



Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

## РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

*к выпускной квалификационной работе*

*на тему:*

### ***ИНВАРИАНТНЫЕ КОМПАКТЫ И СТАБИЛЬНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КЛЕТОК ИММУНИТЕТА И МОЗГОВОЙ ОПУХОЛИ***

Студент группы ФН12-81Б

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата) *М.Д. Кирдин*

Руководитель ВКР

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата) *А.П. Крищенко*

Консультант

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Консультант

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата) *М.А. Велищанский*

2024г.

## АННОТАЦИЯ

Расчетно-пояснительная записка 23 с., 12 источников.

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА; ИНВАРИАНТНЫЕ КОМПАКТЫ; ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫЕ ГЛИОМЫ.

Данная работа описывает динамику развития злокачественных глиом с учетом их взаимодействия с иммунной системой при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенная математическая модель описывает взаимодействие клеток глиомы, макрофагов, активированных цитотоксичных Т-лимфоцитов (Т-киллеров), иммуноподавляющего фактора  $TGF-\beta$  и иммуностимулирующего фактора  $IFN-\gamma$ . Динамика данной модели были исследована аналитически на предмет устойчивости с помощью методов локализации инвариантных компактов. Были найдены граничные положения равновесия, соответствующие отсутствию глиом, а также было найдено компактное множество, содержащее аттрактор системы. При помощи численных методов было найдено и исследовано на предмет устойчивости внутреннее положение равновесия при определенных значениях параметров.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ . . . . .	6
2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ . . . . .	7
2.1. Локализация инвариантных компактов . . . . .	7
2.2. Положения равновесия на границе множества $D$ . . . . .	19
2.3. Положения равновесия внутри множества $D$ . . . . .	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	25
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	26

## ВВЕДЕНИЕ

Глиомы — тип опухолей головного или спинного мозга, развивающихся из глиальных клеток. Глиомы делятся на доброкачественные и злокачественные по степени агрессивности. Доброкачественные опухоли растут медленно и не распространяются на другие органы, но они могут вызывать давление на мозг и нарушать его функции. Злокачественные глиомы быстро растут и могут распространяться на другие части мозга. В зависимости от структуры и мутаций, глиомы также разделяются на астроцитомы, олигодендроглиомы и глиобластомы [1].

Лечение глиом зависит от множества факторов, включая тип, размер и расположение опухоли, а также общее состояние здоровья пациента. Стандартные методы лечения включают хирургическое вмешательство, радиотерапию и химиотерапию. От 30% до 40% от всех мозговых опухолей [2] являются глиомами, поэтому последние годы значительные усилия были направлены на разработку иммунотерапии или оптимизации уже существующих методов, чтобы улучшить результаты лечения и качество жизни пациентов. Для этого необходимо исследование механизмов, лежащих в основе роста и распространения раковых клеток. Данная задача может быть решена путем составления и исследования математических моделей, описывающих динамику взаимодействия раковых и иммунных клеток в различных ситуациях.

Системы дифференциальных уравнений позволяют дать количественное представление многим биологическим процессам, протекающим во время заболевания [3]. Например, взаимодействие патогена и иммунной системы с учетом воздействия терапевтических белков [4], реакция системы рак-иммунитет на химиотерапию [5–8] или взаимодействие клеток иммунитета и раковых клеток с условием поражения ВИЧ т-хелперов [9]. В частности может быть предсказана динамика развития глиом в различных сценариях [10].

Многие виды рака, включая опухоли головного и спинного мозга, подвергались системной иммунотерапии путем экзогенного введения иммунных клеток или иммунорегулирующих факторов с ограниченным успехом. Chakrabarty и Hanson сформулировали задачу оптимального управления доставкой лекарств к опухоли мозга с целью минимизации плотности опухолевых клеток и снижения побочного действия лекарств с помощью метода конечных элементов Галеркина [11]. Vandara и др. предложили математическую модель для рациональной разработки таргетных стратегий (in-silico) для эффективной транспортировки Паклитаксела, антимитотического препарата, через гематоэнцефалический барьер [12]. Kirkby и др. сформулировали модель глиобластомы, которая предсказывает эффекты эскалации дозы радиотерапии и воспроизводит чрезвычайно точные клинические данные [13]. Schmitz и др. с помощью модели клеточного автомата опухоли мозга изучали гетерогенные опухоли, содержащие как чувствительные к лечению, так и резистентные к нему клетки. Авторы исследовали моноклональные опухоли, двухпоточные с резистентной субпопуляцией и многопоточные опухоли с индуцированной мутацией и смогли представить данные о времени выживания по каждому из этих примеров [14]. Walker, Cook [15] на макроскопической модели разработали систему доставки лекарств к опухолям мозга,

где авторы предположили, что лекарство доставляется как в нормальную, так и в опухолевую ткань через сосудистую систему. Посредством диффузии и конвекции препараты проникают в ткани мозга через сосудистую сеть, переносятся через гематоэнцефалический барьер и интерстициальное пространство. Оценив влияние изменения параметров на доставку лекарств, они нашли оптимальный способ конвективной доставки лекарств в центр опухоли. Kronik и др. [16] рассмотрели интерактивную динамику цитотоксических Т-лимфоцитов, клеток опухоли мозга, основного комплекса гистосовместимости (МНС) класса-I и МНС класса-II, а также цитокинов  $TGF-\beta$  и  $IFN-\gamma$ , где они использовали компьютерное моделирование для проверки модели и поиска предполагаемых сценариев лечения. Полученные ими результаты свидетельствуют о том, что глиобластома может быть уничтожена с помощью новых стратегий с интенсивной дозировкой или путем значительного стимулирования эндогенного иммунного ответа или инфузии Т-клеток, как показано в их математической модели.

В данной работе была поставлена цель провести исследование модели, представленной в [17] при помощи методов локализации инвариантных компактов [18, 19], исследование устойчивости положений равновесия системы при помощи построения функций Ляпунова.

Нахождение инвариантных компактов позволит говорить об асимптотическом поведении траекторий системы, что на практике дает возможность судить о дальнейшем ходе заболевания по количествам клеток глиом, макрофагов, т-киллеров, белков  $TGF-\beta$ , и гамма интерферонов.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую пятимерную систему с неотрицательными переменными  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  и положительными параметрами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{c_1}\right) - \frac{1}{x_4 + e_1} (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) \frac{x_1}{x_1 + k_1}, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \frac{1}{x_4 + e_2} - \alpha_3 \frac{x_1}{x_1 + k_2} x_2, \\ \dot{x}_3 = a_2 \frac{x_1}{k_5 + x_4} - \mu_1 x_3 - \alpha_4 \frac{x_1}{x_1 + k_3} x_3, \\ \dot{x}_4 = s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = b_2 x_3 - \mu_3 x_5, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t \geq 0$  — время;

- $x_1$  — количество клеток глиомы;
- $x_2$  — количество макрофагов;
- $x_3$  — количество т-киллеров;
- $x_4$  — количество белков  $TGF\text{-}\beta$ ;
- $x_5$  — количество  $\gamma$ -интерферонов.

