p 進入門

Yuki_monea

April 10, 2022 at 新歓ミニセミナー

Introduction：整数論とは？

整数論とは整数

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

の性質を研究する分野．整数論における代表的な問題として次のようなものがある：

- フェルマーの最終定理

  $$x^n + y^n = z^n, n \geq 3$$

  を満たす整数の組 (x, y, z) は自明なものしかない．
  $\rightarrow$ めちゃくちゃ難しい
- 素数 p, l に対して $p + l$ を割る素数はなんだろう？
  e.g. $2 + 3 = 5$: 素数，$3 + 5 = 8 = 2^3$.

Introduction：整数論での研究手法

次のような方程式を考えてみる．

$$x^2 + y^2 = 3z^2 \tag{1}$$

$\rightarrow$ 実数解はある．

Question 1.1

方程式 (1) の非自明な整数解はあるか？

このような問題へのアプローチとして局所大域原理と呼ばれる手法が存在する：
3 進整数環 $\mathbb{Z}_3$ では非自明な解を持たない $\rightarrow$ 整数解を持たない．

Remark 1.2

整数論では局所の方が調べやすく，そこでは p 進数が活躍する!!

p 進絶対値

p 進数を定義するために p 進絶対値の定義を紹介しよう：
まず p 進加法付値を定義する．

Definition 2.1 (p 進付値)

$0 \neq n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$v_p(n) := \text{"}n\text{ の素因数分解における }p\text{ の指数"}$$

と定め，$v_p(0) = \infty$ とおく．さらに $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ に対して

$$v_p\left(\frac{n}{m}\right) := v_p(n) - v_p(m)$$

と定める．$v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を p 進付値という．

p 進絶対値

Definition 2.2 (p 進絶対値)

$a \in \mathbb{Q}$ に対して

$$|a|_p := \frac{1}{p^{v_p(a)}}$$

と定め，$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を p 進絶対値という．

Example 2.3

$p = 2$ を考える．

$$|5-3|_2 = \frac{1}{2}$$
$$|11-3|_2 = \frac{1}{8}$$

なので $\mathbb{Q}$ の通常の距離とは違う！

p 進数の構成①

まず数列の極限の概念を定義する.

Definition 2.4

数列 $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ をとる.
条件
「任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し $n \geq N$ ならば
$|a_n - \alpha|_p < \epsilon$」
が成り立つとき, 数列 (a_n) は α に収束するといい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す.

Remark 2.5

$\mathbb{Q}$ における数列は必ずしも収束するとは限らない.

p 進数の構成②

$\mathbb{R}$ では" コーシー列" と呼ばれる数列は必ず収束する．この事実に基づいて $\mathbb{Q}_p$ を" コーシー列" が必ず収束するように定義したい．そのためにコーシー列を定義する．

Definition 2.6

有理数の数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列であるとは，条件「任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し $n, m \geq N$ ならば $|a_n - a_m|_p < \epsilon$」を満たすことをいう．

コーシー列とは $\cdots$ めっちゃ先ではめっちゃ近くにいる数列
さて

$$\mathbb{Q}'_p := \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \mathbb{Q}, (a_n) \text{ はコーシー列 } \} \supset \mathbb{Q}$$

と定義しよう．

p 進数の構成③

極限とコーシー列は 1 対 1 ではない！

$\mathbb{R}$ において $\sqrt{2}$ に収束する 2 つの数列

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1.4,\ a_3 = 1.41,\ a_4 = 1.1414, \cdots$$
$$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1.4,\ b_4 = 1.41, \cdots$$

があるが，もちろん $(a_n) \neq (b_n)$ である．しかし $\mathbb{R}$ ではこれらの極限 $\sqrt{2}$ は区別されない！

このような問題があるため $\mathbb{Q}'_p$ は適切ではない．しかしコーシー列に適切な同一視を与えると問題は解消できる：

Definition 2.7

コーシー列 $(a_n), (b_n) \in \mathbb{Q}'_p$ に対して (a_n) と (b_n) は同値であるとは条件「任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し $n \geq N$ ならば $|a_n - b_n|_p < \epsilon$」を満たすことをいう．

p 進数の構成④

Definition 2.8

p 進数体を

$$\mathbb{Q}_p := \mathbb{Q}'_p/(\text{同値}) = \{\{(a_n)\text{ に同値な数列 }\} \subset \mathbb{Q}'_p\}$$

と定める．$\{(a_n)$ に同値な数列 $\}$ を $\lim a_n := \overline{(a_n)}$ と書くことにする．さらに $\lim a_n \in \mathbb{Q}_p$ に対して

$$|\lim a_n|_p := \lim |a_n|_p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

と定めると $|\cdot|_p$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の"絶対値" となる．

Remark 2.9

$\lim a_n$ は本当に (a_n) の極限となることが証明できる！

p 進数体上の絶対値の性質

というわけで p 進数体が構成され，絶対値も構成できたわけだがその性質について紹介しよう．

Proposition 2.10

$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$ に対して加法，乗法が次のように定義される．

$$\alpha + \beta = \lim(a_n + b_n)$$
$$\alpha \cdot \beta = \lim(a_n \cdot b_n).$$

ここで $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ である．特に"体"となる．

Proposition 2.11

$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$ に対して次が成立する:

1. $|\alpha|_p = 0$ iff $\alpha = 0$;
2. $|\alpha + \beta|_p \leq \max(|\alpha|_p, |\beta|_p)$;
3. $|\alpha \cdot \beta|_p = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p$.

空間としての $\mathbb{Q}_p$

ここでは複素数体 $\mathbb{C}$ を考えてみる．$\mathbb{C}$ はこんな感じで座標平面みたいな空間と見ることができる．

例えば $|z| = 1$ なる複素数 z の集合は単位円になる．

三角形の描像

$\mathbb{C}$ では次のようにいろんな三角形が描ける.

さて，$\mathbb{Q}_p$ もこんな感じで座標平面に書いたときに三角形はどのような姿をしているだろうか？同じ姿をしているだろうか？

$\mathbb{Q}_p$ における三角形

Proposition 2.12 (三角形は二等辺三角形)

$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$ に対し頂点が 0, α, β である三角形は二等辺三角形.

Proof.

$|\alpha|_p < |\beta|_p$ のときに $|\alpha - \beta|_p = |\beta|_p$ を示せば良い.
もし $|\alpha - \beta|_p < |\beta|_p$ ならば

$$\begin{aligned} |\beta|_p &= |\beta - \alpha + \alpha|_p \\ &\leq \max(|\beta - \alpha|_p, |\alpha|_p) \\ &< |\beta|_p \end{aligned}$$

となり矛盾する. □

特殊関数

実数の世界ではいろんな関数が活躍する．特に次の特殊関数

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$
$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

が重要だった．しかもこれらは" 同型" を与えている．そこで p 進世界でもこのような関数を定義したい．
まず exp と log が次のように冪級数展開できることに注目する．

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, \quad |x| < 1 \tag{3}$$

特殊関数：exp と log

形式的冪級数

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

$$\log(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} X^n$$

を考えると (2), (3) はそれぞれ $\exp(X)$, $\log(1+X)$ に $X = x$ を代入したものとなっている.

Question 3.1

$x \in \mathbb{Q}_p$ に対して $\exp(x)$, $\log(1+x)$ は $\mathbb{Q}_p$ 内に収束する？

$\rightarrow$ これはある意味では正しい！

特殊関数：$\exp_p$ と $\log_p$

Theorem 3.2

$x \in \mathbb{Q}_p$ に対して

- $|x|_p < 1$ ならば $\log(1+x)$ は収束する.
- $|x|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ ならば $\exp(x)$ は収束する.

さらに収束している範囲では

- $\log(1+x)(1+y) = \log(1+x) + \log(1+y)$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

が成り立つ.

収束する範囲が少し複雑になるが，実数での exp と log と全く同一の性質を持つ.

特殊関数：$\exp_p$ と $\log_p$

log あるいは exp を通して $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_{>0}$ だったことを思い出そう.
実はこの p 進類似も成立する:

- $\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$: p 進整数環
- $p^n\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-n}\} \subset \mathbb{Z}_p$
- $1 + p^n\mathbb{Z}_p := \{1 + y : y \in p^n\mathbb{Z}_p\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - 1|_p < p^{-n}\}$

Theorem 3.3

$n > \frac{1}{p-1}$ ならば

$$\log_p : 1 + p^n\mathbb{Z}_p \to p^n\mathbb{Z}_p$$
$$\exp_p : p^n\mathbb{Z}_p \to 1 + p^n\mathbb{Z}_p$$

は互いに逆写像となる.

p 進 Hodge 理論

- 私の専門分野：p 進 Hodge 理論及び整数論への応用
- p 進 Hodge 理論とは $\cdots$
  "Hodge" 理論の p 進類似
- Hodge 理論とは多様体の形を微分形式で捉える美しい理論

$X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ とする.
pairing

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X) \times H_1(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}; (\omega, \gamma) \mapsto \int_\gamma \omega$$

は非退化 (H_1 は特異 homology 群). すなわち $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X) \simeq H_1(X, \mathbb{C})^* \tag{4}$$

が誘導される.

p 進 Hodge 理論

Question 4.1

比較同型 (4) の p 進類似物は存在するだろうか？

- $\mathbb{C}$ の p 進類似物 $\mathbb{C}_p$ がある．
  $\to$ $\mathbb{C}$ と同様に代数閉体かつ完備なそこそこでかい体
- $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の多様体に対しても定義できる．
- 特異 homology 群 $H_1(X, \mathbb{C}_p)$ は $\mathbb{C}_p$ の位相に強く影響される．
- 積分は (少なくとも安直には) うまく定義できない．

以上の理由から比較同型を安直に証明することは困難な気がする．しかし特異 homology 群の双対の部分を étale cohomology 群と呼ばれる Grothendieck によって導入された，なんかよくわからんすごい cohomology 群で置き換えると比較同型 (4) の類似が得られる．

Hodge-Tate 分解

Theorem 4.2 (Faltings, '88)

$X/\mathbb{Q}_p$: smooth proper scheme(≒代数多様体)
同型

$$H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, \Omega^i_{X/\mathbb{Q}_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(i) \quad (5)$$

が存在する.

