προκειμένω, έχουμε:

$\epsilon_0 = 1.2$

i = 1: $k_1 = -\dfrac{r_x[1] - 0}{\epsilon_0} =$

$= -\dfrac{0.75}{1.2} \Rightarrow k_1 = -0.625$

$a_1^{(1)} = +k_1 \Rightarrow a_1^{(1)} = +0.625$

$\epsilon_1 = (1 - k_1^2)\epsilon_0 \Rightarrow \epsilon_1 = 0.731$

No. Date

$l=2$: $k_2 = -\dfrac{r_x[2] - a_1^{(1)} r_x[1]}{E_1}$

$= -\dfrac{0.6 - (+0.625)\cdot 0.75}{0.731} \Rightarrow k_2 = -0.179$

$a_2^{(2)} = -k_2 = 0.179$

$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + k_2 a_1^{(1)} = 0.625 + (-0.179)\cdot 0.625$

$\Rightarrow a_1^{(2)} = 0.513$

$\epsilon_2 = (1-k_2^2)\epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_2 = 0.707$

$l=3$: $k_3 = \dfrac{-r_x[3] + a_1^{(2)} r_x[2] + a_2^{(2)} \cdot r_x[1]}{\epsilon_2}$

$\Rightarrow k_3 = -0.081$

$a_3^{(3)} = -k_3 \Rightarrow a_3^{(3)} = 0.081$

$a_1^{(3)} = a_1^{(2)} + k_3 \cdot a_2^{(2)} \Rightarrow a_1^{(3)} = 0.498$

$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + k_3 \cdot a_1^{(2)} \Rightarrow a_2^{(3)} = 0.137$

$\epsilon_3 = (1-k_3^2)\epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_3 = 0.702$

<u>Πίνακας a_i:</u> $[a_1, a_2, a_3] = [a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}] =$

$= [0.498, 0.137, 0.081] = LPC.$

<u>Πίνακας k_i:</u> $[k_1, k_2, k_3] =$ PARCOR $= [-0.407, -0.179, -0.081]$

(β) <u>Δίνονται οι συντελεστές:</u>

$a_1 = a_1^{(4)} = -0.377$

$a_2^{(4)} = a_2 = -0.23$

$a_3 = a_3^{(4)} = 0.482$

$a_4 = a_4^{(4)} = 0.5.$

<u>Για $i=4$:</u> $k_4 = -a_4^{(4)} = -0.5.$

$$a_1^{(4)} = a_1^{(3)} + k_4 \cdot a_3^{(3)}$$

$$a_2^{(4)} = a_2^{(3)} + k_4 \cdot a_2^{(3)}$$

$$a_3^{(4)} = a_3^{(3)} + k_4 \cdot a_1^{(3)}$$

$a_1^{(3)} = A$

$a_2^{(3)} = B$

$a_3^{(3)} = \Gamma$

No. Date

$-0.377 = A - 0.6\Gamma \quad (1)$

$-0.23 = B - 0.6 B \Rightarrow B = -0.575 = a_2^{(3)}$

$0.482 = \Gamma - 0.6A \Rightarrow 0.289 = 0.6\Gamma - 0.36A \quad (3)$

<u>Από (1), (3):</u> $\left\{ \begin{array}{l} A = a_1^{(3)} = -0.137 \\ \Gamma = a_3^{(3)} = 0.399 \end{array} \right\}$

<u>Για i=3:</u> $k_3 = -a_3^{(3)} = -0.399$

$a_1^{(3)} = \underbrace{a_1^{(2)}}_{\Delta} + k_3 \cdot \underbrace{a_2^{(2)}}_{E} \Rightarrow -0.137 = \Delta - 0.399 \cdot E$

$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} + k_3 \cdot a_1^{(2)} \Rightarrow -0.575 = E - 0.399\Delta$

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.054 = 0.399\Delta - 0.159E \\ -0.575 = E - 0.399\Delta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = a_1^{(2)} = -0.131 \\ E = a_2^{(2)} = -0.747 \end{array} \right\}$$

