Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03118125

Αναγνώριση Προτύπων
2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 2.1. 1. Εφαρμόζουμε παράδειγμα για $L=3$.

Έστω $f(x) = f^3(f^2(f^1(x)))$, με:

$f^i = \sigma(w_i x + b_i) = w_i x + b_i$, $i \in [1,3] \cap i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(x) = w_3 \cdot (w_2 \cdot f^1 + b_2) + b_3 =$

$= w_3 \cdot (w_2 \cdot (w_1 x + b_1) + b_2) + b_3 =$

$= w_3 w_2 w_1 \cdot x + w_3 w_2 b_1 + w_3 b_2 + b_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = W_3 x + B_3$, με: $\begin{cases} W_3 = w_3 w_2 w_1 \\ B_3 = b_1 w_2 w_3 + b_2 w_3 + b_3 \end{cases}$

Γενίκευση σχέσης $f(x)$ για L συναρτήσεις $f(x)$:

$$f(x) = f^L(f^{L-1}(f^{L-2}(\cdots f^1(x)))) =$$

$$= \cancel{\prod_{i=1}^{L} w_i} \; W_L \cdot x + B_L, \text{ με:}$$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

No. Date

$$W_L = \prod_{i=1}^{L} w_i \quad \text{και} \quad B_L = b_L + b_{L-1} w_L + b_{L-2} w_{L-1} w_L + \dots + b_1 (w_2 w_3 \dots w_L)$$

2. <u>Έχουμε:</u>

$$\odot \; w_1 x + b_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -\lambda & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix} [x_1 \; x_2] + [0 \; 0 \; 0 \; 0]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(x_1+x_2) \\ -\lambda(x_1+x_2) \\ \lambda(x_1-x_2) \\ -\lambda(x_1-x_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(w_1 x + b_1) = \begin{bmatrix} \sigma(\lambda(x_1+x_2)) \\ \sigma(-\lambda(x_1+x_2)) \\ \sigma(\lambda(x_1-x_2)) \\ \sigma(-\lambda(x_1-x_2)) \end{bmatrix}$$

<u>Άρα:</u> $\tilde{f}(x_1,x_2) = W_2 \cdot \sigma(w_1 x + b_1) =$

$$= [\mu \; \mu \; -\mu \; -\mu] \begin{bmatrix} \sigma(\lambda(x_1+x_2)) \\ \sigma(-\lambda(x_1+x_2)) \\ \sigma(\lambda(x_1-x_2)) \\ \sigma(-\lambda(x_1-x_2)) \end{bmatrix} =$$

$$= \dots \Rightarrow \boxed{\tilde{f}(x_1,x_2) = \mu \{ \sigma(\lambda(x_1+x_2)) + \sigma(-\lambda(x_1+x_2)) - \sigma(\lambda(x_1-x_2)) - \sigma(-\lambda(x_1-x_2)) \}}$$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

3. Παίρνουμε σειρά taylor γύρω από το σημείο $x=0$ για την $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) \simeq \sigma(0) + \sigma'(0)\,x + \frac{\sigma''(0)}{2}x^2$$

Για $x=\lambda(x_1+x_2)$: $\sigma(\lambda(x_1+x_2)) = \sigma(0) + \sigma'(0)\cdot\lambda(x_1+x_2) + \frac{\sigma''(0)}{2}\lambda^2(x_1+x_2)^2$ (1)

Για $x=-\lambda(x_1+x_2)$: $\sigma(-\lambda(x_1+x_2)) = \sigma(0) - \sigma'(0)\lambda(x_1+x_2) + \frac{\sigma''(0)}{2}\lambda^2(x_1+x_2)^2$ (2)

Για $x=\lambda(x_1-x_2)$: $\sigma(\lambda(x_1-x_2)) = \sigma(0) + \sigma'(0)\lambda(x_1-x_2) + \frac{\sigma''(0)}{2}\lambda^2(x_1-x_2)^2$ (3)

Για $x=-\lambda(x_1-x_2)$: $\sigma(-\lambda(x_1-x_2)) = \sigma(0) - \sigma'(0)\cdot\lambda\cdot(x_1-x_2) + \frac{\sigma''(0)}{2}\lambda^2(x_1-x_2)^2$ (4)

