

力学系やりませんか？

力学系のモチベ

toru(@C_2H_5OH)

概要

- 軽い自己紹介と力学系について
- 分岐
- 系の分類
- 少しだけ私の研究のお話
- 雑勧誘
- 本の紹介

所属

- 学年：M1
- 所属：非線形物理学研究室
- 研究分野：測度保存力学系
- 趣味：微分体ガロア，力学系，天体力学系
- 研究したいこと：天体力学系



前提知識

入り口

- 大学初年度の微分積分，線型代数

必要に応じて

- 多様体，微分方程式論（ほぼ必須）
- 数論や代数幾何（数論力学系など）
- 微分幾何や位相幾何（頻出！）
- 測度論，関数解析，確率論（測度論的力学系）
- 多変数複素解析（複素力学系）
- Etc...

そもそも力学系とは

- よく本屋さんの「古典力学」とか「にゅーとん力学」などの棚に「力学系」がタイトルにある本が陳列されていることがありますが、

Mechanics

Dynamical
Systems

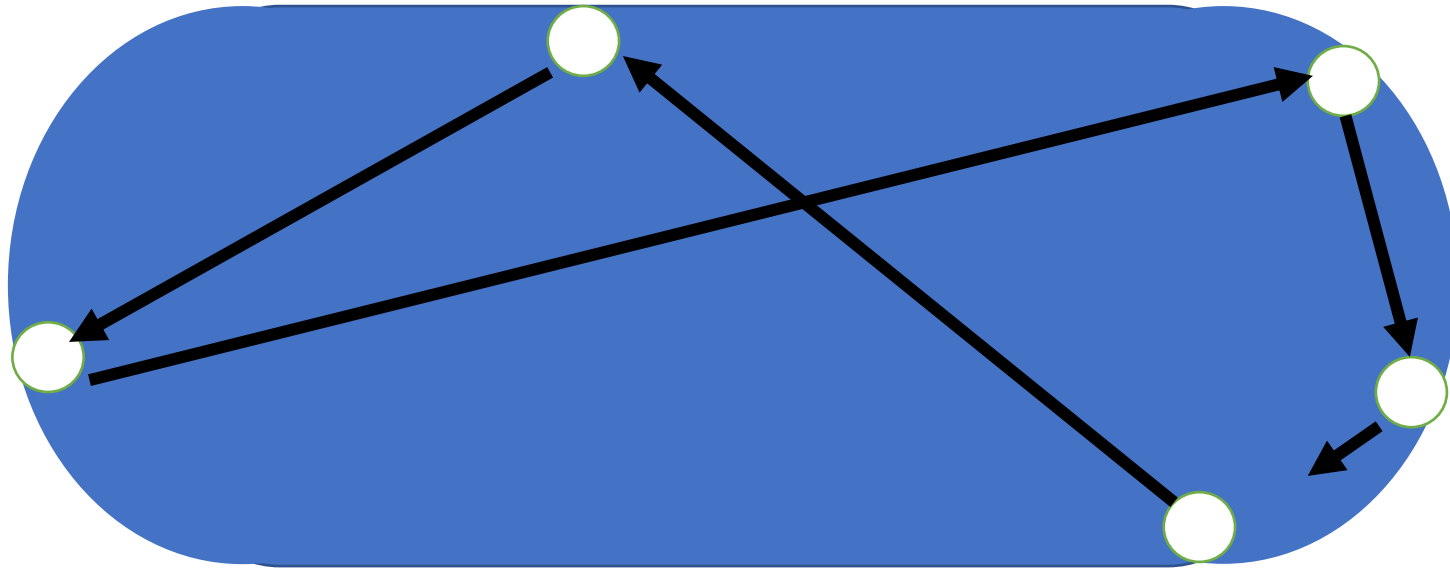
そもそも力学系とは


- 系の（離散・連続）時間発展を調べる分野

系とは f というあるルール（写像）と最初に想定する値の集合 M の対 (M, f) により定義されている.