<u>Για i=2:</u> $k_2 = -a_2^{(2)} = 0.747$

$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + k_2 \, a_{(1)}^{(1)} \Rightarrow a_{(1)}^{(1)} = -0.246$

<u>Για i=1:</u> $k_1 = -a_1^{(1)} \Rightarrow k_1 = 0.246$

No. Date

Τελικά: PARCOA $= [k_1, k_2, k_3, k_4] =$

$= [0.245, 0.747, -0.399, -0.05]$

Άσκηση 3.2 (α)

$$d[n] = 0.5\,d[n-1] + w[n] \overset{Z}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow D(z) = 0.5 \cdot D(z) \cdot z^{-1} + W(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) \triangleq \frac{D(z)}{W(z)} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}, \text{ με:}$$

$$B(0)=1, \quad A(0)=1, \quad A(1)=-0.5$$

Από Hayes (3.0.2) η αυτοσυσχέτιση δίνεται από την σχέση:

$$r_d[k] = \frac{b^2(0)}{[1-a^2(1)]}[-a(1)]^{|k|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_d[k] = \frac{25}{15} \cdot [0.5]^{|k|}}$$

(β) $W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} \overset{Z^{-1}}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow w[n] = w[0]\,\delta[n] + w[1]\,\delta[n-1].$$

$d[n], v[n]$ ασυσχέτιστα $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{dx}[k] = r_d[k] & (1) \\ r_x[k] = r_d[k] + r_v[k] = r_d[k] + \sigma_v^2\,\delta[k] \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_x[k] = r_d[k] + \delta[k]. \quad (2)$$

No. Date

Από (1): $r_{dx}[0] = r_d[0] = 1.502$.

$r_{dx}[1] = r_d[1] = 0.937$

Από (2): $r_x[0] = r_d[0] + \delta[0] = 2.502$

$r_x[1] = r_d[1] + \cancel{\delta[1]}^{0} = 0.937$.

Εξισώσεις Wiener-Hopf

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_x[0] & r_x^*[1] \\ r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} r_{dx}[0] \\ r_{dx}[1] \end{bmatrix}, \text{ με:}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} = \frac{1}{5.085} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5.085} \begin{bmatrix} 2.502 & -0.937 \\ -0.937 & 2.502 \end{bmatrix}$$

No. Date

Άρα: $\boxed{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.549 \\ 0.104 \end{bmatrix}}$

Ελαχ. Λάθος: $J_{FIA2} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} w[k] r_{dx}^*[k]$

$= r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} w[k] r_d[k] =$

$= r_d[0] - w[0] r_d[0] - w[1] r_d[1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{J_{FIA2} = 0.5082}$

(γ). $W(z) = w[0] + w[1] \cdot z^{-1} + w[2] \cdot z^{-2} \Rightarrow$

$\downarrow z^{-1}\{\}$

$\Rightarrow w[n] = w[0]\delta[n] + w[1] \cdot \delta[n-1] + w[2]\delta[n-2]$

Ομοίως με ερώτημα (β):

$r_x[2] = r_d[2] + \cancel{\delta[2]}^{0} = 0.5025 = r_{dx}[2]$

Wiener-Hopf:

No. Date

$$\underbrace{\begin{bmatrix} rx[0] & rx[1] & rx[2] \\ rx[1] & rx[0] & rx[1] \\ rx[2] & rx[1] & rx[0] \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rdx[0] \\ rdx[1] \\ rdx[2] \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = rx[0]\{rx[0]^2 - rx[1]^2\} -$$

$$- rx[1]\{rx[1]\cdot rx[0] - rx[1]\cdot rx[2]\} +$$

$$+ rx[2]\{rx[1]^2 - rx[0]\,rx[2]\} =$$

$$= 14.507 - 1.755 - 0.315 \to \det(B) = 12.497.$$

$$Adj(B) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} & \Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ \Delta_{31} & -\Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5.095 & -1.874 & -0.501 \\ -1.874 & 0.248 & -1.874 \\ -0.501 & -1.874 & 5.095 \end{bmatrix}$$

