Рассмотрим следующую пятимерную систему с неотрицательными переменными $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и положительными параметрами:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \dfrac{x_1}{c_1}\right) - \dfrac{1}{x_4 + e_1}(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3)\dfrac{x_1}{x_1 + k_1}, \\
\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \dfrac{x_2}{c_2}\right) + \dfrac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \dfrac{1}{x_4 + e_2} - \alpha_3 \dfrac{x_1}{x_1 + k_2} x_2, \\
\dot{x}_3 = a_2 \dfrac{x_1}{k_5 + x_4} - \mu_1 x_3 - \alpha_4 \dfrac{x_1}{x_1 + k_3} x_3, \\
\dot{x}_4 = s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4, \\
\dot{x}_5 = b_2 x_3 - \mu_3 x_5,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $t \geqslant 0$ — время;

x_1 — количество клеток глиомы;

x_2 — количество макрофагов;

x_3 — количество т-киллеров;

x_4 — количество белков TGF-β;

x_5 — количество γ-интерферонов.

Теорема 1. Все компактные инвариантные множества системы (1) содержатся в положительно инвариантных множествах

$$
\begin{aligned}
&K_1 = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1 = c_1\} \cap D, \\
&K_2 = \left\{\frac{s_1}{\mu_2} = \underline{x}_4 \leqslant x_4 \leqslant \overline{x}_4 = \frac{s_1}{\mu_2} + b_1 c_1\right\} \cap K_1, \\
&K_3 = \left\{0 \leqslant x_3 \leqslant \overline{x}_3 = \frac{a_2 \overline{x}_1}{k_5 + \underline{x}_4} \cdot \frac{\overline{x}_1 + k_2}{\mu_1 k_2}\right\} \cap K_2, \\
&K_4 = \left\{0 \leqslant x_5 \leqslant \overline{x}_5 = \frac{b_2 \overline{x}_3}{\mu_3}\right\} \cap K_3, \\
&K_5 = \left\{0 \leqslant x_2 \leqslant \overline{x}_2 = \frac{c_2}{2} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + \frac{a_1 \overline{x}_5}{k_4(\underline{x}_4 + e_2)}}\right\} \cap K_4.
\end{aligned}
$$

◀…Следовательно, множества $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$ положительно инвариантны. Также можно заметить, что множества $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$ компактны при

$$\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \geqslant 0.$$

Покажем, что множество K_5 содержит аттрактор системы. Решение автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$, где $F(x)$ — гладкое векторное поле, с начальным значением из любого компакта продолжается вперед неограниченно, либо до границы этого компакта [1, с. 84]. Для любой траектории системы (1) существует такой набор $\tau_i = \hat{\tau}_i$, что ее начальная точка будет содержаться в множестве $\hat{K}_5 = K_5(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tilde{\tau}}_2, \hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4, \hat{\tau}_5)$. Т.к. компакт $\hat{K}_5$ положительно инвариантен и $\dot{\varphi}_i(x) < 0$ на границе $\hat{K}_5$, решения, начинающиеся в $\hat{K}_5 \setminus K_5$, не будут достигать границы $\hat{K}_5$ и могут быть неограниченно продолжены. Тогда траектории, начинающиеся в $\hat{K}_5$ ограничены и принадлежат этому компакту при $t \geqslant 0$. Следовательно, предельные множества траекторий из $\hat{K}_5$ — непустые инвариантные компакты. Согласно теореме 1, K_5 содержит все инвариантные компакты системы, т.е. K_5 также содержит предельные множества траекторий из $\hat{K}_5$. Т.к. для любой точки из D можно подобрать τ_i такие, что соответствующий компакт $K_5(\tau_1, \tau_2, \tilde{\tau}_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$ ее содержит, можно сделать вывод о том, что K_5 содержит предельные множества всех траекторий, начинающихся в D. Таким образом, K_5 — положительно инвариантный компакт, содержащий аттрактор системы. ▶

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Арнольд, В. И.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп., М., Наука, 1984, 271 с..