Также из биологических соображений будем полагать, что начальные условия имеют следующий вид:

$$x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) \geq 0, x_4(0) \geq 0, x_5(0) \geq 0. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbb{R}_{+,0}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}, \mathbb{R}_{+,0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Для системы (1) покажем, что множество  $D = \mathbb{R}_{+,0}^5 = \{x \geq 0\}$  положительно инвариантно, проведем исследование инвариантности пересечений множества  $D$  с координатными плоскостями, а также систем, являющихся ограничениями (1) на инвариантные координатные плоскости. Кроме того, найдем компактное множество, содержащее аттрактор системы.

## 2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### 2.1. Локализация инвариантных компактов

**Теорема 1. (Коши)** Пусть функция  $f(x, t)$  кусочно непрерывна по  $t$  и удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|,$$

где  $L$  — постоянная, при любых  $x, y$  из  $\varepsilon$ -окрестности  $O_\varepsilon = \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$  точки  $x_0$  и любого  $t \in [t_0, t_1]$ . Тогда существует  $\delta > 0$  для которого решение задачи Коши вида

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \in G, \quad t \geq t_0,$$

где  $G$  — область определения системы, существует и единственно при  $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ .

**Утверждение 1.** Система (1) с начальными условиями (2) имеет, причем единственное, решение на области  $D$ .

◀ Правая часть системы — непрерывно-дифференцируемая на множестве  $D$  функция. Из этого следует, что она локально липшицева в каждой точке этого множества, т.е. для любой его точки справедлива теорема Коши. Таким образом, в каждой точке  $D$  существует, причем единственное, решение задачи Коши. ▶

**Определение 1.** Для непрерывной динамической системы  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , множество  $G \in \mathbb{R}^n$  называется положительно инвариантным, если для любой точки  $x_0 \in G$  решение системы  $x(t, x_0)$  с начальным условием  $x(0, x_0) = x_0$  при  $t > 0$  не выходит за пределы множества  $G$ .

**Теорема 2.** Множество  $D = \mathbb{R}_{+,0}^5$  является положительно инвариантным для системы (1).

◀ Заметим, что граница множества  $D$  — множество точек с хотя бы одной нулевой координатой. Таким образом, достаточно показать, для траекторий системы, начинающихся на границе  $D$ , справедливо, что

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}, \quad t \in [0, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим случай, когда

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) \geq 0, \quad x_3(0) \geq 0, \quad x_4(0) \geq 0, \quad x_5(0) \geq 0. \quad (3)$$

Для каждого такого начального условия существует  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что существует, причем единственное, решение задачи Коши:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad x_4 = x_4(t), \quad x_5 = x_5(t), \quad t \in [0, \varepsilon_1),$$

обращающее систему (1) в тождество. Рассмотрим исходную систему при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right) + \frac{x_5(0)}{k_4 + x_5(0)} a_1 \frac{1}{x_4(0) + e_2}, \\ \dot{x}_3(0) = -\mu_1 x_3(0), \\ \dot{x}_4(0) = s_1 - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = b_2 x_3(0) - \mu_3 x_5(0). \end{cases}$$

Решение  $x_1(t) \equiv 0$  удовлетворяет начальному условию  $x_1(0) = 0$ , а также удовлетворяет первому уравнению исходной системы при  $t = 0$ . При подстановке  $x_1(t) \equiv 0$  в (1) первое уравнение становится тождеством, а сама система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(t) \left(1 - \frac{x_2(t)}{c_2}\right) + \frac{x_5(t)}{k_4 + x_5(t)} a_1 \frac{1}{x_4(t) + e_2}, \\ \dot{x}_3(t) = -\mu_1 x_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = s_1 - \mu_2 x_4(t), \\ \dot{x}_5(t) = b_2 x_3(t) - \mu_3 x_5(t). \end{cases}$$

Определив  $x_2(t), \dots, x_5(t)$  как решения системы с пониженным порядком, из единственности решения задачи Коши имеем, что

$$x_1 \equiv 0, x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), x_4 = x_4(t), x_5 = x_5(t), t \in [0, \varepsilon_1),$$

является решением исходной системы с начальными условиями (3), лежащим на плоскости  $x_1 = 0$  и не покидающим область  $D$  через неё.

Для каждого из начальных условий вида

$$x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) \geq 0, x_4(0) = 0, x_5(0) \geq 0,$$

имеется некое  $\varepsilon_2 > 0$  такое, что существует единственное решение задачи Коши на полуинтервале  $t \in [0, \varepsilon_2)$ , обращающее систему (1) в тождество. В этом случае

$$\dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) > 0,$$

т.е.

$$x_4(t) > 0, t \in (0, \tilde{\varepsilon}_2), \tilde{\varepsilon}_2 \leq \varepsilon_2$$

и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_4 = 0$ .

Рассмотрим случай, когда

$$x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) = 0, x_4(0) \geq 0, x_5(0) \geq 0. \quad (4)$$



Для каждого такого начального условия имеется  $\varepsilon_3 > 0$  такое, что существует единственное решение задачи Коши на  $t \in [0, \varepsilon_3)$  обращающее систему (1) в тождество. Рассмотрим исходную систему при  $t = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right) - \frac{\alpha_1 x_2(0)}{x_4(0) + e_1} \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_1}, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right) + \frac{x_5(0)}{k_4 + x_5(0)} a_1 \frac{1}{x_4(0) + e_2} - \alpha_3 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_2} x_2(0), \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)}, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = -\mu_3 x_5(0). \end{cases}$$

Если  $x_1(0) > 0$ , то и  $\dot{x}_3(0) > 0$ , из чего  $x_1(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}_3)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_3 \leq \varepsilon_3$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_3 = 0$ . Если же  $x_1(0) = 0$ , то при  $t = 0$  система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right) + \frac{x_5(0)}{k_4 + x_5(0)} a_1 \frac{1}{x_4(0) + e_2}, \\ \dot{x}_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = -\mu_3 x_5(0). \end{cases}$$