Επίλυση:

$$\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(B)} \cdot Adj(B) \cdot \begin{bmatrix} rdx[0] \\ rdx[1] \\ rdx[2] \end{bmatrix}$$

No Date

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.544 \\ 0.149 \\ \cancel{0.7..} \\ 0.045 \end{bmatrix}}$$

<u>Ελάχ. Λάθος:</u> $J_{FIA3} = r_d[0] - \sum_{0}^{2} w[k] r_d[k] =$

$= \ldots \Rightarrow \boxed{J_{FIA3} = 0.547}$

(δ) <u>Σχ:</u> $H_{nc}(z) = \dfrac{P_{dx}(z)}{P_x(z)}$, με

$P_{dx}(z) = P_d(z)$

$P_x(z) = P_d(z) + P_v(z)$

$r_d[k] = \dfrac{25}{15} [0.5]^{|k|}$

$a^{|k|} \longleftrightarrow \dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$

$\Rightarrow P_d(z) = \dfrac{25}{15} \cdot \dfrac{1-0.5^2}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} = \dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$

και $P_v(z) = \sigma_v^2 = 1$

<u>Άρα:</u> $\boxed{H_{nc}(z) = \dfrac{1}{1 + (1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}} =$

No. Date

$$= \frac{1}{1+1+0.30-0.5z-0.5z^{-1}} =$$

$$= \frac{-z}{0.5z^2-2.30z+0.5} = \frac{-z}{0.5(z-3.054)(z-0.273)}$$

$\underline{3.054\cdot 0.273 \simeq 1}$

$$\frac{-\cancel{z}}{0.5\cdot(z-3.054)(3.054-z^{-1})\cancel{z}\cdot 0.273}$$

$$= \frac{-1}{0.5\cdot[0.273z-1][3.054-z^{-1}]} =$$

$$= \frac{1}{0.5[1-0.273z][3.054-z^{-1}]} = \frac{1}{0.5[1-0.273z][1-0.273z^{-1}]}\cdot\frac{1}{3.054}$$

$$= \frac{1-(0.273)^2}{(1-0.273z)(1-0.273z^{-1})}\cdot 0.492 \xleftrightarrow{\text{ΜΣ}(1)}$$

$$\boxed{h_{nc}[n] = 0.492\cdot(0.273)^{|n|}}$$

Τετρ. Λάθος: $\xi_{iir,nc} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega})H_{nc}(e^{j\omega})d\omega$

$$= \frac{\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega})d\omega = \overset{1}{\cancel{\sigma_v^2}}\, h_{nc}[0] \Rightarrow$$

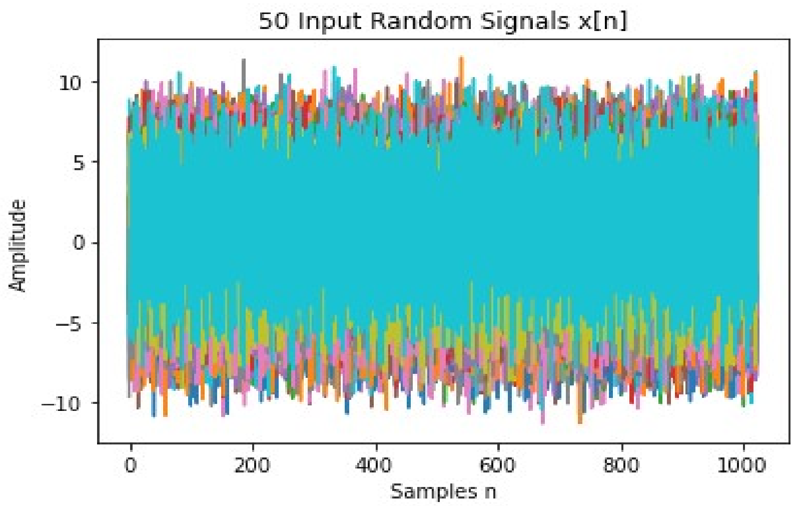
$$\Rightarrow \boxed{\xi_{iir,nc} = 0.492}$$