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (1)-(4) στην σχέση για την $\tilde{f}(x_1,x_2)$ του ερωτήματος 2 και παίρνουμε:

Scanned with CamScanner

No. Date

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \mu \left\{ \sigma''(0)\lambda^2 (x_1 + x_2)^2 - \sigma''(0)\lambda^2 (x_1 - x_2)^2 \right\}$$

$$= \mu\, \sigma''(0)\lambda^2 4 x_1 x_2 \quad , \mu \varepsilon \quad \mu = \frac{1}{4\lambda^2 \ddot{\sigma}(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x_1, x_2) = (x_1 x_2) \cdot \frac{\cancel{\sigma''(0)}\lambda^2 \cancel{4}}{\cancel{\sigma''(0)}\cancel{4}\lambda^2} \xrightarrow{\lambda \to 0}$$

$$\boxed{\tilde{f}(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 \cdot x_2) \equiv f(x_1, x_2) \text{ gia } \lambda \to 0.}$$

Scanned with CamScanner

No. Date

Ι' Ασκηση 2.2. 1. Μέσω χρήσης των αλυσιδωτών παραγώγων έχουμε:

$$\frac{dL_t}{dV} = \frac{dL_t}{do_t} \cdot \frac{do_t}{dy_t} \cdot \frac{dy_t}{dV}, \text{ με:}$$

$$\frac{dy_t}{dV} = \frac{d}{dV}(V \cdot h_t) = h_t$$

Άρα: $$\boxed{\frac{dL_t}{dV} = \frac{dL_t}{do_t} \cdot \frac{do_t}{dy} \cdot h_t.}$$

2. Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα:

$$\frac{dL_t}{dw} = \frac{dL_t}{do_t} \frac{do_t}{dw}, \text{ με:}$$

$$\frac{do_t}{dw} = \frac{d}{dw}[V \cdot h_t] = V \cdot \frac{d}{dw}[f(wh_{t-1} + Ux_t)]$$

$$\Rightarrow \frac{do_t}{dw} = V \cdot f'(wh_{t-1} + Ux_t) \cdot h_{t-1}$$

Άρα: $$\boxed{\frac{dL_t}{dw} = \frac{dL_t}{do_t} V h_{t-1} \cdot f'(wh_{t-1} + Ux_t)}$$

Scanned with CamScanner

No. Date

3. Μέσω χρήσης της μεθόδου power iteration, έχουμε ότι καθώς $k \to +\infty$, προκύπτει ότι:

$\omega^k \to \omega$, που μπορεί να είναι μία πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη τιμή. Αυτό συνεπάγεται ότι η παράγωγος $\frac{dh_t}{d\omega}$ (η οποία είναι ανάλογη των όρων ω^k) θα οδηγηθεί σε αντιστοίχως πολύ μικρές ή μεγάλες τιμές οδηγώντας σε exploision/vanishing της εν λόγω παραγώγου. Έτσι, το vanilla RNN θα "δυσκολευτεί" να συγκλίνει σε optimal configuration των παραμέτρων του.

Scanned with CamScanner

No. Date

Άσκηση 2.3 1. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση L ως προς ω παίρνουμε:

$$\frac{dL}{d\omega} = \omega + 0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$

θέτουμε $\frac{dL}{d\omega} = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i \xrightarrow{n=4}$$

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i y_i = \lambda_1 y_1 \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \lambda_2 y_2 \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \lambda_3 y_3 \begin{bmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \end{bmatrix} + \lambda_4 y_4 \begin{bmatrix} x_4^1 \\ x_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{x_i^1 = x_i^2} \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 y_1 + 2.5\lambda_2 y_2 + 5\lambda_3 y_3 + 7\lambda_4 y_4 \\ 2\lambda_1 y_1 + 2.5\lambda_2 y_2 + 5\lambda_3 y_3 + 7\lambda_4 y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 = 2\lambda_1 y_1 + 2.5\lambda_2 y_2 + 5\lambda_3 y_3 + 7\lambda_4 y_4}$$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

No. Date

3. Έστω $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ και $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow K(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + 4(u_1v_1 + u_2v_2)^2$

$= u_1v_1 + u_2v_2 + 4 \cdot u_1^2 v_1^2 + 4 \cdot u_2^2 v_2^2 + 8 u_1 v_1 u_2 v_2$

$= \phi(u)\,\phi(v)$, με:

$$\boxed{\phi(x) = \phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 2x_1^2, 2x_2^2, 2\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2)}$$

2. Απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι υπάρχει μεταβλητή a' για την οποία ισχύει $a_n = 0$.

