古典的な表現論のはなし

Schur-Weyl Duality

Iwane Takumi

April 16, 2022

Contents

以下，k を体とする．

定義 1.1

R を k 上の線型環とし，V を k 上のベクトル空間とする．

$$\rho : R \to \mathrm{End}_k(V)$$

を k-線型環の射とするとき，ρ を R の V 上の**表現**といい，V を ρ の**表現空間**という．また，$\dim_k(V)$ を ρ の**次数**という．

線形代数 (Cayley-Hamilton の定理，Jordan 標準形) で用いられる次のような表現がある．

例 1.2

V を k-ベクトル空間とする．$f \in \mathrm{End}_k(V)$ に対して，$k[X]$ の V 上の表現 ρ を

$$\rho(\sum a_n X^n) := \sum a_n f^n$$

で定めることができる．

この講演でメインとなるのは次の表現である．

例 1.3

G を群とする．k-ベクトル空間 $k[G] = \oplus_{g\in G} kg$ に積を次のように定義する．

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h\in G} b_h h) := \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh$$

このとき，$k[G]$ は k-線型環となる．これを G の k 上の**群環**という．
群の射 $G \to \mathrm{GL}(V)$ が与えられたとき，これを線型に拡張することで表現 $\rho : k[G] \to \mathrm{End}_k(V)$ を得る．これを**群 G の表現**という．

例 1.4

群 G の左作用が M に与えられているとする．このとき，M 上の関数のなす空間 $C(M)$ における G の表現を

$$gf(p) := f(g^{-1}p) \quad (p \in M)$$

で定めることができる．

$G = (\mathbb{R}, +), M = \mathbb{R}$ とするとき，$af(x) = f(x-a)$ となる．これは f のグラフの平行移動を意味するのであった．

例 1.5 (部分表現)

表現 (ρ, V) を k-線型環 R の表現とする．V の部分空間 W が $\rho(R)W \subset W$ を満たすとき，W を R-**不変部分空間**という．このとき，

$$\rho_W(r) := \rho(r)\mid_W$$

とすることで，表現 (ρ_W, W) が生じる．これを (ρ, V) の**部分表現**という．

定義 2.1

(ρ, V) を k-線型環 R の表現とする.

(i) V が非自明な R-不変部分空間を持たないとき, (ρ, V) を**既約表現**という.

(ii) V の任意の R-不変部分空間 W に対して, $V = W \oplus U$ なる R-不変部分空間 U が存在するとき, (ρ, V) を**完全可約表現**という.

補題 2.2

(ρ, V) を k-線型環 R の完全可約表現とすると，その部分表現 W も完全可約となる．

証明.

W' を W の任意の不変部分空間とする．V の完全可約性から，
$V = W' \oplus U$ なる不変部分空間 U が存在する．$U' := W \cap U$ とおくと，
$W = W' \oplus U'$ となることが容易に示せる． $\square$

定理 2.3

k-線型環 R の有限次元表現 (ρ, V) に対して，次が同値である．

1. (i) V は完全可約，
2. (ii) 既約な部分表現の族 $((\rho_\lambda, V_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$V = \sum V_\lambda$，
3. (iii) 有限個の既約な部分表現 $((\rho_\lambda, V_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して，$V = \oplus V_\lambda$.

証明.

(i)⇒(ii)：V を完全可約とする．$((\rho_\lambda, V_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を V の既約な部分表現全体とし，$W := \sum V_\lambda$ とする．$V = W$ を示せばよい．$V \subsetneq W$ とすると，$V = W \oplus U$ なる不変部分空間 $U \neq 0$ が存在する．$v \in U$ とする．$\mathrm{Ann}(v)$ を含む極大左イデアルを $\mathfrak{m}$ とおくと，$\mathfrak{m}/\mathrm{Ann}(v)$ も極大である．これは R 加群としての同型 $R/\mathrm{Ann}(v) \cong Rv$ によって，$\mathfrak{m}v$ に写る．

証明.