Παρατηρούμε:

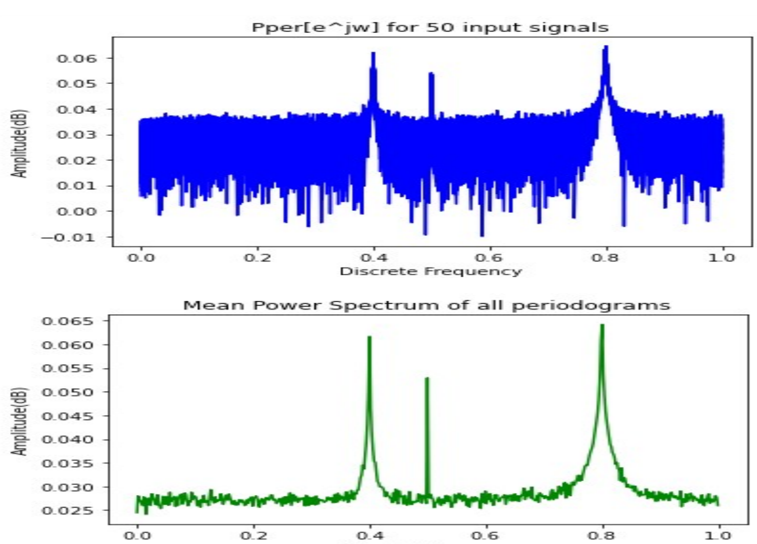
$$\boxed{\xi_{FIR2} > \xi_{FIR3} > \xi_{iir,nc}}$$

Άσκηση 3.3:

Αρχικά, δημιουργούμε 50 τυχαία σήματα της μορφής x[n], 1024 δειγμάτων το καθένα και τα οποία διαφέρουν κάθε φορά ως προς τις τυχαίες μεταβλητές φ1,φ2, και u[n]:

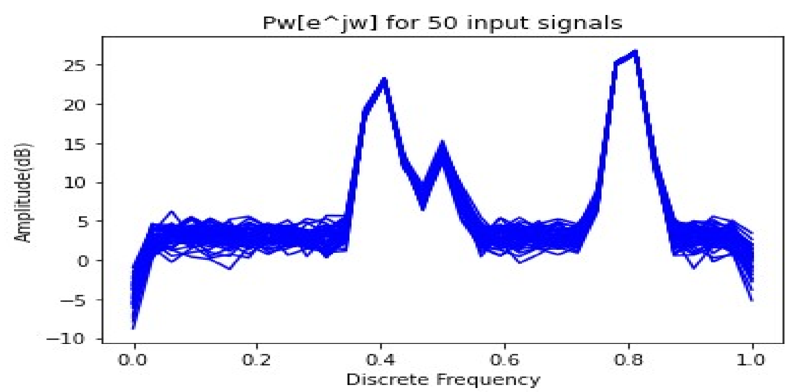


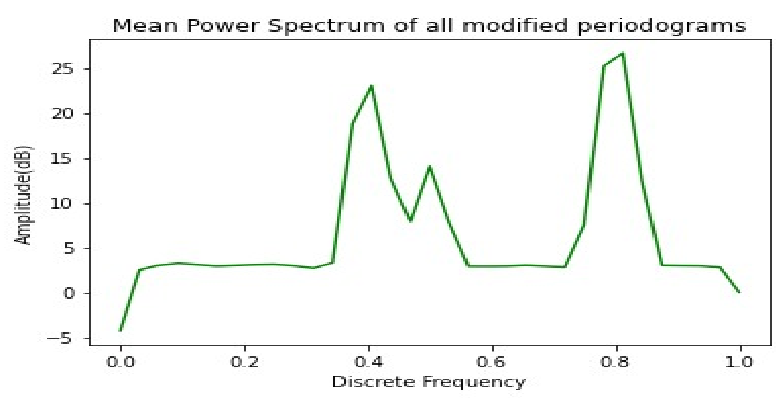
Όσον αφορά την μέθοδο περιοδογράμματος, παραθέτουμε την υπέρθεση των 50 περιοδογραμμάτων που προκύπτουν, όπου το καθένα υπολογίστηκε μέσω της δοθείσας σχέσης για το Pper($e^{j\omega}$), καθώς και την μέση-ανά συχνότητα-τιμή:



Όσον αφορά την μέθοδο τροποποιημένου περιοδογράμματος, υπολογίσαμε το φάσμα ισχύος για κάθε σήμα x[n] μέσω κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης signal.welch: Συγκεκριμένα, θέσαμε μήκος παραθύρου 64 δείγματα, επικάλυψη μεταξύ γειτονικών παραθύρων μηδενική και τύπο παραθύρου Hamming(παραπάνω λεπτομέρειες στον πηγαίο κώδικα της άσκησης)

Στην συνέχεια-και όπως στην μέθοδο περιοδογράμματος-παραθέσαμε τα επιμέρους περιοδογράμματα σε κοινή γραφική καθώς και την μέση-ανά συχνότητα-τιμή τους:





Σχολιασμός αποτελεσμάτων:

(i) Θεωρητικά:

Αναμένουμε υψηλότερη φασματική επικάλυψη στην μέθοδο του περιοδογράμματος μιας και σε αυτήν χρησιμοποιούμε τετραγωνικό παράθυρο, το οποίο δεν αποκόπτει καθόλου τις γειτονικές συχνότητες, αλλά τις “περνά” αυτούσιες. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Hamming παράθυρο της τροποποιημένης μεθόδου, το οποίο προσφέρει την εν λόγω εξομάλυνση, μειώνοντας το φαινόμενο masking

Από την άλλη, η μέθοδος τροποποιημένου περιοδογράμματος οδηγεί σε μειωμένη φασματική ευκρίνεια, μιας και το Hamming παράθυρο έχει την μορφή λοβού, γεγονός που αντιστοιχεί στον προσδιορισμό της κυρίαρχης συχνότητας εντός ενός εύρους συχνοτήτων και όχι σε ένα συγκεκριμένο σημείο του φασματικού άξονα.

(ii) Πρακτικά:

Αρχικά, κοινό των 2 μεθόδων είναι η αδυναμία καθαρού προσδιορισμού της συχνότητας $\omega_2=0.5\pi$, γεγονός που οφείλεται στο μοναδιαίο πλάτος της, το οποίο είναι συγκρίσιμο με το πλάτος θορύβου u[n], οδηγώντας σε μερική επικάλυψή της.

Όσον αφορά την επικάλυψη(variance), αυτή παρατηρείται αυξημένη στην 1η (απλή) μέθοδο, γεγονός που αντιστοιχεί σε πιο θορυβώδεις και αποδιοργανωμένες γραφικές(τόσο υπέρθεσης όσο και μέσης τιμής). Απεναντίας, οι γραφικές της welch μεθόδου παρουσιάζονται αισθητά πιο “συμπαγείς” και εξομαλυμένες.

Όσον αφορά την φασματική ευκρίνεια(resolution), υπερτερεί η 1η μέθοδος, η οποία διαθέτει “οξείες” κορυφές στις αντίστοιχες συχνότητες, σε αντίθεση με την 2η στην οποία οι κορυφές αυτές παρουσιάζονται πιο λείες (λόγω του Hamming Window)

(iii) <u>Συμπερασματικά:</u>

Μείωση θορύβου → Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα

Ακριβής προσδιορισμός συχνοτικού περιεχομένου → Απλό Περιοδόγραμμα

No. Date

Ασκηση 3.4 (a) $J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} ||x_n - a_n e||^2 =$

$= \frac{1}{N} \{ \underbrace{||x_1 - a_1 e||^2}_{\text{minimize}} + \underbrace{||x_2 - a_2 e||^2}_{\text{minimize}} + \dots + \underbrace{||x_N - a_N e||^2}_{\text{minimize}} \}$

