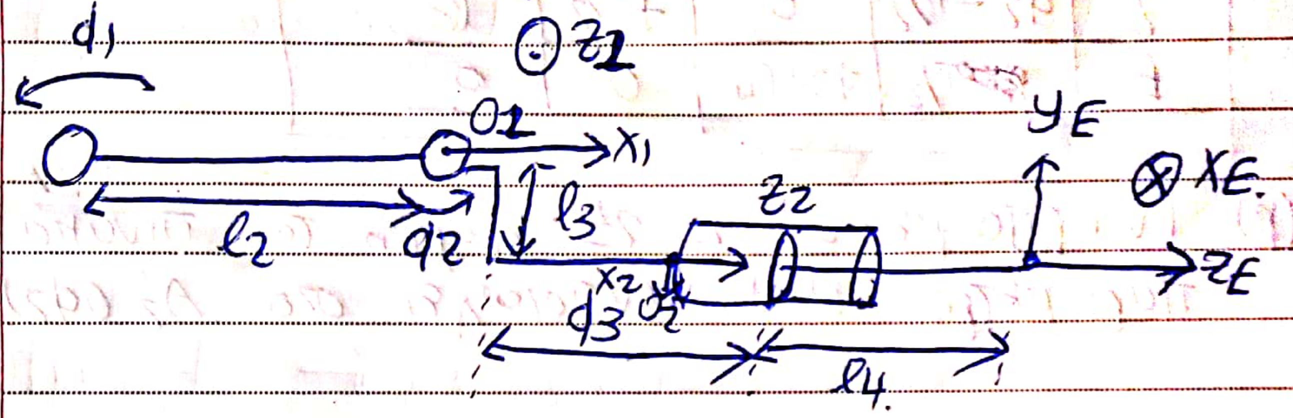
Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03118125.

Ρομποτική Ι

1η Σειρά Αναλ. Ασκήσεων.

Άσκηση 1η (α) Άξονες για τα πλαίσια αναφοράς:



Κανόνες τοποθέτησης πλαισίων:

1) Ο άξονας z_{i-1} ορίζει την άρθρωση q_i
2) Άξονας x_i επί της κοινής καθέτου των z_{i-1}, z_i και με κατεύθυνση από τον z_{i-1} στον z_i.

Παράμετροι D-H:

θ_i: γωνία μεταξύ των x_{i-1}, x_i (περί τον z_{i-1})
d_i: απόσταση x_{i-1}, x_i (κατά τον z_{i-1})
a_i: γωνία μεταξύ z_{i-1}, z_i (περί τον x_i)
~~θ_i: γωνία μεταξύ x_{i-1}, x_i (περί τον z_{i-1})~~

α_i: l_i: απόσταση z_{i-1}, z_i (κατά τον x_i)

Πίνακας παραμέτρων:

i	θ_i	d_i	α_i	l_i
1	$q_1-\pi/2$	$-l_1$	0	l_2
2	$q_2-\pi/2$	0	$+\pi/2$	l_3
E	$\pi/2$	d_3+l_4	0	0

(β) Γνωρίζουμε ότι η 2η γραμμή του Πίνακα παραμέτρων D-H αντιστοιχεί στο $A_2^1(q_2)$.

$$A_2^1(q_2)=\left[Rot(z,\theta_2)\cdot Tra(z,d_2)\right]\cdot\left[Rot(x,\alpha_2)\cdot Tra(x,l_3)\right]$$

με:

$$Rot(z,\theta_2)\cdot Tra(z,d_2)=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0\\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\cos(q_2-\pi/2)=\sin q_2$

$\sin(q_2-\pi/2)=-\cos q_2$

$$\begin{bmatrix} +s_2 & +c_2 & 0 & 0\\ -c_2 & +s_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Rot(x,\alpha_2)\cdot Tra(x,l_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\pi/2 & -s\pi/2 & 0\\ 0 & s\pi/2 & c\pi/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cos \pi/2 = 0$

$\sin \pi/2 = 1$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Τελικά:</u>

$$A_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ -C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow A_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} S_2 & 0 & -C_2 & l_3 S_2 \\ -C_2 & 0 & S_2 & -C_2 l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 2η}}$ (α) Με βάση το δοθέν σχήμα, έχουμε:

$$A_E^0 = [Tra(x,\ell_0)\cdot Tra(z,-\ell_1)]\cdot[Rot(z,q_1)\cdot Tra(x,\ell_2)]$$

$$\cdot[Rot(y,q_2)\cdot Tra(z,-\ell_3)]\cdot[Tra(z,-q_3-\ell_4)]\text{, με:}$$

$$A_{0'}^0 = Tra(x,\ell_0)\cdot Tra(z,-\ell_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_1^{0'} = Rot(z,q_1)\cdot Tra(x,\ell_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \ell_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & c_1\ell_2 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1\ell_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_2^1 = Rot(y,q_2)\cdot Tra(z,-\ell_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & 0 & s_2 & -\ell_3 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & -\ell_3 c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_4-\ell_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Tra(z, -q_3-\ell_4)$$

