Σερλής Εμμανουήλ - Αναστάσιος 03/13/25.

Ρομποτική ΙΙ
1η Σειρά Ασκήσεων.

Άσκηση 1.2. a).

Γράφουμε τις εξισώσεις των τ_1, τ_2 στην μορφή:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} m q_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}^{\hat{D}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \overbrace{\begin{bmatrix} m q_2 \dot{q}_2 & m q_2 \dot{q}_1 \\ -m q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}^{\hat{C}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (1), \text{ με:}$$

$$u = \ddot{q}_d + K_D \underbrace{(\dot{q}_d - \dot{q})}_{\dot{e}} + K_P \underbrace{(q_d - q)}_{e}. \quad (2)$$

σφάλμα παρακολούθησης στον χώρο των αρθρώσεων.

Γραμμική παραμετροποίηση:

$$\tau = \hat{D} \cdot u + \hat{C} \cdot \dot{q} = \overbrace{\begin{bmatrix} q_2^2 \ddot{q}_1 + 2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}}^{K} \overbrace{\begin{bmatrix} m \end{bmatrix}}^{\varphi} \quad (3).$$

Έστω $\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}$ το σφάλμα εκτίμησης παραμέτρων. Θέτοντας $\ddot{q} = u$ στην σχέση (3) έχουμε:

$$D \ddot{q} + C \dot{q} = K \cdot \varphi \quad (4)$$

, και αντικαθιστώντας στην σχέση $Du + C\dot{q} = K\varphi$ (5)

~~$D\ddot{q} + C\dot{q} = D\ddot{q} + C\dot{q} =$~~

, παίρνουμε:

$$K\cdot\tilde{\varphi} = K(\varphi-\hat{\varphi}) = D\cdot\underbrace{(u-\ddot{q})}_{\mathcal{J}}$$, με:

$\mathcal{J} = u-\ddot{q} = \ddot{e_q} + K_D\dot{e_q} + K_p e_q$.
↳ σφάλμα παρακολούθησης μοντέλου αναφοράς.

<u>Συνάρτηση σφάλματος παρακολούθησης μοντέλου:</u>

$$V = 0.5\cdot[\tilde{\varphi}^T\Gamma\cdot\tilde{\varphi} + s^T\cdot D\cdot s]$$, με:

Γ: μήτρα κερδών μηχανισμού προσαρμογής παραμέτρων.

έχουμε: $\dot{V} = -\dot{\hat{\varphi}}^T\Gamma\cdot\tilde{\varphi} + s^T D\dot{s} + 0.5[s^T\dot{D}s]$

$$\xrightarrow[\dot{\hat{\varphi}}=\Gamma^{-1}K^T s]{} \dot{V} = -s^T K\tilde{\varphi} + s^T D\cdot\dot{s} + 0.5[s^T\dot{D}s].$$ $\Rightarrow$

Ορίζουμε $\dot{s}+\Lambda s = \mathcal{J}$ συνάρτηση σφάλματος

$$\Rightarrow \dot{V} = -s^T(D\Lambda - 0.5\dot{D})s$$

Πρέπει $\dot{V}<0 \Rightarrow D\Lambda - 0.5\dot{D} > 0$, με $\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

<u>Άρα:</u> $$\begin{bmatrix} m q_2^2 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} - 0.5\begin{bmatrix}2mq_2\dot{q_2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} > 0$$

$$= \begin{bmatrix} mq_2^2\lambda_1 - mq_2\dot{q}_2 & 0 \\ 0 & m\lambda_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} q_2(q_2\lambda_1 - \dot{q}_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$>0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} q_2(q_2\lambda_1 - \dot{q}_2) > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{matrix} \lambda_1 q_2 > \dot{q}_2 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix} \right\}}$$

