例題３．２)（教科書記載の別の例題）

再帰方程式を利用して最適解が理論的に得られる場合

正の数 x を n 個の正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に分けて，それらの積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ を最大にせよ。

学生さんから指摘がありました．
ありがとうございます！
$x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の数なので
「≤」を「<」に修正します．

解） $f_1(x)$ と $f_k(x)$ を以下のようにおく．

$$\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_k(x) = \max\limits_{0 < x_1 + x_2 + \cdots + x_k = x} \{x_1 x_2 \cdots x_k\}, \quad k = 2, 3, \ldots, n \end{cases} \qquad (1)$$

最適性の原理より，再帰方程式は次式となる．

$$\boldsymbol{f_k(x) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 \, f_{k-1}(x - x_1)} \qquad (2)$$

式(2)で $k = 2$ の場合を考えると

$$f_2(x) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 f_1(x - x_1) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 (x - x_1) = \max_{0 < x_1 \le x} \{-(x_1 - x/2)^2 + (x/2)^2\}$$

よって，$f_2(x)$ は $x_1 = x/2$ のときに最大で，$f_2(x) = (x/2)^2$ (3)

$$f_k(x) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 \ f_{k-1}(x - x_1) \qquad \text{(2)再掲}$$

$x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の数なので「≤」を「<」に修正します.

$k = 3$ の場合を考えると

式(3)より

$$f_3(x) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 \ f_2(x - x_1) = \max_{0 < x_1 \le x} x_1 \ \{(x - x_1)/2\}^2$$

ここで, $g(x_1) = x_1 (x - x_1)^2$, $(0 < x_1 \le x)$とおき, x_1で微分すると,

$$g'(x_1) = (x - x_1)\{(x - x_1) - 2x_1\} = (x - x_1)(x - 3x_1)$$

$g'(x_1)$ は $x_1 \le x/3$で正, $x_1 > x/3$で負であるから, $g(x_1)$ は $x_1 = x/3$で最大値を取る. よって, $f_3(x)$ は$x_1 = x/3$ のときに最大で,

$$f_3(x) = (x/3)^3 \qquad (4)$$

式(3)と(4)と見て, $n = k$ のとき**次式が成立すると<u>仮定</u>**する。次頁にて, この仮定が正しいことを帰納法で証明する。

$$f_k(x) = (x/k)^k \qquad (5)$$

$f_k(x) = (x/k)^k$ (5)再掲

以下，帰納法により，一般の k について証明する． $n=k$ で式(5)が成立するとする．

$x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の数なので「≤」を「<」に修正します．

$n = k+1$ のとき

式(5)より

$$f_{k+1}(x) = \max_{0<x_1\le x} x_1 f_k(x-x_1) = \max_{0<x_1\le x} x_1 (x-x_1)^k / k^k$$

ここで，$x_1(x-x_1)^k$ の最大値を求めるため， $g(x_1) = x_1 \times (x-x_1)^k$ とおき，x_1で微分すると，

$$g'(x_1) = (x-x_1)^{k-1}\{(x-x_1)-k\,x_1\} = (x-x_1)^{k-1}\{x-(k+1)\,x_1\}$$

$g'(x_1)$ は $x_1 \le x/(k+1)$ で正， $x_1 > x/(k+1)$で負であるから，$g(x_1)$ は $x_1 = x/(k+1)$ で最大値を取る．このとき， $f_{k+1}(x)$は次式となる．

$$f_{k+1}(x) = \{x/(k+1)\}\{x-x/(k+1)\}^k / k^k = x^{k+1}\{k^k/(k+1)^{k+1}\}/k^k$$
$$= \{x/(k+1)\}^{k+1}$$

故に，式(5)は一般の整数kについて成立する．したがって，xを等分するとき，それらの積は最大値となる．