Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03/13/25.

Ρομποτική I

2η Σειρά Ασκήσεων.

Άσκηση 2.1 (α) Ο πίνακας A_{i+1} λαμβάνεται από την γραμμή $(i+1)$ του πίνακα D-H. Συγκεκριμένα, έχουμε:

~~$A_1^0(q_1)$ Rot(x, l_1) · Tra(x, l_1) · Rot(~~

$$A_1^0(q_1) = Tra(z, l_1) \cdot Rot(z, q_1 + \pi/2) \cdot Tra(x, 0) \cdot Rot(x, -\tfrac{\pi}{2})$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_2^1(q_2) = Rot(z, q_2 - \pi/2) \cdot \quad Rot(x, -\pi/2)$$

$=$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ -c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_3^2(q_3) = Tra(z, l_2) \cdot Rot(z, q_3 + \tfrac{\pi}{2}) \cdot Rot(x, \pi/2)$$

$$= \ldots = \left[\begin{array}{ccc|c} -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Άρα:</u>

$$A_2^0(q_1, q_2) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} -s_1 s_2 & c_1 & -c_2 s_1 & 0 \\ c_1 s_2 & s_1 & c_1 c_2 & 0 \\ c_2 & 0 & -s_2 & l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_3^0(q_1, q_2, q_3) = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1c_3 + s_1s_2s_3 & -c_2s_1 & c_1s_3 - c_3s_1s_2 & -c_2l_2s_1 \\ c_3s_1 - c_1s_2s_3 & c_1c_2 & s_1s_3 + c_1c_3s_2 & c_1c_2l_2 \\ -c_2s_3 & -s_2 & c_2c_3 & l_1 - l_2s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Υπολογισμός διανυσμάτων $\hat{b}_i$:</u>

$\hat{b}_0 = [0 \quad 0 \quad 1]$

$\hat{b}_1 = A_1^0[1:3,3] = [-c_1, -s_1, 0]$

$\hat{b}_2 = A_2^0[1:3,3] = [-c_2s_1, c_1c_2, -s_2]$

<u>Υπολογισμός διανυσμάτων $r_{i-1,E}$:</u>

- Είναι $\rightarrow$ $r_{i-1,E} = A_n^0[1:3,4] - A_{i-1}^0[1:3,4]$

$$r_{0,E} = A_E^0[1:3,4] = A_3^0[1:3,4] = \begin{bmatrix} -c_2s_1l_2 \\ c_1c_2l_2 \\ l_1 - l_2s_2 \end{bmatrix}$$

$r_{1,E} = A_E^0[1:3,4] - A_1^0[1:3,4] =$

$$= \begin{bmatrix} -c_2l_2s_1 \\ c_1c_2l_2 \\ l_1 - l_2s_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \Rightarrow r_{1,E} = \begin{bmatrix} -c_2l_2s_1 \\ c_1c_2l_2 \\ -l_2s_2 \end{bmatrix} = r_{2,E}$$

Για i=1:

$$J_{L_1} = \hat{b}_0 \times r_{0,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_2 s_1 l_2 \\ c_1 c_2 l_2 \\ l_1 - l_2 s_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 c_2 l_2 \\ -c_2 s_1 l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και } J_{A_1} = \hat{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για i=2: $J_{L_2} = \hat{b}_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_2 s_1 l_2 \\ c_1 c_2 l_2 \\ -l_2 s_2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} s_1 s_2 l_2 \\ -c_1 s_2 l_2 \\ -c_2 l_2 \end{bmatrix} \quad \text{και } J_{A_2} = \hat{b}_1 = \cancel{[-c_1, s_1, 0]}\ [-c_1, -s_1, 0]$$

Για i=3: $J_{L_3} = \hat{b}_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} -c_2 s_1 \\ c_1 c_2 \\ -s_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c_2 s_1 l_2 \\ c_1 c_2 l_2 \\ -l_2 s_2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και } J_{A_3} = \hat{b}_2 = [-c_2 s_1, c_1 c_2, -s_2]$$

$$J(q_1,q_2,q_3) = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & J_{L3} \\ J_{A1} & J_{A2} & J_{A3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1c_2l_2 & s_1s_2l_2 & 0 \\ -c_2s_1l_2 & -c_1s_2l_2 & 0 \\ 0 & -c_2l_2 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_2s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1c_2 \\ 1 & 0 & -s_2 \end{bmatrix}$$

