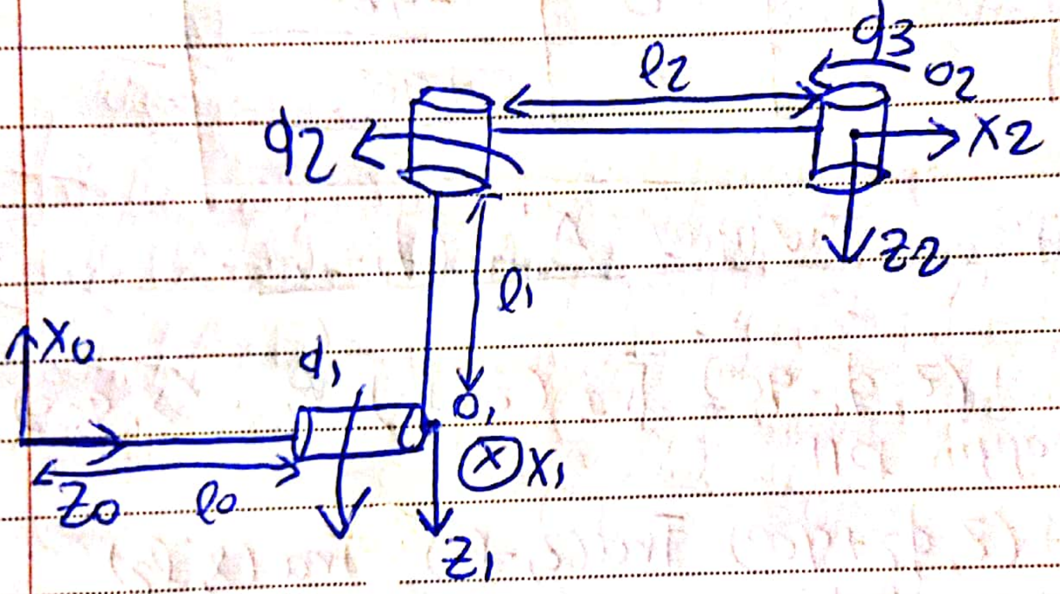
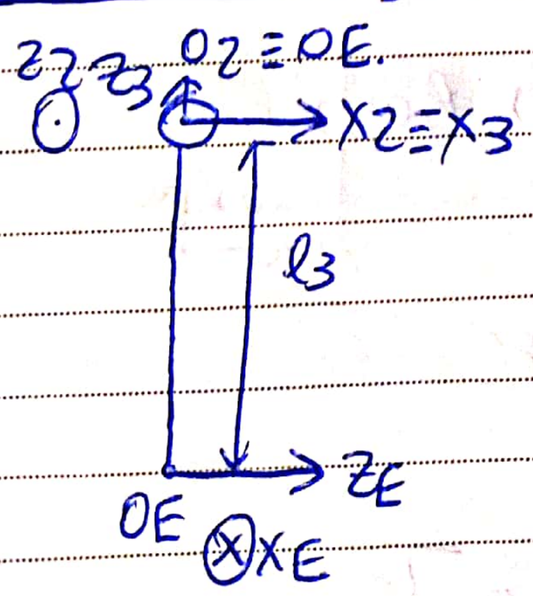
Στεργλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος el18175

| |
|---|
| Ρομποτική I |
| Εξαμηνιαία Εργασία |
| Α. Θεωρητικό Μέρος. |

1. Στο επίπεδο $x_0 - z_0$:




Στο επίπεδο $y_0 - z_0$:



**Πίνακας DH:**

| i | $\theta_i$ $(z_{i-1})$ | $d_i$ $(z_{i-1})$ | $\ell_i$ $(x_i)$ | $a_i$ $(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $q_1-90^\circ$ | $\ell_0$ | $0$ | $+90^\circ$ |
| 2 | $q_2+90^\circ$ | $-\ell_1$ | $+\ell_2$ | $0$ |
| 3 | $q_3+0^\circ$ | $0$ | $0$ | $-90^\circ$ |
| E | $90^\circ$ | $-\ell_3$ | $0$ | $+90^\circ$ |

2. **Προσδιορισμός πινάκων $A^{i}_{i+1}(q_{i+1})$:**

$$A^0_1(q_1) = Rot(z, q_1-90^\circ) \cdot Tra(z, \ell_0) \cdot Rot(x, 90^\circ)$$
↳ 1η γραμμή DH

$$A^1_2(q_2) = Rot(z, q_2+90^\circ) \cdot Tra(z, -\ell_1) \cdot Tra(x, \ell_2)$$
↳ 2η γραμμή DH

$$A^2_3(q_3) = Rot(z, q_3) \cdot Rot(x, -90^\circ)$$
↳ 3η γραμμή DH

$$A^3_E = Rot(z, 90^\circ) \cdot Tra(z, -\ell_3) \cdot Rot(x, 90^\circ)$$
↳ 4η γραμμή DH.