この同型はある付加構造も保つ.

- $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 (構造が複雑な群) $G_{\mathbb{Q}_p}$ は $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)$, $\mathbb{C}_p(i)$ に作用する.

比較同型 (5) は Galois 群の作用と両立する.

比較同型の精密化：v.s. de Rham cohomology

Faltings によって証明された比較同型 (5) は etale cohomology を群作用込みで記述しているが，実は情報がかなり落ちている．この落ちている部分を捉える比較同型について紹介しよう．

Theorem 4.3 (C_{dR} 予想)

$X/\mathbb{Q}_p$: smooth proper scheme
群作用及び filtration と両立する比較同型

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \tag{6}$$

が存在する．

- $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p), \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ には $G_{\mathbb{Q}_p}$ が作用する．
- $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, $H^i_{\mathrm{dR}}(X)$ には filtration 構造が入る．

比較同型の精密化：v.s. crystalline cohomology

C_{dR} でも十分良さそうだが，de Rham cohomology はあんまり情報が分からない．そこで比較同型 (6) のさらなる精密化を述べた予想 C_{cris} について紹介する．

Theorem 4.4 (C_{cris} 予想)

$X/\mathbb{Z}_p$: smooth proper scheme having good reduction
フロベニウス作用及び群作用と両立する比較同型

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \tag{7}$$

が存在する．

- X の特殊ファイバー X_p($\mathbb{F}_p$ 上のスキーム) に対して crystalline cohomology $H^i_{\mathrm{cris}}(X_p)$ が定義でき，フロベニウスが作用する．
- $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ には $G_{\mathbb{Q}_p}$ 及びフロベニウスが作用する．

比較同型の精密化：v.s. crystalline cohomology

- Berhtelot-Ogus の定理により標準的な同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X_p)$$

  が存在する．
- 自然な包含 $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ がある．

この 2 つに注意して比較同型を $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ に係数拡大すると比較同型

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$$

が得られる．つまり $C_{\mathrm{cris}} \Rightarrow C_{\mathrm{dR}}$.

比較定理の精密化：v.s. log-crystalline cohomology

C_{cris} によってだいぶ精密なことが分かる．
しかし X に課された条件はいささか強すぎるので，この条件を弱めた予想 C_{st} について紹介する．

Theorem 4.5 (C_{st} 予想)

$X/\mathbb{Z}_p$: smooth proper scheme having semi-stable reduction
フロベニウスとモノドロミー作用素による作用及び群作用と両立する比較同型

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \simeq H^i_{\mathrm{log-cris}}(X_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \tag{8}$$

が存在する．

- X の特殊ファイバー X_p に対して log-crystalline cohomology $H^i_{\mathrm{log-cris}}(X_p)$ が定義でき，フロベニウス及びモノドロミー作用素が作用する．
- $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$ には $G_{\mathbb{Q}_p}$，フロベニウス及びモノドロミーが作用する．

比較定理の精密化：v.s. log-crystalline cohomology

- 兵藤-加藤の定理により同型

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X) \simeq H^i_{\log-\mathrm{cris}}(X_p)$$

が存在する．

- 包含 $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ が存在する．

この 2 つに注意して比較同型を $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ に係数拡大すると比較同型

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \simeq H^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$$

が得られる．つまり $C_{\mathrm{st}} \Rightarrow C_{\mathrm{dR}}$. また X が good reduction を持つときモノドロミーは $N = 0$ となり

$$H^i_{\log-\mathrm{cris}}(X_p) = H^i_{\mathrm{cris}}(X_p)$$

となることが知られており，C_{st} は C_{cris} を含んだ結果となっている．

まとめ

- etale cohomology を大きい係数環に拡大すると比較的分かりやすい cohomology で捉えることができる.
- 実は semi-stable case では etale cohomology を考えることと log-crystalline cohomology を考えることは同値:

Theorem 4.6 (Colmez-Fontaine, '00)

関手

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{st}}_{\mathbb{Q}_p}(G_{\mathbb{Q}_p}) \to (\text{線形代数的なアーベル圏}); V \to (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{st}})^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

は圏同値を与える.

$\to$ 線形的な対象である log-crystalline cohomology を理解できれば étale cohomology が理解できる.

参考文献

[1] D. Benois, *An introduction to p-adic Hodge theory.*

[2] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, Springer Science & Business Media* (2012).

[1] : p 進 Hodge 理論を含めた Galois 表現の入門的な note．おすすめ

[2] : p 進解析に関する本．すごく丁寧で ζ 関数に関する記述もある．