3/6 環論セミナーおまけ

2022 年 3 月 6 日

問題 1. [1]1 より大きな実数の集合を S とする．写像 $\circ\colon S \times S \to \mathbb{R}$ を

$$(a,b) \mapsto a \circ b = \frac{1+ab}{a+b}$$

と定義する．このとき，任意の $a, b \in S$ に対して $a \circ b \in S$ であることを示せ．またこのとき，S は演算 $\circ$ によって群になるだろうか？

問題 2. [2]整数全体のある部分集合 M が次の性質を満たすとする．

- a, b が M の元ならば，$a - b$ も M の元である．

このとき，次を示せ．

1. 0 は M に含まれる．
2. a, b が M の元ならば，$a + b$ も M の元になる．
3. M が 0 以外の元を持つとする．このとき，c を M に含まれる最小の正の整数とすれば，M の任意の元は c の倍数となる．

問題 3. [3]0 でない 4 つの異なる複素数の元からなる集合 M が積について閉じている，すなわち任意の元 $x, y \in M$ に対して，$xy \in M$ が成り立つとする．集合 M を全て求めよ．

問題 4. a を b で割った余りを $M_b(a)$ とおく．整数 $\mathbb{Z}$ に演算 $\cdot\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を，$(a,b) \mapsto M_b(a)$ で定める．このとき，次の命題の真偽を判定せよ．

1. 任意の整数 a, b, c に対して，$M_c(a+b) = M_c(a) + M_c(b)$.
2. 任意の整数 a, b, c に対して，$M_{bc}(a) = M_b(a), M_{bc}(a) = M_c(a)$.

問題 5. 写像 $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は環の準同型写像であるとする．このとき，次を示せ．

[1]1997 年 岐阜女子大 家政
[2]1974 年 茨城大
[3]1973 年 神戸学院大

1. 準同型 φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ について，$\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ であることと，φ が単射であることは同値になる.

2. 準同型 φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ について，$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}$ であることと，φ が全射であることは同値になる.

また，この二つの命題の同値性を証明するときに,「整数が環である」という性質しか使っていないことをチェックせよ.

問題 6. [4]実数 α が $\alpha^3 = 5$ を満たすとき，任意の有理数 p, q に対して，$\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$ が成り立つことを示せ.

問題 7. 整数係数多項式全体を $\mathbb{Z}[x]$ とおく．この集合の元は例えば,

$$1, x, 2x^3, x+1, x^3+2x+3$$

などが挙げられる．x の係数が整数であることに注意せよ．この集合は私たちがよく知っているであろう和と積によって演算を定義することで，環になることが知られている.

1. 環 $\mathbb{Z}[x]$ の部分集合 I を

$$I = \{f(x)(x^2+1) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

でとる．つまり多項式 x^2+1 を"整数係数多項式"倍した集合を I とする．I は $\mathbb{Z}[x]$ のイデアルとなることを示せ．以降，I を (x^2+1) と表記する.

2. 集合 $\mathbb{Z}[i]$ を次のような集合とする.

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i] \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

ただし i は虚数単位とする．次で定義される写像 $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ が環の準同型写像になることを示せ[5]．また，φ は全射になることを示せ[6].

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{Z}[x] &\to \mathbb{Z}[i]\\ f(x) &\mapsto f(i)\end{aligned}$$

3. 1. で定めたイデアル $I = (x^2+1)$ の元 $g(x)$ を任意にとる．このとき $g(x)$ はある $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ を用いて $g(x) = f(x)(x^2+1)$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned}\varphi(g(x)) &= \varphi(f(x)(x^2+1))\\ &= \varphi(f(x))\varphi((x^2+1)) = \varphi(f(x))(i^2+1) = 0\end{aligned}$$

[4]2006 年 東京学芸大 教育 後期
[5]計算が大変かもしれないので，これは認めてもいいです (*′ω′*)
[6]こちらはちょっと考えると分かるかもしれない.

となるので，集合としての包含 $(x^2+1) \subset \operatorname{Ker}\varphi$ が成り立つことが分かる．この逆の包含，つまり $\operatorname{Ker}\varphi \subset (x^2+1)$ が成り立つことを示せ.

4. 準同型定理を用いることにより，環としての同型

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]$$

が成り立つことを示せ.

以上の問題について，整数係数を実数係数についても同様の議論が可能だろうか？　実数の場合,

$$\mathbb{R}[i] = \{a + ib \in \mathbb{R}[i] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

は複素数体 $\mathbb{C}$ と一致するということに注意すると，4. で得た同型

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$$

は成り立つのだろうか？