Έχουμε: $\begin{cases} a' + b' = C \\ b' f' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = b' = 0 \\ f' \neq 0 \end{cases}$

Επιπλέον, ισχύουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$\begin{cases} a_i + b_i = C < 1/(\nu-1) \xRightarrow{b_i \geq 0} a_i < 1/(\nu-1) \\ -1 < K(u,v) < 1 \end{cases}$$

Έχουμε: $f' = \left| y' - \sum_{i=1}^{\nu} a_i \cdot y_i K(x', x_i) \right|$

$\xRightarrow[y_i = \pm 1 \ \forall i \in [1, \nu]]{f' = 0} 1 = \left| \sum_{i=1}^{\nu} a_i \cdot y_i \cdot K(x', x_i) \right|$

(1)

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

No. Date

Εφαρμόζοντας παράλληλα την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot y_i \, K(x', x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} \left|a_i y_i \cdot K(x', x_i)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |a_i| \, |y_i| \, |K(x', x_i)| \xrightarrow[\substack{|y_i|=1 \\ |K(u,v)|<1}]{a_i = |a_i| < \frac{1}{N-1}}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_i y_i K(x', x_i)\right| < \left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{i=1}^{N} 1 =$$

$$= \frac{N-1}{N-1} = 1 \quad (2)$$

Προκύπτει εμφανές ότι από από τ (1) και (2) (με εφαρμογή των παραμέτρων F', a', b', x', y')

Άρα, $\boxed{a_i \neq 0 \ \forall i \in [1, N]}$

Scanned with CamScanner

No. Date

Άσκηση 2.4.

~~Ορίζουμε: $\mu_i, \Sigma_i \to$ παράμετροι $p_X(x|\omega_i)$~~

Ορίζουμε: $\left\{ \begin{array}{l} \mu_i, \Sigma_i \to \text{παράμετροι } p_X(x|\omega_i) \\ \mu_i, \sigma_i^2 \to \text{παράμετροι } p(y|\omega_i) \end{array} \right\}$

Έχουμε: ⊙ $\mu_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{y_i \in C_1}^{n} y_i =$

$$= \frac{1}{n_1} \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} w^T \cdot x_i = w^T \left(\frac{1}{n_1} \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} x_i \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\mu_1 = w^T \mu_1 \text{ και ομοίως } \mu_2 = w^T \mu_2.}$

⊙ $\sigma_1^2 = \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} (y_i - \mu_1)^2 =$

$$= \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} (w^T \cdot x_i - w^T \mu_1) \cdot (w^T x_i - w^T \mu_1)$$

$$= \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} w^T (x_i - \mu_1) w^T (x_i - \mu_1) =$$

Scanned with CamScanner

No. Date

$$= \sum_{y_i \in C_1}^{n_1} w^T (x_i - \mu_1)(x_i - \mu_1)^T w$$

Επίσης: $\Sigma_1 = \sum_{x_i \in C_1}^{n_1} (x_i - \mu_1)(x_i - \mu_1)^T$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_1^2 = w^T \Sigma_1 w \text{ και ομοίως } \sigma_2^2 = w^T \Sigma_2 w}$

Αντικαθιστούμε στην συνάρτηση κριτηρίου:

$$J_1(w) = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{(w^T \mu_1 - w^T \mu_2)^2}{w^T \Sigma_1 w + w^T \Sigma_2 w} =$$

$$= \frac{[w^T(\mu_1 - \mu_2)][w^T(\mu_1 - \mu_2)]}{w^T(\Sigma_1 + \Sigma_2) w} =$$

$$= \frac{w^T(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T w}{w^T(\Sigma_1 + \Sigma_2) w} = \frac{w^T A w}{w^T B w}, \text{ με:}$$

$A = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T$ και $B = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Παραγωγίζουμε την $J_1(w)$ ως προς w για να βρούμε το weight vector που οδηγεί στην μεγιστοποίησή της:

