集合論速習会

yui_poya0527

March 26, 2022

集合

集合

集合とは
"何かものの集まりで, 集まっているものの範囲がはっきりと定まっているもの" のこと.

集合の例

$\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
$\mathbb{R}$: 実数全体の集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体の集合
$\mathbb{P}$: 素数全体の集合
$\emptyset$: 空集合 (要素のない集合)

要素と部分集合

集合の元

集合の要素 1 つ 1 つを集合の元という.
a が集合 A の元であることを, $a \in A$ で表す.
逆に a が集合 A の元でないことを, $a \notin A$ で表す.

部分集合

A が B の部分集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の A の元は B の元
このことを $A \subset B$ と表す. 逆に A が B の部分集合でないとき, $A \not\subset B$ と表す.

例

$7 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $9 \notin \mathbb{P}$, $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$

集合の表し方

外延的定義と内包的定義

外延的定義 := 集合の要素をすべて書き出す表し方
内包的定義 := 集合の要素が満たす条件を指定する表し方
$A = \{x \mid x$ の満たす条件 $\}$

例

集合 A が一桁の自然数全体からなる集合だとする.
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 9\}$

基本的には内包的定義を用いる (無限集合などを取り扱うため).

集合の例

開区間と閉区間

a, b を実数とし，$a < b$ とする．$\mathbb{R}$ において

開区間 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

閉区間 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

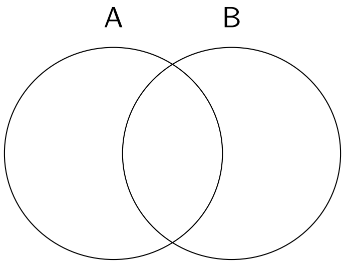
べき集合

集合 A に対してそのべき集合を $\mathfrak{P}(A) := \{S \mid S \subset A\}$

集合の演算

集合の演算

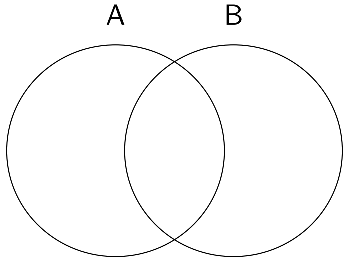
集合 A, B に対して,
和集合 $A \cup B := \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$
積集合 $A \cap B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$
差集合 $A - B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$



ド・モルガンの法則

定理 1 (ド・モルガンの法則)

$A, B \subset X$ に対して,
1)$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$
2)$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$



ド・モルガンの法則を示す

示し方

$A = B$ を示す. $\iff$ $A \subset B$ かつ $A \supset B$ を示す.
$A \subset B$ を示す. $\iff$ $x \in A$ ならば $x \in B$ を示す.
のが命題の最も標準的な示し方になる.(対偶を取ったり, 背理法を用いたりなどもある)

Proof.

$X - (A \cup B) \subset (X - A) \cap (X - B)$ を示す.
$x \in X - (A \cup B)$ より, 差集合の定義から $x \in X$ かつ $x \notin A \cup B$.
よって $x \in X - A$ かつ $x \in X - B$ なので, $x \in (X - A) \cap (X - B)$.
逆を示すために $x \in (X - A) \cap (X - B)$ とする.
このときまず $x \in X$ は $X - A \subset X$ より明らか.
また, $x \notin A$ かつ $x \notin B$ より $x \notin A \cup B$. よって $x \in X - (A \cup B)$. $\square$

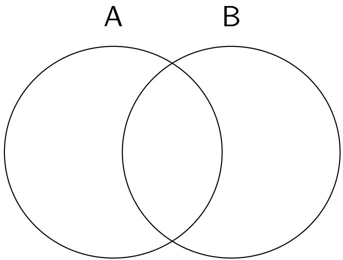
補集合

補集合

$A \subset X$ とする．
このとき A の補集合を $A^{\mathsf{c}} := X - A$ とする．

補集合を用いたド・モルガンの法則

1)$(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$
2)$(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$



直積集合

集合の直積はイメージとしては座標を取るようなもの.

集合の直積

集合 A, B の直積を $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

直積の例

1)$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
次の 2 つはどんな集合になるだろうか.
2)$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3)$[a, b] \times [c, d] (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \leq b, c \leq d)$

一般の直積

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の直積は,
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$

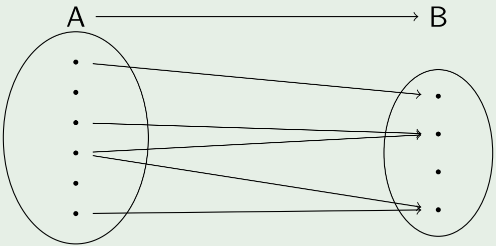
写像

写像

集合 A, B に対して, 写像 $A \to B$ とは
すべての A の元に対して、それぞれ B の元が一つ対応するような元の対応のこと.