そもそも力学系とは

- ビリヤード (離散)



A close-up photograph of a white plate filled with spaghetti. The spaghetti is light yellow and appears to be coated in a thin layer of oil or sauce, giving it a glossy texture. The strands are tangled and piled high. On the right side of the image, there is a semi-transparent white circular overlay containing text.

そもそも力学系 とは

連続力学系のイメージ

そもそも力学系とは

- 系（**Systems**）の分類

非線形な系に対しても，局所的（大域的であればなおうれしい）にでも理解したい

- 分岐

何かしらのパラメータを動かしたとき，系の振る舞いがどのように変わっていくのか気になる

分岐

- ・ **あるパラメータを変化させることで系の振る舞いが変化する事**

例えば

周期点を考えたときにその周期点の数はどうなっていくのか？

周期点の性質はどう変わっていくのか？

分岐

一次元離散力学系($[0,1], ax(1-x)$)を考える.

初期値 x の軌道については以下の集合を考える.

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

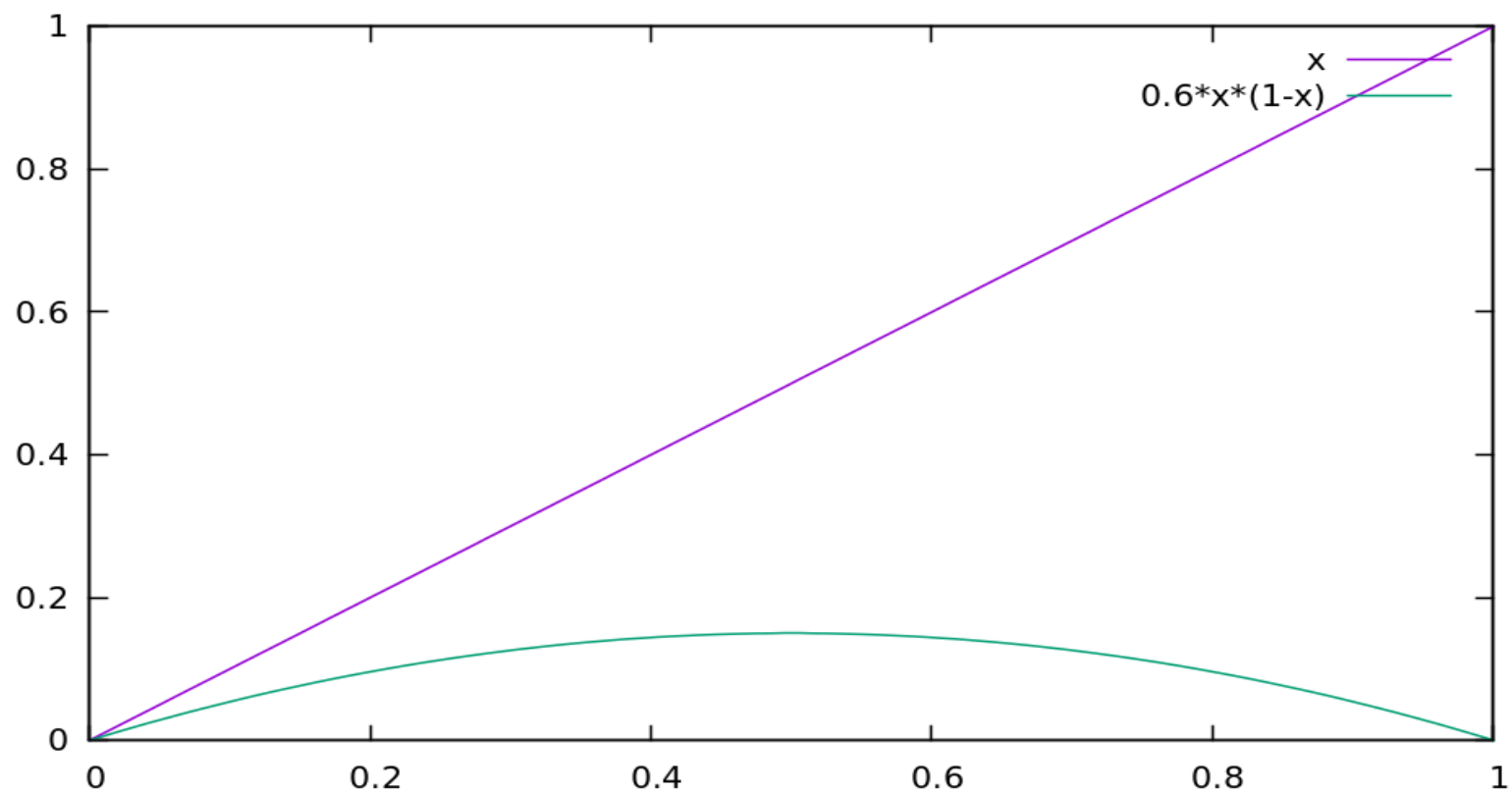
周期点はある一定時刻で初期値に戻ってくることから

$$x = f^p(x)$$

を調べればよい.

