Ξερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03118125

Ρομποτική ΙΙ
2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 2. Δυναμικές εξισώσεις κίνησης:

$$\left\{\begin{aligned} p_x(t+\Delta t) &= p_x(t) + [v_x(t) + \delta v_x(t)]\Delta t \\ p_y(t+\Delta t) &= p_y(t) + [v_y(t) + \delta v_y(t)]\Delta t \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ορίζουμε ως διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης το $X = [p_x \ \ p_y]$ (2)

Από (1), (2):

$$X(t+\Delta t) = \begin{bmatrix} p_x(t+\Delta t) \\ p_y(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{A} X(t) +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_x(t) \cdot \Delta t \\ \delta v_y(t) \Delta t \end{bmatrix}}_{\omega(t)}$$

Για την μήτρα συνδιακύμανσης του διανύσματος θορύβου $\omega(t)$, έχουμε:

$$C_w(t) = E\left(w(t)\cdot w^T(t)\right) = \begin{bmatrix} \Delta t^2 \sigma_{vx}^2 & 0 \\ 0 & \Delta t^2 \sigma_{vy}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{vx}^2 = \sigma_{vy}^2 = 25 \frac{cm^2}{sec^2} \Longrightarrow C_w(t) = \Delta t^2 \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \left(\frac{cm^2}{sec^2}\right).$$

Για το μοντέλο μέτρησης:

$$\left.\begin{array}{l} dx = [l_1 - (d_2 + r)] \\ dy = [l_2 - (d_1 + r)] \end{array}\right\} z = \begin{bmatrix} -d_2 + (l_1 - r) \\ -d_1 + (l_2 - r) \end{bmatrix}$$

, κάτι που μας οδηγεί στο εξής μοντέλο παρατήρησης:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_2(t) + (l_1 - r) \\ -d_1(t) + (l_2 - r) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta d_2(t) \\ \delta d_1(t) \end{bmatrix}}_{n(t)}$$

Για την μήτρα συνδιακύμανσης του διανύσματος θορύβου μετρήσεων $n(t)$, έχουμε:

$$C_n(t) = E[n(t)\,n^T(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_d^2 = [10mm]^2}$$

$$C_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} cm^2$$

~~Για t=0:~~ $\cancel{[x(0), y(0)] = [0, 0]}$

~~Για~~ $\cancel{t+\Delta t \xrightarrow{\Delta t = 1} t = 1sec}$

$\cancel{x(1) = x(0) + V_x(0)\cdot\Delta t} \quad \cancel{\hat{x}(1) =}$

$\cancel{y(1) = y(0) + V_y(0)\cdot\Delta t} \quad \cancel{\hat{y}(1) =}$

Έχουμε: $P(t+\Delta t|t) = A\,P(t)\,A^T + C_w(t)$

↳ μήτρα συνδιακύμανσης θορύβου πρόβλεψης.

$$\xrightarrow[\Delta t = 1sec]{t=0} P(1|0) = A\cdot P(0)\,A^T + C_w(0), \text{ με}$$

$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, λόγω ακριβούς γνώσης της θέσης για $t=0$ (είναι $[x(0), y(0)] = [0, 0]$).

Άρα: $P(1|0) = Cw(0) \xlongequal{\Delta t = 1sec} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} cm^2$

Πρόβλεψη κατάστασης $\tilde{X}(t+\Delta t)$:

$$\tilde{X}(t+\Delta t) = \hat{X}(t+\Delta t | t) = A\hat{X}(t) + BU(t) \xRightarrow[\Delta t = 1]{t=0}$$

$$\tilde{X}(1) = \begin{bmatrix} p_x(1) \\ p_y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(0) + \Delta t \cdot V_x(0) \\ p_y(0) + \Delta t \, V_y(0) \end{bmatrix} \text{ ή}.$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} P_x(1) \\ p_y(1) \end{bmatrix} = \tilde{X}(1) = \hat{X}(1|0) = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} cm.}$$

Ανανέωση βέλτιστης εκτίμησης κατάστασης:

$$\hat{X}(t+\Delta t) = \tilde{X}(t+\Delta t) + K(t+\Delta t)\left[Z(t+\Delta t) - H\tilde{X}(t+\Delta t)\right]$$

→ μητρώο βέλτιστων κερδών φίλτρου

, με: $K(t+\Delta t) = P(t+\Delta t | t) H^T \left[H P(t+\Delta t|t) H^T + \right.$