(B) Ως προς την γωνιακή ταχύτητα, λαμβάνουμε υπόψιν τα διανύσματα J_{A1}, J_{A2}, J_{A3} και κατ'επέκταση θέλουμε $\det(J[4:6,1:3]) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -c_1 & -c_2s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1c_2 \\ 1 & 0 & -s_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -c_2s_1^2 - c_2s_1^2 = 0 \Rightarrow$$

Ιδιόμορφες διατάξεις για $c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{q_2 = k\pi \pm \frac{\pi}{2}}$

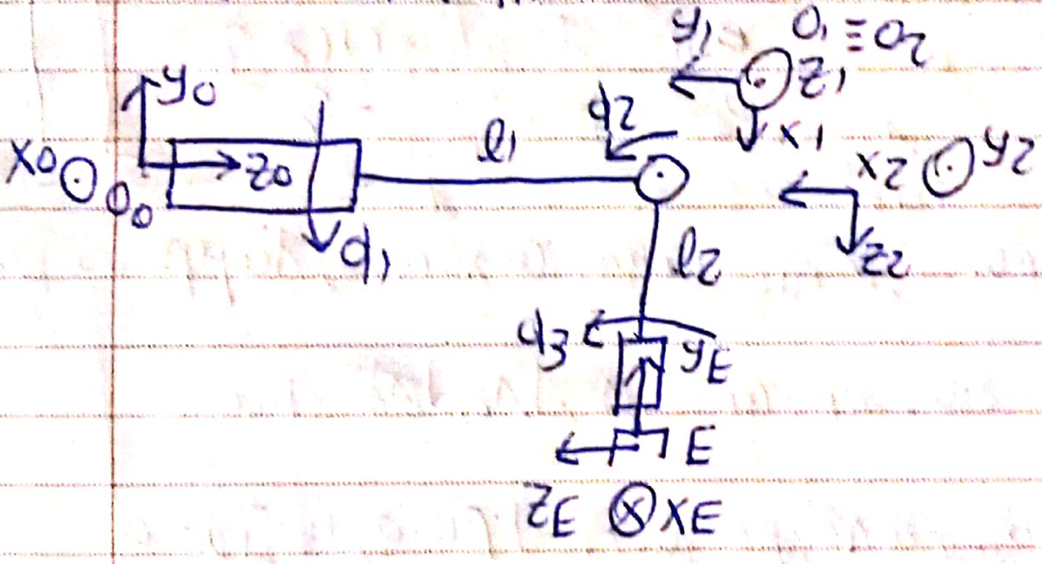
Γεωμετρική ερμηνεία

Έχουμε $A_E^0 = [Rot(z, q_1+\pi/2) \cdot Tra(z, l_1) \cdot Rot(x, -\pi/2)$

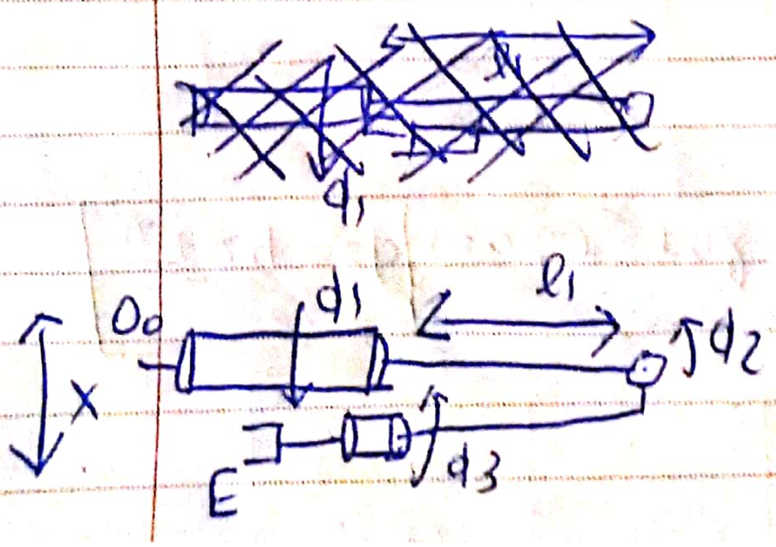
$\cdot\ Rot(z, q_2-\pi/2) \cdot Rot(x, -\pi/2) \cdot Rot(z, q_3+\pi/2)$