Тогда, аналогично случаю с границей  $x_1 = 0$ ,  $x_1(t) \equiv 0$ . При этом решение  $x_3(t) \equiv 0$  удовлетворяет начальному условию  $x_3(0) = 0$  и уравнению  $\dot{x}_3(0) = 0$ . При его подстановке вместе с  $x_1(t) \equiv 0$  в исходную систему получим, что:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(t) \left(1 - \frac{x_2(t)}{c_2}\right) + \frac{x_5(t)}{k_4 + x_5(t)} a_1 \frac{1}{x_4(t) + e_2}, \\ \dot{x}_4(t) = s_1 - \mu_2 x_4(t), \\ \dot{x}_5(t) = -\mu_3 x_5(t). \end{cases}$$

Если определить  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  как решения системы с пониженным порядком на плоскости  $x_1 = x_3 = 0$ , то из единственности решения следует, что

$$x_1 \equiv 0, x_2 = x_2(t), x_3 \equiv 0, x_4 = x_4(t), x_5 = x_5(t), t \in [0, \varepsilon_3),$$

является решением исходной системы для которого выполняются (4) при  $x_1(0) = 0$ , лежащим на плоскости  $x_1 = x_3 = 0$  и не покидающим области  $D$  через границу  $x_3 = 0$ .

В случае если

$$x_1(0) \geq 0, x_2(0) \geq 0, x_3(0) \geq 0, x_4(0) \geq 0, x_5(0) = 0. \quad (5)$$

Для каждого такого начального условия существует  $\varepsilon_4 > 0$  такое, что существует единственное решение задачи Коши при  $t \in [0, \varepsilon_4)$  обращающее систему (1) в тождество. При  $t = 0$  исходная система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right) - \frac{1}{x_4(0) + e_1} (\alpha_1 x_2(0) + \alpha_2 x_3(0)) \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_1}, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right) - \alpha_3 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_2} x_2(0), \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)} - \mu_1 x_3(0) - \alpha_4 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_3} x_3(0), \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = b_2 x_3(0). \end{cases}$$

В случае если  $x_3(0) > 0$  получим, что  $\dot{x}_5(0) > 0$ , из чего  $x_5(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}_4)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_4 \leq \varepsilon_4$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_5 = 0$ . При  $x_3(0) = 0$ , в свою очередь, система в начальный момент преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right) - \frac{\alpha_1 x_2(0)}{x_4(0) + e_1} \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_1}, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right) - \alpha_3 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_2} x_2(0), \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)}, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь при  $x_1(0) > 0$  имеем, что  $\dot{x}_3(0) > 0$ , то есть  $x_3(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}'_4)$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_4 \leq \varepsilon_4$ . Из этого следует, что  $x_5(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}'_4)$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_4 \leq \varepsilon_4$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_5 = 0$ . При  $x_1(0) = 0$  система в начальный момент примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = r_2 x_2(0) \left(1 - \frac{x_2(0)}{c_2}\right), \\ \dot{x}_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда решения  $x_1(t) \equiv 0$ ,  $x_3(t) \equiv 0$ ,  $x_5(t) \equiv 0$  удовлетворяет начальным условиям (5) и уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = 0, \dot{x}_3(t) = 0, \dot{x}_5(t) = 0.$$

При их подстановке в исходную систему получим, что:

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(t) \left(1 - \frac{x_2(t)}{c_2}\right), \\ \dot{x}_4(t) = s_1 - \mu_2 x_4(t). \end{cases}$$

Если определить  $x_2$  и  $x_4$  как решения системы с пониженным порядком на плоскости  $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ , то из единственности решения следует, что

$$x_1 \equiv 0, x_2 = x_2(t), x_3 \equiv 0, x_4 = x_4(t), x_5 \equiv 0, t \in [0, \varepsilon_4),$$

является решением исходной системы с начальными условиями (5), где

$$x_1(0) = 0, x_3(0) = 0, x_5(0) = 0,$$

которое лежит на плоскости  $x_1 = x_3 = x_5 = 0$  и не покидает область  $D$  через границу  $x_5 = 0$ .

Рассмотрим случай, когда

$$x_1(0) \geq 0, x_2(0) = 0, x_3(0) \geq 0, x_4(0) \geq 0, x_5(0) \geq 0. \quad (6)$$

Для каждого такого начального условия также существует  $\varepsilon_5 > 0$  такое, что существует единственное решение задачи Коши на полуинтервале  $t \in [0, \varepsilon_5)$  обращающее систему исходную систему в тождество. В начальный момент времени (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right) - \frac{\alpha_2 x_3(0)}{x_4(0) + e_1} \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_1}, \\ \dot{x}_2(0) = \frac{x_5(0)}{k_4 + x_5(0)} a_1 \frac{1}{x_4(0) + e_2}, \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)} - \mu_1 x_3(0) - \alpha_4 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_3} x_3(0), \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = b_2 x_3(0) - \mu_3 x_5(0). \end{cases}$$

В случае, если  $x_5(0) > 0$  получим, что  $\dot{x}_2(0) > 0$ , из чего  $x_2(t) > 0, t \in (0, \tilde{\varepsilon}_5), \tilde{\varepsilon}_5 \leq \varepsilon_5$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_2 = 0$ . При  $x_5(0) = 0$  и  $t = 0$ , в свою очередь,

система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right) - \frac{\alpha_2 x_3(0)}{x_4(0) + e_1} \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_1}, \\ \dot{x}_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)} - \mu_1 x_3(0) - \alpha_4 \frac{x_1(0)}{x_1(0) + k_3} x_3(0), \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = b_2 x_3(0). \end{cases}$$

В случае, если  $x_3(0) > 0$  получим, что  $\dot{x}_5(0) > 0$ , из чего  $x_3(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}_5'')$ ,  $\tilde{\varepsilon}_5'' \leq \varepsilon_5$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_2 = 0$ . При  $x_3(0) = 0$  система в начальный момент примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = r_1 x_1(0) \left(1 - \frac{x_1(0)}{c_1}\right), \\ \dot{x}_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(0) = a_2 \frac{x_1(0)}{k_5 + x_4(0)}, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 + b_1 x_1(0) - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь при  $x_1(0) > 0$  имеем, что  $\dot{x}_3(0) > 0$ , то есть  $x_3(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}_5''')$ ,  $\tilde{\varepsilon}_5''' \leq \varepsilon_5$ . Из этого следует, что  $x_2(t) > 0$ ,  $t \in (0, \tilde{\varepsilon}_5''')$ ,  $\tilde{\varepsilon}_5''' \leq \varepsilon_5$  и траектория не выходит из  $D$  через плоскость  $x_2 = 0$ . При  $x_1(0) = 0$  система в начальный момент примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4(0) = s_1 - \mu_2 x_4(0), \\ \dot{x}_5(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда решения  $x_1(t) \equiv 0$ ,  $x_2(t) \equiv 0$ ,  $x_3(t) \equiv 0$ ,  $x_5(t) \equiv 0$  удовлетворяет начальным условиям (5) и уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = 0, \dot{x}_2(t) = 0, \dot{x}_3(t) = 0, \dot{x}_5(t) = 0.$$