<u>Τελικά:</u>

$$\boxed{A_E^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & \ell_0+c_1\ell_2-c_1s_2(\ell_3+q_3+\ell_4) \\ c_2s_1 & c_1 & s_1s_2 & \ell_2s_1-s_1s_2[\ell_3+\ell_4+q_3] \\ -s_2 & 0 & c_2 & -\ell_1-c_2[\ell_3+\ell_4+q_3] \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(β) Με βάση τα αποτελέσματα του (α):

$$\begin{cases} p_{Ex} = \ell_0 + c_1[\ell_2 - s_2(\ell_3+\ell_4+q_3)] \\ p_{Ey} = s_1[\ell_2 - s_2[\ell_3+\ell_4+q_3]] \\ p_{Ez} = -[\ell_1 + c_2[\ell_3+\ell_4+q_3]] \end{cases}$$

$A_E^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_E^2$ $\cancel{A_1^0 A_2^0 A_E^0}$, αφού $A_1^0 = A_0^0 A_1^0$

$\underline{A_2^1 A_E^2 = A_E^1} \Rightarrow A_E^0 = A_1^0 \cdot A_E^1 \Rightarrow A_E^1 = (A_1^0)^{-1} \cdot A_E^0$

$\Longrightarrow A_2^1 \cdot A_E^2 = (A_1^0)^{-1} \cdot A_E^0$

↳ λαμβάνουμε υπόψην μόνο την 4η στήλη $[p_{Ex}, p_{Ey}, p_{Ez}]$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & -s_2(l_4+q_3)-l_3 c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & -c_2 l_3 - c_2(l_4+q_3) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & c_1 p_{Ex} - (l_2 + l_0 c_1) + p_{Ey} s_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_1 p_{Ey} + l_0 s_1 - p_{Ex} s_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & l_1 + p_{Ez} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Από 2η γραμμή: $0 = c_1 p_{Ey} + s_1(l_0 - p_{Ex})$

$$\tan(d_1) = s_1/c_1 \Longrightarrow \cancel{0 = p_{Ey} + \tan(d_1)(l_0 - p_{Ex})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tan(d_1/2) \\ \sin\theta = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2} \\ \cos\theta = \dfrac{(1-\tau^2)}{1+\tau^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} p_{Ey} + (l_0 - p_{Ex}) \frac{2\tau}{1+\tau^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = (1-\tau^2) p_{Ey} + (l_0 - p_{Ex}) 2\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{Ey} \tau^2 - 2\tau(l_0 - p_{Ex}) - p_{Ey} = 0$$

$$\Delta = 4(l_0 - p_{Ex})^2 + 4(p_{Ey})^2$$

$$\tau = \frac{+2(l_0 - P_{Ex}) \pm 2\sqrt{(l_0 - P_{Ex})^2 + P_{Ey}^2}}{2P_{Ey}} = \tan\left(\frac{q_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow q_1 = 2\arctan\left(\frac{(l_0 - P_{Ex}) \pm \sqrt{(l_0 - P_{Ex})^2 + P_{Ey}^2}}{P_{Ey}}\right)$$

Από 3η γραμμή:

$$-S_2(l_4 + q_3 + l_3) = C_1 P_{Ex} - (l_2 + l_0 C_1) + P_{Ey} S_1$$

~~Από 3η γραμμή~~ $\Rightarrow S_2 = \dfrac{(l_2 + l_0 C_1) - P_{Ex} C_1 - P_{Ey} S_1}{l_4 + l_3 + q_3}$

Από 3η γραμμή: $-C_2[l_3 + l_4 + q_3] = l_1 + P_{Ez}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{-(l_1 + P_{Ez})}{l_3 + l_4 + q_3}$$