**Προκύπτουν οι εξής πίνακες:**

$$A^0_1(q_1) = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ -C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} -s_2 & -c_2 & 0 & -\ell_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & \ell_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_3^2(q_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_E^3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\ell_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Συνολικά:</u>

$$A_2^0(q_1, q_2) = A_1^0 \cdot A_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -s_1 s_2 & -c_2 s_1 & -c_1 & c_1 \ell_1 - \ell_2 s_1 s_2 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & \ell_1 s_1 + c_1 \ell_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & \ell_0 + c_2 \ell_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_3^0(q_1,q_2,q_3) = A_2^0 \cdot A_3^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} -S_1 S_{23} & C_1 & -S_1 C_{23} & C_1 l_1 - l_2 S_1 S_2 \\ C_1 S_{23} & S_1 & C_1 C_{23} & l_1 S_1 + C_1 l_2 S_2 \\ C_{23} & 0 & -S_{23} & l_0 + C_2 l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_E^0(q_1,q_2,q_3) = A_3^0 \cdot A_E^3 =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} C_1 & -C_{23} S_1 & -S_1 S_{23} & C_1 l_1 + S_1 [C_{23} l_3 - l_2 S_2] \\ S_1 & C_1 C_{23} & C_1 S_{23} & l_1 S_1 + C_1 [l_2 S_2 - C_{23} l_3] \\ 0 & -S_{23} & C_{23} & l_0 + C_2 l_2 + l_3 S_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Η κινηματική εξίσωση του ρομπότ δίνεται από την κάτωθι σχέση

$$\boxed{p = A_E^0[1:3,4] \text{ ή } \begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 l_1 + S_1 [C_{23} l_3 - l_2 S_2] \\ l_1 S_1 + C_1 [l_2 S_2 - l_3 C_{23}] \\ l_0 + C_2 l_2 + l_3 S_{23} \end{bmatrix}}$$

3. **Υπολογισμός διανυσμάτων $\hat{b}_i$:**

$\hat{b}_0 = [0 \quad 0 \quad 1]$

$\hat{b}_1 = \hat{A}^0_1[1:3,3] = [-c_1, -s_1, 0]$

$\hat{b}_2 = \hat{A}^0_2[1:3,3] = [-c_1, -s_1, 0]$

**Υπολογισμός διανυσμάτων $r_{i-1,E}$:**

$r_{i-1,E} = A^0_n[1:3,4] - A^0_{i-1}[1:3,4]$

$$r_{0,E} = A^0_E[1:3,4] - 0 = \begin{bmatrix} c_1 l_1 + s_1[c_{23} l_3 - l_2 s_2] \\ l_1 s_1 + c_1[l_2 s_2 - c_{23} l_3] \\ l_0 + c_2 l_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$r_{1,E} = A^0_E[1:3,4] - A^0_1[1:3,4] =$

$$= \begin{bmatrix} c_1 l_1 + s_1[c_{23} l_3 - l_2 s_2] \\ l_1 s_1 + c_1[l_2 s_2 - c_{23} l_3] \\ c_2 l_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$r_{2,E} = A^0_E[1:3,4] - A^0_2[1:3,4] =$

$$= \begin{bmatrix} s_1 c_{23} l_3 \\ -c_1 c_{23} l_3 \\ l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

Για $i=1$:

$$J_{L1} = \hat{b}_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 l_1 + s_1 [c_{23} l_3 - l_2 s_2] \\ l_1 s_1 + c_1 [l_2 s_2 - c_{23} l_3] \\ l_0 + c_2 l_2 + l_2 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + c_1 [c_{23} l_3 - l_2 s_2] \\ c_1 l_1 + s_1 [c_{23} l_3 - l_2 s_2] \\ 0 \end{bmatrix}$$ και $J_{A1} = \hat{b}_0 = [0 \ \ 0 \ \ 1]$

$$J_{L2} = \hat{b}_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -s_1 (c_2 l_2 + l_3 c_{23}) \\ c_1 (c_2 l_2 + l_3 s_{23}) \\ c_{23} l_3 - l_2 s_2 \end{bmatrix}$$ και