$\cdot\ Tra(z, l_2) \cdot Rot(x, \pi/2)]$, που αντιστοιχεί στην

κάτωθι διάταξη:



Για $q_2 = -\pi/2$ ή $q_2 = 3\pi/2$ $(k = \pm 1)$:



Παρατηρούμε ότι για τις άνωθι γωνίες q_2 ο ρομποτικός βραχίονας υπάγεται σε ιδιόμορφη διάταξη με απώλεια ενός DOF (όπως σημειώνεται στο σχήμα)

Άσκηση 2.1 (α)

$$A_2^0(q_1,q_2) = A_1^0(q_1)\cdot A_2^1(q_2) =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & l_0 + c_1c_2l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_1 + l_2s_2 \\ -c_2s_1 & s_1s_2 & c_1 & -c_2s_1l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_3^0(q_1,q_2,q_3) = A_2^0\cdot A_3^2 =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_{123} - c_1s_{23} & -c_1c_2s_3 - c_1c_3s_2 & s_1 & l_0 + c_1c_2l_2 - c_1c_2s_3l_3 - c_1c_3s_2l_3 \\ c_2s_3 + c_3s_2 & c_2c_3 - s_2s_3 & 0 & l_1 + l_2s_2 + c_2c_3l_3 - l_3s_2s_3 \\ s_{123} - s_1c_{23} & c_2s_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1 & c_2l_3s_1s_3 - c_2l_2s_1 + c_3l_3s_1s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Από τον πίνακα A_1^0 κατανοούμε ότι η σειρά των μετατοπίσεων/περιστροφών είναι η εξής:

$$A_1^0(q_1) = \underbrace{Tra(x,l_0)}_{A_{0'}^0}\cdot \underbrace{Rot(y,q_1)\cdot Tra(y,l_1)}_{A_1^{0'}}$$

Ομοίως:

$A_2^1(\phi_2) = Rot(z,\phi_2) \cdot Tra(x, l_2)$

$A_3^2(\phi_3) = Rot(z,\phi_3) \cdot Tra(y, l_3)$

Υπολογισμός διανυσμάτων $\hat{b}_i$:

$\hat{b}_0 \rightarrow \phi_1$: στροφική κατά $y \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{b}_0 = A_{0'}^{0}[1:3, 2] \Rightarrow \hat{b}_0 = [0 \; 1 \; 0] = \hat{y}_{0'}$

$\hat{b}_1 \rightarrow \phi_2$: στροφική κατά $z \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{b}_1 = A_1^0[1:3, 3] \Rightarrow \hat{b}_1 = [s_1 \; 0 \; c_1] = \hat{z}_1$

$\hat{b}_2 \rightarrow \phi_3$: στροφική κατά $z \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{b}_2 = A_2^0[1:3, 3] \Rightarrow \hat{b}_2 = [s_1 \; 0 \; c_1] = \hat{z}_2$

Υπολογισμός διανυσμάτων $r_{i-1,E}$:

$r_{i-1,E} = A_E^0[1:3, 4] - A_{i-1}^0[1:3, 4]$

$r_{0',E} = A_E^0[1:3, 4] - A_{0'}^0[1:3, 4]$

$$\Rightarrow r_{0'E} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 l_2 - c_1 c_2 l_3 s_3 - c_1 c_3 l_3 s_2 \\ l_1 + l_2 s_2 + c_2 c_3 l_3 - s_2 s_3 l_3 \\ c_2 l_3 s_1 s_3 - c_2 l_2 s_1 + c_3 l_3 s_1 s_2 \end{bmatrix}$$

$$r_{1,E} = A^0_E[1:3,4] - A^0_1[1:3,4]$$

$$= \begin{bmatrix} c_1c_2l_2 - c_1c_2l_3s_3 - c_1c_3l_3s_2 \\ l_2s_2 + c_2c_3l_3 - s_2s_3l_3 \\ c_2l_3s_1s_3 - c_2l_2s_1 + c_3l_3s_1s_2 \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = A^0_E[1:3,4] - A^0_2[1:3,4] =$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1c_2l_3s_3 - c_1c_3l_3s_2 \\ c_2c_3l_3 - l_3s_2s_3 \\ c_2l_3s_1s_3 + c_3l_3s_1s_2 \end{bmatrix}$$