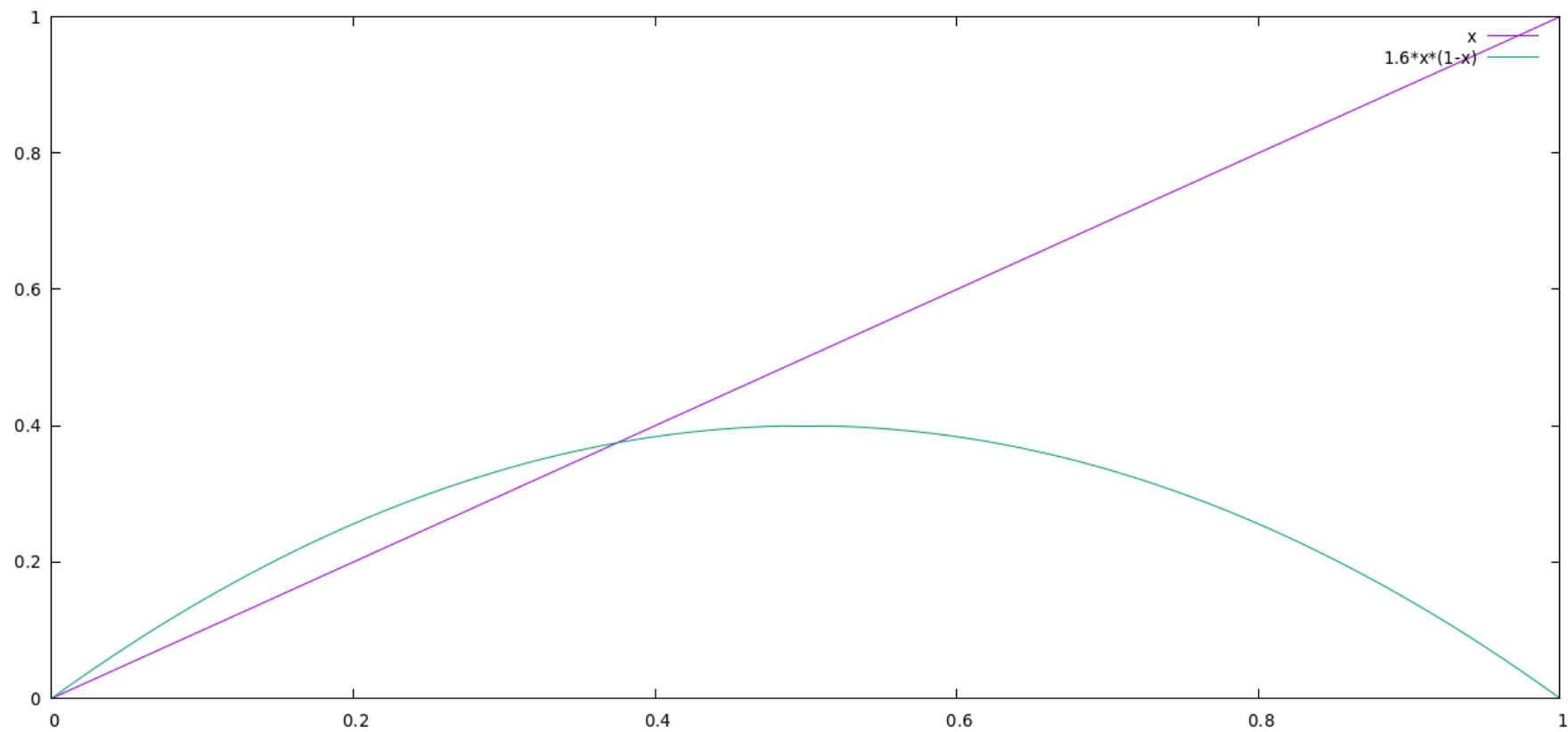
分岐

パラメータ a を変化させていったときの状態



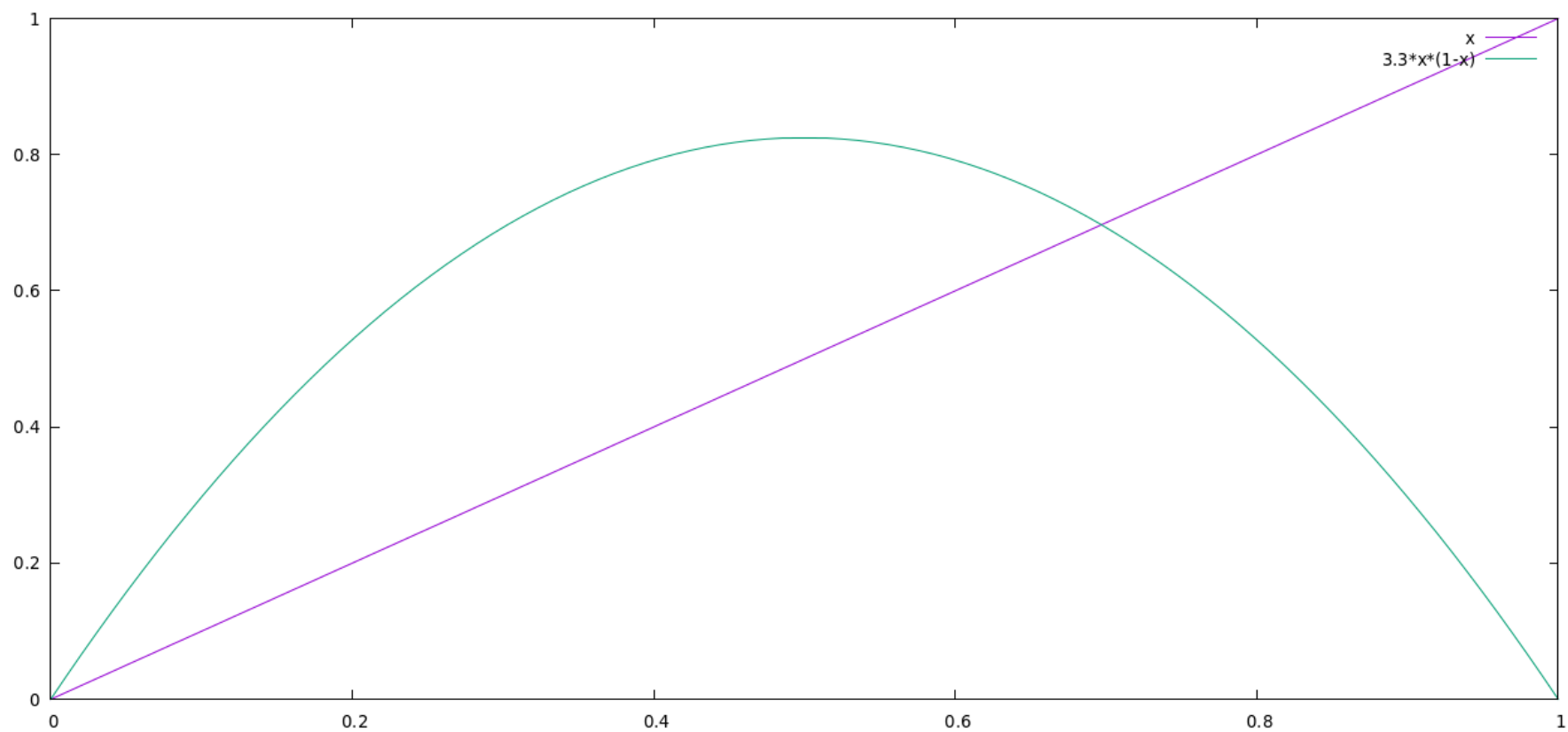
分岐

パラメータ a を変化させていったときの状態



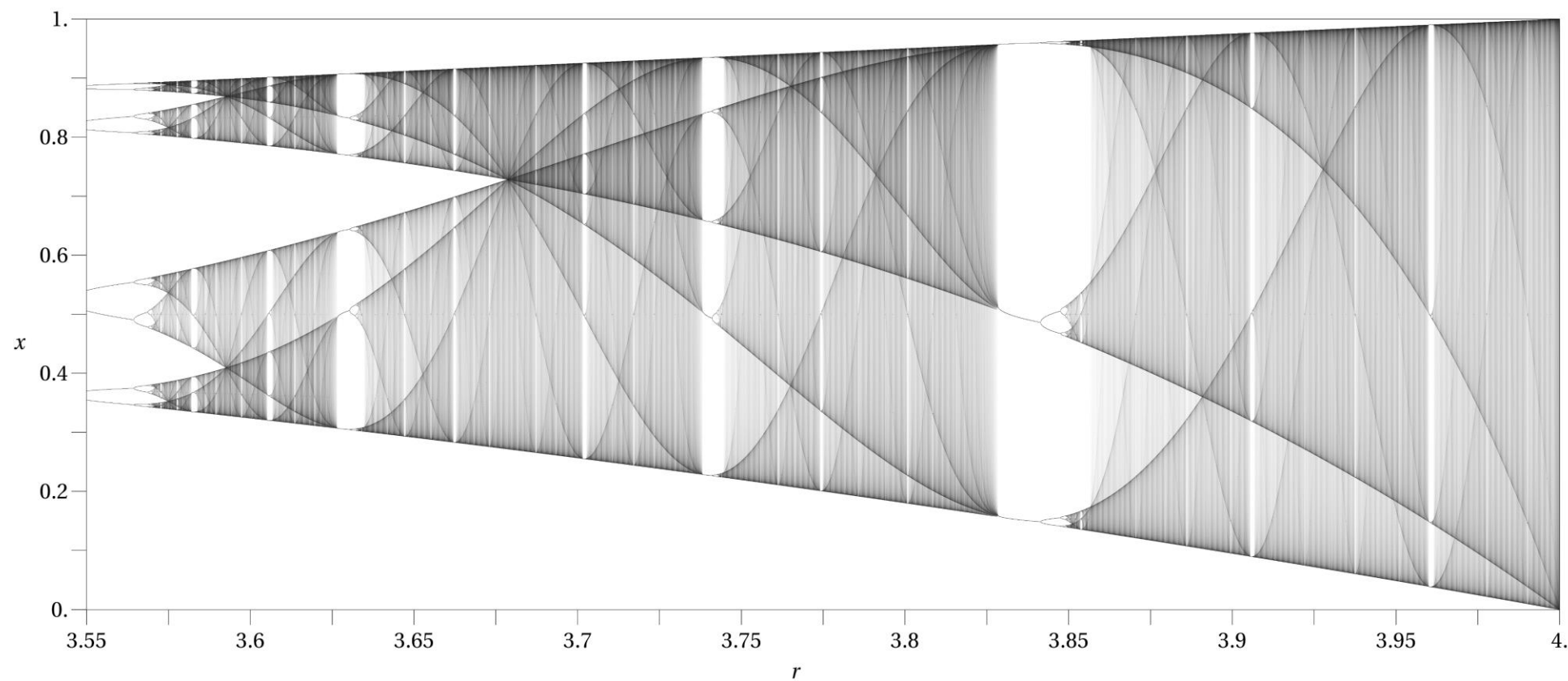
分岐

パラメータ a を変化させていったときの状態



分岐

パラメータ a を変化させていったときの分岐（周期点の様子）



余談

- 今回取り扱った力学系はロジスティック写像という非常に有名な系. この系からファイゲンバウム定数という超越数であろうとされているものが確認されている.
- この系は力学系カオスを勉強するにも非常に分かりやすい(?)系となっているのでぜひ遊んで見てください?

系の分類

- よくわかっていない系を比較的わかっていてる系（標準系）に対応づけ、系の局所ないし大域的な振る舞いを知る事

例えば・・・

非線形な連続力学系を局所的に線型近似を行い、線型系については比較的わかってることが多いので局所的な系の振る舞いについて知る事ができる

系の分類

(図や系などは「力学系入門」から引用)

系：二次元非線形系(ルール)

$$\begin{aligned}x' &= x + y^2, \\y' &= -y.\end{aligned}$$

実際この系を「変数変換」をもちいて求積法により「解く」ことができるが、今は一般解を与えることにする.

$$\begin{aligned}x(t) &= \left(x_0 + \frac{1}{3}y_0^2\right)e^t - \frac{1}{3}y_0^2e^{-2t}, \\y(t) &= y_0e^{-t}.\end{aligned}$$

