Peano の空間充填曲線定理

Mathbell

Twitter：@mathbell3

2022 年 4 月 16 日

概要

本講義では，次の内容を扱う。

- 位相空間
  - Baire 点列空間
  - Cantor 集合
  - 同相写像の構成
  - Tietze の拡張定理
- Peano 曲線
- ＜発展＞ Hahn-Mazurkiewicz の定理

予め，前提知識として次を要請する。といっても，高度な知識は要請せず，位相空間論に関する基礎知識があればよい。

- 前提知識
  - 集合論・位相空間論の基礎知識（学部２～３年程度）
  - 実数論・解析学に関する基礎知識（学部１～２年程度）

Peano 曲線

本講義における主題は次の定理である。

定理 (G.Peano,1890)

$I = [0,1]$ とする。このとき，連続な全射 $f : I \to I^2$ が存在する。

この定理は，正方形を埋め尽くすような曲線が存在することを主張している。

Peano 曲線

- 歴史的には，1890 年にジュゼッペ・ペアノ (Giuseppe Peano, イタリア,1858-1932) によって発見された。この事実は曲線は 1 次元，正方形は 2 次元であると信じていた当時の数学界を驚かせることになった。Peano 曲線の発見は，後に位相次元論へと発展していくことになる。
- I から I^2 への連続全射，所謂 Space-filling curve(空間充填曲線) の構成は Hilbert による方法などが知られているが，本講義では，主に Peano による構成法を紹介する。
- 一先ず，この定理の証明の為に位相空間論の準備をしよう。

Baire 点列空間

定義 (Baire 点列空間)

集合 Ω の点列 $\{x_i\}, \{y_i\}$ に対して，

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \begin{cases} 0 & x_i = y_i, i = 1, 2, \ldots \\ \frac{1}{n} & x_i = y_i, 1 \leq i < n; x_n \neq y_n \end{cases}$$

で定めるとき，距離空間 $(\Omega^{\mathbb{N}}, d)$ を **Baire 点列空間** といい， $B(\Omega)$ とかく。

【注意】これは通常「Baire 空間」と呼ばれるものだが，位相空間論において「Baire 空間」は別の意味でも用いるので，ここでは「Baire 点列空間」と呼ぶことにする。

Cantor 集合

以後，$I = [0, 1]$ とする。
I を 3 等分し，中央の開区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を取り除いてできた閉区間

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

を，3 進小数を用いて次のようにおく。

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right],\ I_2 = \left[0.2, 0.2 + \frac{1}{3}\right]$$

Cantor 集合

ここで，I の数 x の 3 進小数展開とは，次の式で表される数のことをいう。

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}$$

これを，

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots$$

とかく。以後，小数表示したときは常に３進小数とする。
【注意】この級数展開は well-defined である。アルキメデスの公理より証明できるが，ここでは省略する。例えば，[杉浦] 第１章定理 3.9 を参照せよ。

Cantor 集合

次に，上で作った閉区間 I_0, I_2 を３等分し，中央の開区間を取り除いてできた閉区間

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

を，３進小数を用いて次のようにおく。

$$I_{00} = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_{02} = \left[0.02, 0.02 + \frac{1}{3^2}\right]$$

$$I_{20} = \left[0.2, 0.2 + \frac{1}{3^2}\right], I_{22} = \left[0.22, 0.22 + \frac{1}{3^2}\right]$$

Cantor 集合

閉区間をそれぞれ３等分し，その中央の開区間を取り除く操作を繰り返すことで，n 回行うと，残る閉区間は 2^n 個あり，それらは

$$I_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \left[0.a_1 a_2 \cdots a_n, 0.a_1 a_2 \cdots a_n + \frac{1}{3^n}\right] \ (a_i \in \{0, 2\},\ i = 1, \cdots, n)$$

となる。

Cantor 集合

閉区間の構成法から，明らかに

$$I_{a_1 a_2 \cdots a_n} \supset I_{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

である。さらに，各小区間について，

$$\mathrm{diam}(I_{a_1 a_2 \cdots a_n}) = \frac{1}{3^n} \to 0$$

を満たすので，区間縮小法より，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \{a\}$$

なる $a \in I$ がただ１つ存在する。

Cantor 集合

以上の操作によって，I の点の集合が得られる。

$$C := \left\{ a \in I \;\middle|\; a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 a_2 \cdots a_n},\ a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