$J_{A2} = \hat{b}_1 =$
$= [c_1, s_1, 0]$

$$J_{L3} = \hat{b}_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 s_{23} \\ l_3 c_1 s_{23} \\ c_{23} l_3 \end{bmatrix}$$ και

$J_{A3} = \hat{b}_2$
$= [-c_1, -s_1, 0]$

<u>Σύνολο:</u> $J = \left[\begin{array}{c|c|c} J_{L1} & J_{L2} & J_{L3} \\ \hline J_{A1} & J_{A2} & J_{A3} \end{array}\right]$

ή

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} -l_1 s_1 + c_1[c_{23} l_3 - l_2 s_2] & -s_1(c_2 l_2 + l_3 c_{23}) & -l_3 s_1 s_{23} \\ c_1 l_1 + s_1[c_{23} l_3 - l_2 s_2] & c_1(c_2 l_2 + l_3 s_{23}) & l_3 c_1 c_{23} \\ 0 & c_{23} l_3 - l_2 s_2 & c_{23} l_3 \\ \hline 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4. <u>Αντίστροφο διαφ. μοντέλο:</u> Αφού η μελέτη του γίνεται ως προς την γραμμ. ταχύτητα, θεωρούμε ~~του~~ την Ιακωβιανή μήτρα γρ. ταχύτητας:

$$J\_V = J([1:3],[1:3]) \rightarrow V = J\_V \cdot \dot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot q = J\_V^{-1} \cdot V} \quad \cancel{\text{με } J\_V^{-1} =}, \text{ με:}$$

$$J\_V^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_1}{C_{23}l_3 - l_2S_2} , & \dfrac{S_1}{C_{23}l_3 - l_2S_2} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dfrac{-S_{23}}{l_2(C_2C_{23}+S_2S_{23})} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \frac{-C_{23}[C_1l_1 + C_{23}l_3S_1 - l_2S_1S_2]}{l_2[C_{23}l_3 - l_2S_2][C_2C_{23}+S_2S_{23}]}$$

$$a_{22} = \frac{C_{23}[C_1C_{23}l_3 - l_1S_1 - C_1l_2S_2]}{l_2[C_{23}l_3 - l_2S_2][C_2C_{23}+S_2S_{23}]}$$

$$a_{31} = \frac{[C_1l_1 + C_{23}l_3S_1 - l_2S_1S_2]}{l_2l_3[C_2C_{23}+S_2S_{23}]}$$

$$a_{32} = \frac{l_1S_1 - C_1C_{23}l_3 + C_1l_2S_2}{l_2l_3[C_2C_{23}+S_2S_{23}]}$$

$$a_{33} = \frac{C_2l_2 + l_3S_{23}}{l_2l_3 \cdot [C_2C_{23}+S_2S_{23}]}$$

και $V = \begin{bmatrix} V_{Ex} \\ V_{Ey} \\ V_{Ez} \end{bmatrix}$ και $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$

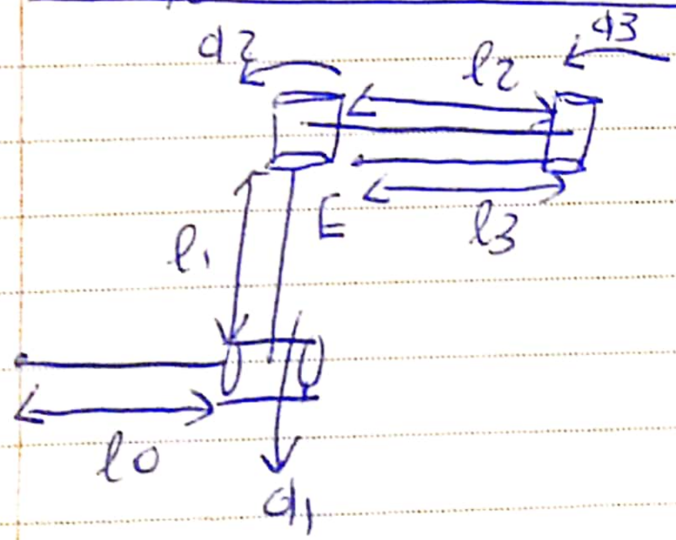
## Ιδιόμορφες Διατάξεις:

$$\det(J_v)=0 \Rightarrow l_2 \cdot l_3 \cdot [c_{23} l_3 - l_2 s_2][c_2 c_{23} + s_2 s_{23}] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(q_2+q_3)\cdot l_3 = l_2 \cdot \sin(q_2) \\ \cos(q_2)\cdot \cos(q_2+q_3) = -\sin(q_2)\cdot \sin(q_2+q_3) \end{cases}$$