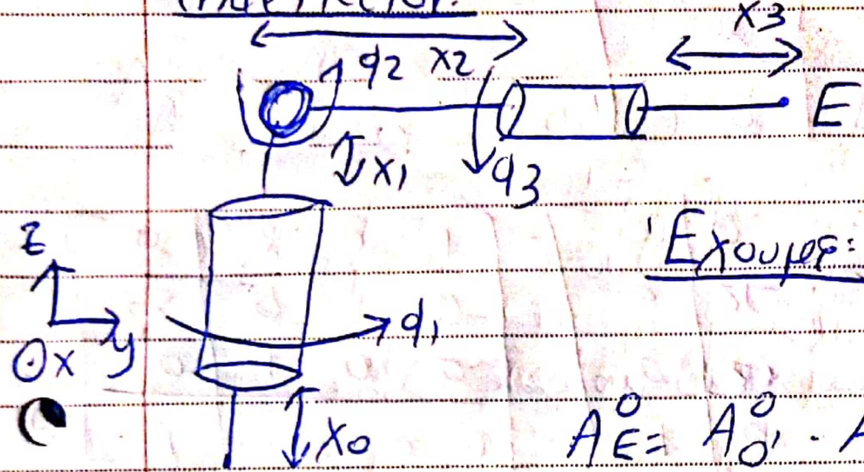
$$\Rightarrow \boxed{q_2 = \operatorname{atan2}\left(\frac{(l_2 + l_0 C_1) - P_{Ex} C_1 - P_{Ey} S_1}{l_4 + l_3 + q_3}, \frac{-(l_1 + P_{Ez})}{l_3 + l_4 + q_3}\right)}$$

Τέλος: $S_2^2 + C_2^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{[(l_2 + l_0 C_1) - P_{Ex} C_1 - P_{Ey} S_1]^2}{(l_3 + l_4 + q_3)^2}$

$$+ \frac{(l_1 + P_{Ez})^2}{\quad}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_3 = \pm \sqrt{\left[(l_2 + l_0 c_1) - p_{Ex} c_1 - p_{Ey} s_1\right]^2 + (l_1 + p_{Ez})^2} - (l_3 + l_4)}$$

Άσκηση 3η: Εύρεση θέσης και προσανατολισμού endeffector:



Έχουμε: $x_0 + x_1 = l_1$
$x_2 + x_3 = l_2$

$A_E^0 = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'} \cdot A_2^1 \cdot A_3^2$, με:

$A_{0'}^0 = Tra(z, x_0)$

$A_1^{0'} = Rot(z, q_1) \cdot Tra(z, x_1)$

$A_2^1 = Rot(x, q_2) \cdot Tra(y, x_2)$

$A_E^2 = Rot(y, q_3) \cdot Tra(y, x_3)$

$$A_{0'}^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_1^{0'} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & 0 \\ 0 & S_2 & C_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & -S_2 & C_2X_2 \\ 0 & S_2 & C_2 & S_2X_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_E^2 = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A_3^2} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A_E^3}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_3 & 0 & C_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

TEdina:

$$A^0_E = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 & -c_2s_3l_2 \\ c_3s_1 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_1c_2l_2 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 & l_1 + s_2l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$A^0_E = A^0_1 \cdot A^1_2 \cdot A^2_E$, αφού: $A^0_1 = A^0_{0'} \cdot A^{0'}_1$

$A^1_2 \cdot A^2_E = A^1_E \Longrightarrow A^0_E = A^0_1 \cdot A^1_E \Rightarrow A^1_E = (A^0_1)^{-1} \cdot A^0_E$

$\Rightarrow A^1_2 \cdot A^2_E = (A^0_1)^{-1} \cdot A^0_E$

↳ Λαμβάνουμε υπόψιν <u>ΜΟΝΟ</u> το μητρώο στροφής R^0_E

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & 0 & s_3 & \cdots \\ s_2s_3 & c_2 & -c_3s_2 & \cdots \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1n_x + s_1n_y & c_1o_x + s_1o_y & a_xc_1 + a_ys_1 & \cdots \\ c_1n_y - s_1n_x & c_1o_y - s_1o_x & a_yc_1 - a_xs_1 & \cdots \\ n_z & o_z & a_z & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Στοιχείο 1,2: $c_1 o_x + s_1 o_y = 0 \xRightarrow{\tan q_1 = \frac{s_1}{c_1}}$

$$\boxed{q_1 = \arctan\left(-\frac{o_x}{o_y}\right)}$$

Στοιχεία (2,2) και (3,2):

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 o_y - s_1 o_x = c_2 \\ o_z = s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{q_2 = atan2(c_1 o_y - s_1 o_x, o_z)}$$

$$\boxed{q_2 = atan2(o_z, c_1 o_y - s_1 o_x)}$$

Στοιχεία (1,1) και (1,3):

$$\left.\begin{array}{l} c_3 = c_1 n_x + s_1 n_y \\ s_3 = a_x c_1 + a_y s_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{q_3 = atan2(a_x c_1 + a_y s_1, c_1 n_x + s_1 n_y)}$$