Scanned with CamScanner

No. Date

$$\frac{dJ_1(w)}{dw} = 0 \Rightarrow \frac{dJ_1(w)}{dw} = (w^TAw)'(w^TBw) -$$

$$- \frac{(w^TAw)(w^TBw)'}{(w^TBw)^2} = \frac{2w^TA - (w^TAw)(2w^TB)}{(w^TBw)^2}$$

$$= 0 \xrightarrow{w^TBw \neq 0} 2w^TA - \underbrace{\left(\frac{w^TAw}{w^TBw}\right)}_{\lambda} \cdot (2w^TB) = 0$$

$$\Rightarrow w^TA - \lambda w^TB = 0 \Rightarrow Aw = \lambda Bw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}Aw = \lambda w$$

Στην περίπτωσή μας, δεν χρειάζεται να λύσουμε για τις ιδιοτιμές του πίνακα $B^{-1}A$, αφού το διάνυσμα $A \cdot w$ είναι πάντα στην κατεύθυνση του διανύσματος $(\mu_1 - \mu_2)$. Έτσι, η ιδιοτιμή που οδηγεί στην μεγιστοποίηση του $J_1(w)$ θα υπολογιστεί για την συνθήκη:

$B^{-1}(w = \lambda w$, με: $C = \dfrac{A}{(\mu_1 - \mu_2)^T} = (\mu_1 - \mu_2)$

Άρα, το διάνυσμα w που μεγιστοποιεί το κριτήριο $J_1(w)$ είναι το: $w = B^{-1} \cdot C$ ή

$$\boxed{w = (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} (\mu_1 - \mu_2)}$$

Scanned with CamScanner

No. Date

Άσκηση 2.5 α) Ζητείται ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(F=0|D=0)$. Αρχικά, υπολογίζονται οι εξής πιθανότητες:

⊙ $P(G=1) = P(G=1|B=0,F=0)\cdot P(B=0)\cdot P(F=0) +$

$+ P(G=1|B=0,F=1)\cdot P(B=0)\cdot P(F=1) +$

$+ P(G=1|B=1,F=0)\cdot P(B=1)\cdot P(F=0) +$

$+ P(G=1|B=1,F=1)\cdot P(B=1)\cdot P(F=1) =$

$= 0.2\cdot 0.05\cdot 0.2 +$

$P(B=0) = 1 - P(B=1)$

$P(F=0) = 1 - P(F=1)$

$+ 0.25\cdot 0.05\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.95\cdot 0.2 + 0.95\cdot 0.95\cdot 0.8$

$\Rightarrow \boxed{P(G=1) = 0.791}$ και $\boxed{P(G=0) = 1 - 0.791 = 0.209}$

⊙ $P(D=0) = P(D=0|G=1)\cdot P(G=1) + P(D=0|G=0)\cdot P(G=0)$

$= [1 - P(D=1|G=1)]\cdot P(G=1) + P(D=0|G=0)\cdot P(G=0)$

$= (1-0.8)\cdot 0.791 + 0.8\cdot(1-0.791) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P(D=0) = 0.3254}$ και $P(D=1) = 1 - P(D=0)$

$\Rightarrow \boxed{P(D=0) = 0.6746}$

⊙ $P(G=0|F=0) = P(G=0|F=0,B=0)\cdot P(B=0) +$

$+ P(G=0|F=0,B=1)\cdot P(B=1) \Rightarrow$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

No. Date

$P(G=0 \mid F=0) = [1 - P(G=1 \mid F=0, B=0)] \cdot P(B=0)$

$+ [1 - P(G=1 \mid F=0, B=1)] \cdot P(B=1) =$

$= (1-0.2) \cdot 0.05 + 0.95 \cdot (1-0.3)$

$= 0.8 \cdot 0.05 + 0.95 \cdot 0.7 \Rightarrow \boxed{P(G=0 \mid F=0) = 0.705}$

$P(D=0 \mid F=0) = P(D=0 \mid G=0, \cancel{F=0}) \cdot P(G=0 \mid F=0)$

$+ P(D=0 \mid G=1, \cancel{F=0}) \cdot P(G=1 \mid F=0) =$

$= P(D=0 \mid G=0) \cdot P(G=0 \mid F=0) + [1 - P(D=1 \mid G=1)] \cdot$

$\cdot [1 - P(G=0 \mid F=0)] = 0.8 \cdot 0.705 + (1-0.8) \cdot$

$\cdot (1-0.705) \Rightarrow \boxed{P(D=0 \mid F=0) = 0.023}$

Ζητείται: $P(F=0 \mid D=0) \overset{\text{Bayer}}{=} \dfrac{P(D=0 \mid F=0) \cdot P(F=0)}{P(D=0)}$