この集合 C を **Cantor 集合** という。

Cantor 集合

Cantor 集合の実態について調べよう。

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

とおく。

補題 (Cantor 集合)

$$C = K$$

この補題は，Cantor 集合が 3 進小数で表したとき，0 または 2 のみが現れる 0 以上 1 以下の実数であることを示している。

Cantor 集合

- **補題の証明 1**

$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $a_i \in \{0, 2\}$ とする。
このとき，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して， $a \in I_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ を満たす。

$$0 \leq a - 0.a_1 a_2 \cdots a_n \leq 0.a_1 a_2 \cdots a_n + \frac{1}{3^n} - 0.a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{3^n} \to 0$$

なので，

$$0.a_1 a_2 \cdots a_n \to a$$

となる。これは，

$$a = 0.a_1 a_2 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

を示している。以上により， $C \subset K$ である。

Cantor 集合

補題の証明２

$a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$, $a_i\in\{0,2\}$ とする。
各 $n=1,2,\cdots$ に対して，

$$p_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}=0.a_1a_2\cdots a_n,\quad q_n=p_n+\frac{1}{3^n}$$

とおく（この $\{p_n\},\{q_n\}$ はそれぞれ単調増加/減少であることに注意せよ）。このとき，任意の $n=1,2,\cdots$ をとると， $p_n\leq a$ である。
また， $q_n<a$ とすると，ある $l\in\mathbb{N}$ があって，

$$\forall m\in\mathbb{N},\ l\leq m\Longrightarrow a-p_m<a-q_n$$

となる。よって， $l\leq n$ であれば $q_n<p_n$ となり， $n<l$ であれば $q_l<q_n<p_l$ となって矛盾する。 よって， $a\leq q_n$ である。
従って， $a\in[p_n,q_n]=I_{a_1a_2\cdots a_n}$ となる。ゆえに， $C\supset K$ である。
(証明終)

同相写像の構成

$D = \{0, 1\}$ とおく。写像 $\varphi : B(D) \to C$ を，

$$\varphi((t_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} t_i$$

で定める。右辺が K の元であることは明らかである。

定理

φ は 同相写像である。

この定理は Peano の定理を示す際に用いる。

同相写像の構成

■ 定理の証明（全単射）

全射であることは明らか（ C からとれる $t_1, t_2, \cdots$ が $B(D)$ の点列になるから）。
単射であることを示そう。$(t_i), (s_i) \in B(D)$ をとり，$(t_i) \neq (s_i)$ とする。
このとき，$k = \min\{\ i \in \mathbb{N} \mid t_i \neq s_i\ \}$ とおくと，明らかに $t_k \neq s_k$ である。
また，k の最小性より，

$$\forall i < k,\ t_i = s_i$$

である。
一般性を失うことなく，$t_k < s_k$ としてよい。このとき，$t_k = 0, s_k = 1$ である。

同相写像の構成

定理の証明（全単射）

よって，

$$\begin{aligned}\varphi((t_i)) &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{3^i} t_i + \frac{2}{3^k} t_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} t_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{3^i} t_i + \frac{2}{3^k} t_k + \frac{1}{3^k} \\ &< \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{3^i} s_i + \frac{2}{3^k} s_k \\ &\leq \varphi((s_i))\end{aligned}$$

であるから， $\varphi((t_i)) \neq \varphi((s_i))$ である。ゆえに， φ は単射である。

同相写像の構成

定理の証明（φ の連続性）

$\varepsilon > 0$ をとり，$(t_i) \in B(D)$ とする。このとき，

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

なる $n \in \mathbb{N}$ がある。$(s_i) \in B(D)$ をとり，

$$d((t_i), (s_i)) < \frac{1}{n}$$

とする。$(t_i) \neq (s_i)$ としてよい。このとき，

$$t_i = s_i,\ 1 \leq i < m;\ t_m \neq s_m$$

なる $m \in \mathbb{N}$ がある。よって，Baire 点列空間の距離の定義によって，$\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ 即ち $n < m$ である。

$$|\varphi((t_i)) - \varphi((s_i))| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^{m-1}} \leq \frac{1}{3^n} < \varepsilon$$