Τελικά, το σύστημα γίνεται ασυμπτ. ευσταθές ($dV/dt<0$) και συγκλίνει ασυμπτωτικά στην κατάσταση ισορροπίας $\frac{dV}{dt}=0$, όπου $r=0 \Rightarrow J=0$ και

$e_q \xrightarrow{t \to +\infty} 0.$

B). Δυναμικό μοντέλο ρομποτ. χειριστή:

$$M\ddot{q} + h = \tau + J^T F_e \quad (1), \text{ με:}$$

$$A_E^0 = Rot(z, q_1) \cdot Tra(x, q_2 + \cancel{q_1}^{\,0}) = Rot(z, q_1) \cdot Tra(x, q_2)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 q_2 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

και $A_1^0 = Rot(z, q_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

<u>Έχουμε:</u> $\left\{\begin{array}{l} b_0^1 = [0\ 0\ 1]^T \\ b_1^1 = A_E^0[1:3, 3] = [c_1\ s_1\ 0]^T \end{array}\right\}.$

<u>i=1</u>: Περιστροφική άρθρωση.

$$\begin{bmatrix} J_{L1} \\ \hline J_{A1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^1 \times r_{0,E} \\ b_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^1 \times A_E^0[1:3, 4] \\ b_0^1 \end{bmatrix}$$

, με: $b_0^1 \times A_E^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 q_2 \\ s_1 q_2 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -s_1 q_2 \\ c_1 q_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>i=2</u>: Πρισματική άρθρωση

$\begin{bmatrix} J_{L2} \\ \hline J_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ \hline \emptyset \end{bmatrix}$, άρα

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} \\ J_{A1} & J_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Άρα:</u> $M\ddot{q} + h = \tau + J^T F_e \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m q_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ex} \\ f_{ey} \end{bmatrix}, \text{αφού:}$$

$$J = J_{L}(x,y) = \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \end{bmatrix}$$

<u>Μετάβαση στο task-space:</u> $M^* \ddot{p} + h^* = F_a + F_e$

, με: $Q = (J M^{-1} J^T) = \begin{bmatrix} \frac{-s_1}{m q_2} & \frac{c_1}{m} \\ \frac{c_1}{m q_2} & \frac{s_1}{m} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

και $M^* = Q^{-1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$

$h^* = (M^* \dot{J} \cdot M^{-1} h) - (M^* \dot{J} \cdot \dot{q})$, με:

$M^* = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ και $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mq_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$

<u>Άρα</u>: $M^* J M^{-1} h = m \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1^2 - 2 s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -s_1 q_2 \dot{q}_1^2 + 2 c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

και $\dot{J} = \nabla J \Big|_{q_1, q_2} = \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1 - s_1 \dot{q}_2 & -s_1 q_2 \dot{q}_1 + c_1 \dot{q}_2 \\ -s_1 \dot{q}_1 & c_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}$

<u>Άρα</u>: $M^* \dot{J} \dot{q} = m \begin{bmatrix} c_1 \dot{q}_2^2 - s_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_1 q_2 \dot{q}_1^2 \\ c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$

$h^* = (M^* J M^{-1} h) - (M^* \dot{J} \dot{q}) =$

$= m \begin{bmatrix} \dot{q}_2 (q_2 \dot{q}_1 s_1 - c_1 \dot{q}_2 - s_1 \dot{q}_1) \\ \dot{q}_1 (c_1 \dot{q}_2 + s_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_1 s_1) \end{bmatrix}$

Επιθυμητή μηχανική εμπέδηση στο task space.

$M_d(\ddot{p}_d - \ddot{p}) + B_d(\dot{p}_d - \dot{p}) + K_d(p_d - p) = F_d - F_e$

με $M_d = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}$, $B_d = \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix}$,

$$, K_d = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$ τα μητρώα αδρανείας.

