Рассмотрим следующий класс динамических систем:

$$\dot{x}_i = F_i(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D,\ i = \overline{1, n},$$

где $D = \mathbb{R}^n_{+,0}$, правые части $F_i(x)$ — дробно-рациональные функции (далее ДРФ) вида

$$F_i(x) = \frac{P_i(x)}{Q_i(x)},$$

где $P_i(x)$ и $Q_i(x)$ — многочлены n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, степень $P_i(x)$ равна m_i и $Q_i(x)$ не имеет корней в D. В случае если функция $F_i(x)$ кратна x_i, она имеет следующий вид:

$$F_i(x) = x_i \tilde{F}(x) = x_i \frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_i(x)},$$

где $\tilde{F}_i(x)$ — ДРФ n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такая, что ее числитель $\tilde{P}_i(x)$ — многочлен порядка $m_i - 1$, а $Q_i(x)$ – многочлен конечного порядка, не имеющий корней в D.

Для динамических систем данного вида в качестве кандидата на функцию Ляпунова для внутреннего положения равновесия $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in D$ можно принять следующее выражение:

$$V(x) = 2 \sum_{i \in \sigma_1} \tilde{k}_i \left(x_i - \hat{x}_i - \hat{x}_i \ln \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \sigma_2} \tilde{k}_j \left(x_j - \hat{x}_j \right)^2,$$

где σ_1 — множество номеров функций $F_i(x)$ кратных x_i;

σ_2 — множество всех остальных номеров функций $F_i(x)$;

$\tilde{k}_i$ — положительные параметры.

Производная такой функции в силу системы представима в виде квадратичной формы:

$$\dot{V}(x) = (x - \hat{x})^T H(x)(x - \hat{x}),$$

где $H(x)$ – симметричная функциональная матрица размера $n \times n$, координатными функциями которой являются дробно–рациональные функции.

На области D для $V(x)$ выполняются следующие условия:

$$V(x) > 0,\ V(\hat{x}) = 0,\ \hat{x} \in D,\ x \in D \setminus \{\hat{x}\}.$$

Действительно, квадратичные слагаемые неотрицательно определены на области D, а слагаемые вида

$$x_i - \hat{x}_i - \hat{x}_i \ln \frac{x_i}{\hat{x}_i}$$

также неотрицательны в D. Производная $V(x)$ в силу системы имеет вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{x_i}\right) x_i \tilde{F}_i(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \hat{x}_j) F_j(x) =$$
$$= \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i (x_i - \hat{x}_i) \tilde{F}_i(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \tilde{x}_j) F_j(x),$$

Разложим функции $P_i(x)$ по формуле Тейлора в точке $x = \hat{x}$ до порядка $m_i + 1$. Поскольку $P_i(x)$ — многочлен порядка m_i, остаточный член в данном разложении будет равен нулю. Заметим, что $\hat{x}$ — положение равновесия, и поэтому $P_i(\hat{x}) = 0$, а

$$P_i(x) = \sum_{|\tau|\le m_i} \frac{D^\tau P_i(\hat{x})}{\tau!} (x - \hat{x})^\tau, \qquad (1)$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tau \in \mathbb{N}^n$ — мультииндекс. Тогда разделив (1) на соответствующий многочлен $Q_i(x)$ получим, что функция $F_i(x)$ может быть представлена как

$$F_i(x) = \sum_{q\in\tilde{\sigma}_i} (x_p - \hat{x}_p) h_p(x),$$

где $h_p(x)$ – ДРФ, $\tilde{\sigma}_i$ – множество всех номеров x_p, $p \in \{1, \ldots, n\}$, входящих в $F_i(x)$. Из аналогичных соображений можно получить, что

$$\tilde{F}_i(x) = \sum_{p\in\tilde{\sigma}_i'} (x_p - \hat{x}_p) \tilde{h}_p(x),$$

где $\tilde{h}_p(x)$ — ДРФ, а $\tilde{\sigma}_i'$ — множество всех номеров x_p, $p \in \{1, \ldots, n\}$, входящих в $\tilde{F}_i(x)$.

Тогда производная $V(x)$ в силу системы примет вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i\in\sigma_1} \tilde{k}_i (x_i - \hat{x}_i) \sum_{p\in\tilde{\sigma}_i'} (x_p - \hat{x}_p) \tilde{h}_p(x) + \sum_{j\in\sigma_2} \tilde{k}_j (x_j - \hat{x}_j) \sum_{q\in\tilde{\sigma}_j} (x_q - \hat{x}_q) h_q(x).$$

Сложив все слагаемые с повторяющимися множителями $(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_i)$ и положив равными нулю коэффициенты при множителях отсутствующих в сумме, получим квадратичную форму с симметричной функциональной матрицей $H(x)$:

$$\dot{V}(x) = (x - \hat{x})^T H(x)(x - \hat{x}).$$

В случае если $H(x)$ отрицательно определена, можно сделать вывод о том, что внутреннее положение равновесия $\hat{x}$ асимптотически устойчиво.