なので，φ は連続である。

同相写像の構成

■ 定理の証明（φ^{-1} の連続性）

$\varepsilon > 0$ をとり，$t \in C$ とする。このとき，アルキメデスの公理より，

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

なる $n \in \mathbb{N}$ がある。$s \in C$ をとり，

$$|t - s| < \frac{1}{3^n}$$

とする。このとき，φ の全射性より，$t = \varphi((t_i)), s = \varphi((s_i))$ なる $(t_i), (s_i) \in B(D)$ がとれる。$(t_i) \neq (s_i)$ としてよい。このとき，

$$t_i = s_i,\ 1 \leq i < m;\ t_m \neq s_m$$

なる $m \in \mathbb{N}$ がある。これより，

$$d((t_i), (s_i)) = \frac{1}{m}$$

である。

■ **定理の証明（φ^{-1} の連続性）**

$$|\varphi((t_i)) - \varphi((s_i))| = |t - s| < \frac{1}{3^n}$$

より，

$$\frac{1}{3^m} \le \frac{2}{3^m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \le \frac{2}{3^m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}|t_i - s_i| \le \left|\sum_{i=m}^{\infty} \frac{2}{3^i}(t_i - s_i)\right| < \frac{1}{3^n}$$

である。ここで，

$$\frac{1}{3^m} < \frac{2}{3^m} \le \frac{1}{3^n}$$

なので， $n < m$ である。よって，

$$d((t_i),(s_i)) = \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

である。（証明終）

Tietze の拡張定理

定理 (Tietze の拡張定理 (距離空間 ver.))

X を距離空間， A を X の閉集合とする。このとき，連続写像 $f : A \to I$ は，連続写像 $\tilde{f} : X \to I$ に拡張される。

ここでいう「拡張」とは，$\tilde{f}|_A = f$ ，即ち，$\tilde{f}$ を A に制限した写像が f に等しくなることをいう。
証明は長く，難しく，本講義の目的からは逸脱する為，省略する。
例えば，[森田] 定理 19.4 や [小山] 定理 4.7 を参照せよ。

Peano 曲線の証明

改めて，定理の主張を確認しよう。

定理 (G.Peano,1890)

$I=[0,1]$ とする。このとき，連続な全射 $f: I \to I^2$ が存在する。

これまでの準備を以って，この定理を証明しよう。

Peano 曲線の証明

- **定理の証明（2 進展開写像の定義）**

写像 $f : B(D) \to I$ を，

$$f((t_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} t_i$$

で定める。このとき，定義式が $0 \leq x \leq 1$ なる実数の 2 進展開なので，f は全射である。φ の連続性の証明のときと同様に，f の連続性が示せる。

Peano 曲線の証明

- **定理の証明（直積空間 $B(D) \times B(D)$ の定義）**

直積空間 $B(D) \times B(D)$ について定義しよう。Baire 点列空間 $(B(D), d)$ を用いて，次のように定義する。

$$\rho(((t_i), (s_i)), ((u_i), (v_i))) = \sqrt{d((t_i), (u_i))^2 + d((s_i), (v_i))^2}$$

ここで，$(t_i), (s_i)), ((u_i), (v_i)) \in B(D) \times B(D)$ である。このとき， ρ は $B(D) \times B(D)$ 上の距離関数である。

Peano 曲線の証明

- **定理の証明（ψ の定義）**

写像 $\psi : B(D) \times B(D) \to B(D)$ を，

$$\psi((t_i), (s_i)) = (x_i)$$

$$x_i = \begin{cases} t_n & i = 2n-1, i : odd \\ s_n & i = 2n, i : even \end{cases}$$

で定めると，これは全単射かつ ψ^{-1} は連続である。
この写像は具体的に書きだすと，

$$\psi((t_i), (s_i)) = (t_1, s_1, t_2, s_2, \cdots)$$

のように，第１成分の点列の元と第２成分の点列の元が交互に現れる。

Peano 曲線の証明

- **定理の証明（ψ^{-1} の存在）**

$\phi : B(D) \to B(D) \times B(D)$ を次で定める。

$$\phi((x_i)) = ((x_1, x_3, x_5, \cdots), (x_2, x_4, x_6, \cdots)), \ (x_i) \in B(D)$$

このとき，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{B(D)\times B(D)}$，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{B(D)}$ である。つまり，$\psi^{-1} = \phi$ となる。