したがって，$\mathfrak{m}v$ が Rv の極大な不変部分空間であることがわかる．[?] より，$Rv = \mathfrak{m}v \oplus L$ なる不変部分空間 L をとることができるが，$\mathfrak{m}v$ の極大性から，L の既約性が従う．このとき，$L \subset U \cap W = 0$ t なり矛盾．
(ii)⇒(i)：$V = \sum V_\lambda$ とし，W を V の不変部分空間とする．W との共通部分が 0 である V の不変部分空間全体は空でない帰納的順序集合であるから，その極大元 U が存在する．$V = W + U$ となることを示せばよい．そうでないとすると，仮定から $V_\lambda \not\subset W + U$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在するが，V_λ の既約性から，$V_\lambda \cap (W + U) = 0$．このとき，$W \cap (V_\lambda + U) = 0$ となることは容易にわかるから，U の極大性から $V_\lambda \subset U$．これは V_λ のとり方に反する．

証明.

(ii)⇒(iii)：$V=\sum V_\lambda$ とする．Λ の部分集合 Λ' で，$\sum_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda$ となるもの全体は空でない帰納的順序集合となる．したがって，その極大元 Λ_m がとれる．$W:=\sum_{\lambda\in\Lambda_m} V_\lambda$ とおいたとき，$V=W$ となることを示せばよい．そうでないとすると，$V_{\lambda_0}\not\subset W$ なる $\lambda_0\in\Lambda$ が存在するが，既約性から $W\cap V_{\lambda_0}=0$．このとき，Λ_m の極大性から $\lambda_0\in\Lambda_m$ となるが，これは V_{λ_0} のとり方に反する．
(iii)⇒(ii)：自明. □

定義 2.4

k-線型環 R のすべての表現が完全可約であるとき，R は**半単純**であるという．

R が有限次 k-半単純線型環のとき，すべての有限次既約表現を決定すれば，理論的にはすべての有限次表現が決定されたことになる．だが，与えられた表現の既約表現への分解を決定することとは別問題である．

定理 2.5

R を半単純環とすると，任意の R の左イデアル $\mathfrak{l}$ に対して，$\mathfrak{l} = Re$ なるべき等元 $e \in R$ が存在する．

証明.

R が半単純であることから，$R = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}'$ なる左イデアル $\mathfrak{l}'$ が存在する．
$1 = e + e'$ $(e \in \mathfrak{l},\ e' \in \mathfrak{l}')$ とおく．$x \in \mathfrak{l}$ を任意にとると，
$x - xe = xe' \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' = 0$ より，$x = xe$，$xe' = 0$ を得る．したがって，
$\mathfrak{l} = Re$ がわかる．また，上式で $x = e$ とすれば，e がべき等であることもわかる． $\square$

定義 2.6

環 R に対して，すべての極大左イデアルの共通部分 $J(R)$ を，R の **Jacobson 根基**という．

定理 2.7

k-線型環 R に対して，次が同値である．

1. $a \in J$,
2. 任意の $r \in R$ に対して，$b(1 - ra) = 1$ なる $b \in R$ が存在する，
3. R のすべての既約表現 ρ に対して，$\rho(a) = 0$.

証明.

(i)⇒(ii)：ある $r \in R$ が存在して，$b(1-ra) \neq 1$ $(\forall b \in R)$ となるとする．このとき，$R(1-ra) \subsetneq R$ であるから，$R(1-ra) \subset \mathfrak{m}$ なる左極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．特に，$1-ra \in \mathfrak{m}$．ここで，$a \in J$ とすると，$ra \in \mathfrak{m}$ となるから $1 \in \mathfrak{m}$．よって，$a \notin J$
(ii)⇒(iii)：ある既約表現 (ρ, V) に対して，$\rho(a) \neq 0$ とする．$\rho(a)v \neq 0$ なる $v \in V$ をとる．このとき，$\rho(Ra)v$ は V の 0 でない不変部分空間であるから，$\rho(Ra)v = V$．特に，$v = \rho(ra)v$ $(\exists r \in R)$．$b(1-ra) = 1$ なる $b \in R$ が存在するとすると，$v = \rho(b)\rho(1-ra)v = 0$ となり $v \in V$ の取り方に反する．したがって，$b(1-ra) \neq 1$ $(\forall b \in R)$.

証明.

(iii)⇒(i)：R のすべての既約表現 ρ に対して，$\rho(a)=0$ となるとする．極大左イデアル $\mathfrak{m}$ を任意にとると，$R/\mathfrak{m}$ は R の既約な表現空間である．よって，仮定から $a\in\mathfrak{m}$ を得る． □

Jacobson 根基の定義について

Jacobson 根基をすべての極大左イデアルの共通部分として定義したが，実はすべての極大右イデアルの共通部分として定義しても等しくなることが証明できる ([岩堀, 定理 1.3, 系]，[桂, 定理 4.3.8]).