При их подстановке в исходную систему получим, что:

$$\begin{cases} \dot{x}_4(t) = s_1 - \mu_2 x_4(t), \end{cases}$$

Тогда если определить  $x_4$  как решение системы с пониженным порядком на плоскости

$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$ , то из единственности решения следует, что

$$x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0, x_3 \equiv 0, x_4 = x_4(t), x_5 \equiv 0, t \in [0, \varepsilon_5),$$

является решением исходной системы с начальными условиями (5), где

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_5(0) = 0,$$

которое лежит на плоскости  $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$  и не покидает область  $D$  через границу  $x_2 = 0$ . Таким образом, траектории системы не пересекают ни одну из границ  $x_i = 0, i \in \overline{1, 5}$ . ►

Заметим, что из доказательства данной теоремы следует, что некоторые координатные плоскости положительно инвариантны относительно системы (1). Для координатных плоскостей  $x_i = 0$  условие инвариантности – выполнение равенств  $\dot{x}_i = 0$  для траекторий, начинающихся в них. Таким образом, плоскости

$$x_1 = 0;$$

$$x_1 = 0, x_3 = 0;$$

$$x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0,$$

а также прямая  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$  являются инвариантными относительно исходной системы.

Рассмотрим плоскость  $x_1 = 0$ . Исходная система на этом множестве принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \frac{1}{x_4 + e_2}, \\ \dot{x}_3 = -\mu_1 x_3, \\ \dot{x}_4 = s_1 - \mu_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = b_2 x_3 - \mu_3 x_5. \end{cases}$$

У преобразованной системы имеется два положения равновесия:

$$P_1 \left(0, 0, \frac{s_1}{\mu_2}, 0\right), P_2 \left(c_2, 0, \frac{s_1}{\mu_2}, 0\right).$$

Рассмотрим плоскость  $x_1 = 0, x_3 = 0$ . Исходная система на этом множестве принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \frac{1}{x_4 + e_2}, \\ \dot{x}_4 = s_1 - \mu_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = -\mu_3 x_5. \end{cases}$$

У данной системы также два положения равновесия:

$$P_1 \left( 0, \frac{s_1}{\mu_2}, 0 \right), P_2 \left( c_2, \frac{s_1}{\mu_2}, 0 \right).$$

Рассмотрим плоскость  $x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$ . Исходная система на этом множестве принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left( 1 - \frac{x_2}{c_2} \right), \\ \dot{x}_4 = s_1 - \mu_2 x_4, \end{cases}$$

У преобразованной системы также два положения равновесия:  $\left( 0, \frac{s_1}{\mu_2} \right)$  и  $\left( c_2, \frac{s_1}{\mu_2} \right)$ .

Рассмотрим прямую  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$ . Исходная система на этом множестве принимает вид:

$$\{\dot{x}_4 = s_1 - \mu_2 x_4,$$

У данной системы единственное положение равновесия —  $x_4 = \frac{s_1}{\mu_2}$ .

**Теорема 3.** Все компактные инвариантные множества системы (1) содержатся в положительно инвариантных множествах

$$\begin{aligned} K_1 &= \{0 \leq x_1 \leq \bar{x}_1 = c_1\} \cap D, \\ K_2 &= \left\{ \frac{s_1}{\mu_2} = \underline{x}_4 \leq x_4 \leq \bar{x}_4 = \frac{s_1}{\mu_2} + b_1 c_1 \right\} \cap K_1, \\ K_3 &= \left\{ 0 \leq x_3 \leq \bar{x}_3 = \frac{a_2 \bar{x}_1}{k_5 + \underline{x}_4} \cdot \frac{\bar{x}_1 + k_2}{\mu_1 k_2} \right\} \cap K_2, \\ K_4 &= \left\{ 0 \leq x_5 \leq \bar{x}_5 = \frac{b_3 \bar{x}_3}{\mu_3} \right\} \cap K_3, \\ K_5 &= \left\{ 0 \leq x_2 \leq \bar{x}_2 = \frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{x}_5}{k_4(\underline{x}_4 + e_2)}} \right\} \cap K_4. \end{aligned}$$

◀ Пусть  $\varphi_1(x) = x_1$ . Тогда на области  $D$ :

$$\dot{\varphi}_1(x) = r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{c_1} \right) - \frac{1}{x_4 + e_1} (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) \frac{x_1}{x_1 + k_1}.$$

Универсальное сечение на  $D$  можно задать следующим образом:

$$S(\varphi_1, D) = \left\{ r_1 x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{c_1} \right) - \frac{1}{x_4 + e_1} (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) \frac{x_1}{x_1 + k_1} = 0 \right\} \cap D.$$

Преобразуем равенство, задающее это множество:

$$S(\varphi_1, D) = \left\{ x_1 \left( r_1 \left( 1 - \frac{x_1}{c_1} \right) - \frac{\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3}{(x_1 + k_1)(x_4 + e_1)} \right) = 0 \right\} \cap D.$$

Тогда  $x_1 = 0$  или  $x_1 = c_1 \left(1 - \frac{\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3}{r_1(x_1 + k_1)(x_4 + e_1)}\right)$ . Таким образом, экстремальные значения  $\varphi_1(x)$  на множестве  $S(\varphi_1, D)$ :

$$\inf_{x \in S(\varphi_1, D)} \varphi_1 = 0, \quad \sup_{x \in S(\varphi_1, D)} \varphi_1 = c_1,$$

из чего локализирующее множество  $\Omega(\varphi_1, D)$  задается следующим образом:

$$\Omega(\varphi_1, D) = \{0 \leq x_1 \leq c_1 = \bar{x}_1\} \cap D = K_1.$$

Далее возьмем  $\varphi_2(x) = x_4$ . В таком случае универсальное сечение имеет вид:

$$S(\varphi_2, K_1) = \{s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4 = 0\} \cap K_1.$$

На множестве  $S(\varphi_2, K_1)$

$$\inf_{x \in S(\varphi_2, K_1)} \varphi_2 = \frac{s_1}{\mu_2} = \underline{x}_4, \quad \sup_{x \in S(\varphi_2, K_1)} \varphi_2 = \frac{s_1}{\mu_2} + \frac{b_1 c_1}{\mu_2} = \bar{x}_4.$$

Следовательно, локализирующее множество можно задать как

$$\Omega(\varphi_2, K_1) = \{\underline{x}_4 \leq x_4 \leq \bar{x}_4\} \cap K_1 = K_2.$$