Αν καθένα από τα $||x_n - a_n e||^2$ γίνει ελάχιστο, τότε ελαχιστοποιείται και το άθροισμα τους, άρα έχουμε $J = J_{min}$

Παίρνουμε: $||x_1 - a_1 e||^2 = \left\| \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1d} \end{bmatrix} - a_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_d \end{bmatrix} \right\|^2$

$= \left\| \begin{bmatrix} x_{11} - a_1 e_1 \\ x_{12} - a_1 e_2 \\ \vdots \\ x_{1d} - a_1 e_d \end{bmatrix} \right\|^2 = (x_{11} - a_1 e_1)^2 + (x_{12} - a_1 e_2)^2 + \dots$

$+ (x_{1d} - a_1 e_d)^2 = J_1$

$J_1 = J_{1,min} \Rightarrow \frac{dJ_1}{da_1} = 0 \Rightarrow -2 \cdot e_1 (x_{11} - a_1 e_1) -$

$-2 e_2 (x_{12} - a_1 e_2) - \dots - 2 e_d (x_{1d} - a_1 e_d) = 0$

$\Rightarrow e_1 x_{11} + e_2 x_{12} + \dots + e_d x_{1d} = a_1 [e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_d^2]$

No. Date

, με: $\sum_{i=1}^{d} e_i^2 = 1$, αφού e: μοναδιαίο διάνυσμα

Άρα: $e_1 x_{11} + e_2 x_{12} + \dots + e_d x_{1d} = X_1^T \cdot e = a_1$

Ομοίως, προκύπτουν:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = X_2^T e \\ a_3 = X_3^T e \\ \vdots \\ a_N = X_N^T e \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} \cdot e \quad \text{ή}$$

ή $\boxed{a_n = X_n^T \cdot e \quad , n \in [1, N]}$

(γ). Στην μορφή PCA ζητούμε ελαχιστοποίηση του (Σημειώσεις/Διαφάνεια 45):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\left\| X_n - \left(\sum_{k=1}^{p} y_{kn} e_k \right) \right\|^2}^{PCA}$$

δηλαδή έχουμε p πρωτεύουσες κατευθύνσεις (: πλήθος διανυσμάτων e)

Εν προκειμένω, έχουμε $\boxed{p=1}$, δηλαδή ένα διάνυσμα e

(δ) Από ερωτ (β) έχουμε:

$$R_X = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n X_n^T = \frac{1}{N} X^T X \overset{(1)}{=} V \Lambda V^T, \text{ με:}$$

No. Date

$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$: πίνακας ιδιοτιμών της R_x

$V = [v_1\ v_2 \ldots v_d]$: πίνακας ιδιοδιανυσμάτων της R_x

SVD: $X = U \Sigma V^T$ (2)

Από (1),(2): $R_x = \frac{1}{N} V \Sigma U^T U \Sigma V^T =$

$= \frac{1}{N} V \frac{\Sigma^2}{N} V^T$, με $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$

Συνεπώς: (i) Ιδιοκατευθύνσεις e ↔ Ιδιοδιανύσματα u_k

(ii) Ιδιοτιμές: $\lambda_k = \frac{\sigma_k^2}{N}$, $k \in [1, d]$.

Η k-στήλη του XV είναι η k-th principal component (PC), δηλαδή είναι το διάνυσμα προβολών $x_n^T u_k$ των δεδομένων στην k ιδιοκατεύθυνση

Εν προκειμένω έχουμε $p=1$, άρα $e = u_1$ και

$[a_1, a_2, \ldots, a_N]^T = X \cdot e = X \cdot u_1$

(ε) $R_x = \frac{1}{N} X^T X$, με

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{X:\ \text{ανά γραμμές}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

No Date

και $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$R_X = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 0.75 \\ -1.5 & 3 & -1.25 \\ 0.75 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [5.805, 2.345, 0.598]$

και

$[u_1 \ u_2 \ u_3] = \left[\begin{bmatrix} 2,818 \\ -1,952 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.040 \\ -1.904 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.527 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$