系 2.7.1

I を R のべき零左イデアルとすると，$I \subset J(R)$.

証明.

$a \in I$ を任意にとる．$I^n = 0$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ であるから，任意の $r \in R$ に対して，$(ra)^n = 0$．よって，$b = 1 + \cdots + (ra)^{n-1}$ とおくと，

$$b(1 - ra) = 1 - (ra)^n = 1.$$

よって，$a \in J$. □

定理 2.8

R を有限次 k-線型環とすると，次が同値である．

1. (i) R が半単純,
2. (ii) R の左正則表現が完全可約,
3. (iii) J(R)=0.

証明.

(i)⇒(ii)：自明.
(ii)⇒(i)：R の左正則表現が完全可約であるとし，$R = \sum \mathfrak{l}_\lambda$，($\mathfrak{l}_\lambda$: 極小左イデアル) とおく．$R$ の表現 (ρ, V) を任意にとると，$V = \sum \rho(\mathfrak{l}_\lambda)v$ と書ける．$\mathfrak{l}_\lambda \to \mathfrak{l}_\lambda v$; $x \mapsto xv$ は R-加群の全射である．$\mathfrak{l}_\lambda$ の極小性から，これの核は 0 か $\mathfrak{l}_\lambda$ である．よって，$\mathfrak{l}_\lambda v$ は $\mathfrak{l}_\lambda$ と同型であるか 0 であるかのいずれかとなることがわかる．よって，(ρ, V) の完全可約性がいえた．

証明.

(ii)⇒(iii)：R の左正則表現が完全可約とすると，$R=\bigoplus \mathfrak{l}_\lambda$ なる R の極小左イデアルの族 $(\mathfrak{l}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する．$1=\sum e_\lambda$ $(e_\lambda\in\mathfrak{l}_\lambda)$ とおく．
$a\in J(R)$ を任意にとると，$a\mathfrak{l}_\lambda=0$ より，$a=\sum ae_\lambda=0$ を得る．
(iii)⇒(ii)：$J(R)=0$ とする．R の有限次性から，$\cap_{i=1}^n\mathfrak{m}_i=0$ なる有限個の極小左イデアル $\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_n$ が存在する．$\cap_{i=1}^m\mathfrak{m}_i=0$ なる m の中で最小のものを新たに n とおき直すことで，

$$\cap_{i=1}^n\mathfrak{m}_i=0,\quad \mathfrak{l}_i:=\cap_{j\neq i}\mathfrak{m}_j\neq 0$$

としてよい．

証明.

$\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{l}_i = 0$ より，$\mathfrak{m}_i \subsetneq \mathfrak{m}_i + \mathfrak{l}_i$．よって，$\mathfrak{m}_i$ の極大性から
$R = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{l}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{l}_i$ を得る．したがって，$\mathfrak{l}_i$ は極小左イデアルである．
$R = \sum \mathfrak{l}_i$ を示せばよい．$x \in R$ を任意にとり，
$x = a_i + b_i$，$(a_i \in \mathfrak{m}_i$，$b_i \in \mathfrak{l}_i)$ とおく．各 i に対して，

$$x - \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i - \sum_{j \neq i} b_j$$

となるが，

$$\mathfrak{l}_j = \cap_{k \neq j} \mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}_i \ (\forall j \neq i)$$

より，$\sum_{j \neq i} b_j \in \mathfrak{m}_i$．よって，$x - \sum_{j=1}^{n} b_j \in \mathfrak{m}_i$ となるから，
$x - \sum_{j=1}^{n} b_j \in \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i = 0$ を得る． □

定義 3.1

R を k-線型環とし，$(\rho, V), (\mu, W)$ をその表現とする．ベクトル空間の射 $f : V \to W$ が**絡作用素**であるとは

$$f(\rho(r)v) = \mu(r)f(v)$$

が成り立つことである．特に，(ρ, V) からそれ自身への絡作用素全体 $\mathrm{End}_R(V)$ を $\rho(R)$ の**中心化環**という．

定理 3.2 (Schur の補題)

R を k-線型環とし，$(\rho, V), (\mu, W)$ をその既約表現とする．

1. (i) 絡作用素 $f : V \to W$ は 0 か同型のいずれかである．特に，$\mathrm{End}_R(V)$ は可除環である．
2. (ii) k が代数的閉体のとき，(ρ, V) からそれ自身への絡作用素 f は $f = \lambda\,\mathrm{id}$ $(\exists\lambda \in k)$ の形に書ける．

証明.