系の分類

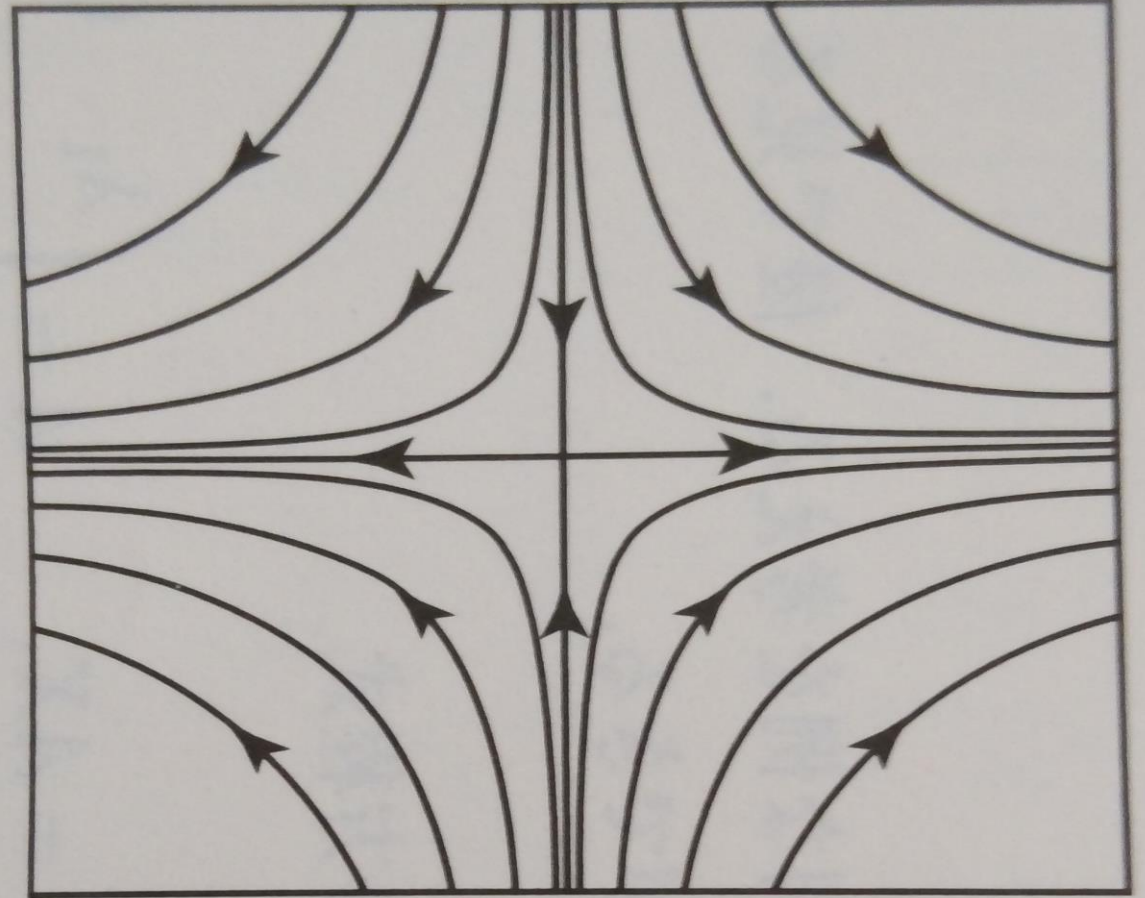