$\left. + C_n(t+\Delta t) \right]^{-1}$

Για $t=0$, $\Delta t = 1$:

$$K(1) = P(1|0) \cdot H^T [H \cdot P(1|0) H^T + C_n(1)]^{-1}.$$

$\underline{\underline{H = I \;\|\; P(1|0) = C_w}}$ $\quad C_w \cdot [C_w + C_n]^{-1} =$

$C_n(0) = C_n(1) = C_n.$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/20 & 0 \\ 0 & 1/20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K(1) = \begin{bmatrix} 25/20 & 0 \\ 0 & 25/20 \end{bmatrix} cm^2}$$

$K(a)$ $\hat{X}(1) = \tilde{X}(1) + K(1) \cdot [Z(1) - H\tilde{X}(1)]$, με:

$$\boxed{Z(1) = \begin{bmatrix} l_1 - d_2(1) - r \\ l_2 - d_1(1) - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} cm.}$$

Άρα:

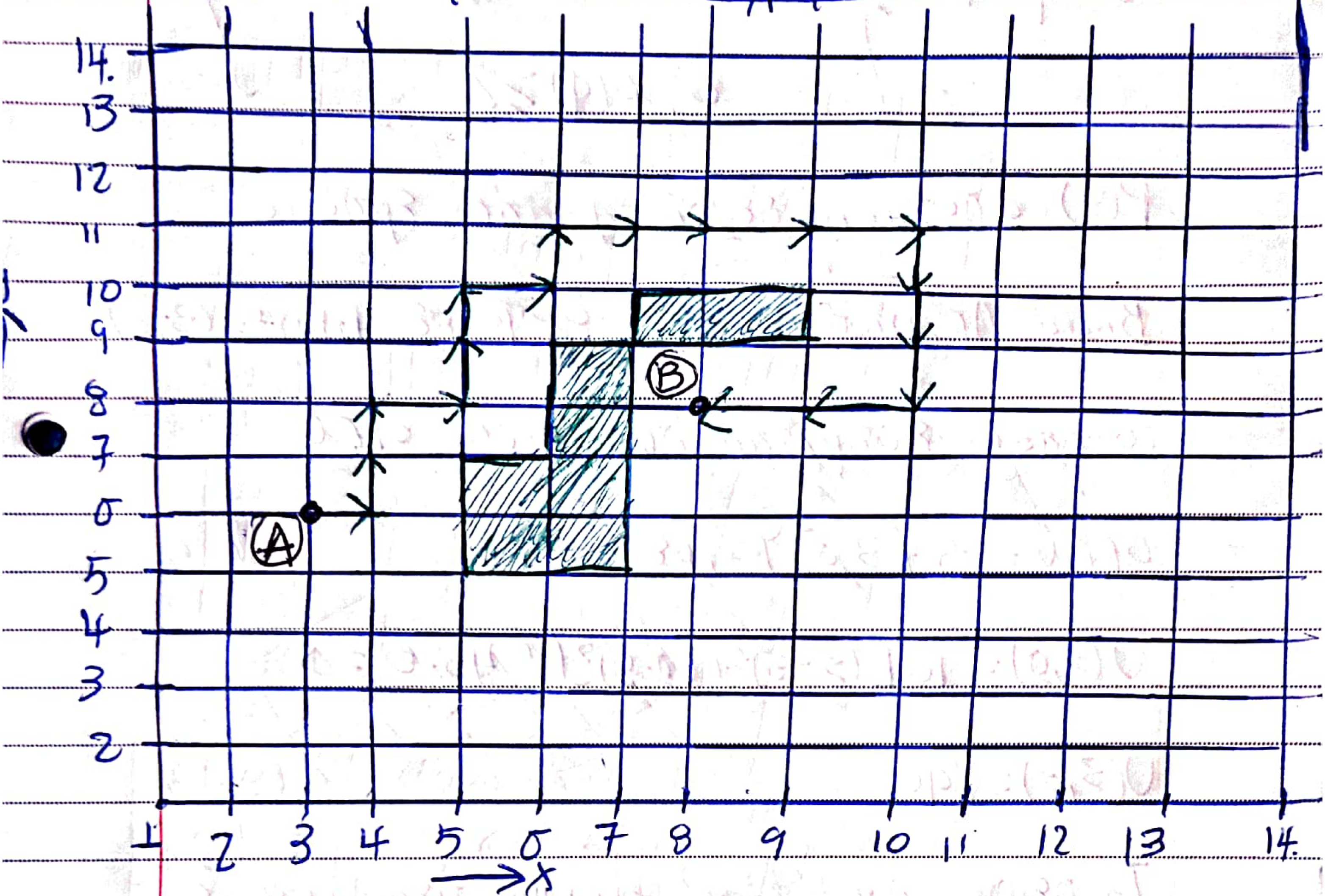
$$\hat{X}(1) = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + h(1)\left[\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + h(1)\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} \cancel{= \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100/20 & 0 \\ 0 & 25/20 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\boxed{\hat{X}(1) = \begin{bmatrix} 23.84 \\ 10.05 \end{bmatrix} cm}}$$