Έτσι, ο δυναμικός ελεγκτής ενεργούς εμπέδησης παίρνει την μορφή:

~~$F_a = M^* u + h^* - F_e$, με $F_e = J^T$~~

$$F_a + F_e = M^* \ddot{p} + h^* \overset{\ddot{p}=u}{\Longrightarrow} F_a = M^* u + h^* - F_e \text{ , με}$$

και

$$\tau = J^T \cdot F_a$$

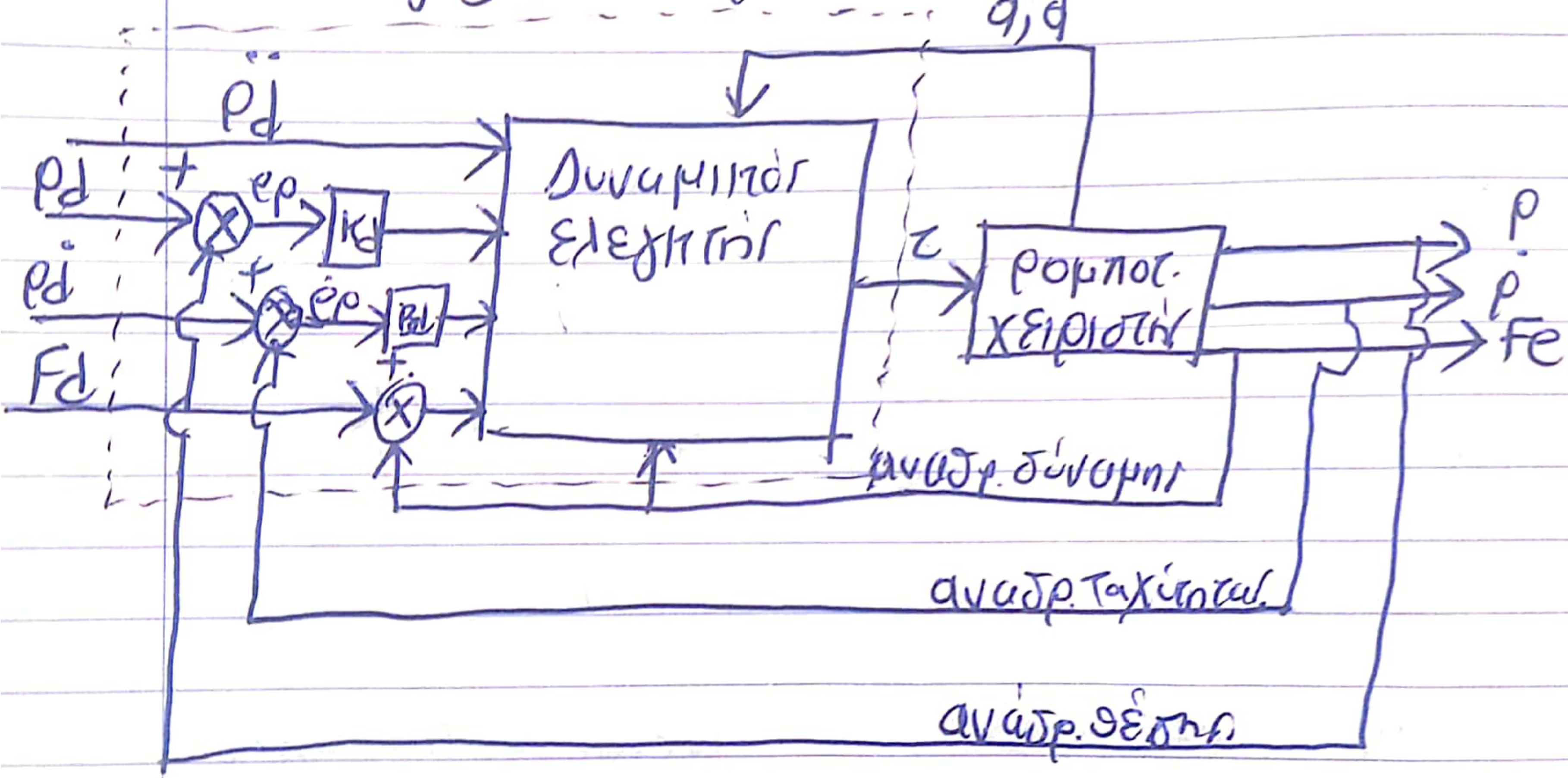
το σήμα ελέγχου u να δίνεται από την σχέση:

$$u = \ddot{p}_d + M_d^{-1}\left[B_d \underbrace{(\dot{p}_d - \dot{p})}_{\text{σφάλμα ταχύτητας}} + K_d \underbrace{(p_d - p)}_{\text{σφάλμα θέσης}} - \underbrace{(F_d - F_e)}_{\text{σφάλμα δύναμης}} \right]$$

Άρα, το σήμα ελέγχου έχει κέρδη:

- $K_D = M^* (M_d^{-1} B_d) = \begin{bmatrix} \frac{b_x m}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{b_y m}{m_y} \end{bmatrix}$.
- $K_P = M^* (M_d^{-1} K_d) = \begin{bmatrix} \frac{k_x m}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{k_y m}{m_y} \end{bmatrix}$
- $K_F = M^* M_d^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{m}{m_y} \end{bmatrix}$

Το ζητούμενο block diagram δυναμικού ρομποτικού ελεγκτή ενεργούς μηχανικής αντίστασης (υπολογιζόμενης ροπής)



Άσκηση 1.1 α) Μεθοδολογία διάσπασης υποεργασιών:

1η υποεργασία: Διατήρηση ΡΕ στην ευθεία $x = x_d$.

2η υποεργασία: Διατήρηση απόστασης ασφαλείας $r = r_0$ από εμπόδιο.

Έχουμε: $\dot{q}_d = J_1^+(q) \cdot \dot{p}_{1d} + k_c (I_n - J_1^+ J_1) \cdot \mathcal{F}$

, με: $\mathcal{F} = \nabla_q (V(q))$ ↳ συνάρτηση κόστους

Από ευθύ γεωμ. μοντέλο:

$$\left.\begin{aligned} p_{1x} &= q_1 + q_3 \cdot c_2 \\ p_{1y} &= h + q_3 s_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{p} = J \cdot \dot{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{p}_{1x} \\ \dot{p}_{1y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 & -s_2 \dot{q}_2 q_3 & \dot{q}_3 c_2 \\ 0 & c_2 q_3 \dot{q}_2 & s_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix}}_{J_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -s_2 q_3 & c_2 \\ 0 & c_2 q_3 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε επιθυμητή τροχιά:

$$\dot{p}_{1d}(t) = \begin{bmatrix} x_d \\ y_0 - t\left(\frac{y_0}{T}\right) \end{bmatrix}, \text{με } t \in [0, T].$$

$$\Rightarrow \dot{p}_{1d}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{y_0}{T} \end{bmatrix}$$

και $J_1^+ = J_1^T (J_1 J_1^T)^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} J_{1x}^+ & J_{1y}^+ \\ J_{2x}^+ & J_{2y}^+ \\ J_{3x}^+ & J_{3y}^+ \end{bmatrix}$

Άρα: $\boxed{\dot{q}_{1d} = J_1^+(q) \cdot \dot{p}_{1d} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{y_0 J_{1y}^+}{T} \\ 0 & -\frac{y_0 J_{2y}^+}{T} \\ 0 & -\frac{y_0 J_{3y}^+}{T} \end{bmatrix}}$

<u>2η υποεργασία:</u>

<u>Ορίζουμε:</u> $V(q) = \left\{ \frac{1}{2}(r - r_0)^2, \right.$ με $r = q_1 - x_0$

↓ απόσταση εμποδίου (στον x'x άξονα)