<u>Για $i=1$:</u> $J_{L1} = \underset{\substack{\parallel \\ J_{A_1}}}{\hat{b}_0} \times r_{0'E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times r_{0'E} = \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow J_{L1} = \begin{bmatrix} c_2l_3s_1s_3 - c_2l_2s_1 + c_3l_3s_1s_2 \\ 0 \\ -[c_1c_2l_2 - c_1c_2l_3s_3 - c_1c_3l_3s_2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (l_3s_{23} - l_2c_2)s_1 \\ 0 \\ +c_1[l_3s_{23} - l_2c_2] \end{bmatrix}$$

<u>Για $i=2$:</u> $J_{L2} = \hat{b}_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \times r_{1,E} =$

$\overset{\shortparallel}{J_{A2}}$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 [l_2 s_2 + l_3 c_{23}] \\ l_2 c_2 - l_3 s_{23} \\ s_1 [l_2 s_2 + l_3 c_{23}] \end{bmatrix}$$

<u>Για $i=3$:</u> $J_{L3} = \hat{b}_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \times r_{2,E}$

$\overset{\shortparallel}{J_{A3}}$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 l_3 c_{23} \\ l_3 s_{23} \\ s_1 c_{23} l_3 \end{bmatrix}$$

<u>Τελικά:</u> $J = \left[\begin{array}{c:c:c} J_{L1} & J_{L2} & J_{L3} \\ \hdashline J_{A1} & J_{A2} & J_{A3} \end{array}\right]$

$$= \begin{bmatrix} s_1 (l_3 s_{23} - c_2 l_2) & -c_1 [l_2 s_2 + c_{23} l_3] & -c_1 c_{23} l_3 \\ 0 & l_2 c_2 - l_3 s_{23} & l_3 s_{23} \\ c_1 [l_3 s_{23} - c_2 l_2] & s_1 [l_2 s_2 + l_3 c_{23}] & s_1 c_{23} l_3 \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

(β) Για εύρεση των ιδιόμορφων διατάξεων ως προς την γραμμική ταχύτητα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

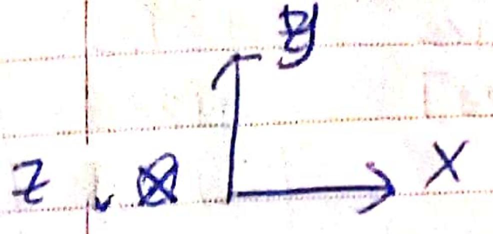
$$\det(J[1:3, 1:3]) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

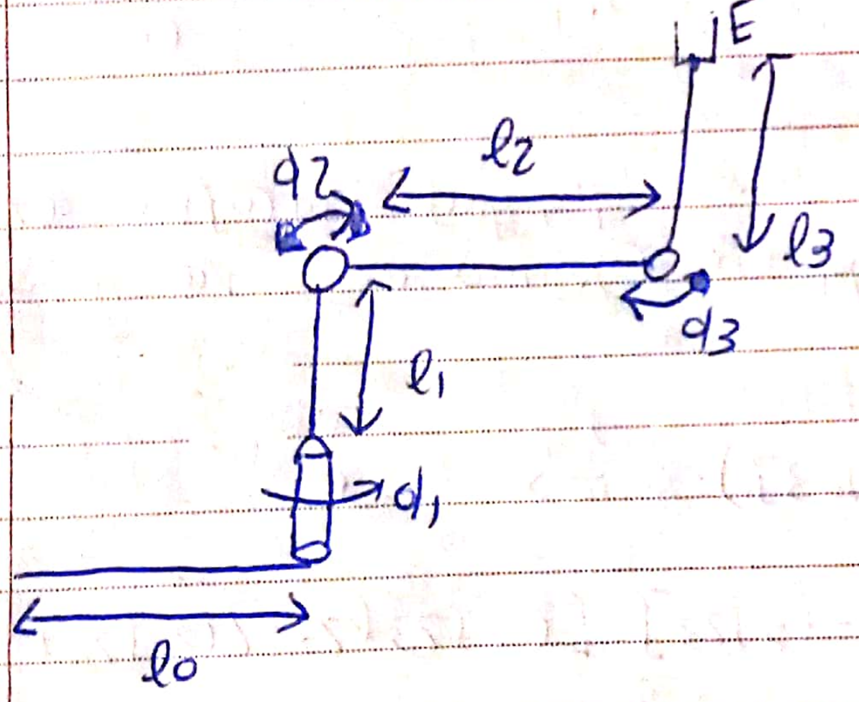
$$\Rightarrow -l_3 \cdot [c_2 l_2 - l_3 s_{23}] \cdot [c_2 c_{23} l_2 - 2 c_{23} s_{23} l_3 - l_2 s_2 s_{23}] = 0 \Rightarrow [c_2 l_2 - l_3 s_{23}] [l_2 \cdot \cos(2q_2 + q_3) - \sin(2(q_2+q_3)) \, l_3] = 0$$

Λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} l_2 \cos(q_2) = l_3 \sin(q_2+q_3) \\ l_2 \cos(2q_2+q_3) = l_3 \sin(2(q_2+q_3)) \end{cases}$

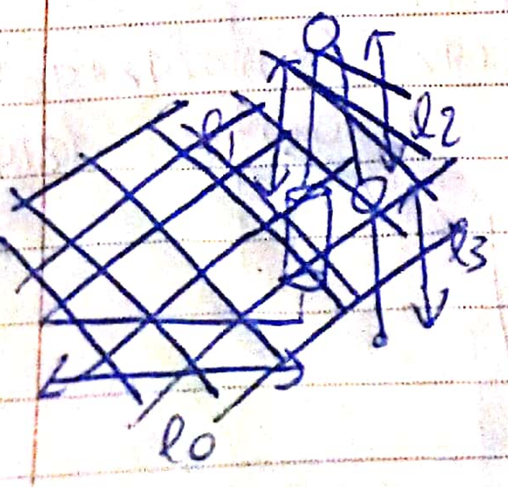
$$\Rightarrow \dots \boxed{\begin{Bmatrix} q_2 = q_3 = \pi/2 \\ \acute{\eta} \\ q_2 = q_3 = -\pi/2 \end{Bmatrix}}$$

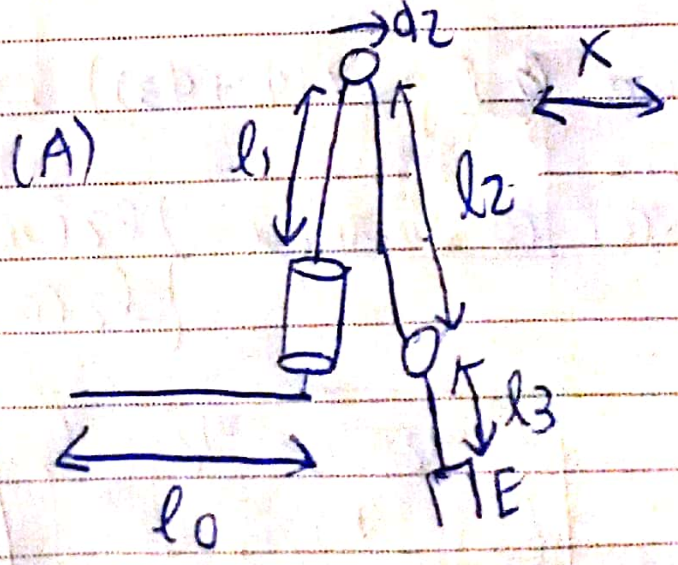
Γεωμετρική Ερμηνεία: ορίζουμε αυθαίρετα άξονες.