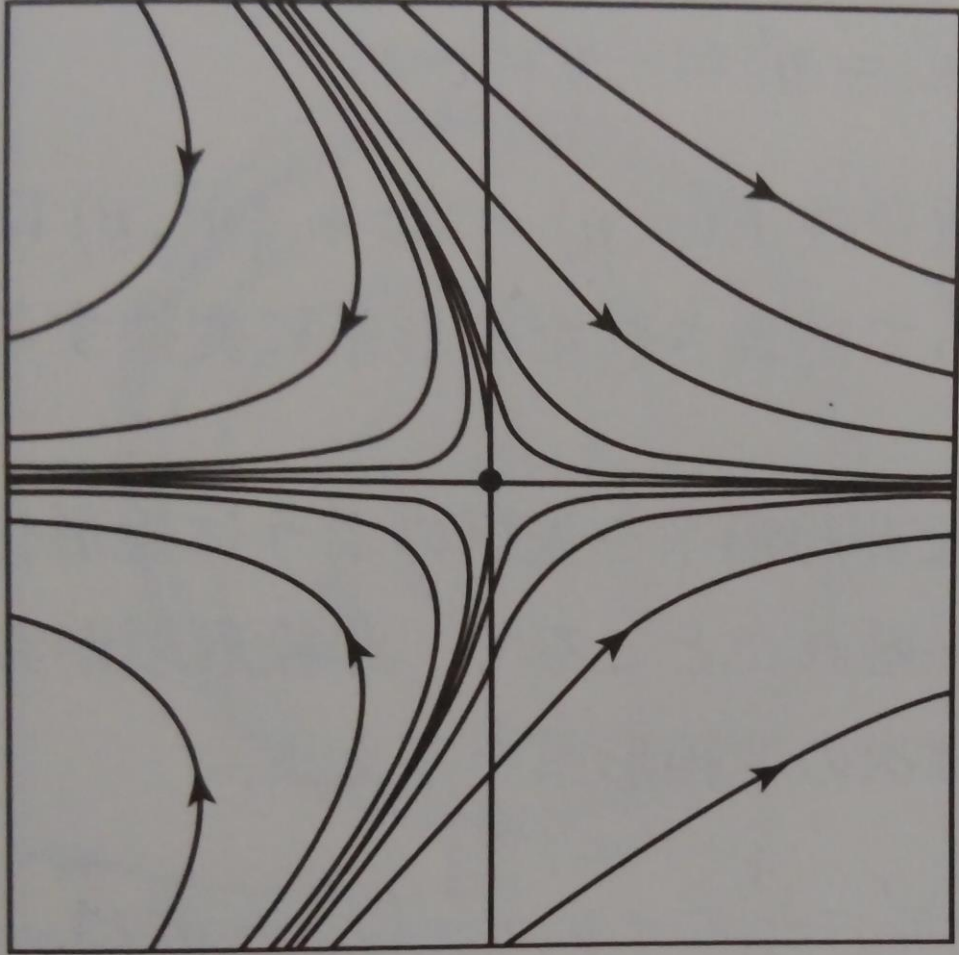
系：二次元線形系(ルール)