(i)：$\mathrm{Ker}(f)$，$\mathrm{Im}(f)$ が不変部分空間となることから従う．
(ii)：f の固有値 $\lambda \in k$ をとると，固有空間 $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ が 0 でない不変部分空間となることから従う． □

$\dim_k(\mathrm{Hom}_R(V,W))$ を $\langle V,W\rangle_R$ と書き，V,W の**絡数**という．

系 3.2.1

R を代数的閉体 k 上の半単純環とし，V,W をその表現とする．V,W が既約表現 V_i (ただし，$i \neq j$ ならば $V_i \not\cong V_j$) を用いて，
$V = \oplus V_i^{\oplus m_i}$，$W = \oplus V_i^{\oplus n_i}$ と書けるとすると，

$$\langle V,W\rangle_R = \sum m_i n_i$$

が成り立つ．特に，$\langle V,V_i\rangle_R = m_i$ は V における V_i の重複度である．

環 R のイデアルが自明なものに限るとき，**単純環**という．Jacobson 根基は 1 を含まないイデアルゆえ，単純環が半単純であることがわかる．

系 3.2.2 (Wedderburn の構造定理)

単純環 R は可除環 D 上の行列環 $M_n(D)$ と同型である．特に，R が代数的閉体 k 上の単純線型環の場合，$R \cong M_n(D)$ である．

まず，次の補題を示す．

補題 3.3

単純環 R に含まれる極小左イデアルは同型である．

証明.

まず，R の極小左イデアル $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{l}\mathfrak{m} \neq 0$ となるとすると，$\mathfrak{l} \cong \mathfrak{m}$ となることを示す．実際，$\mathfrak{l}x \neq 0$ なる $x \in \mathfrak{m}$ を用いて，0 でない絡作用素 $\mathfrak{l} \to \mathfrak{m};\ a \mapsto ax$ を定義できる．よって，Schur の補題から $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{m}$ が従う．

次に，R の極小左イデアル $\mathfrak{l}$ を固定する．$I = \sum_{\mathfrak{l}' \cong \mathfrak{l}}$ とおく．これがイデアルとなることを示す．R は半単純であるから，任意の極小左イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$I\mathfrak{m} \subset I$ となることを示せばよい．$\mathfrak{m} \cong \mathfrak{l}$ ならば $I\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} \subset I$ であり，$\mathfrak{m} \ncong \mathfrak{l}$ ならば上から，$I\mathfrak{m} = 0 \subset I$ である．

最後に，$\mathfrak{m}$ を任意の極小左イデアルならば $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{l}$ となることを示す．I はイデアルであるから，R の単純性から $R = I$ を得る．$\mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{l}' \cong \mathfrak{l}} \mathfrak{l}'\mathfrak{m}$ より，$\mathfrak{l}'\mathfrak{m} \neq 0$ $(\exists \mathfrak{l}' \cong \mathfrak{l})$．よって，上から $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{l}$ を得る． □

系 3.2.2 の証明.

補題から R-加群として $R \cong \mathfrak{l}^{\oplus n}$ となり，Schur の補題から $D = \mathrm{End}_R(\mathfrak{l})$ が可除環となることがわかる．第 i 射影と第 j 入射をそれぞれ $p_i : R \to \mathfrak{l}, \iota_j : \mathfrak{l} \to R$ で表すこととする．写像を

$$\mathrm{End}_R(R) \to M_n(D);\ f \mapsto (p_i f \iota_j)$$

$$M_n(D) \to \mathrm{End}_R(R);\ (\lambda_{i,j}) \mapsto \sum_{i,j} \iota_i \lambda_{i,j} p_j$$

で定める．$p_i \iota_j = \delta_{i,j}$，$\sum \iota_k p_k = \mathrm{id}$ に注意すると，これらが互いに逆を与える環の射となることがわかる．よって，$End_R(R) \cong M_n(D)$ を得る．また，

$$R \to \mathrm{End}_R(R);\ a \mapsto \cdot a$$

$$M_n(D) \to M_n(D^{\mathrm{op}});\ A \mapsto {}^t A$$

が逆同型を与えるから，最終的に $R \cong M_n(D^{\mathrm{op}})$ を得る． □

Schur の補題 (および系 3.2.1) から，絡数の計算が既約表現の直和への分解を知る上で重要であることがわかった．そのための定理を述べておく．

定理 3.4

R を k-線型環，$a, b \in R$ をべき等元とすると，k-ベクトル空間として $Hom_R(Ra, Rb) \cong aRb$.