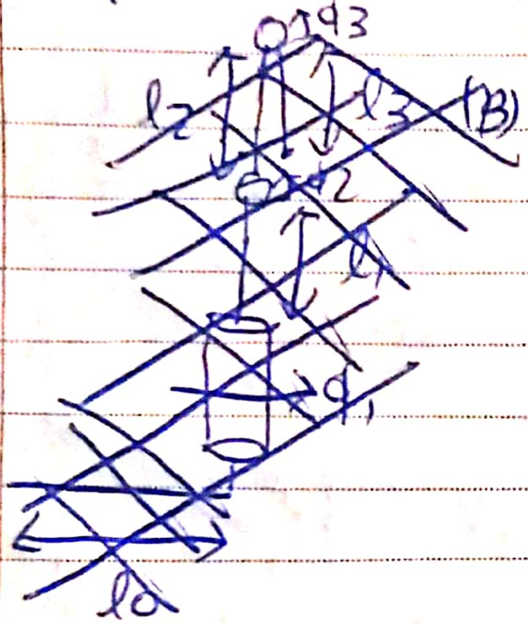


Μορφή διάταξης για $q_2 = q_3 = \pi/2$:



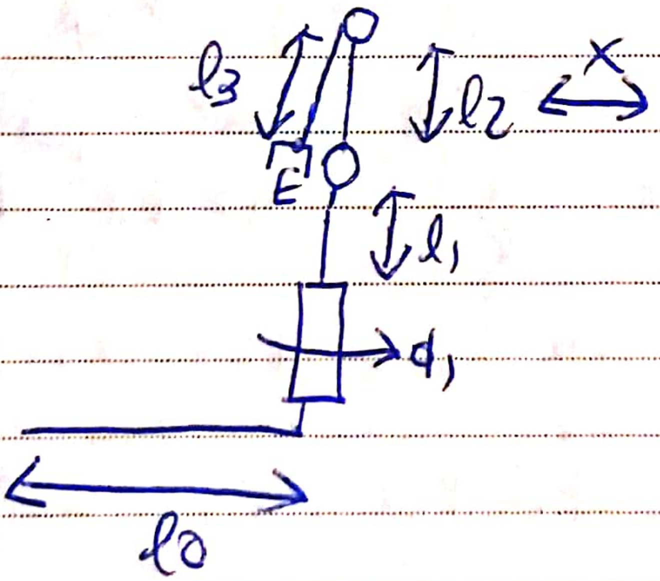


Μορφή διάταξης για $q_2 = q_3 = -\pi/2$



Παρατηρούμε, πράγματι, ότι οι διατάξεις (Α), (Β) είναι ιδιόμορφες και οδηγούν σε κάθε περίπτωση στην απώλεια ενός DOF και στην αδυναμία κίνησης κατά τον x'x άξονα (και στις 2 περιπτώσεις).

Σχήμα



'Άσκηση 3η

Γεωμετρική ανάλυση για κάθε μάζα:

Για M: $\rho_{M,x} = q_1$
$\rho_{M,y} = 0$
$\rho_{M,z} = 0$

Για m: $\rho_{m,x} = q_1 + l_1 \cdot c_2$

$\rho_{m,y} = h + l_1 s_2$

$\rho_{m,z} = 0$

Διαφ. κινημ. ανάλυση:

Για M: $\left.\begin{array}{l} V_{Mx} = (\rho_{Mx})' \Rightarrow V_{Mx} = \dot{q}_1 \\ V_{My} = V_{Mz} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_M^2 = V_{Mx}^2 = \dot{q}_1^2$ και $\omega_M = 0$ (: Δεν περιστρέφεται)

Για m: $\left.\begin{array}{l} V_{m,x} = (\rho_{m,x})' = \dot{q}_1 - l_1 s_2 \cdot \dot{q}_2 \\ V_{m,y} = (\rho_{m,y})' = l_1 \cdot c_2 \cdot \dot{q}_2 \\ V_{m,z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

και $\omega_m = \dot{q}_2 = \omega_{m,z}$

$$\Rightarrow V_m = \sqrt{V_{m,x}^2 + V_{m,y}^2 + V_{m,z}^2} =$$

$$= \sqrt{\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_1 s_2 + (l_1 \dot{q}_2)^2 (c_2^2 + s_2^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_m^2 = \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 l_1 s_2 + (l_1 \dot{q}_2)^2$$

και $\omega_m^2 = \dot{q}_2^2$

<u>Σύνολο:</u> Θεωρούμε ότι η μάζα M έχει ροπή αδρανείας I_M ως προς την αρχή του ρομποτικού βραχίονα, ενώ η μάζα m έχει I_m

