Рассмотрим следующий класс динамических систем:

$$\dot{x}_i = F_i(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D,\ i = \overline{1, n},$$

где $D = \mathbb{R}^n_{+,0}$, правые части $F_i(x)$ — дробно-рациональные функции (далее ДРФ) вида

$$F_i(x) = \frac{P_i(x)}{Q_i(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены порядков не выше $n$ и $Q(x)$ не имеет корней в $D$.

Для динамических систем данного вида за функцию Ляпунова для внутреннего положения равновесия $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in D$ можно принять следующее выражение:

$$V(x) = 2\sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i \left( x_i - \hat{x}_i - \hat{x}_i \ln \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j \left( x_j - \hat{x}_j \right)^2,$$

где $\sigma_1$ — множество номеров функций $F_i(x)$ кратных $x_i$;

$\sigma_2$ — множество всех остальных номеров функций $F_j(x)$;

$\tilde{k}_i$ — положительные параметры.

Производная такой функции в силу системы будет представима в виде квадратичной формы:

$$\dot{V}(x) = (x - \hat{x})^T H(x)(x - \hat{x}),$$

где $H(x)$ – симметричная функциональная матрица размера $n \times n$, координатными функциями которой являются дробно–рациональные функции.

На области $D$ для $V(x)$ должны выполняться следующие условия:

$$V(x) > 0,\ V(\hat{x}) = 0,\ \hat{x} \in D,\ x \in D \setminus \{\hat{x}\}.$$

Квадратичные слагаемые неотрицательно определены на области $D$, слагаемые вида

$$x_j - \hat{x}_j - \hat{x}_j \ln \frac{x_j}{\hat{x}_j}$$

также неотрицательны в $D$. Производная $V(x)$ в силу системы:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{x_i}\right) x_i \tilde{F}_i(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \hat{x}_j) F_j(x) =$$
$$= \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i (x_i - \hat{x}_i) \tilde{F}_i(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \tilde{x}_j) F_j(x).$$

Разложим функцию $P_i(x)$ в многочлен Тейлора в точке $x = \hat{x}$. Т.к. $P_i(x)$ — многочлен порядка не выше $n$, остаточный член в данном разложении будет равен нулю. Заметим, что $\hat{x}$ — положение равновесия, т.е. $P_i(\hat{x}) = 0$ и

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i(\hat{x})}{\partial x_j}(x_j - \hat{x}_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 P_i(\hat{x})}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - \hat{x}_j)(x_k - \hat{x}_k) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} \frac{\partial^n P_i(\hat{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}}(x_{j_1} - \hat{x}_{j_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{j_n} - \hat{x}_{j_n}). \quad (1)$$

Тогда разделив (1) на соответствующий многочлен $Q_i(x)$ получим, что каждая функция $F_i(x)$ может быть представлена как

$$F_i(x) = \sum_{p\in\tilde{\sigma}_i} (x_p - \hat{x}_p) h_p(x),$$

где $h_p(x)$ – ДРФ, $\tilde{\sigma}_i$ – множество всех номеров $x_p$, $p \in \{1, \ldots, n\}$, входящих в $F_i(x)$. Тогда производная $V(x)$ в силу системы примет вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i (x_i - \hat{x}_i) \sum_{p\in\tilde{\sigma}_i} (x_p - \hat{x}_p) h_p(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \hat{x}_j) \sum_{q\in\tilde{\sigma}_j} (x_q - \hat{x}_q) h_q(x).$$

Сложив все слагаемые с повторяющимися множителями $(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_i)$ и положив равными нулю коэффициенты при множителях отсутствующих в сумме, получим квадратичную форму с симметричной функциональной матрицей $H(x)$:

$$\dot{V}(x) = (x - \hat{x})^T H(x)(x - \hat{x}).$$