証明.

$$\mathrm{Hom}_R(Ra, Rb) \to aRb;\ \ f \mapsto f(a)$$
$$aRb \to \mathrm{Hom}_R(Ra, Rb);\ \ x \mapsto (ra \mapsto rax = rx)$$

が互いに逆を与える k-ベクトル空間の射である． □

定理 4.1 (Maschke の定理)

有限群 G に対して，$k[G]$ が半単純となるための必要十分条件は k の標数が $\#G$ を割り切らないことである．

証明.

十分性：G の k 上の表現を (ρ, V) とし，W をその不変部分空間とする．ベクトル空間としての射影 $p : V \to W$ を用いて，絡作用素 $p_G : V \to W$ を

$$p_G := \frac{\sum_{g \in G} \rho(g) p \rho(g^{-1})}{\#G}$$

で定める．このとき，W が不変であることから，G の表現の短完全列

$$0 \to \operatorname{Ker} p_G \to V \xrightarrow{p_G} W \to 0$$

が分裂することがわかる．

証明.

必要性：Jacobson 根基 J が非自明であることを示す． $a = \sum_{g \in G} g$ とおくと，

$$ga = ag = a, \ a^2 = \# G a = 0$$

を満たす．したがって，$(k[G]a)^2 = k[G](a^2) = 0$ となるから，$a \in J$ を得る． $\square$

G を有限群とし，H, K をその部分群とする．H, K の 1 次指標をそれぞれ φ, ψ とする．

$$a = \frac{\sum_{h \in H} \varphi(h)h}{\#H}, \quad b = \frac{\sum_{k \in K} \psi(k)k}{\#K}$$

とおくと，a, b は $R = \mathbb{C}[G]$ のべき等元である．$\langle Ra, Rb \rangle$ を計算しよう．
定理 3.4 から，aRb の次元を求めればよい．

$$\begin{aligned} x \in aRb &\Leftrightarrow x = axb \\ &\Leftrightarrow hxk = \varphi(h)^{-1}\psi(k)^{-1}x \quad (\forall h \in H, k \in K) \end{aligned}$$

は容易にわかる．

$x = \sum_{g \in G} f(g)g$ と書くことにすると，上の条件から

$$x \in aRb \Leftrightarrow f(h^{-1}gk^{-1}) = \varphi(h)^{-1}f(g)\psi(k)^{-1} \quad (\forall h \in H, k \in K)$$

となることがわかる．よって，aRb の次元を求めるためには G 上の $\mathbb{C}$ 値関数 f で

$$f(hgk) = \varphi(h)f(g)\psi(k) \quad (\forall h \in H, k \in K)$$

となるもの全体のなす空間 L の次元を求めればよい．

さて，G を H, K による両側類に分割して，$G = \amalg Hg_iK$ となるとする．Hg_iK 上の $\mathbb{C}$ 値関数 f で

$$f(hg_ik) = \varphi(h)f(g_i)\psi(k) \quad (\forall h \in H, k \in K)$$

を満たすもの全体を L_i とすると，$L = \oplus L_i$ となる．$f \in L_i$ は g_i での値で一意的に決まるから，$dim_{\mathbb{C}} L_i = 1$ または 0 である．

$L_i \neq \{0\}$ とする．$f \in L_i \backslash 0$ とすると，$K \cap g_i^{-1} H g_i$ の任意の元 $k = g_i^{-1} h g_i$ に対して，

$$\varphi(h)^{-1} f(g_i) \psi(k) = f(h^{-1} g_i k) = f(g_i).$$

したがって，$\psi(k) = \varphi(h)$ を得る．逆に，$K \cap g_i^{-1} H g_i$ の任意の元 $k = g_i^{-1} h g_i$ に対して，$\varphi(h) = \psi(k)$ となるとすると，$h g_i k = h' g_i k'$ のとき，

$$\varphi(h'^{-1} h) = \psi(k' k^{-1})$$
$$\therefore \varphi(h) \psi(k) = \varphi(h') \psi(k')$$