Пусть  $\varphi_3(x) = x_3$ . Универсальное сечение для данной функции:

$$S(\varphi_3, K_2) = \{a_2 \frac{x_1}{k_5 + x_4} - \mu_1 x_3 - \alpha_4 \frac{x_1}{x_1 + k_3} x_3 = 0\} \cap K_2.$$

Преобразовав выражение, задающее  $S(\varphi_3, K_2)$ , получим

$$x_3 = \frac{a_2 x_1}{k_5 + x_4} \cdot \frac{x_1 + k_3}{\mu_1 x_1 + \mu_1 k_3 + \alpha_4 x_1}.$$

Тогда на множестве  $S(\varphi_3, K_2)$

$$\inf_{x \in S(\varphi_3, K_2)} \varphi_3 = 0, \quad \sup_{x \in S(\varphi_3, K_2)} \varphi_3 \leq \frac{a_2 \bar{x}_1}{k_5 + \underline{x}_4} \cdot \frac{\bar{x}_1 + k_3}{\mu_1 k_3} = \bar{x}_3.$$

Таким образом, локализирующее множество:

$$\Omega(\varphi_3, K_2) = (\{0 \leq x_3 \leq \sup x_3\} \cap K_2) \subset (\{0 \leq x_3 \leq \bar{x}_3\} \cap K_2) = K_3.$$

Возьмем  $\varphi_4(x) = x_5$ . В таком случае универсальное сечение:

$$S(\varphi_4, K_3) = \{b_2 x_3 - \mu_3 x_5 = 0\} \cap K_3.$$

На множестве  $S(\varphi_4, K_3)$

$$\inf_{x \in S(\varphi_4, K_3)} \varphi_4 = 0, \quad \sup_{x \in S(\varphi_4, K_3)} \varphi_4 = \frac{b_2 \bar{x}_3}{\mu_3} = \bar{x}_5,$$

поэтому

$$\Omega(\varphi_4, K_3) = \{0 \leq x_5 \leq \bar{x}_5\} \cap K_3 = K_4.$$

Далее, пусть  $\varphi_5(x) = x_2$ . Тогда

$$S(\varphi_5, K_4) = \{r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \frac{1}{x_4 + e_2} - \alpha_3 \frac{x_1}{x_1 + k_2} x_2 = 0\} \cap K_4.$$

Рассмотрим равенство, задающее универсальное сечение  $S_{\varphi_5}$ . Заметим, что на множестве  $S(\varphi_5, K_4)$ :

$$\begin{aligned} r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \frac{1}{x_4 + e_2} - \alpha_3 \frac{x_1 x_2}{x_1 + k_2} &\leq \\ &\leq r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{a_1 \bar{x}_5}{(\bar{x}_5 + k_4)(\underline{x}_4 + e_2)}. \end{aligned}$$

Т.е.

$$x_2^2 - c_2 x_2 - \frac{a_1 \bar{x}_5}{(\bar{x}_5 + k_4)(\underline{x}_4 + e_2)} \leq 0.$$

Таким образом,

$$0 \leq x_2 \leq \frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{x}_5}{(\bar{x}_5 + k_4)(\underline{x}_4 + e_2)}} = \bar{x}_2.$$

Итого, локализирующее множество имеет следующий вид:

$$\Omega(\varphi_5, K_4) = \{0 \leq x_2 \leq \bar{x}_2\} \cap K_4 = K_5. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 4.** Множество  $K_5$  является компактным и содержит аттрактор системы (1).

◀ Рассмотрим множество

$$K_1(\tau_1) = \{0 \leq x_1 \leq c_1 + \tau_1\} \cap D, \quad \tau_1 \geq 0.$$

Заметим, что на множестве  $D \setminus K_1(\tau_1) = \{x_1 > c_1 + \tau_1\}$  производная локализирующей функции  $\varphi_1$  в силу системы  $\dot{\varphi}_1 < 0$ . Действительно, на этом множестве

$$\dot{\varphi}_1 \leq r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{c_1}\right) < -r_1 (c_1 + \tau_1) \frac{\tau_1}{c_1} \leq 0.$$

Таким образом множества  $K_1(\tau_1)$  положительно инвариантны. Далее будем говорить, что  $c_1 + \tau_1 = \bar{\xi}_1(\tau_1)$ .



Рассмотрим множество

$$K_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2) = \left\{ \frac{s_1}{\mu_2} - \tilde{\tau}_2 \leq x_4 \leq \frac{s_1}{\mu_2} + \frac{b_1 \bar{\xi}_1(\tau_1)}{\mu_2} + \tau_2 \right\} \cap K_1(\tau_1), \tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2 \geq 0.$$

На множестве  $\{x_4 > \frac{s_1}{\mu_2} + \frac{b_1 \bar{\xi}_1(\tau_1)}{\mu_2} + \tau_2\} \cap K_1(\tau_1)$

$$\dot{\varphi}_2 = s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4 < -\mu_2 \tau_2 \leq 0.$$

На множестве  $\{x_4 < \frac{s_1}{\mu_2} - \tilde{\tau}_2\} \cap K_1(\tau_1)$

$$\dot{\varphi}_2 = s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4 > \mu_2 \tilde{\tau}_2 \geq 0.$$

Таким образом, множества  $K_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2)$  положительно инвариантны. Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_4(\tau_1, \tau_2) &= \frac{s_1}{\mu_2} + \frac{b_1 \tilde{x}_1}{\mu_2} + \tau_2, \\ \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) &= \frac{s_1}{\mu_2} - \tilde{\tau}_2. \end{aligned}$$

Пусть

$$K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3) = \left\{ 0 \leq x_3 \leq \frac{a_2 \bar{\xi}_1(\tau_1)}{k_5 + \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2)} \cdot \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_3}{\mu_1 k_3} + \tau_3 \right\} \cap K_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2),$$

где  $\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3 \geq 0$ . Тогда на множестве

$$K_2(\tau_1, \tilde{\tau}_2, \tau_2) \setminus K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3) = \left\{ x_3 > \frac{a_2 \bar{\xi}_1(\tau_1)}{k_5 + \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2)} \cdot \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_3}{\mu_1 k_3} + \tau_3 \right\} \cap K_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2)$$