Peano 曲線の証明

■ **定理の証明（ψ^{-1} の存在）**

$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{B(D)\times B(D)}$ について，

$$\begin{aligned}(\phi \circ \psi)(((t_i),(s_i))) &= \phi((t_1,s_1,t_2,s_2,\cdots)) \\ &= ((t_1,t_2,\cdots),(s_1,s_2,\cdots)) \\ &= ((t_i),(s_i)) \\ &= \mathrm{id}_{B(D)\times B(D)}(((t_i),(s_i)))\end{aligned}$$

となる。

$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{B(D)}$ について，

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)((x_i)) &= \psi(((x_1,x_3,\cdots),(x_2,x_4,\cdots))) \\ &= (x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots) \\ &= (x_i) \\ &= \mathrm{id}_{B(D)}((x_i))\end{aligned}$$

となる。

Peano 曲線の証明

■ 定理の証明（$\psi^{-1} = \phi$ の連続性）

任意に $(x_i) \in B(D)$ と $\varepsilon > 0$ をとる。このとき，アルキメデスの公理より，

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

となるような $n \in \mathbb{N}$ がとれる。$(y_i) \in B(D)$ をとり，$d((x_i),(y_i)) < \frac{1}{n}$ とする。このとき，$B(D) \times B(D)$ の距離を ρ とすると，

$$\begin{aligned}\rho(\phi((x_i)), \phi((y_i))) &= \sqrt{d((x_{2i-1}),(y_{2i-1}))^2 + d((x_{2i}),(y_{2i}))^2} \\ &\leq \sqrt{2d((x_i),(y_i))^2} \\ &< \frac{\sqrt{2}}{n} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

となる（定義より確かめられる）。ゆえに，$\psi^{-1} = \phi$ は連続である。

- 定理の証明（求める写像を構成する）

上で定めた $\varphi : B(D) \to C$ によって，

$$g := (f \times f) \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

と定めると，これまでの議論により， $g : C \to I \times I$ は連続な全射になる。ここで， $f \times f$ は直積写像，即ち

$$f \times f : B(D) \times B(D) \to I \times I; ((t_i), (s_i)) \mapsto (f((t_i)), f((s_i)))$$

である。これは f が連続な全射なことから， $f \times f$ も連続な全射になる。

Peano 曲線の証明

- 定理の証明（求める写像を構成する）

$p_1, p_2 : I \times I \to I$ を射影とする。
C は I の閉集合なので，Tietze の拡張定理より，

$$p_i \circ g : C \to I \ (i = 1, 2)$$

は連続写像 $f_i : I \to I$ に連続的に拡張される。よって，

$$\tilde{g} : I \to I \times I; t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$$

は連続で， $\tilde{g} \restriction_C = g$ である。
よって， g は全射より， $\tilde{g} \restriction_C$ も全射である。故に， $\tilde{g}$ も全射である。（証明終）

Hahn-Mazurkiewicz の定理

やや発展的だが，次の重要な定理が知られている。

定理 (Hahn-Mazurkiewicz の定理)

$I = [0, 1]$ とする。距離空間 X に対して，次は同値。

- 連続な全射 $f : I \to X$ が存在する。
- X が連結，局所連結，コンパクトである。

証明はここでは省略するが，例えば，[Willard]Chapter8,31.5 Theorem を参照せよ。
この定理によれば，より一般に， I^n への連続な全射が存在することがわかる。

おわりに

- 今回の講演では，有名だが証明が高度な Peano 曲線の存在について，位相空間論の基礎知識のみでわかるように，[森田] 第 3 章, 定理 14.14 を参考に証明した。
- 別証として，[Munkres]Chapter7,Theorem 44.1 では，完備距離空間を用いた証明が展開されており，こちらの方が直感的である。
- 本証明は Cantor 集合の典型的な応用例になっている。
- 最後に紹介した Hahn-Mazurkiewicz の定理も Cantor 集合を用いて証明されることに注意せよ。

参考文献

参考文献は本文中で [NAME] としている。

- 森田：位相空間論，森田紀一著，岩波書店，1981
- 小山：位相空間論，小山晃著，森北出版，2021
- Willard：General Topology，Stephen Willard 著，Dover Publications，2004
- Munkres：Topology，James Munkres 著，Pearson，2017

更新情報

以下は本資料の更新情報である。

- 2022 年 4 月 11 日初版
- 2022 年 4 月 15 日改訂
- 2022 年 4 月 16 日改訂