$$\hat{X}(1) = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -250/20 \\ -125/20 \end{bmatrix} ; \quad \boxed{\hat{X}(1) = \begin{bmatrix} 10.38 \\ 5.192 \end{bmatrix} cm}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 2η}}$ Διακριτοποίηση χώρου:



Συνάρτηση Δυναμικού Πεδίου:

$U(q) = U_{att}(q) + U_{rep}(q)$, με:

→ Ελκτ. πεδίο

$$U_{att}(q) = \frac{1}{2} k_{att} \| q_{goal} - q \|^2 \qquad \frac{q_{goal} = (8,8)}{k_{att} = 20}$$

$$\Rightarrow U_{att}(q) = 10\left[(x-8)^2 + (y-8)^2\right]$$

$$U_{rep}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot k_{rep} \left[\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0}\right]^2, & \rho(q) < \rho_0 \\ 0, & \rho(q) > \rho_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_{rep}(q) = \begin{cases} 40\left[\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{2}\right]^2, & \rho(q) < 2 \\ 0, & \rho(q) \geq 2 \end{cases}$$

$\rho(q)$: απόσταση θέσης q από εμπόδιο

Βήμα Αρχικοποίησης: Ορίζουμε $q_{start} = (3,0)$

το οποίο εισέρχεται στην λίστα OPEN:

OPEN = { [3,0] } , με δυναμικό:

$U(3,0) = 10[(3-8)^2 + (0-8)^2] + 40 \cdot 0 \Rightarrow$

$U(3,0) = 890$

Το δένδρο αναζήτησης αρχικά περιλαμβάνει μόνο τον κόμβο (3,0) και όλοι οι υπόλοιποι κόμβοι επισημαίνονται ως q→visited = FALSE , εκτός του: (3,0) → visited = TRUE.

BHMA 1: q = BEST (OPEN).

Έχουμε: → q = (3,0)

→ OPEN = OPEN ∪ N(q) , με
N(q): το σύνολο των κόμβων q' που είναι γείτονες του q για τους οποίους έχουμε

$q' \to visited = FALSE$ και $u(q') < +\infty$

Έτσι, παίρνουμε: $N(q) = \{[2,6],[4,6],[3,7],[3,5]\}$

$\Rightarrow OPEN = \{[2,6],[4,6],[3,7],[3,5]\}$ με τιμές δυναμικού:

$U(2,6) = 10\left[(2-8)^2 + (6-8)^2\right] = 400$

$U(4,6) = 10\cdot\left[(4-8)^2 + (6-8)^2\right] + 40\left[1-\frac{1}{2}\right]^2$

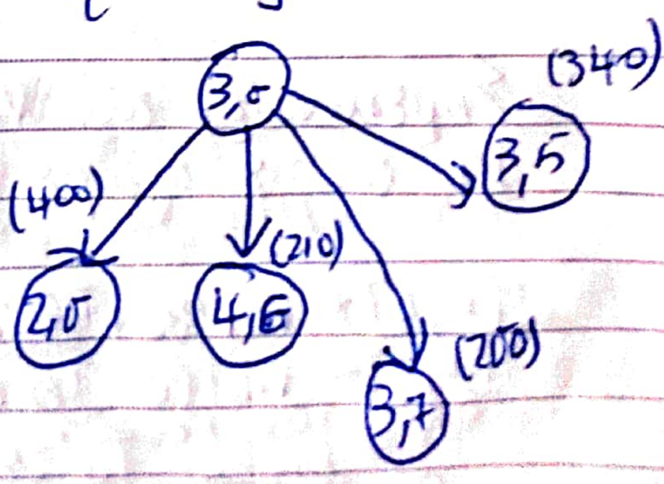
$= 200 + 10 = 210.$

$U(3,7) = 10\left[(3-8)^2 + (7-8)^2\right] = 260$

$U(3,5) = 10\left[(3-8)^2 + (5-8)^2\right] = 340.$

Επισημαίνουμε τους νέους κόμβους ως visited και τους εισάγουμε στο δέντρο αναζήτησης:

$[2,6] \to visited = TRUE.$
$[4,6] \to visited = TRUE$
$[3,7] \to visited = TRUE.$
$[3,5] \to visited = TRUE$



Βήμα 2: Εξάγουμε τον κόμβο με $U = U_{min}$, δηλαδή τον $q = [4,6]$ με $U(4,6) = 210$.

→ $OPEN = OPEN \cup N(q)$, με

$N(q) = \{[4,5], [4,7]\}$, δεν εισάγουμε τον γειτονικό κόμβο $[5,6]$ μιας και ταυτίζεται με το όριο του 1ου εμποδίου

Άρα: $OPEN = \{[2,6], [3,7], [3,5], [4,5], [4,7]\}$

, με τιμές δυναμικού για τα νέα στοιχεία:

$$U[4,5] = 10 \cdot [(4-8)^2 + (5-8)^2] + 40\left[1 - 1/2\right]^2$$

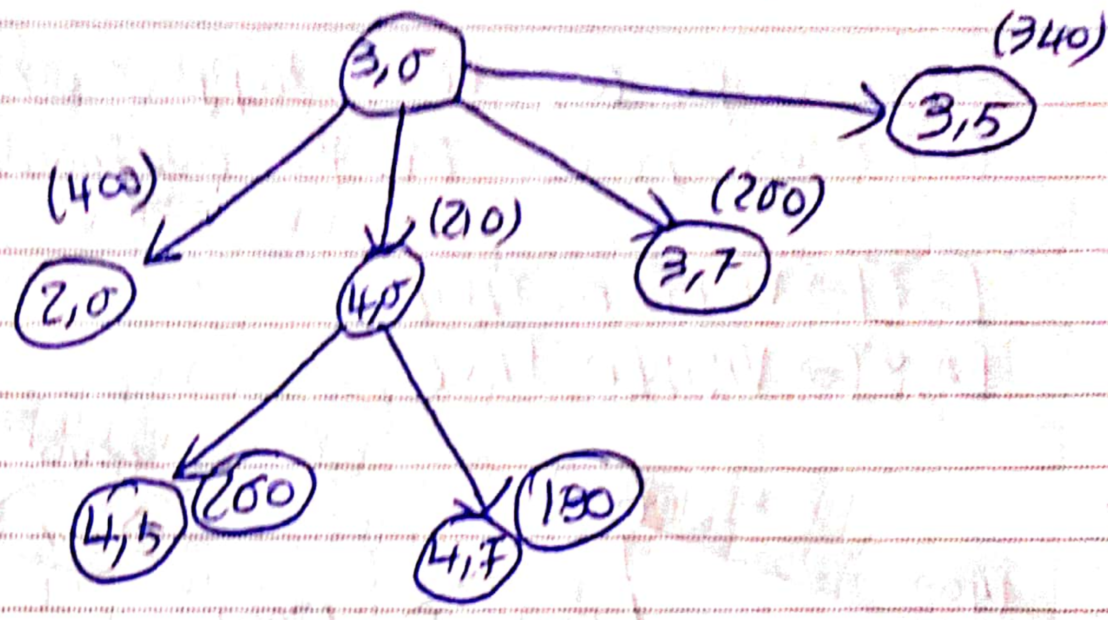
$$= 250 + 10 = 260.$$

$$U[4,7] = 10[(4-8)^2 + (7-8)^2] + 40\left[1 - 1/2\right]^2 =$$

$$= 180$$

Σημειώνουμε τους νέους κόμβους ως visited και τους εισάγουμε στο δέντρο αναζήτησης:

[4,5] → visited = TRUE.
[4,7] → visited = TRUE



<u>Βήμα 3ο:</u> Εξάγουμε απ' την λίστα OPEN τον κόμβο με $U=U_{min}$, δηλαδή τον $q=[4,7]$ με $U(q)=180$.

→ OPEN: OPEN $\cup$ $n(q)$

$n(q)=\{[3,7],[4,8]\}$, δεν εισάγουμε τον κόμβο $[5,7]$ στο σύνολο $n(q)$ και αποτελεί όριο του 1ου εμποδίου.

<u>Άρα:</u> OPEN $=\{[2,0],[3,7],[3,5],[4,5],[3,7],[4,8]\}$

με τιμές δυναμικού για τα νέα στοιχεία:

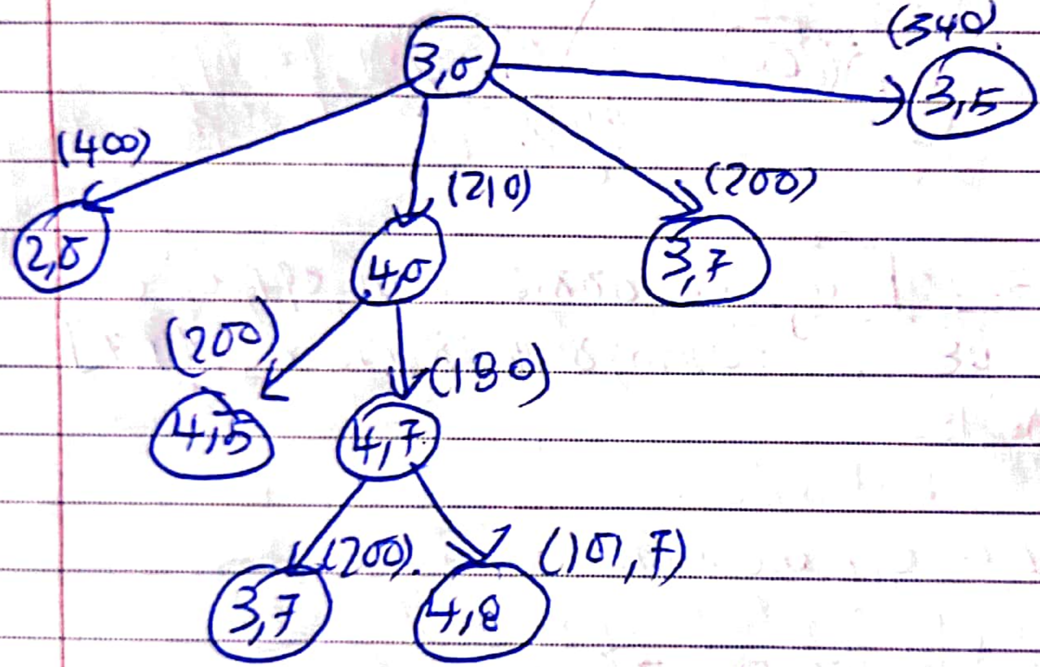
$$U[3,7]=10[(3-8)^2+(7-8)^2]=200.$$

$$U[4,8]=10[(4-8)^2+(8-8)^2]+40\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right]^2=$$

$$=100+1{,}715=101{,}715$$

Σημειώνουμε τους νέους κόμβους ως visited και τους εισάγουμε στο δένδρο αναζήτησης:

[3,7] → VISITED = TRUE.
[4,8] → VISITED = TRUE.



Ο αλγόριθμος συνεχίζει και στα επόμενα βήματα μέχρις ότου εισαχθεί ο στόχος (κόμβος B του σχήματος) στο δένδρο. Στο αρχικό σχήμα, σημειώνονται με πράσινο τα επιμέρους βήματα του αλγορίθμου, μέχρι να φτάσουμε στον τελικό κόμβο B.

Αναφορικά με τον αλγόριθμο best-first, αυτός δεν είναι ούτε πλήρης ούτε βέλτιστος. Το πρώτο ισχύει, μιας και πάντα υπάρχει πιθανότητα να οδηγηθούμε σε μονοπάτι, το οποίο δεν οδηγεί στον στόχο ~~Επίσης~~ Το δεύτερο ισχύει, αφού το μονοπάτι που θα μας δοθεί δεν είναι απαραίτητα το βέλτιστο δυνατό. Κάτι τέτοιο έγκειται στο greediness του αλγορίθμου, ο οποίος κρατά στην μνήμη όλους τους γειτονικούς κόμβους και διαγράφει κόμβους που έχει ήδη επισκεφθεί.