справедливо, что

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_3 &= a_2 \frac{x_1}{k_5 + x_4} - \mu_1 x_3 - \alpha_4 \frac{x_1}{x_1 + k_3} x_3 < a_2 \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1)}{k_5 + \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2)} - \left( \mu_1 + \alpha_4 \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1)}{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_3} \right) x_3 < \\ &< a_2 \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1)}{k_5 + \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2)} - \frac{\mu_1 k_3}{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_3} x_3 < -\frac{\mu_1 k_2 \tau_3}{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_2} \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, множества  $K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3)$  положительно инвариантны. Далее будем считать, что

$$\bar{\xi}_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3) = \frac{a_2 \bar{\xi}_1(\tau_1)}{k_5 + \underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2)} \cdot \frac{\bar{\xi}_1(\tau_1) + k_2}{\mu_1 k_2} + \tau_3.$$

Положим, что

$$K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) = \left\{ 0 \leq x_5 \leq \frac{b_2 \bar{\xi}_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3)}{\mu_3} + \tau_4 \right\} \cap K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3),$$

где  $\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4 \geq 0$ . На множестве

$$\begin{aligned} K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3) \setminus K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) = \\ = \{x_5 > \frac{b_2 \bar{\xi}_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3)}{\mu_3} + \tau_4\} \cap K_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3) \end{aligned}$$

справедливо, что

$$\dot{\varphi}_4 = b_2 x_3 - \mu_3 x_5 < -\mu_3 \tau_4 \leq 0,$$

из чего множества  $K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)$  за положительно инвариантны. Обозначим

$$\bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) = \frac{b_2 \bar{\xi}_3(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3)}{\mu_3} + \tau_4.$$

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = \{0 \leq x_2 \leq \frac{c_2}{2} + \\ + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)}{k_4(\underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) + e_2)}} + \tau_5\} \cap K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4), \end{aligned}$$

где  $\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \geq 0$ . Можно провести следующую оценку  $\dot{\varphi}_2$ :

$$\dot{\varphi}_2 \leq r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{a_1 \bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)}{(\bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) + k_4)(\underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) + e_2)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) &= \frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)}{(\bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) + k_4)(\underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) + e_2)}}, \\ \underline{\xi}_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) &= \frac{c_2}{2} - \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)}{(\bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) + k_4)(\underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) + e_2)}}. \end{aligned}$$

В таком случае, на множестве

$$\begin{aligned} K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) \setminus K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = \\ = \{x_2 > \bar{\xi}_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) + \tau_5\} \cap K_4(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) \end{aligned}$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &\leq -(x_2 - \bar{\xi}_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4))(x_2 - \underline{\xi}_2(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)) < \\ &< -2\tau_5 \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4)}{(\bar{\xi}_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4) + k_4)(\underline{\xi}_4(\tilde{\tau}_2) + e_2)}} \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, множества  $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$  положительно инвариантны.

Можно заметить, что множества  $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$  компактны при

$$\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \geq 0.$$

Тогда с учетом того, что они также положительно инвариантны и содержат предельные множества всех траекторий, и т.к.

$$K_5 = \bigcap_{\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \geq 0} K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5),$$

можно сделать вывод о том, что  $K_5$  — положительно инвариантный компакт, содержащий аттрактор системы.

Действительно, варьируя  $\tau_i$  можно добиться того, что любая точка  $x \in D$  будет содержаться в некоем множестве  $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$ . Вследствие положительной инвариантности данного множества имеем, что траектории, начинающиеся внутри него, не будут его покидать. ►

## 2.2. Положения равновесия на границе множества $D$

**Теорема 5. (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)** Пусть правая часть автономной системы  $x = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нулевого положения равновесия и  $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}$ . Тогда нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части, и неустойчиво, если у матрицы  $A$  есть корень характеристического уравнения с положительной действительной частью.

**Определение 2.** Положение равновесия называется некритическим, если собственные значения матрицы его линейного приближения имеют ненулевые действительные части. Иначе ПР называется критическим.

**Теорема 6.** Система (1) на границе области  $D$  при положительных значениях параметров имеет положения равновесия  $P_1 \left(0, 0, 0, \frac{s_1}{\mu_1}, 0\right)$  и  $P_2 \left(0, c_2, 0, \frac{s_1}{\mu_1}, 0\right)$ .

**Теорема 7.** Положение равновесия  $P_1 \left(0, 0, 0, \frac{s_1}{\mu_1}, 0\right)$  является неустойчивым, а положение равновесия  $P_2 \left(0, c_2, 0, \frac{s_1}{\mu_1}, 0\right)$  является асимптотически устойчивым при условии  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 < \alpha_1 c_2 \mu_2$  и неустойчивым при условии  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 > \alpha_1 c_2 \mu_2$ . При  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 = \alpha_1 c_2 \mu_2$  необходимо дополнительное исследование.

◀ Заметим, что в некритических положениях равновесия, в отличие от критических, характеры устойчивости автономной системы и ее первого приближения совпадают.

Матрица Якоби исходной системы в точке  $P_1$ :

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & \frac{a_1}{k_4 \left( e_2 + \frac{s_1}{\mu_2} \right)} \\ \frac{a_2}{k_5 + \frac{s_1}{\mu_2}} & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}$$

Набор ее собственных значений имеет вид

$$\lambda_1 = r_1, \quad \lambda_2 = r_2, \quad \lambda_3 = -\mu_1, \quad \lambda_4 = -\mu_2, \quad \lambda_5 = -\mu_3.$$

Т.к. все параметры системы положительны, можно сделать вывод о том, что согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению система (1) неустойчива в ПР  $P_1$ .

В точке  $P_2$  матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} r_1 - \frac{\alpha_1 c_2}{k_1 \left( e_1 + \frac{s_1}{\mu_2} \right)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_3 c_2}{k_2} & -r_2 & 0 & 0 & \frac{a_1}{k_4 \left( e_2 + \frac{s_1}{\mu_2} \right)} \\ \frac{a_2}{k_5 + \frac{s_1}{\mu_2}} & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}$$

Ее набор собственных значений:

$$\lambda_1 = \frac{k_1 r_1 s_1 - \alpha_1 c_2 \mu_2 + e_1 k_1 \mu_2 r_1}{k_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2}, \quad \lambda_2 = -\mu_1,$$

$$\lambda_3 = -\mu_2, \quad \lambda_4 = -\mu_3, \quad \lambda_5 = -r_2.$$

Аналогично предыдущему случаю, из условия строгой положительности параметров системы следует, что в ПР  $P_2$  система асимптотически устойчива при условии  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 < \alpha_1 c_2 \mu_2$  и неустойчива при условии  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 > \alpha_1 c_2 \mu_2$ . Однако в случае когда  $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 = \alpha_1 c_2 \mu_2$  точка покоя  $P_2$  является критической, т.е. теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению в этом случае не применима и необходимо дополнительное исследование. ►

### 2.3. Положения равновесия внутри множества $D$

Рассмотрим следующий класс динамических систем:

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{+,0}^n, \quad i = \overline{1, n},$$

где правые части  $f_i(x)$  — некие дробно-рациональные функции (далее ДРФ) вида

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad l, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}.$$

Здесь  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены порядков  $l$  и  $m$  соответственно с отрицательными действительными корнями.