<u>Άρα:</u> $V(q) = 0.5(q_1 - x_0 - r_0)^2$

Υπολογισμός F: $F = -\nabla V(q) = -\begin{bmatrix} dV/q_1 \\ dV/q_2 \\ dV/q_3 \end{bmatrix} =$

$$= -\begin{bmatrix} (q_1 - \underbrace{x_0 - r_0}_{r}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$\boxed{\dot{q}_{2d} = K_c \left[I - J_1^+ J_1 \right] F}$$

Σύνολο: $\boxed{\dot{q}_d = \dot{q}_{1d} + \dot{q}_{2d}}$

β) Ορίζουμε: $y_0 = 2h = 2$: ως θέση επιτάχυνσης του end-effector στον $y'y$ άξονα και $T = 1\,sec$.

Έχουμε: $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\dot{p}_{1d}(t) = \dot{p}_{1d} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J_1^+ = \begin{bmatrix} 0{,}0385 & 0 \\ -0{,}192 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\boxed{\dot{q}_{1d} = J_1^+ \dot{p}_{1d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$

<u>Για την 2η υποεργασία:</u> $\dot{F} = \nabla V = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

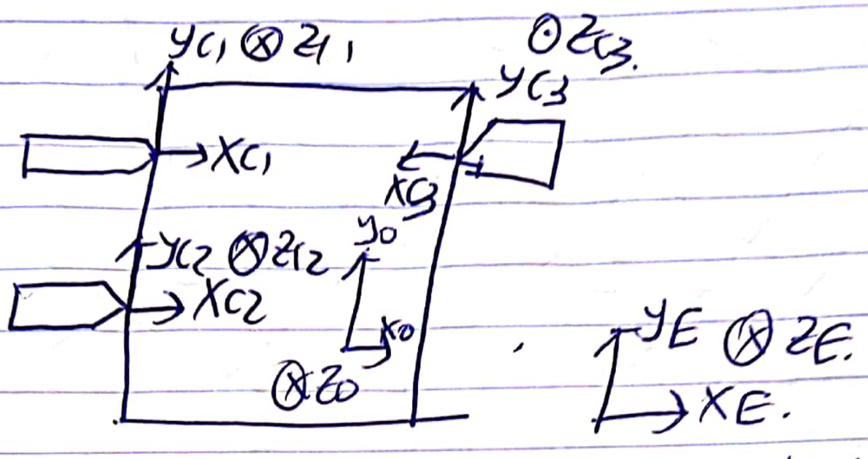
Επιλέγουμε $k_c = 30$.

<u>Άρα:</u> $\dot{q}_{2d} = k_c(I - J_1^{+} J_1) \cdot \dot{F} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} 750/13 \\ 150/13 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{q}_{2d}}$ (a)

<u>Σύνολο:</u> $\boxed{\dot{q}_d = \dot{q}_{1d} + \dot{q}_{2d} = \begin{bmatrix} 750/13 \\ 150/13 \\ -1 \end{bmatrix}}$

Scanned with CamScanner

Άσκηση 1.3



Για τα πλαίσια αναφοράς των επαφών c1, c2:

$$R_{c1}^{0} = R_{c2}^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{c1}^{\,(0)} = [-d/2, r, 0]^T \Rightarrow [\vec{r}_{c1}^{\,(0)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & d/2 \\ -r & -d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{c2}^{\,(0)} = [-d/2, -r, 0]^T \Rightarrow [\vec{r}_{c2}^{\,(0)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & d/2 \\ r & -d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $$\vec{r}_{c1}^{\,(0)} \times R_{c1}^{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & d/2 \\ -r & -d/2 & 0 \end{bmatrix} = \vec{r}_{c1}^{\,(0)}$$

$$\vec{r}_{c2}^{\,(0)} \times R_{c2}^{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & d/2 \\ r & -d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

c1, c2 επαφές χωρίς τριβή: $B_{c1} = B_{c2} = [0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 0 \; 0]$

$$Rot\,\omega_{ci} = \begin{bmatrix} A_{ci}^{(0)} & 0_{3\times3} \\ \vec{r}_{ci}^{(0)} \times A_{ci}^{(0)} & A_{ci}^{(0)} \end{bmatrix} \quad i=\{1,2\}$$