$\Rightarrow P(F=0 \mid D=0) = \dfrac{0.023 \cdot (1-0.8)}{0.3254} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P(F=0 \mid D=0) = 0.3829}$

Scanned with CamScanner

No. Date

β) Υπολογισμός πιθανοτήτων $P(G=0|B=0)$ και $P(D=0, B=0)$

⊙ $P(G=0|B=0) = P(G=0|F=0, B=0) \cdot P(F=0) +$

$+ P(G=0|F=1, B=0) \cdot P(F=1) =$

$= [1 - P(G=1|F=0, B=0)] \cdot [1 - P(F=1)] +$

$+ [1 - P(G=1|F=1, B=0)] \cdot P(F=1) =$

$= (1-0.2) \cdot (1-0.9) + (1-0.25) \cdot 0.8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P(G=0|B=0) = 0.75}$

⊙ $P(D=0, B=0) = P(D=0, G=0) \cdot P(B=0, G=0)$

$+ P(D=0, G=1) \cdot P(B=0, G=1)$, με:

$\rightarrow P(B=0, G=0) = P(B=0, G=0, F=0) + P(B=0, G=0, F=1)$

$= P(G=0|B=0, F=0) \cdot P(B=0) \cdot P(F=0) +$

$+ P(G=0|B=0, F=1) \cdot P(B=0) \cdot P(F=1) =$

$= (1-0.2) \cdot (1-0.9) \cdot (1-0.95) + (1-0.25) \cdot$

$\cdot 0.9 \cdot (1-0.95) \Rightarrow \boxed{P(B=0, G=0) = 0.038}$

$\rightarrow P(B=0, G=1) = P(G=1|B=0, F=0) \cdot P(B=0) \cdot P(F=0)$

$+ P(G=1|B=0, F=1) \cdot P(F=1) \cdot P(B=0) \Rightarrow$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

No. Date

$\Rightarrow P(B=0, G=1) = 0.2 \times 0.05 \times 0.2 + 0.25 \times 0.8 \times 0.05$

$\Rightarrow \boxed{P(B=0, G=1) = 0.012}$

$\rightarrow P(D=0, G=0) = P(D=0 \mid G=0) = 0.8$

$\rightarrow P(D=0, G=1) = P(D=0 \mid G=1) = 0.2$

$P(D=0, B=0) = 0.8 \cdot 0.038 + 0.2 \cdot 0.012$

$\Rightarrow \boxed{P(D=0, B=0) = 0.0328}$

Σύνολο: $P(F=0 \mid D=0, B=0) = \dfrac{P(B=0, F=0, D=0)}{P(B=0, D=0)}$, με:

$P(B=0, F=0, D=0) = P(B=0, F=0, G=0) \cdot P(G=0, D=0)$

$+ P(B=0, F=0, G=1) \cdot P(D=0, G=1) =$

$= P(G=0 \mid B=0, F=0) \cdot P(B=0) \cdot P(F=0) \cdot P(D=0 \mid G=0)$

$+ P(G=1 \mid B=0, F=0) \cdot P(B=0) \cdot P(F=0) \cdot P(D=0 \mid G=1)$

$= P(F=0) \cdot P(B=0) \{ P(G=0 \mid B=0, F=0) \cdot P(D=0 \mid G=0)$

$+ P(G=1 \mid B=0, F=0) \cdot P(D=0 \mid G=1) \}$

$= 0.2 \cdot 0.05 \{ 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 \} = 0.0008$

Scanned with CamScanner

No. Date

Άρα: $P(F=0 \mid D=0, B=0) = \dfrac{P(B=0, F=0, D=0)}{P(B=0, D=0)} =$

$= \dfrac{0.0058}{0.00328} \Rightarrow \boxed{P(F=0 \mid D=0, B=0) = 0.2073}$

Στο ερώτημα (β) έχουμε χαμηλότερη πιθανότητα λόγω του explaining away.

Scanned with CamScanner