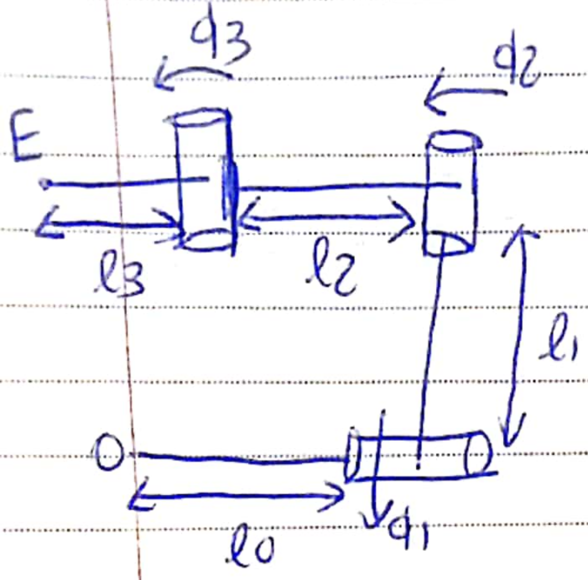
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} q_2 = \pi \text{ και } q_3 = \pi/2 \\ q_2 = 0 \text{ και } q_3 = -\pi/2 \\ q_2 = 0 \text{ και } q_3 = \pi/2 \end{cases}}$$

Για $q_2=0$ και $q_3=-\pi/2$:



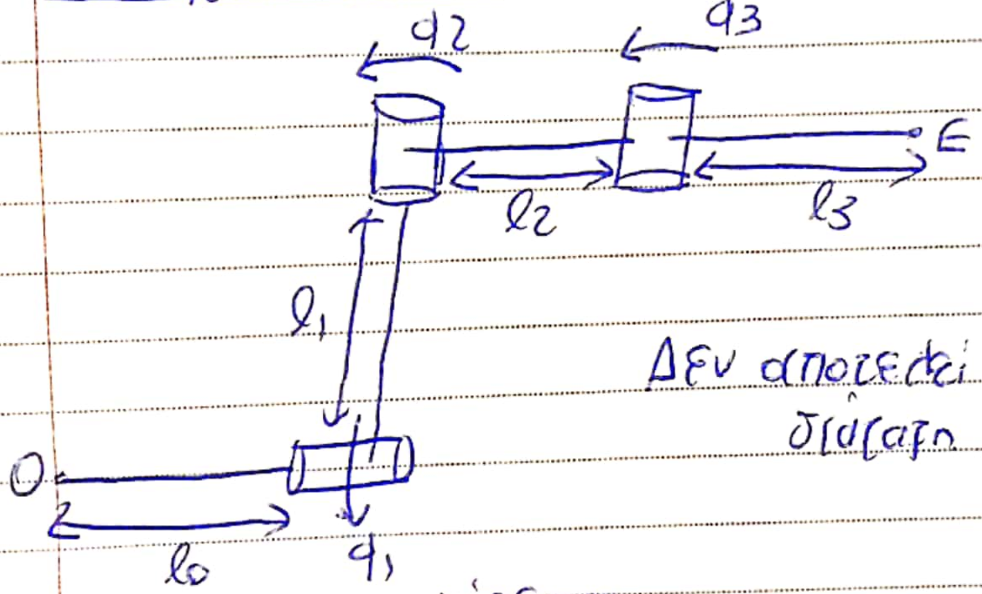

x: Αδυναμία κίνησης κατά τον x άξονα.