問題

次のような対応は写像だろうか. また違う場合はどこがまずいだろうか.



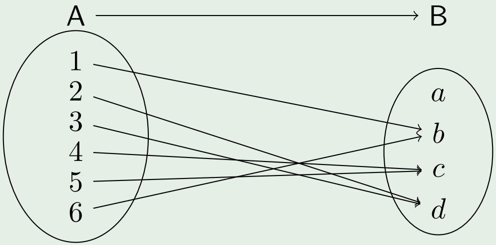
写像

定義域と値域

$f : A \to B$ に対して,A を f の定義域という.
B のうち A の元と対応しているもの全体からなる集合を f の値域という.

問題

次のような写像の定義域と値域はどうなってるだろうか.



写像の定義域と値域

例

写像 $f(x)=x+1$ を考える．
このときこの写像は実数全体で定義されるため定義域は $\mathbb{R}$.
x が $\mathbb{R}$ 全体を動くとき，f は $\mathbb{R}$ 全体を値に取るため値域は $\mathbb{R}$.
よって，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

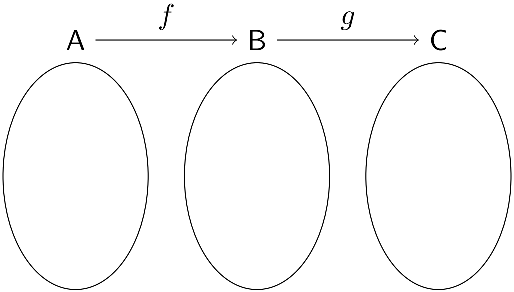
問題

次の写像の定義域と値域はどうなっているだろうか．
ただし定義域も値域も実数の部分集合とする．
1)$f(x)=x^2$
2)$g(x)=\sqrt{x}$
3)$h(x)=\sin x$
4)$i(x)=\sqrt{1-x^2}$

写像の合成

写像の合成

2 つの写像 $f : A \to B, g : B \to C$ に対して,
合成を $g \circ f : A \to C, a \mapsto g(f(a))$ とする.



写像の合成

問題

次の 4 つの写像のうち合成できないものはどれでしょう.

a)$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$

b)$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$

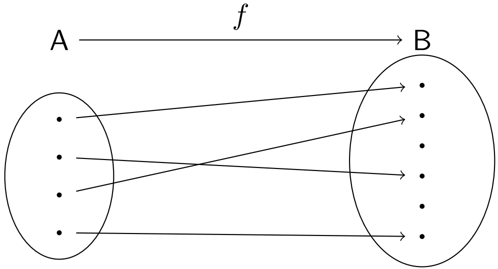
c)$h : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$

d)$i : [-1, 1] \to [0, 1], x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

単射

単射

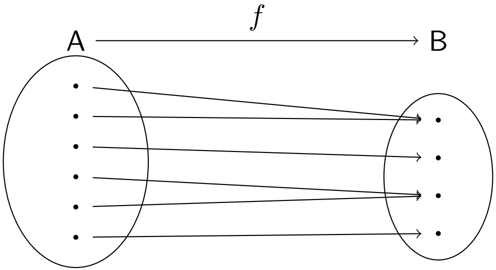
写像 f が単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(a) = f(b)$ ならば $a = b$



全射

全射

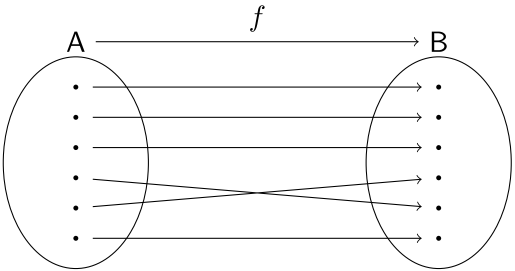
写像 $f: A \to B$ が全射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $b \in B$ に対して, $a \in A$ が存在して $f(a) = b$
すなわち f の値域が B.



全単射

全単射

写像 f が全単射 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が単射かつ全射
全単射のことを一対一対応とも呼ぶ.



逆写像

像と逆像

$f : A \to B$, $A' \subset A$, $B' \subset B$ に対して,
f による A' の像を $f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B$
f による B' の逆像を $f^{-1}(B') := \{a \in A \mid b \in B'\text{が存在して}\ b = f(a)\}$

逆写像

$f : A \to B$ が全単射のとき $f^{-1} : B \to A, f(a) \mapsto a$ が一意に定まる.