**Теорема 8.** Для динамических систем данного вида за функцию Ляпунова для внутреннего положения равновесия  $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \in \mathbb{R}_+^n$  можно принять следующее выражение:

$$V(x) = 2 \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i (x_i - x_{i,0} - x_{i,0} \ln \frac{x_i}{x_{i,0}}) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0})^2,$$

где  $\sigma_1$  — множество номеров функций  $f_i(x)$  кратных  $x_i$ ;

$\sigma_2$  — множество всех остальных номеров функций  $f_j(x)$ ;

$\hat{k}_i$  — положительные параметры.

Производная такой функции в силу системы будет представима в виде квадратичной формы:

$$\dot{V}(x) = (x - x_0)^T H(x) (x - x_0),$$

где  $H(x)$  — симметричная функциональная матрица размера  $n \times n$ , координатными функциями которой являются константы либо рациональные функции.

◀ Обозначим корни  $Q_i(x)$  как  $(-a_k) \in \mathbb{R}_-$ ,  $k = \overline{1, m}$ , а корни  $P_i(x)$  как  $(-b_j) \in \mathbb{R}_-$ ,  $j = \overline{1, l}$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q_i(x) &= (x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m), \\ P_i(x) &= (x_{j_1} + b_1) \cdot \dots \cdot (x_{j_l} + b_l). \end{aligned}$$

Здесь  $j_1, \dots, j_l, k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$ . Заметим, что во внутреннем ПР  $x = x_0$  справедливо, что:

$$f_i(x_0) = \frac{P_i(x_0)}{Q_i(x_0)} = 0.$$

На области  $\mathbb{R}_+^n$  для  $V(x)$  выполняются следующие условия:

$$V(x) > 0, V(x_0) = 0, x_0 \in D, x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Квадратичные слагаемые неотрицательно определены на области  $\mathbb{R}_+^n$ , слагаемые вида

$$x_j - x_{j,0} - x_{j,0} \ln \frac{x_j}{x_{j,0}}$$

также неотрицательны в  $\mathbb{R}_+^n$ . Производная  $V(x)$  в силу системы:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i \left(1 - \frac{x_{i,0}}{x_i}\right) x_i \tilde{f}_i(x) + \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0}) f_j(x) = \\ &= \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i (x_i - x_{i,0}) \tilde{f}_i(x) + \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0}) f_j(x).\end{aligned}$$

Воспользовавшись методом математической индукции покажем, что ДРФ  $f_i(x)$  можно представить как набор произведений разностей  $\Delta x_j$  и неких дробно-рациональных функций.

При  $l = 0$  и  $m = 1$  имеем, что:

$$f_i(x) = f_i(x) - f_i(x_0) = \frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_1,0} + a_1)}.$$

При  $l = 0$  и  $m = 2$ :

$$\begin{aligned}f_i(x) &= f_i(x) - f_i(x_0) = \frac{1}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_2} + a_2)} - \frac{1}{(x_{k_1,0} + a_1)(x_{k_2,0} + a_2)}, \\ f_i(x) &= -\frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_1,0} + a_1)(x_{k_2,0} + a_2)} - \frac{\Delta x_{k_2}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_2} + a_2)(x_{k_1,0} + a_1)},\end{aligned}$$

При  $l = 0$ ,  $m \geq 3$ :

$$f_i(x) = \frac{1}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)} - \frac{1}{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}.$$

Тогда приведя дроби к общему знаменателю и совершив в числителе замену  $x_{k_j} = \Delta x_{k_j} + x_{k_j,0}$  получим:

$$\begin{aligned}f_i(x) &= -\frac{\Delta x_{k_1}(x_{k_2,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)} - \\ &\quad - \frac{\Delta x_{k_1} \Delta x_{k_2}(x_{k_3,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)} - \dots \\ &\quad \dots - \frac{\Delta x_{k_1} \cdot \dots \cdot \Delta x_{k_{m-1}}(x_{k_m,0} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)} - \\ &\quad - \frac{\Delta x_{k_1} \cdot \dots \cdot \Delta x_{k_m}}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}.\end{aligned}$$

Вынося поочередно множители  $\Delta x_{k_j}$  из слагаемых, содержащих их, получим:

$$\begin{aligned} f_i(x) = & -\Delta x_{k_m} \frac{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_{m-1},0} + a_{m-1})}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)} - \\ & - \Delta x_{k_{m-1}} \frac{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_{m-2},0} + a_{m-2})(\Delta x_{k_m} + x_{k_m,0} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)} - \dots \\ & \dots - \Delta x_{k_1} \frac{\Delta x_{k_2} \cdot \dots \cdot \Delta x_{k_m} + \dots + (x_{k_2,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}. \end{aligned}$$

Заметим, что каждое слагаемое начиная со третьего является произведением дроби

$$\frac{\Delta x_{k_j}}{(x_{k_j} + a_j)(x_{k_j,0} + a_j)}$$

и одного из предыдущих шагов индукции вплоть до шага  $l = 0$ ,  $m = m - 1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} f_i(x) = & -\frac{\Delta x_{k_m}}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_m,0} + a_m)} - \dots \\ & \dots - \frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}. \end{aligned}$$

При  $l = 1$ ,  $m \in \{2, \dots, n\}$ :

$$f_i(x) = \frac{(x_{j_1} + b_1)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)} - \frac{(x_{j_1,0} + b_1)}{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}.$$

Совершив в числителе первого слагаемого замену  $x_{j_1} = \Delta x_{j_1} + x_{j_1,0}$  и раскрыв скобки можно получить следующую сумму:

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{\Delta x_{j_1}}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)} + \\ & + b_1 \frac{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m) - (x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}. \end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое соответствует случаю, когда  $l = 0$  и  $m \in \mathbb{N}/\{1\}$ , из чего предположение индукции работает также и в этом случае.

Рассмотрим случай, где  $l > 1$  и  $m \in \mathbb{N}/\{1\}$ .

$$f_i(x) = \frac{(x_{j_1} + b_1) \cdot \dots \cdot (x_{j_l} + b_l)}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m)} - \frac{(x_{j_1,0} + b_1) \cdot \dots \cdot (x_{j_l,0} + b_l)}{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}.$$

Если разложить произвольное слагаемое в числителе первой дроби как  $x_{j_p} = \Delta x_{j_p} + x_{j_p,0}$ ,  $p \in \{1, \dots, l\}$ , то выражение преобразуется в сумму некой ДРФ и произведения разности  $\Delta x_{j_p}$  и некоторой другой ДРФ. При этом заметим, что первое слагаемое будет соответствовать предыдущему шагу индукции, т.е. также может быть приведено к виду произведения разности и ДРФ.