Τελικά: $G_1 = W_{c1} \cdot B_{c1} =$

Άρα: $G_1 = \begin{bmatrix} A_{c1}^{(0)} \\ \cdots \\ \vec{r}_{c1}^{(0)} \times A_{c1}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & d/2 \\ -r & -d/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\hat{n}_1 = \hat{x}_1 \Rightarrow G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$

ομοίως: $G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$

Για την 3η λαβή (με τριβή):

$$A_{c3}^{0} = Rot(y,\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{c3}^{(0)} = [d/2, h, 0]^T \Rightarrow [\vec{r}_{c3}^{(0)} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & -d/2 \\ -h & d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{r}_{C3}^{(0)} \times R_{C3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & d/2 \\ h & d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $G_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & d/2 \\ h & d/2 & 0 \end{bmatrix}$

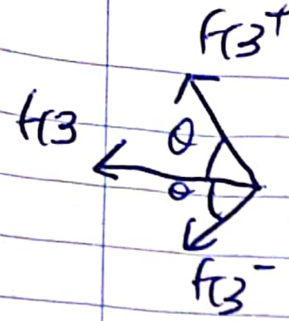
Σύνολο: $G = [G_1 \vdots G_2 \vdots G_3]$.

Διαγράφουμε τις γραμμές 3 ως 5 στο μητρώο λαβής G μιας και αναφέρονται στα μεγέθη F_z, τ_x, τ_y καθώς και την τελευταία στήλη που αφορά δυνάμεις f_z εκτός του επιπέδου του σχήματος:

Άρα: $G = \left[\begin{array}{c:c:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d/2 \\ -r & r & h & d/2 & 0 \end{array}\right]$

και $G_{2D} = \left[\begin{array}{c:c:cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r & r & h & d/2 \end{array}\right]$

(Β) Αρχικά, αντικαθιστούμε την δύναμη στην σημειακή επαφή με τριβή C3 με 2 δυνάμεις f_{C3}^{+}, f_{C3}^{-}, που αποτελούν σημειακές επαφές χωρίς τριβή.



$$\left.\begin{matrix} \mu = 1 \\ \arctan(\mu) = \theta \end{matrix}\right\} \theta = \pi/4.$$

<u>Έχουμε:</u> $G_3' = \begin{bmatrix} \hat{n}_3 \\ \vec{r}_3^{(0)} \times \hat{n}_3 \end{bmatrix}$, με:

$$\hat{n}_3^+ = R_z(-\theta) \cdot \hat{x}_3 = R_z(-\theta) \cdot R\,[0:1] =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta & +s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{x}_3^+$$

$$\hat{n}_3^- = R_z(\theta) \cdot \hat{x}_3 = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c\theta \\ -s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{x}_3^-$$

και $\vec{r}_{c3}^{(0)} = [d/2, h, 0]$.

<u>Άρα:</u> $\vec{r}_{c3}^{(0)} \times \hat{x}_3^+ = \begin{bmatrix} d/2 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d/2\, s\theta + h\, c\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{C_3}^{(0)} \times \hat{x}_3^- = \begin{bmatrix} d/2 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -c\theta \\ -s\theta \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ hc\theta - d/2\, s\theta \end{bmatrix}$$

Άρα: $\sigma_3^+ = \begin{bmatrix} -c\theta \\ +s\theta \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \frac{d}{2}s\theta + hc\theta \end{bmatrix}$

~~Από ερώτημα (α):~~

$$\cancel{\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d/2 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \cancel{\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -d/2 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\sigma_3^- = \begin{bmatrix} -c\theta \\ -s\theta \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ hc\theta - d/2\, s\theta \end{bmatrix}$ και $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$

