コーシー・リーマン方程式の離散化

微積分と和差分の対応関係

ゲルバナ

March 13, 2022

目次

微分と差分

微分の定義

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(前進) 差分の定義

$$\frac{\delta_h}{\delta_h x}f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

お約束

今回は，特に $h = 1$ について考えるので $\delta f(x) = \delta_1 f(x) = \frac{\delta_1}{\delta_1 x}f(x)$ と省略する．

和分

和分の定義

$a, b \in \mathbb{R}(b > a) \land b - a \in \mathbb{Z}$ に対して関数 f の区間 $[a, b]$ に対する和分 $\sum_a^b f(x)\delta x$ は次のように定義される．

- $$\sum\nolimits_a^b f(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$
- $$\sum\nolimits_a^a f(x)\delta x = 0$$
- $$\sum\nolimits_a^b f(x)\delta x = -\sum\nolimits_b^a f(x)\delta x$$

基本定理

微分積分学の基本定理

$x, a \in I \subset \mathbb{R}$ と I で連続な関数 f に対して，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

和分差分学の基本定理

$x, a \in I \subset \mathbb{R} \wedge b - a \in \mathbb{Z}$ と I 上で定義される関数 f に対して，

$$\delta\sum\nolimits_a^x f(t)\delta t = f(x)$$

基本概念

高階の差分 1

$$\delta^0 f(x) = f(x)$$
$$\delta^1 f(x) = \delta f(x)$$
$$\delta \cdot \delta^n f(x) = \delta^{n+1} f(x)$$

高階の差分 2

$$\delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

基本概念

差分の性質

- **線型性**

$$\delta\{af(x) + bg(x)\} = a \cdot \delta f(x) + b \cdot \delta g(x)$$

- **ライプニッツ則**

$$\delta\{f(x)g(x)\} = f(x) \cdot \delta g(x) + \delta f(x) \cdot g(x) + \delta f(x) \cdot \delta g(x)$$

線型差分方程式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot \delta^k f(x) = g(x)$$

演習 1

和分法と差分法

- 次の差分を計算せよ．
$$\delta\{x^2 - 4\}$$
- 次の差分を計算せよ．
$$\delta^2\{x^2 + 3x\}$$
- 次の和分を計算せよ．
$$\sum_2^4 (2x + 1)\delta x$$
- 次の和分を計算せよ．
$$\sum_{-1}^2 (2x^3 - x^2)\delta x$$

演習 1(解)

和分法と差分法

- 次の差分を計算せよ．

$$\begin{aligned}\delta\{x^2-4\} &= (x+1)^2-4-(x^2-4)\\ &= 2x+1\end{aligned}$$

- 次の差分を計算せよ．

$$\begin{aligned}\delta^2\{x^2+3x\} &= \delta\{(x+1)^2+3(x+1)-(x^2+3x)\}\\ &= \delta\{2x+4\}\\ &= 2\end{aligned}$$

演習 1(解)

和分法と差分法

- 次の和分を計算せよ．

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2^4 (2x+1)\delta x &= 2\cdot 2+1+2\cdot 3+1 \\ &= 12\end{aligned}$$

- 次の和分を計算せよ．

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{-1}^2 (2x^3-x^2)\delta x &= (-2-1)+0+(2-1) \\ &= -2\end{aligned}$$

連続と離散のアナロジー

冪乗 (連続)

- $$\int_0^x 1dt = x$$
- $$\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$$
- $$\int_0^x \frac{t^2}{2}dt = \frac{x^3}{6}$$
- $$\int_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

連続と離散のアナロジー

冪乗 (離散)

- $$\sum_0^x 1\delta t = x$$
- $$\sum_0^x t\delta t = \frac{x(x-1)}{2}$$
- $$\sum_0^x \frac{t(t-1)}{2}\delta t = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$
- $$\sum_0^x \binom{t}{n}\delta t = \binom{x}{n+1}$$

連続と離散のアナロジー

下降階乗冪

$$[x]^n = \frac{x!}{(x-n)!}$$

以下，このようにして得られた連続関数を離散版の関数と呼ぶ.