Έχουμε ~~αυτά~~ ένα e και επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής, δηλαδή της λ_1

No. Date

Απ: $\boxed{e = a_1 = \begin{bmatrix} 2.918 \\ -1.952 \\ 1 \end{bmatrix}}$

Και

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = X \cdot e = \begin{bmatrix} 1.800 \\ 10.074 \\ -1.952 \\ 13.224 \end{bmatrix}}$$

(β) Από το 1º ερώτημα·

$$J_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \| x_n - a_n e \|^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_{n1} - a_n e_1)^2 + (x_{n2} - a_n e_2)^2 + \ldots + (x_{nd} - a_n e_d)^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{(x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \ldots + x_{nd}^2)}_{\|x_n\|^2} - 2(a_n x_{n1} e_1 +$$

$$+ a_n x_{n2} e_2 + \ldots + a_n x_{nd} e_d) + a_n^2 \underbrace{(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_d^2)}_{1}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n (\underline{x_{n1} e_1 + \ldots}$$

$$\underline{+ x_{n2} e_2 + \ldots + x_{nd} e_d})$$

$$\to a_n = x_n^T e = e^T x_n$$

No. Date

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ||x_n||^2 - \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ||x_n||^2 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \text{, με:}$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{N} e^T x_n \cdot x_n^T e =$$

$$e^T \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T\right)}_{R_x \cdot N} \cdot e = e^T \cdot N \cdot R_x \cdot e$$

<u>Σύνολο</u>: $J_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ||x_n||^2 - \frac{1}{\cancel{N}} e^T \cdot \cancel{N} \cdot R_x \cdot e$

$$\boxed{\Rightarrow J_1 = -e^T \cdot R_x \cdot e + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ||x_n||^2 \text{, με:} \quad R_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot x_n^T}$$

No. Date

Άσκηση 3.5 / Βήματα υπολογισμού πίνακα

(i) $\tilde{x}(n) = \hat{x}(n-1)$ (με $a=1$). $\Rightarrow$ Εύρεση $\tilde{x}(n)$

(ii) $x(n) - \tilde{x}(n) = d(n)$ $\Rightarrow$ Εύρεση $d[n]$

(iii) $\hat{d}[n] = Q\{d[n]\}$ $\Rightarrow$ Εύρεση $\hat{d}[n]$.

$c[n] = Q\{d[n]\}$ $\Rightarrow$ Εύρεση $c[n]$

(iv) $\hat{x}[n] = \hat{d}[n] + \tilde{x}[n]$ $\Rightarrow$ Εύρεση $\hat{x}[n]$, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του $\tilde{x}(n+1)$ (στην επόμενη επανάληψη)

Υλοποίηση για $n=0$ και $n=1$:

$n=0$: $\tilde{x}(0) = \hat{x}(-1) = 0$

$x(0) - \tilde{x}(0) = d(0) = 0$

$\hat{d}[0] = Q[0] = 1$

$c[0] = Q\{d[0]\} = 0$

$\hat{x}[0] = \hat{d}[0] + \tilde{x}[0] = 1 + 0 = 1$

$n=1$: $\tilde{x}[1] = \hat{x}[0] = 1$

$x[1] - \tilde{x}[1] = d[1] = 0$

$\hat{d}[1] = Q\{d[1]\} = 1$

No. Date

$c[1] = Q\{d[1]\} = 0$

$\hat{x}[1] = \hat{d}[1] + \tilde{x}[1] = 2 = \tilde{x}[2] \ldots$

Τελικά, προκύπτει ο κάτωθι πίνακας.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x[n]$	0	1	1	1	1	2	4	5	7	9	0	0	0	0
$\tilde{x}[n]$	0	1	2	1	2	1	2	3	4	5	6	5	4	3
$d[n]$	0	0	-1	0	-1	1	2	2	3	4	-6	-5	-4	-3
$\hat{d}[n]$	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$c[n]$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\hat{x}[n]$	1	2	1	2	1	2	3	3	5	6	5	4	3	2