となる．したがって，L_i の 0 でない元を定義することができる．以上から，次の定理を得る：

定理 4.2

G を有限群，H, K をその部分群，$H\backslash G/K$ の完全代表系を $\{g_i\}$ とする．H, K の $\mathbb{C}$ 上の 1 次指標をそれぞれ φ, ψ とする．このとき，$\langle \mathbb{C}[G]a, \mathbb{C}[G]b \rangle_{\mathbb{C}[G]}$ は

$$\varphi(g_i x g_i^{-1}) = \psi(x) \quad (x \in K \cap g_i^{-1} H g_i)$$

となる g_i の個数に等しい．

系 4.2.1

定理の状況で，$H \cap K = \{1\}$ のとき，$\langle \mathbb{C}[G]a, \mathbb{C}[G]b \rangle_{\mathbb{C}[G]} = 1$ となるための必要十分条件は任意の $g \in G \backslash HK$ と $x \in K \cap g^{-1} H g$ に対して，$\varphi(g x g^{-1}) \neq \psi(x)$ となることである．

したがって，上の状況のとき，Ra と Rb に共通に含まれる既約表現が一意的に定まる．それを具体的に構成しよう．

$$ab = \frac{\sum_{h \in H, k \in K} \varphi(h)\psi(k)hk}{\#H\#K}$$

であるから，$H \cap K = \{1\}$ に注意すると，$c \neq 0$ がわかる．よって，ab が aRb の $\mathbb{C}$-基底となる．$(ab)^2 \in aRb$ であるから，$(ab)^2 = \lambda ab$ $(\exists \lambda \in \mathbb{C})$.

さて，$\lambda \neq 0$ とすると，$c \coloneqq \frac{ab}{\lambda}$ はべき等元である．このとき，

$$\mathrm{Hom}(Rc, Rc) \cong cRc \subset aRb$$

ゆえ，$\langle Rc, Rc \rangle_R = 1$ である．したがって，Rc は Rb の既約な部分表現となることがわかる．さらに，

$$\mathrm{Hom}(Ra, Rc) \cong aRc \ni abc = ab \neq 0$$

より，Rc が Ra にも含まれることがわかる．したがって，$Rc = Rab$ が求めるべき既約表現である．

$\lambda \neq 0$ を示そう．$x \in R$ に対して，$\cdot x : R \to R$ のトレースを $\chi(x)$ で表すこととする．G を R の基底とすれば,

$$\chi(1) = \#G, \quad \chi(g) = 0 \ (g \in G \backslash \{1\})$$

がわかる．よって,

$$\chi(ab) = \frac{\sum_{h \in H, k \in K} \varphi(h)\psi(k)\chi(hk)}{\#H\#K} = \frac{\#G}{\#H\#K} \neq 0$$

を得る ($\because H \cap K = \{1\}$ より，$hk = 1 \Leftrightarrow h = 1, k = 1$)．一方，$Rab$ の基底 $x_1, \cdots, x_r$ を延長して R の基底を $x_1, \cdots, x_n$ を作れば,

$$x_1 ab = \lambda x_1, \cdots, x_r ab = \lambda x_r$$
$$x_{r+1} ab, \cdots, x_n ab \in Rab$$

であるから，$\chi(ab) = r\lambda$ を得る．よって，$\lambda \neq 0$ がわかる．

以上から次の定理を得る：

定理 4.3

G を有限群とし，H, K を $H \cap K = \{1\}$ なる部分群とする．φ, ψ をそれぞれ H, K の $\mathbb{C}$ 上の 1 次指標とする．$\langle \mathbb{C}[G]a, \mathbb{C}[G]b \rangle = 1$ のとき，$\mathbb{C}[G]ab$ が $\mathbb{C}[G]a$ と $\mathbb{C}[G]b$ に共通に含まれる唯一の既約表現である．また，ab のスカラー倍がべき等元となる．

系 4.2.1 の条件を満たす部分群 H, K と 1 次指標 φ, ψ を対称群 $G = \mathfrak{S}_n$ の場合に構成しよう.