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} M v_M^2 + \cancelto{0}{\frac{1}{2} I_M \omega_M^2} + \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{1}{2} I_m \cdot \omega_m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m (l_1 \dot{q}_2)^2$$

$$- m l_1 s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(M+m)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(I_m + (l_1^2 m))\dot{q}_2^2 +$$

$$+ \dot{q}_1 \dot{q}_2 (-m l_1 s_2)$$

~~Για i=1: $\frac{dK}{d\dot{q}_1} = (M+m)$~~

$$\rightarrow P = P_M + P_m = -M \cdot g \cdot \cancelto{0}{P_{M,y}} - m \cdot \vec{g} \cdot \vec{P}_{m,y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P = +mg(h + l_1 s_2)$, αφού $\vec{g} = -g\hat{y}$

Για $i=1$: $\dfrac{dK}{d\dot{q}_1} = (M+m)\dot{q}_1 + \dot{q}_2(-m l_1 s_2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{d\dot{q}_1}\right) = (M+m)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2(-m l_1 s_2) + \dot{q}_2^2(-m l_1 c_2)$$

$\dfrac{dK}{dq_1} = 0$ και $\dfrac{dP}{dq_1} = 0$

Άρα: $$\boxed{\tau_1 = \cancel{\frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{d\dot{q}_1}\right)} = (M+m)\ddot{q}_1 + (-m l_1 s_2)\ddot{q}_2 + \dot{q}_2^2(-m l_1 c_2) - \tau_{m1} - \tau_{M1}}$$

Για $i=2$: $\dfrac{dK}{d\dot{q}_2} = (I_m + m l_1^2)\dot{q}_2 + \dot{q}_1(-m l_1 s_2)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{d\dot{q}_2}\right) = (I_m + m l_1^2)\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1(-m l_1 s_2) + \dot{q}_1\dot{q}_2(-m l_1 c_2)$$

$\dfrac{dK}{dq_2} = \dot{q}_1\dot{q}_2(-m l_1 c_2)$ και $\dfrac{dP}{dq_2} = +m g l_1 c_2$

Άρα: $$\tau_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{d\dot{q}_2}\right) - \frac{dK}{dq_2} + \frac{dP}{dq_2} - \tau_{m2} - \tau_{M2}$$

Scanned with CamScanner

$\ddot{q}_1(-m l_1 c_2) + \ddot{q}_2 (I_m + m l_1^2) + \cancel{\dot{q}_1 \dot{q}_2 (\ldots)} + m g l_1 c_2$

$+ \tau_{m2} - \tau_{\mu 2}$

Σημείωση:

⊙ $J_L^{(\mu)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, αφού $V_{\mu x} = \dot{q}_1 + 0\dot{q}_2 \Rightarrow$
$V_{\mu y} = 0\dot{q}_1 + 0\dot{q}_2$

$\Rightarrow [J_L^{(\mu)}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $[J_L^{(\mu)}]^T \cdot F_e =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{cases} F_x \rightarrow \text{για } \tau_1 \\ 0 \rightarrow \text{για } \tau_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \tau_{\mu 1} = F_x$

⊙ $J_L^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & -l_1 s_2 \\ 0 & l_1 c_2 \end{bmatrix}$, αφού $V_{mx} = \dot{q}_1 + (-l_1 s_2)\dot{q}_2$

$V_{my} = 0\dot{q}_1 + l_1 c_2 \dot{q}_2$

$\Rightarrow [J_L^{(m)}]^T \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l_1 s_2 & l_1 c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} F_x \text{ για } \tau_1 \\ -l_1 s_2 F_x \Rightarrow \text{για } \tau_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad T_{m1} = F_x$$
$$T_{m2} = -l_1 S_2 F_x$$

<u>Τελικά:</u>

$$\boxed{\tau_1 = (I_1 + m)\ddot{q}_1 + (-m l_1 S_2)\ddot{q}_2 + \dot{q}_2^{\,2}(-m l_1 C_2) - 2F_x}$$

και

$$\boxed{\tau_2 = \ddot{q}_1(-m l_1 S_2) + \ddot{q}_2(I_m + m l_1^2) + 0 + m g l_1 C_2 + l_1 S_2 F_x}$$