Για $q_2=\pi$ και $q_3=+\pi/2$:




Δεν αποτελεί ιδιόμορφη διάταξη

<u>Για $q_2 = 0$ και $q_3 = \pi/2$:</u>




Δεν αποτελεί ιδιόμορφη διάταξη

→ <u>Για επαλήθευση:</u>

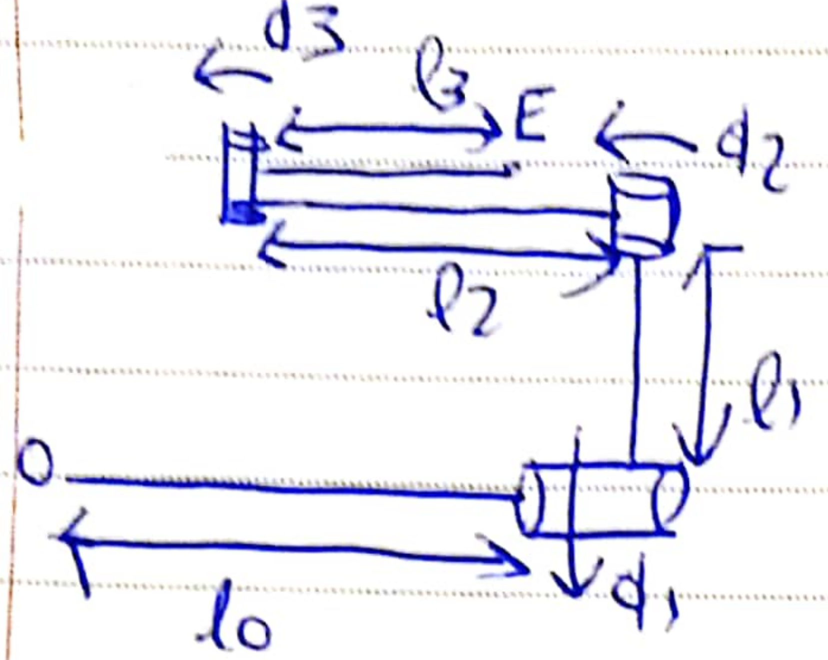
<u>Επιπλέον:</u> $c_2 c_{23} - s_2 s_{23} = 0 \Rightarrow \cos(q_2 + q_3 - q_2) = 0$

$\Rightarrow \cos(q_3) = 0 \Rightarrow \boxed{q_3 = k\pi + \pi/2}$

<u>Η 1η σχέση γίνεται:</u> $\cos(q_2 + \pi/2)\, l_3 = l_2 \sin(q_2)$

$\Rightarrow \sin(q_2)\, l_3 = l_2 \sin q_2 \Rightarrow \sin q_2 = 0 \rightarrow \boxed{q_2 = k\pi}$

Για $q_2 = \pi$ και $q_3 = -\pi/2$




x: Απώλεια κίνησης στον x άξονα.

$$\boxed{\text{Άρα, ιδιόμορφη προκύπτει για } q_3 = -\pi/2}$$

## 5. Αντίστροφο Γεωμ. Μοντέλο:

Έχουμε: $A_E^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_E^2$, με: $A_E^2 = A_3^2 \cdot A_E^3$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad A_2^1 \cdot A_E^2 = (A_1^0)^{-1} \cdot A_E^0$, θεωρώντας

$$A_E^0 = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & p_{Ex} \\ * & * & * & p_{Ey} \\ * & * & * & p_{Ez} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

Γνωστή μόνο η 4η στήλη του πίνακα

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & l_3 c_{23} - l_2 s_2 \\ * & * & * & c_2 l_2 + l_3 s_{23} \\ * & * & * & -l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & p_{Ex} s_1 - c_1 p_{Ey} \\ * & * & * & p_{Ez} - l_0 \\ * & * & * & -c_1 p_{Ex} - s_1 p_{Ey} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Από την $3^{η}$ γραμμή:

$$c_1 p_{Ex} + s_1 p_{Ey} = \ell_1 \xrightarrow[\tau = \tan(q_1/2)]{\tan(q_1) = s_1/c_1}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$$

$$\cos\theta = \frac{(1-\tau^2)}{1+\tau^2}$$

$$\Rightarrow \ell_1 = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} p_{Ex} + \frac{2\tau}{1+\tau^2} p_{Ey} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\tau^2)\ell_1 = (1-\tau^2) p_{Ex} + 2\tau p_{Ey} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau^2(\ell_1 + p_{Ex}) - 2\tau p_{Ey} + (\ell_1 - p_{Ex}) = 0$$

$$\Delta = 4p_{Ey}^2 - 4(\ell_1^2 - p_{Ex}^2) = 4\left[p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 - \ell_1^2\right]$$

$$\tau = \frac{2p_{Ey} \pm 2\sqrt{p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 - \ell_1^2}}{2(\ell_1 + p_{Ex})} = \tan(q_1/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = 2\arctan\left(\frac{p_{Ey} \pm \sqrt{p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 - \ell_1^2}}{(\ell_1 + p_{Ex})}\right)}$$