定義 4.4

$n = n_1 + \cdots + n_s$, $n_1 \geq \cdots \geq n_s > 0$ に対して, 1 行目に小正方形を n_1 個, 2 行目に小正方形を n_2 個, $\cdots$を左に詰めて並べたものを n 次の**台**という. $(n_1, \cdots, n_s)$ を台の**符号数**, s を台の**深さ**という.
台 D の各小正方形に $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ を 1 つずつ書き入れたものを D の**盤**という.

例 4.5

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

定義 4.6

n 次の盤 B に対して，B の行を保つ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を B の**水平置換**といい，B の水平置換全体 $\mathfrak{H}_B$ を**水平置換群**という．すなわち，

$$\sigma \in \mathfrak{H}_B \Leftrightarrow \sigma(B_{i,j}) = B_{i,l} \quad (\forall i, j)$$

B の列を保つ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を B の**垂直置換**といい，B の垂直置換全体 $\mathfrak{K}_B$ を**垂直置換群**という．すなわち，

$$\sigma \in \mathfrak{K}_B \Leftrightarrow \sigma(B_{i,j}) = B_{k,j} \quad (\forall i, j)$$

$\mathfrak{H}_B \cap \mathfrak{K}_B = \{1\}$ は明らかである．

補題 4.7

$\mathfrak{H}_B \cap \sigma\mathfrak{K}_B\sigma^{-1} = \{1\}$ ならば $\sigma \in \mathfrak{H}_B\mathfrak{K}_B$ となる．

証明.

まず，$\sigma\mathfrak{K}_B\sigma^{-1} = \mathfrak{K}_{\sigma B}$ となることに注意する．実際,

$$\begin{aligned} \tau \in \sigma\mathfrak{K}_B\sigma^{-1} &\Leftrightarrow \sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathfrak{K}_B \\ &\Leftrightarrow \tau\sigma B_{i,j} = \sigma B_{i,l}\ (\forall i, j) \\ &\Leftrightarrow \tau \in \mathfrak{K}_{\sigma^{-1}B}. \end{aligned}$$

同様に，$\sigma\mathfrak{H}_B\sigma^{-1} = \mathfrak{H}_{\sigma B}$ も成り立つ．

証明.

以下，例えば

$$B = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 & 7 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

として，$\mathfrak{H}_B \cap \sigma \mathfrak{K}_B \sigma^{-1} = \{1\}$ のとき，$\sigma \in \mathfrak{H}_B \mathfrak{K}_B$ となることを示す (一般の場合も同様の議論で示される．).

証明.

仮定から，B の第 1 行に含まれる文字は σB の同一の列に含まれることがない．

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline * & * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} * & * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} * & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \xrightarrow{\sigma} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & 1 \\ \hline 3 & * & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} * & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} * & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

証明.

よって，ある $\tau_1 \in \mathfrak{K}_{\sigma B}$ が存在して，B と $\tau_1 \sigma B$ の第 1 行の文字全体が一致する．

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
* & * & 1 \\
\hline
3 & * & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
* & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
* & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}
\xrightarrow{\tau_1}
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
3 & 2 & 1 \\
\hline
* & * & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
* & * & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
* & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}.
$$

証明.

第 2 行についても同様に，B の第 2 行に含まれる文字は σB の同一の列に含まれることがない．

$$\begin{ytableau} * & * & * \\ 4 & 5 \\ * & * \\ * \end{ytableau} \xrightarrow{\sigma} \begin{ytableau} * & 4 & * \\ * & * \\ * & * \\ 5 \end{ytableau}.$$

証明.

τ_1 は σB の列を保つから，B の第 2 行に含まれる文字は $\tau_1\sigma B$ の同一の列にも含まれない.

$$
\begin{ytableau} \ast & 4 & \ast \\ \ast & \ast \\ \ast & \ast \\ 5 \end{ytableau}
\xrightarrow{\tau_1}
\begin{ytableau} \ast & \ast & \ast \\ 5 & \ast \\ \ast & 4 \\ \ast \end{ytableau}
=
\begin{ytableau} 3 & 2 & 1 \\ 5 & \ast \\ \ast & 4 \\ \ast \end{ytableau}.
$$

証明.

よって，ある $\tau_1 \in \mathfrak{H}_{\sigma^{-1}B}$ が存在して，B と $\tau_1\sigma^{-1}B$ の第 1 列の文字全体が一致する．

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
4 & * & 7 \\
\hline
8 & 5 \\
\cline{1-2}
6 & 2 \\
\cline{1-2}
1 \\
\cline{1-1}
\end{array}
\xrightarrow{\tau_2}
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
4 & 7 & * \\
\hline
8 & 5 \\
\cline{1-2}
6 & 2 \\
\cline{1-2}
1 \\
\cline{1-1}
\end{array}.
$$

証明.

