集合論速習会

yui_poya0527

March 28, 2022

濃度

濃度

集合 A, B に対して, A と B の濃度が等しい. $\overset{\text{def}}{\iff}$ 全単射 $A \to B$ が存在する.
このことを $|A| = |B|$ と表す.

濃度の性質

1)$|A| = |A|$
2)$|A| = |B| \implies |B| = |A|$
3)$|A| = |B|$ かつ $|B| = |C| \implies |A| = |C|$

※全単射の逆写像、全単射同士の合成は全単射.

ベルンシュタインの定理

濃度と単射

単射 $A \to B$ が存在するとき, $|A| \leq |B|$ と表す.

濃度の性質

1)$|A| \leq |B|, |B| \leq |C| \implies |A| \leq |C|$
2)$|A| \leq |B|, |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$(ベルンシュタインの定理)

可算集合

可算集合

集合 A が可算集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |A| = |\mathbb{N}|$
すなわち可算集合とは $\mathbb{N}$ との間に全単射を持つような集合のこと.

可算集合の例

$\mathbb{Z}$
$\cdot$ $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を, $2k \mapsto k, 2k+1 \mapsto -k$ とする.
n の倍数全体 $n\mathbb{Z}$
$\cdot$ $\mathbb{N} \to n\mathbb{Z}$ を, 上の $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}, a \mapsto na$ を合成する.
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\cdot$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を, $(m.n) \mapsto m + \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}$ とする.
$\mathbb{Q}$
$\cdot$ $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \frac{m}{n} \mapsto (m,n)$ は単射なので $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ より包含写像が単射なので, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. よって $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{R}$ の濃度

対角線論法

$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ の濃度が等しいか考えるために，全単射 $a : \mathbb{N} \to (0, 1]$ が存在するとする．
$i \in \mathbb{N}$ に対して，$a(i) = 0.a_{i1}a_{i2} \cdots a_{ii} \cdots$ とする．
このとき，$b_i = \begin{cases} 1 & (a_{ii} = 0, 2, 4, 6, 8) \\ 2 & (a_{ii} = 1, 3, 5, 7, 9) \end{cases}$ とすると，$b = 0.b_1b_2b_3 \cdots$ が定まる．
a は全単射なので，$n \in \mathbb{N}$ が存在して $b = a(n)$．
b の取り方より $b \neq a(n)$ なので，全単射 a は存在しない．
$(0, 1] \subset \mathbb{R}$ より，$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$．

非可算集合

集合 A が非可算集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $|\mathbb{R}| = |A|$

カントール

集合 A が与えられたとき, A より濃度の大きい集合を作ることは可能か.

カントールの定理

すべての集合 A に対して, 単射 $\mathfrak{P}(A) \to A$ は存在しない.
すなわち, $|A| < |\mathfrak{P}(A)|$

可算集合と非可算集合

$|\mathfrak{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

二項関係

二項関係

集合 A 上の二項関係 ρ とは，A の元が 2 つ与えられたときに真偽がわかる法則．
$a, b \in A$ が二項関係 ρ を満たすとき，$a\rho b$ と表す．
また集合 A 上の二項関係 ρ はそのグラフ $G(\rho) := \{(a,b) \in A \times A \mid a\rho b\}$ を定める．

二項関係の性質

集合 A とその上の二項関係 ρ に関して，ρ が

1) 反射律 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての $a \in A$ に対して，$a\rho a$
2) 対称律 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a\rho b$ ならば $b\rho a$
3) 推移律 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a\rho b, b\rho c$ ならば $a\rho c$
4) 反対称律 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a\rho b, b\rho a$ ならば $a = b$

二項関係の例

二項関係の例

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ における等号 $=$, 不等号 $\leq, <$ はすべて二項関係になる.
1) 等号 $=$ は反射律, 対称律, 推移律, 反対称律を満たす.
2) 不等号 $\leq$ は反射律, 推移律, 反対称律を満たす.
3) 不等号 $<$ は推移律, 反対称律を満たす.

4)$\mathbb{N}$ において, $a \mid b$(a は b を割り切る) は二項関係 (整除関係) を定める.
これは反射律, 推移律, 反対称律を満たす.
5) 集合 A のべき集合 $\mathfrak{P}(A)$ において,
$B \subset C (B, C \in \mathfrak{P}(A))$ とするとこれは二項関係 (包含関係) を定める.
これは反射律, 推移律, 反対称律を満たす.

同値関係

同値関係

集合 A 上の同値関係とは, A 上の二項関係で反射律, 対称律, 推移律をみたすもの.

同値関係の例

1)$\mathbb{R}$ において等号 $=$ は同値関係
2)$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して $n \in \mathbb{N}(n > 0)$ で割った余りが等しいとき $a \sim b$ とする.
3)$\frac{a}{n}, \frac{b}{m} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ に対して, $am = bn$ のとき $\frac{a}{n} \sim \frac{b}{m}$ とする.
4) 三角形全体の集合において合同や相似は同値関係になる.