~~Από τι~~

Από τις γραμμές 1 και 2:

1η: $l_3 c_{23} - l_2 s_2 = p_{Ex} s_1 - c_1 p_{Ey} = A_0$ (: γνωστό) (1)

2η: $l_3 s_{23} + c_2 l_2 = p_{Ez} - l_0 = A_1$ (: γνωστό) (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3^2 c_{23}^2 + l_2^2 s_2^2 = A_0^2 - 2 l_2 l_3 s_2 c_{23} \\ l_3^2 s_{23}^2 + c_2^2 l_2^2 + 2 l_2 l_3 s_{23} c_2 = A_1^2 \end{cases} \xRightarrow{(+)}$$

$$l_3^2 + l_2^2 + 2 l_2 l_3 [\overbrace{s_{23} c_2 - s_2 c_{23}}^{\sin(\theta_2+\theta_3-\theta_2)}] = A_0^2 + A_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{s_3 = \frac{A_0^2 + A_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}} \text{ και}$$

$$\boxed{c_3 = \pm\sqrt{1 - s_3^2} = \pm\sqrt{\frac{(l_2+l_3)^2 - A_0^2 - A_1^2}{2 l_2 l_3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_3 = atan2(s_3, c_3)}$$

Αναλύουμε τους όρους $c_{23}, s_{23}$ στις εξισώσεις (1) και (2):

$$\begin{cases} l_3 c_2 c_3 - l_3 s_2 s_3 - l_2 s_2 = A_0 \\ l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + c_2 l_2 = A_1 \end{cases} \xrightarrow[l_3 s_3 = A_3]{l_3 c_3 = A_2}$$

$$\left.\begin{cases} A_2 C_2 - S_2 A_3 - \ell_2 S_2 = A_0 \\ A_2 S_2 + A_3 C_2 + C_2 \ell_2 = A_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} A_2 C_2 - S_2 (A_3 + \ell_2) = A_0 \\ A_2 S_2 + C_2 (A_3 + \ell_2) = A_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με $+\dfrac{A_2}{A_3+\ell_2}$:

$$\left.\begin{cases} +\dfrac{A_2^2}{A_3+\ell_2} C_2 + (-S_2 A_2) = \dfrac{A_0 A_2}{A_3+\ell_2} \\ A_2 S_2 + C_2 (A_3 + \ell_2) = A_1 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$C_2 = \frac{\dfrac{A_0 A_2}{A_3+\ell_2} + A_1}{\dfrac{A_2^2}{A_3+\ell_2} + A_3 + \ell_2} \quad \text{ή} \quad \boxed{C_2 = \frac{A_0 A_2 + A_1 (A_3 + \ell_2)}{A_2^2 + (A_3 + \ell_2)^2}}$$

Πολ/ζουμε την 1η εξίσωση με $-\dfrac{A_3+\ell_2}{A_2}$:

$$\left.\begin{cases} -(A_3+\ell_2) C_2 + \dfrac{(A_3+\ell_2)^2}{A_2} S_2 = -\dfrac{A_0}{A_2}(A_3+\ell_2) \\ A_2 S_2 + C_2 (A_3 + \ell_2) = A_1 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow s_2 = \frac{A_1 - \frac{A_0}{A_2}(A_3+l_2)}{A_2 + \frac{(A_3+l_2)^2}{A_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s_2 = \frac{A_1 A_2 - A_0(A_3+l_2)}{A_2^2+(A_3+l_2)^2}}$$

Σύνολο:

$$\boxed{\phi_2 = \mathrm{atan2}(s_2, c_2)}$$

Οι αλγ. σχέσεις και πράξεις που χρησιμοποιήθηκαν:

$\cos(\varphi - 90°) = \sin\varphi$
$\sin(\varphi - 90°) = -\cos\varphi$
$\cos(\varphi + 90°) = \sin\varphi$
$\sin(\varphi + 90°) = \cos\varphi$

Εξωτ. γινόμενο: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, με:

$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$ $\quad$ $c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$c_2 = -[a_1 b_3 - a_3 b_2]$

Ορίζουσα: $\quad$ 2x2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3x3: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$

$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

## Αντίστροφος πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$