~~Αφού διαγράφουμε τις γραμμές 3 ως 5, λαμβάνουμε την κάτωθι μήτρα Jacobi:~~

$$\cancel{J_{2h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c\theta & -c\theta \\ 0 & 0 & +s\theta & -s\theta \\ 0 & 0 & hc\theta + d/2\, s\theta & hc\theta - d/2\, s\theta \end{bmatrix}}$$

Διαγράφοντας τις γραμμές 3 ως 5, λαμβάνουμε την κάτωθι μήτρα Jacobi.

$$G_{2D}=\begin{array}{c} \begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -c\theta & -c\theta \\ 0 & 0 & s\theta & s\theta \\ -r & r & d/2\,s\theta+h\,c\theta & h\,c\theta-d/2\,s\theta \end{bmatrix} \end{array}$$

~~<u>Έχουμε:</u> $g_1 \times g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \pi_{12}$~~

~~Προκειμένου η ρομποτική λαβή να είναι κλειστή ως προς δύναμη πρέπει τα γινόμενα $A_3 = g_3 \cdot \pi_{12}$ και $A_4 = g_4 \cdot \pi_{34}$ να είναι ετερόσημα.~~

~~$A_3 =$~~

<u>Έχουμε:</u> $g_3 \times g_4 \overset{\theta=\pi/4}{=} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2\,(d/2+h) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ (h-d/2)\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(h-d/2)+\frac{1}{2}(h+d/2) \\ -\left\{(d/2-h)\frac{1}{2}+(d/2+h)\right\} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ -d/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \pi_{34}$$

Προκειμένου η ρομπ. λαβή να είναι κλειστή ως προς δύναμη πρέπει τα γινόμενα

$A_1 = g_1^T \pi_{34}$ και $A_2 = g_2^T \pi_{34}$

να είναι ετερόσημα:

$$A_1 = [1\ \ 0\ \ -r]\cdot\begin{bmatrix} h \\ -d/2 \\ 1 \end{bmatrix} = (h-r)$$

$$A_2 = [1\ \ 0\ \ r]\begin{bmatrix} h \\ d/2 \\ 1 \end{bmatrix} = h+r.$$

$$(h-r)(h+r)<0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|h|<|r|}$$

Συνθήκη ώστε η λαβή να είναι κλειστή ως προς δύναμη

(γ). <u>Εύρεση Jacobian:</u> Ορίζουμε πλαίσιο παλάμης ίδιο με το πλαίσιο του αντικειμένου.

<u>C_1:</u> $$p_{E_1} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{p}_{E_1} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{p}_{E_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{C_1}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

<u>Επίσης:</u> $R_E^{C_1} = diag(ones)$

$$T_E^{C_i} = \begin{bmatrix} R_E^{C_i} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & R_E^{C_i} \end{bmatrix}$$ και $B_{C_1}^T = B_{C_2}^T = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$

Σύνολο: $J_{H1} = B_{C1}^T \cdot T_E^{C1} \cdot J_{C1} =$

$= [0 \quad \Omega]$.

Ομοίως: $R_E^{C2} = R_E^{C1} =$ διαγώνιες.

$$\dot{P}_{E2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow J_{C2} = J_{C1}$

Άρα: $J_{H2} = J_{H1} = [0 \quad \Omega]$.

Για την 3η λαβή:

$$P_{E3} = \begin{bmatrix} q_6 \\ q_5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{P}_{E3} = \begin{bmatrix} \dot{q}_6 \\ \dot{q}_5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}.$$

και

$$B_{C3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ λόγω τριβής

$$R_E^{C3} = R_{C3}^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_{H3} = B_{C3}^T \cdot T_E^{C3} \cdot J_{C3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σύνολο: $J_4 = \mathrm{diag}(J_{41}, J_{42}, J_{43}) =$

$$
= \begin{array}{cccccc}
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$