4. 证明定理3 .2 .1 中的 (6)~(10)

(6) (上半连续性) 若$E_n\downarrow$, 且存在$n_0\in N$使得$\mu(E_0)<+\infty$, 则$\mu\left(\lim\limits_{n\to\infty}E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$

证明：$E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_n\supset E_{n+1}\ldots$集列 $(E_1\setminus E_n)$ 递增, 由 (5) 可知$\mu\left(E_1\setminus\lim\limits_{n\to+\infty}E_n\right)=$

$\mu\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(E_1\setminus E_n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(E_1\setminus E_n)$以上还用到第一章例四中的性质

若$\mu(E_1)<+\infty$, 由测度的减性$\mu(E_1)-\mu\left(\lim\limits_{n\to+\infty}E_n\right)=\mu(E_1)-\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$即得

$\mu\left(\lim\limits_{n\to+\infty}E_n\right)=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$因$E_1$未必有$\mu(E_1)<+\infty$, 故只要在前面步骤中替换$E_1$为$E_{n_0}$即可.

(7) 若$E_n\in\mathcal{A}(n=1, 2\ldots)$, 则$\mu\left(\varliminf\limits_{n\to+\infty}E_n\right)\le\varliminf\limits_{n\to+\infty}\mu(E_n)$.

证明因为,

$\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}E_j\subset E_k(k=1, 2, \ldots)$, 故$\mu\left(\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}E_j\right)\le\mu(E_k)$ $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}E_j$随着k的增大而增大,

$k\to\infty$时, $\mu\left(\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\mu\left(\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}E_j\right)\le\varliminf\limits_{k\to\infty}\mu(E_k)$

5. 设μ^*为$\mathcal{P}(X)$上的外测度, $\mathcal{A}$为X上的代数, 证明：若
μ^*在$\mathcal{A}$上满足有限可加性, 则μ^*(在$\mathcal{A}$上的限制)为$\mathcal{A}$上的测度.

证明：μ^*在$\mathcal{A}$上满足可列可加性, 则其为$\mathcal{A}$上的测度.记
(E_k) 是$\mathcal{A}$中互不相交集成的集列,

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu^*(E_k)\overset{\text{目标}}{\Longrightarrow}\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\mu^*(E_k)$$

由外测度的次可加性$\mu^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k)$

因为, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 故$\sum\limits_{k=1}^{n}\mu^*(E_k)=\mu^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k\right)\le\mu^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)$故$\mu^*$为$\mathcal{A}$上的测度.

6. 设μ^*为$\mathcal{P}(X)$上的外测度, $\mathcal{A}$是由C外测度法所得的全体μ^*可测集, 证明：对于任一$E\in\mathcal{P}(X)$, 若$\mu^*(E)=0$, 则$E\in\mathcal{A}^*$.

证明E是μ^*可测集.$\forall\ T\in\mathcal{P}(X)$, 若$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^c)$, $T\cap E\subset E$,
$\mu^*(T\cap E)\le\mu^*(E)=0$. $T\cap E^c\subset T$, 故$\mu^*(T)\ge\mu^*(T\cap E^c)=\mu^*(T\cap E^c)+\mu^*(T\cap E)$
$\mu^*(T)\le\mu^*(T\cap E^c)+\mu^*(T\cap E)$总成立, $T=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)$

9. 设$\mathcal{A}$为集合X上的代数, μ为$\mathcal{A}$上的σ有限测度, μ^*是由μ导出的$\mathcal{P}(X)$上的外测度, $E\subset X$且$\mu^*(E)>0$. 证明：对于任一$\delta\in(0, 1)$, 存在$A\in\mathcal{A}$, 使得$\delta\cdot\mu(A)<\mu^*(A\cap E)$.

证明 : 若$\mu^*(A\cap E)=\mu(A)$, 则结论显然成立. 由定理 "3.3.4−−
−$\mathcal{A}$是集合X上的代数, μ是$\mathcal{A}$上的有限或σ有限测度,
$\mathcal{A}^*=\{E\in\mathcal{P}(X) \mid \forall T\in\mathcal{P}(X)$有$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^c)\}$
$\forall E\in\mathcal{A}^*,\exists A,B\in S(\mathcal{A})$.
$A\subset E\subset B$且$\mu^*(E\backslash A)=\mu^*(B\backslash E)=\mu^*(B\backslash A)=0$,即$\mu^*$是完备测度."
此处：若能得 $\mu^*(E\backslash A)=\mu^*\left(E\cap A^c\right)=0$, 则$0<\mu^*(E)=$
$\mu^*(E\cap A)+\mu^*\left(E\cap A^c\right)=[\,\mu^*(A\cap E)=\mu^*(A)\,]=\mu(A)$
方括号中的等式成立的一个充分条件是$A\subset E$, 而这恰恰是定理
"3.3.4中的结论, 而上面最后一个等号自然是因为A是μ^*可测集.
至此证毕： $\forall\delta\in(0,1)$, $\exists A\in\mathcal{A}$, 使得 $\delta\cdot\mu(A)<\mu^*(A\cap E)$.

10. 设$E \subset R$, $x_0 \in R$, 记$x_0 + E := \{x_0 + x \mid x \in E\}$, 证明：$m^*(x_0 + E) = m^*(E)$.
(此结论即所谓Lebesgue外测度的平移不变性.)

11. 设$x_0 \in R$, 证明：$E \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow (x_0 + E) \in \mathcal{L}$.

12. 证明：由 R中的全体开集生成的σ代数$\mathcal{B}$与$S(\mathcal{F})$

14. 证明：(1) R上的L可测集全体所成之集族$\mathcal{L}$与$\mathcal{P}$（R） 等势.

15. 证明：R上的Borel集可测集必为$L - S$可测集.

16. 设$(R, \mathcal{L}_g, m_g)$为一可测空间，$E \subset R$，证明：$E \in \mathcal{L}_g$的充要条件是下述之一成立：
(1) 对于任一$\varepsilon > 0$, 存在闭集F，使得$F \subset E$且$m_g^*(E \backslash F) < \varepsilon$
(2) 对于任一$\varepsilon > 0$, 存在闭集F与开集G，使得$F \subset E \subset G$且$m_g^*(G \backslash F) < \varepsilon$
(3) 存在F_δ型集F与G_δ型集G，使得$F \subset E \subset G$且$m_g^*(G \backslash F) < \varepsilon$

17. 设$(X, \mathcal{A}, \mu)$为测度 空间($\mathcal{A}$为代数)，μ^*为由μ导出的外测度.又设测度空间
$(X, \mathcal{A}_1, \mu^*)$为$(X, \mathcal{A}, \mu)$的扩张，记$\mu^{**}$为由$\mu^*$(作为$\mathcal{A}_1$上的测度)
导出的外测度，证明：$\mu^{**} = \mu^*$(此处的μ^*视作$\mathcal{P}(X)$上的外测度).

18. 设$(X, \mathcal{A}, \mu)$为有限或σ有限测度空间，其中
$\mathcal{A}$为σ代数，$(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$为由C外测度法所得的$(X, \mathcal{A}, \mu)$
的扩张.又记Ω为所有μ零测集的全体子集所成之集族，令
$\mathcal{A} \bigcup \Omega := \{A \bigcup W \mid A \in \mathcal{A},\ W \in \Omega\}$,
且在$\mathcal{A} \bigcup \Omega$上定义集合函数$\upsilon : \upsilon(A \bigcup W) = \mu(A)$.证明：$(X, \mathcal{A} \bigcup \Omega, \upsilon) = (X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$.

19. 设$\mathcal{A}$为集合X上的代数，$D \subset X$，令$\mathcal{A} \bigcap D := \{A \bigcap D \mid A \in \mathcal{A}\}$.证明：
(1) $\mathcal{A} \bigcap D$为D上的代数（若$\mathcal{A}$为σ代数，则$\mathcal{A} \bigcap D$也为σ代数）
(2) $S(\mathcal{A}) \bigcap D = S(\mathcal{A} \bigcap D)$
(3) 若$D \in \mathcal{A}$，μ为$\mathcal{A}$上的测度，则μ在$\mathcal{A} \bigcap D$上的限制μ_D为$\mathcal{A} \bigcap D$上的测度，
若记μ^*为由μ导出的$\mathcal{P}(X)$上的外测度，则μ_D^*为μ^*在$\mathcal{P}(D)$上的限制函数
(4) 若μ^*为$\mathcal{P}(X)$上的外测度，$\mathcal{A}^*$为由C外测度法得到的μ^*可测集全体，$D \in \mathcal{A}^*$，记μ_D^*
为μ^*在$\mathcal{P}(D)$上的限制，$\mathcal{A}_D^*$为由C外测度法得到的μ_D^*可测集全体，则$\mathcal{A}_D^* = \mathcal{A}^* \bigcap D$.

20. 设$\mathcal{A}$是X上的代数，μ为$\mathcal{A}$上的σ有限测度，则在$S(\mathcal{A})$
上存在且只存在一个测度μ^*使得$(X, S(\mathcal{A}), \mu^*)$是$(X, \mathcal{A}, \mu)$的扩张.