Таким образом, каждая функция  $f_i(x)$  может быть представлена как

$$f_i(x) = \sum_{p \in \hat{\sigma}_i} (x_p - x_{p,0}) \tilde{h}_p(x),$$

где  $\tilde{h}_j(x)$  – некие ДРФ или линейные функции,  $\hat{\sigma}_i$  – множество всех номеров  $x_p$ ,  $p \in \{1, \dots, n\}$ , входящих в  $f_i(x)$ . Тогда производная  $V(x)$  в силу системы примет вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i(x_i - x_{i,0}) \sum_{p \in \hat{\sigma}_i} (x_p - x_{p,0}) \tilde{h}_p(x) + \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j(x_j - x_{j,0}) \sum_{q \in \hat{\sigma}_j} (x_q - x_{q,0}) \tilde{h}_q(x).$$

Сложив все слагаемые с повторяющимися множителями  $(x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0})$  и положив равными нулю коэффициенты при множителях отсутствующих в сумме, получим квадратичную форму с симметричной функциональной матрицей  $H$ :

$$\dot{V}(x) = (x - x_0)^T H (x - x_0). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 9.** Система (1) при значениях параметров, данных в [17], имеет внутреннее положение равновесия

$$P_3(875419.1750, 943091.7442, 151.6805, 9135.6470, 0.1517).$$

**Теорема 10.** Положение равновесия  $P_3$  является асимптотически устойчивым.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было проведено исследование математической модели взаимодействия опухоли и иммунной системы, представленной в работе [17]. Важно заметить, что рассмотренная модель является весьма упрощенным описанием набора сложных биологических процессов: в ней не учитываются многие важные иммунные клетки, неоднородность распространения глиомы в пространстве и эффекты насыщения.

В результате работы было показано, что траектории системы не выходят из множества  $D$ , что соответствует отсутствию случаев, когда численности популяций клеток принимают отрицательные значения. Также было выяснено, что система имеет положительно инвариантное компактное множество, содержащее аттрактор. Это позволяет проводить оценочные суждения о динамике траекторий системы по точкам, через которые они проходят, т.е. предсказывать ход заболевания при определенных численностях популяций клеток рака и иммунитета. Далее было показано, что система имеет два положения равновесия на границе, соответствующих различным случаям отсутствия рака, и при значениях параметров из [17] одно внутреннее асимптотически устойчивое положение равновесия, соответствующее наличию рака у пациента, который не подавляется его иммунитетом.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Byun YH, Park CK. Classification and Diagnosis of Adult Glioma: A Scoping Review. *Brain Neurorehabil.* 2022 Nov 22;15(3):e23. doi: 10.12786/bn.2022.15.e23. PMID: 36742083; PMCID: PMC9833487.
2. Zeng T, Cui D, Gao L. Glioma: an overview of current classifications, characteristics, molecular biology and target therapies. *Front Biosci (Landmark Ed).* 2015 Jun 1;20(7):1104-15. doi: 10.2741/4362. PMID: 25961548.
3. S. Bunimovich-Mendrazitsky, J. C. Gluckman and J. Chaskalovic, *J. Theor. Biol.* 277,27 (2011).
4. Kasbawati, Yuliana Jao, Nur Erawaty. Dynamic study of the pathogen-immune system interaction with natural delaying effects and protein therapy[J]. *AIMS Mathematics*, 2022, 7(5): 7471-7488. doi: 10.3934/math.2022419
5. W. L. Duan, H. Fang, C. Zeng, The stability analysis of tumor-immune responses to chemotherapy system with gaussian white noises. *Chaos, Soliton. Fract.*, 127 (2019), 96–102. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.06.030>. doi: 10.1016/j.chaos.2019.06.030
6. Xiangdong Liu, Qingze Li, Jianxin Pan, A deterministic and stochastic model for the system dynamics of tumor–immune responses to chemotherapy, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 500, 2018, pp. 162-176, ISSN 0378-4371, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.02.118>.
7. L.G. de Pillis, W. Gu, K.R. Fister, T. Head, K. Maples, A. Murugan, T. Neal, K. Yoshida, Chemotherapy for tumors: An analysis of the dynamics and a study of quadratic and linear optimal controls, *Mathematical Biosciences*, Volume 209, Issue 1, 2007, pp. 292-315, ISSN 0025-5564, <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2006.05.003>.
8. dePilllis, L.G., Eladdadi, A. & Radunskaya, A.E. Modeling cancer-immune responses to therapy. *J Pharmacokinet Pharmacodyn* 41, 461–478 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10928-014-9386-9>
9. F. A. Rihan, D. H. A. Rahman, Delay differential model for tumour-immune dynamics with HIV infection of CD4+ T-cells, *Int. J. Comput. Math.*, 90 (2013), 594–614, <http://dx.doi.org/10.1080/00207160.2012.726354>. doi: 10.1080/00207160.2012.726354
10. K. R. Swanson, C. Bridge, J. D. Murray and E. C. Alvord Jr., *J. Neurol. Sci.* 216, 1 (2003).
11. Chakrabarty SP, Hanson FB. Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumors using Galerkin finite element method. *Math Biosci.* 2009; 219(2): 129–141. pmid:19345698

12. Bandara S, Diehl M, Fricker G. A mathematical model for the transport of paclitaxel (Taxol) across the blood-brain barrier. Chem Eng Res Des. 2007; 85: 1065–1071.
13. Kirkby NF, Jefferies SJ, Jena R, Burnet NG. A mathematical model of the treatment and survival of patients with high-grade brain tumours. J Theor Biol. 2007; 245: 112–124. pmid:17084863
14. Schmitz JE, Kansal AR, Torquato S. A cellular automaton model of brain tumor treatment and resistance. J Theor Med. 2002; 4(4): 223–239.
15. Walker WL, Cook J. Drug delivery to brain tumors. Bull Math Biol. 1996; 58(6): 1047–1074. pmid:8953256
16. Kronik N, Kogan Y, Vainstein V, Agur Z. Improving alloreactive CTL immunotherapy for malignant gliomas using a simulation model of their interactive dynamics. Cancer Immunol Immunother. 2008; 57: 425–439. pmid:17823798
17. S. Banerjee, S. Khajanchi and S. Chaudhury, PLoS ONE 10(5), e0123611 (2015).
18. *Крищенко А.П.* Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения, 2005, Т.41, N12, С. 1597–1604.
19. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 231 С.