冪乗のアナロジー

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

$$\delta[x]^n = n \cdot [x]^{n-1}$$

演習 2

下降階乗冪

次の和分を計算せよ．

$$\sum_{1}^{10} x^{3} \delta x$$

演習 2(解)

下降階乗冪

次の和分を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\sum_1^{10} x^3 \delta x &= \sum_1^{10} \{x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x\} \delta x \\
&= \sum_1^{10} \{[x]^3 + 3[x]^2 + [x]\} \delta x \\
&= \left[\frac{[x]^4}{4} + [x]^3 + \frac{[x]^2}{2} \right]_1^{10} \\
&= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} + 10 \cdot 9 \cdot 8 + \frac{10 \cdot 9}{2} \\
&= 1260 + 720 + 45 \\
&= 2025
\end{aligned}
$$

連続と離散のアナロジー 2

指数関数 (連続)

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$$
$$\exp(x) = e^x$$

指数関数 (離散)

$$\delta \exp[x] = \exp[x]$$
$$\exp[x] = 2^x$$

連続と離散のアナロジー 3

三角関数 (連続)

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

三角関数 (離散)

$$\delta\sin[x] = \cos[x]$$
$$\delta\cos[x] = -\sin[x]$$

連続と離散のアナロジー 3

三角関数 (離散)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \sin[x+1] \\ \cos[x+1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin[x] \\ \cos[x] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sin[n] \\ \cos[n] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-i)^n + (1+i)^n & i(1-i)^n - i(1+i)^n \\ -i(1-i)^n + i(1+i)^n & (1-i)^n + (1+i)^n \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

連続と離散のアナロジー 3

三角関数 (連続)

$$\sin(x) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

三角関数 (離散)

$$\sin[x] = \frac{(1+i)^x - (1-i)^x}{2i}$$

$$\cos[x] = \frac{(1+i)^x + (1-i)^x}{2}$$

連続と離散のアナロジー 4

テイラー展開 (連続)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}$$

テイラー展開 (離散)

ニュートン級数展開ともいう.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k f(a) \cdot \frac{[x-a]^k}{k!}$$

連続と離散のアナロジー 5

テイラー展開 (連続)

- $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (x)^{2k+1}$$
- $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (x)^{2k}$$
- $$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x)^{k}$$

連続と離散のアナロジー 5

テイラー展開 (離散)

- $$\sin[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot [x]^{2k+1}$$
- $$\cos[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot [x]^{2k}$$
- $$\exp[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot [x]^k$$

目次

コーシー・リーマン方程式

コーシー・リーマン方程式 (連続)

次の式を満たす $\mathbb{C}$ 上の領域を正則領域という．

$$i\frac{\partial}{\partial x}f(x+yi)=\frac{\partial}{\partial y}f(x+yi)$$

コーシー・リーマン方程式 (離散)

次の式を満たす $\mathbb{C}$ 上の領域を離散正則領域という．

$$f(z+1)-f(z)=\frac{f(z+i)-f(z)}{i}$$

コーシーの積分定理

コーシーの積分定理 (連続)

関数 f に対して，単連結な正則閉領域を D とすると次の式が成り立つ．

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$$

コーシーの積分定理 (離散)

関数 f に対して，離散正則閉領域上の点列 $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$ の左記の順での周回和分を次のように定義する.

$$\sum_{z \to z+1 \to z+1+i \to z+i} f(z)\delta z = f(z) + if(z+1) - f(z+i) - if(z) = 0$$

このような正方形領域の連結した領域の境界上の周回和分は恒等的に ” 0 ” になる.

複素関数上の離散テイラー展開

冪乗の複素化

$$(x + yi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} i^{n-k}$$

下降階乗冪の複素化

$[x]^n$ に対して離散コーシーリーマン方程式を漸化式的に使うと次の式が得られる．

$$[x + yi]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]^k [y]^{n-k} i^{n-k}$$

複素関数上の離散テイラー展開

下降階乗冪の複素化

$$
\begin{aligned}
[x+1i]^n &= [x+0i]^n + i\cdot\delta[x+0i]^n = [x+0i]^n + i\cdot n[x+0i]^{n-1} \\
[x+2i]^n &= [x+1i]^n + i\cdot\delta[x+1i]^n \\
&= [x+0i]^n + i\cdot n[x+0i]^{n-1} + i\cdot n([x+0i]^{n-1} + i\cdot n(n-1)[x+0i]^{n-2}) \\
&= [x+0i]^n + 2i\cdot n[x+0i]^{n-1} - n(n-1)[x+0i]^{n-2} \\
[x+3i]^n &= [x+0i]^n + 3i\cdot n[x+0i]^{n-1} - 3n(n-1)[x+0i]^{n-2} \\
&\quad -i\cdot n(n-1)(n-2)[x+0i]^{n-3} \\
[x+yi]^n &= \sum_{k=0}^{y}\binom{y}{k}[x]^{n-k}[n]^k i^k
\end{aligned}
$$

オイラーの公式の離散対応

オイラーの公式 (連続)

$$\exp(\theta i) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

オイラーの公式 (離散)

$$\exp[\theta i] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot [\theta i]^k = \cos[\theta] + i\sin[\theta]$$

最後に

これらのほかにも複素関数論との類似関係があるかもしれないので，何か思いついたらぜひ教えてください．

キーワード

- 量子解析学
- Q 類似
- 有限差分法
- 複素関数論
- コーシーリーマン方程式