$$\begin{aligned}x' &= x, \\ y' &= -y.\end{aligned}$$

実際この系を求積法により「解く」ことができるが、今は一般解を与えることにする.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^t, \\ y(t) &= y_0 e^{-t}.\end{aligned}$$

系の分類






ちょっとだけ研究 のお話

- 対象は二次元トーラス上の離散力学系
- ある領域を固定したとき，その領域に入ってくる軌道の数割合（通称escape rate）の研究.

簡単には，単位正方形領域に微小な領域を考える．当然その領域の面積を大きくすればescape rateは大きくなる．

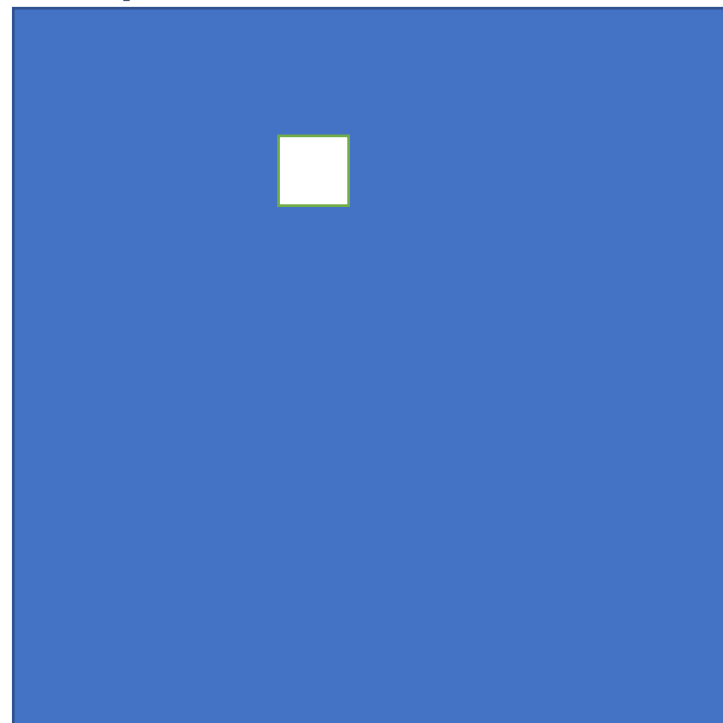
一方で，その領域にある周期点がescape rateにいたずらをしているらしく，その依存性が確認できる．



ちょっとだけ研究 のお話

簡単には，単位正方形領域に微小な領域を考える．当然その領域の面積を大きくすればescape rateは大きくなる．

一方で，その領域にある周期点がescape rateにいたずらをしているらしい・・・？



雑な勧誘

- 入り口は微積と線型だけで十分なので大学数学が始まったらすぐ入門できます.
- 物理や数学だけでなく，生命科学や化学，経済など様々な分野で現れる力学系をやしましょう！
- 今回は話しませんでした，カオスなども面白いトピックのひとつ！

力学系の本

カオスとの遭遇（離散力学系に始まり最短でカオスを目標）

カオス力学系入門（離散力学系に特化した和書）

Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems(双曲力学系や測度論的力学系にかなり詳しい辞書本)

Dynamical Systems(カオスを詳しく知ることができる)

力学系入門（連続力学系の入門書）

解析力学と常微分方程式論（力学の続きとして数理的な解析力学の和書ではこれがよい）