同値類

同値類

集合 A とその上の同値関係 $\sim$ があるとき, $a \in A$ に対してその同値類を

$$[a] := \{a' \in A \mid a \sim a'\}$$

Prop

$a, a' \in A$ に対して, $C(a) \cap C(a') \neq \emptyset \implies a \sim a'$

すなわち A は互いに交わらない同値類の和集合の形に書き直せる.

商集合

集合 A の同値関係 $\sim$ による商集合を $A/\sim := \{[a] \mid a \in A\}$ とする.
このとき, 自然な射影として全射 $A \to A/\sim, a \mapsto [a]$ が定まる.

商集合の例

先ほど見た同値関係の例での商集合を考えてみよう.

mod n

$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して $n \in \mathbb{N}(n > 0)$ で割った余りが等しいとき $a \sim b$ とする.
$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a(\mathrm{mod}\ n)\}$.
a' を a を n で割った余りとすると, $a' \in [a]$ で $0 \leq a' \leq n-1$.
$[a']$ を $\bar{a'}$ と表すことで, 商集合 $\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$.

有理数の約分

$\frac{a}{n}, \frac{b}{m} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ に対して, $am = bn$ のとき $\frac{a}{n} \sim \frac{b}{m}$ とする.
すなわち 2 つの有理数が共通の既約分数を持つときに等しいとみなす.
$\frac{a}{n}$ に対して, $[\frac{a}{n}] = \{\frac{b}{m} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \mid am = bn\}$.
よってその代表元として, 既約分数 $\frac{a'}{n'}$ が取れる.
このとき商集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})/\sim = \{[\frac{a'}{n'}] \mid \frac{a'}{n'}$ は既約分数 $\}$

順序関係

順序関係

集合 A 上の順序関係とは, A 上の二項関係で反射律, 推移律, 反対称律をみたすもの.
集合とその上の順序関係の対 $(A, \leq)$ を半順序集合という.

順序関係の例

1)$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ における等号 $=$, 不等号 $\leq$ は順序関係.
2)$\mathbb{N}$ における整除関係は順序関係
3) 集合 A のべき集合 $\mathfrak{P}(A)$ における包含関係は順序関係.

全順序集合

半順序集合 $(A, \leq)$ が全順序集合
$\overset{\text{def}}{\iff}$ すべての $a, b \in A$ に対して, $a \leq b$ か $b \leq a$ の少なくともいずれか一方が成立する.

上限と下限

半順序集合 $(A, \leq)$, $A' \subset A (A' \neq \emptyset)$ とする.

最小元と最大元

$x \in A'$ が A' の最小元 $\mathrm{min}A' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての $a \in A'$ に対して, $x \leq a$
$x \in A'$ が A' の最大元 $\mathrm{max}A' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての $a \in A'$ に対して, $x \geq a$

上界と下界

A' の上界を $\{u \in A \mid$ すべての $a \in A$ に対して, $a \leq u\}$ とする.
A' の下界を $\{v \in A \mid$ すべての $a \in A$ に対して, $a \geq v\}$ とする.

上限と下限

A' の上界が最小元をもつとき, その元を A' の上限 $\mathrm{sup}A'$ と定義する.
A' の下界が最大元をもつとき, その元を A' の下限 $\mathrm{inf}A'$ と定義する.

ツォルンの補題

準備

半順序集合 $(A,\leq)$ が帰納的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A のすべての全順序部分集合が上界を持つ.
半順序集合 $(A,\leq)$ において, $x\in A$ が極大元
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x\leq a, a\neq x$ となるような $a\in A$ が存在しない.

ツォルンの補題

空でない帰納的半順序集合は少なくとも 1 つの極大元を持つ.

整列可能定理

ツォルンの補題と同値な命題として選択公理，整列可能定理がある．

整列集合

半順序集合 $(A, \leq)$ が整列集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A の空でない部分集合はすべて最小元を持つ．
定義より，整列集合の部分集合は整列集合．
また，整列集合であれば全順序集合．

整列集合

$(\mathbb{N}, \leq)$ は整列集合．
最小元を持たないため，$(\mathbb{Q}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)$ は全順序集合ではあるが整列集合ではない．

整列可能定理

任意の集合は，その上にある順序を定義することで整列集合にすることができる．

選択公理

直積集合

集合系 $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ に対して，その直積を

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \mid f(\lambda) \in A_\lambda\}$$

Λ が有限集合の場合

$\lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．
このとき，$f \in \prod_{\lambda=1}^n A_\lambda$ は $f(1) \in A_1, \cdots, f(n) \in A_n$ で定めることができる．
すなわち，f を $(f(1), \cdots, f(n)) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ と見なすことができる．

$A_\lambda = \emptyset$ であるような $\lambda \in \Lambda$ が 1 つでも存在すれば $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$.

選択公理

集合系 $(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ において，どの A_λ も空でないとき $\prod A_\lambda$ は空でない．

参考文献

参考文献

内田伏一, 集合と位相, 裳華房, 2017
$\mathbb{N}$ のべき集合が非可算集合であることの証明
https://agajo.hatenablog.com/entry/2016/10/26/145528