この操作を最後の列まで繰り返すことで，ある $\tau := \cdots \tau_2 \tau_1 \in \mathfrak{H}_{\sigma^{-1}B}$ が存在して，B と $\tau\sigma^{-1}B$ の各列の文字全体が一致する．したがって，ある $\rho \in \mathfrak{K}_B$ が存在して，$\rho\tau\sigma^{-1} = 1$ となる．よって，

$$\sigma = \sigma\rho\sigma^{-1}\sigma\tau\sigma^{-1}$$

□

定理 5.1

$\mathbb{C}$-線型環のユニタリー表現は完全可約である.

証明.

$\mathbb{C}$-線型環 R のユニタリー表現を (ρ, V) とし, W をその不変部分空間とする. $W^\perp$ が不変部分空間となることを示せばよい. $v \in W^\perp, a \in R$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\langle \rho(a)v, w \rangle &= \langle v, \rho(a)^* w \rangle \\
&= \langle v, \rho(a^{-1}) w \rangle \\
&= 0 \qquad (\forall w \in W).
\end{aligned}
$$

したがって, $\rho(a)v \in W^\perp$ を得る. □

定理 5.2

有限群 G の $\mathbb{C}$ 上の有限次表現 (ρ, V) に対して，これがユニタリー表現となるような内積が存在する．

証明.

V の内積 $\langle -, - \rangle$ を任意にとる．このとき，V の新たな内積を

$$\langle v, w \rangle_G := \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle$$

で定めればよい． $\square$

系 5.2.1 (Maschke の定理 (特別な場合))

有限群 G に対して，$\mathbb{C}[G]$ は半単純である．

定義 5.3

群 G の表現を (ρ, V) とする．このとき，V^* を表現空間とする表現 ρ^* を

$$(\rho^*(g)f)v := ({}^t\rho(g^{-1})f)v = f(\rho(a^{-1})v)$$

で定める．この表現 ρ^* を ρ の**反傾表現**という．

次の補題は容易に確かめられる．

補題 5.4

群 G の有限次表現を $(\rho, V), (\mu, W)$ とする．$\mathrm{Hom}(V, W)$ に G の表現 θ を

$$(\theta(g)\varphi)v := \mu(g)\varphi\rho(g^{-1})v$$

で定める．このとき，

$$V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W); f^* \otimes w \mapsto (v \mapsto f(v)w)$$

が G の表現としての同型を与える．また，固定空間 $\mathrm{Hom}(V, W)^G$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}[G](V, W)$ に一致する．

定理 5.5 (第一指標直交定理)

有限群 G に対して，$\mathbb{C}$ 上の既約指標 χ_i は G 上の類関数の空間の正規直交基底となる．ただし，内積 $\langle -, - \rangle$ は

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{\sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}}{\# G}$$

で与えられる．

証明.

χ_i を既約表現 (ρ_i, V_i) の指標とする．ρ_i はユニタリー表現としてよいから，

証明.

$$\begin{aligned}\overline{\chi_i(g)} = \overline{\mathrm{Tr}(\rho_i(g))} &= \mathrm{Tr}(\rho_i(g)^*) \\ = \mathrm{Tr}(\rho_i(g^{-1})) &= \mathrm{Tr}({}^t\rho_i(g^{-1})) = \mathrm{Tr}(\rho_i^*(g)).\end{aligned}$$

よって，$P = \frac{\sum_{g \in G} g}{\# G}$ とおくと，

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_i \otimes \rho_j^*(P)) = \mathrm{Tr}(\theta(P)).$$

一方，P は

$$gP = Pg = P, \quad P^2 = P$$

を満たすから，$\theta(P)(\mathrm{Hom}(V_j, V_i)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_j, V_i)$ となる．よって，

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \mathrm{Tr}(\theta(P)) = \langle V_i, V_j \rangle_{\mathbb{C}[G]}$$

を得る．よって，Schur の補題から $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{i,j}$ を得る． □

- 岩堀長慶: 対称群と一般線形群の表現論
- 桂利行: 代数学 II 環上の加群
- J.-P.Serre: Linear Representations of Finite Groups
- B.Hall: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations