Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет *«Фундаментальные науки»*

Кафедра *«Математическое моделирование»*

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к научно-исследовательской работе

на тему:

МЕТОД ВЫБОРА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В МОДЕЛЯХ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Студент группы ФН12-81Б ____________________ *М.Д. Кирдин*
(подпись, дата)

Руководитель НИР ____________________ *А.П. Крищенко*
(подпись, дата)

2024г.

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ФН12
____________ А.П. Крищенко
«____» ____________ 20___ г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение научно-исследовательской работы

по теме
«Метод выбора функции Ляпунова в моделях с дробно-рациональными правыми частями»

Студент Кирдин Матвей Дмитриевич ФН12-81Б
(Фамилия, Имя, Отчество, Индекс Группы)

Направленность НИР ____________________
(учебная, исследовательская, практическая, производственная и др.)

Источник тематики ____________________

График выполнения работы: 25% к ___ нед., 50% к ___ нед., 75% к ___ нед., 100% к ___ нед.

Задание ____________________

Оформление научно-исследовательской работы:
Расчетно-пояснительная записка на ____ листах формата А4.
Перечень графического (иллюстративного) материала ____________________

Дата выдачи задания «____» ____________ 20___ г.

Студент ____________________ *М.Д. Кирдин*
(подпись, дата)

Руководитель НИР ____________________ *А.П. Крищенко*
(подпись, дата)

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую пятимерную систему с положительными параметрами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \dfrac{x_1}{c_1}\right) - \dfrac{1}{x_4 + e_1}(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3)\dfrac{x_1}{x_1 + k_1}, \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \dfrac{x_2}{c_2}\right) + \dfrac{x_5}{k_4 + x_5} a_1 \dfrac{1}{x_4 + e_2} - \alpha_3 \dfrac{x_1}{x_1 + k_2} x_2, \\ \dot{x}_3 = a_2 \dfrac{x_1}{k_5 + x_4} - \mu_1 x_3 - \alpha_4 \dfrac{x_1}{x_1 + k_3} x_3, \\ \dot{x}_4 = s_1 + b_1 x_1 - \mu_2 x_4, \\ \dot{x}_5 = b_2 x_3 - \mu_3 x_5, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – неотрицательные переменные, $t \geqslant 0$ — время.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n_{+,0} = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \, x_i \geqslant 0, \, i = \overline{1, n}\right\}, \, \mathbb{R}_{+,0} = \left\{x \in \mathbb{R} : \, x \geqslant 0\right\}.$$

Для данной системы найдем положения равновесия при помощи построения функций Ляпунова, а также условия их устойчивости, если таковые имеются.

2 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим следующий класс динамических систем:

$$\dot{x}_i = f_i(x),\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{+,0},\ i = \overline{1, n},$$

где правые части $f_i(x)$ — некие дробно-рациональные функции (далее ДРФ) вида

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad l,\, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}\}.$$

Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены порядков l и m соответственно с отрицательными действительными корнями.

Теорема 1. Для динамических систем данного вида за функцию Ляпунова для внутреннего положения равновесия $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \in \mathbb{R}^n_+$ можно принять следующее выражение:

$$V(x) = 2\sum_{i\in\sigma_1} \hat{k}_i (x_i - x_{i,0} - x_{i,0} \ln \frac{x_i}{x_{i,0}}) + \frac{1}{2} \sum_{j\in\sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0})^2,$$

где σ_1 – множество номеров функций $f_i(x)$ кратных x_i;
σ_2 – множество всех остальных номеров функций $f_j(x)$;
$\hat{k}_i$ – положительные параметры.

Производная такой функции в силу системы будет представима в виде квадратичной формы:

$$\dot{V}(x) = (x - x_0)^T H(x)(x - x_0),$$

где $H(x)$ – симметричная функциональная матрица размера $n \times n$, координатными функциями которой являются константы либо рациональные функции.

◀ Обозначим корни $Q_i(x)$ как $(-a_k) \in \mathbb{R}_-$, $k = \overline{1, m}$, а корни $P_i(x)$ как $(-b_j) \in \mathbb{R}_-$, $j = \overline{1, l}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_i(x) =& (x_{k_1} + a_1) \cdot \dots \cdot (x_{k_m} + a_m), \\ P_i(x) =& (x_{j_1} + b_1) \cdot \dots \cdot (x_{j_l} + b_l). \end{aligned}$$

Здесь $j_1, \dots, j_l, k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$. Заметим, что во внутреннем ПР $x =$

x_0 справедливо, что:

$$f_i(x_0) = \frac{P_i(x_0)}{Q_i(x_0)} = 0.$$

На области $\mathbb{R}^n_+$ для $V(x)$ выполняются следующие условия:

$$V(x) > 0,\, V(x_0) = 0,\, x_0 \in D,\, x \in D \setminus \{x_0\}\,.$$

Квадратичные слагаемые неотрицательно определены на области $\mathbb{R}^n_+$, слагаемые вида

$$x_j - x_{j,0} - x_{j,0} \ln \frac{x_j}{x_{j,0}}$$

также неотрицательны в $\mathbb{R}^n_+$. Производная $V(x)$ в силу системы:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i \left(1 - \frac{x_{i,0}}{x_i}\right) x_i \tilde{f}_i(x) + \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0}) f_j(x) =$$
$$= \sum_{i \in \sigma_1} \hat{k}_i (x_i - x_{i,0}) \tilde{f}_i(x) + \sum_{j \in \sigma_2} \hat{k}_j (x_j - x_{j,0}) f_j(x).$$

Воспользовавшись методом математической индукции покажем, что ДРФ $f_i(x)$ можно представить как набор произведений разностей Δx_j и неких дробно-рациональных функций.

При $l = 0$ и $m = 1$ имеем, что:

$$f_i(x) = f_i(x) - f_i(x_0) = \frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_1,0} + a_1)}.$$

При $l = 0$ и $m = 2$:

$$f_i(x) = f_i(x) - f_i(x_0) = \frac{1}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_2} + a_2)} - \frac{1}{(x_{k_1,0} + a_1)(x_{k_2,0} + a_2)},$$

$$f_i(x) = -\frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_1,0} + a_1)(x_{k_2,0} + a_2)} - \frac{\Delta x_{k_2}}{(x_{k_1} + a_1)(x_{k_2} + a_2)(x_{k_1,0} + a_1)},$$

При $l = 0$, $m \geqslant 3$:

$$f_i(x) = \frac{1}{(x_{k_1} + a_1) \cdot \ldots \cdot (x_{k_m} + a_m)} - \frac{1}{(x_{k_1,0} + a_1) \cdot \ldots \cdot (x_{k_m,0} + a_m)}.$$

Тогда приведя дроби к общему знаменателю и совершив в числителе замену

$x_{k_j} = \Delta x_{k_j} + x_{k_j,0}$ получим:

$$f_i(x) = -\frac{\Delta x_{k_1}(x_{k_2,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)} -$$
$$- \frac{\Delta x_{k_1}\Delta x_{k_2}(x_{k_3,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x_{k_1}\cdot\ldots\cdot\Delta x_{k_{m-1}}(x_{k_m,0}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)} -$$
$$- \frac{\Delta x_{k_1}\cdot\ldots\cdot\Delta x_{k_m}}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

Вынося поочередно множители Δx_{k_j} из слагаемых, содержащих их, получим:

$$f_i(x) = -\Delta x_{k_m}\frac{(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_{m-1},0}+a_{m-1})}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)} -$$
$$- \Delta x_{k_{m-1}}\frac{(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_{m-2},0}+a_{m-2})(\Delta x_{k_m}+x_{k_m,0}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)} - \ldots$$
$$\ldots - \Delta x_{k_1}\frac{\Delta x_{k_2}\cdot\ldots\cdot\Delta x_{k_m}+\ldots+(x_{k_2,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

Заметим, что каждое слагаемое начиная со третьего является произведением дроби

$$\frac{\Delta x_{k_j}}{(x_{k_j}+a_j)(x_{k_j,0}+a_j)}$$

и одного из предыдущих шагов индукции вплоть до шага $l = 0$, $m = m-1$. Таким образом,

$$f_i(x) = -\frac{\Delta x_{k_m}}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_m,0}+a_m)} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\Delta x_{k_1}}{(x_{k_1}+a_1)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

При $l = 1$, $m \in \{2, \ldots, n\}$:

$$f_i(x) = \frac{(x_{j_1}+b_1)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)} - \frac{(x_{j_1,0}+b_1)}{(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

Совершив в числителе первого слагаемого замену $x_{j_1} = \Delta x_{j_1} + x_{j_1,0}$ и раскрыв скобки можно получить следующую сумму:

$$f_i(x) = \frac{\Delta x_{j_1}}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)} + \\ + b_1\frac{(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)-(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

Здесь второе слагаемое соответствует случаю, когда $l = 0$ и $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, из чего предположение индукции работает также и в этом случае.

Рассмотрим случай, где $l > 1$ и $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

$$f_i(x) = \frac{(x_{j_1}+b_1)\cdot\ldots\cdot(x_{j_l}+b_l)}{(x_{k_1}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m}+a_m)} - \frac{(x_{j_1,0}+b_1)\cdot\ldots\cdot(x_{j_l,0}+b_l)}{(x_{k_1,0}+a_1)\cdot\ldots\cdot(x_{k_m,0}+a_m)}.$$

Если разложить произвольное слагаемое в числителе первой дроби как $x_{j_p} = \Delta x_{j_p} + x_{j_p,0}$, $p \in \{1,\ldots,l\}$, то выражение преобразуется в сумму некой ДРФ и произведения разности Δx_{j_p} и некоторой другой ДРФ. При этом заметим, что первое слагаемое будет соответствовать предыдущему шагу индукции, т.е. также может быть приведено к виду произведения разности и ДРФ.

Таким образом, каждая функция $f_i(x)$ может быть представлена как

$$f_i(x) = \sum_{p\in\hat{\sigma}_i}(x_p - x_{p,0})\tilde{h}_p(x),$$

где $\tilde{h}_j(x)$ – некие ДРФ или линейные функции, $\hat{\sigma}_i$ – множество всех номеров x_p, $p \in \{1,\ldots,n\}$, входящих в $f_i(x)$. Тогда производная $V(x)$ в силу системы примет вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i\in\sigma_1}\hat{k}_i(x_i - x_{i,0})\sum_{p\in\hat{\sigma}_i}(x_p - x_{p,0})\tilde{h}_p(x) + \sum_{j\in\sigma_2}\hat{k}_j(x_j - x_{j,0})\sum_{q\in\hat{\sigma}_j}(x_q - x_{q,0})\tilde{h}_q(x).$$

Сложив все слагаемые с повторяющимися множителями $(x_i - x_{i,0})(x_j - x_{j,0})$ и положив равными нулю коэффициенты при множителях отсутствующих в сумме, получим квадратичную форму с симметричной функциональной матрицей H:

$$\dot{V}(x) = (x - x_0)^T H(x - x_0). \quad \blacktriangleright$$

Теорема 2. Система (1) имеет положения равновесия $P_1\left(0,\, 0,\, 0,\, \dfrac{s_1}{\mu_2}\right)$ и

$P_2\left(0,\, c_2,\, 0,\, \dfrac{s_1}{\mu_2}\right)$ при положительных значениях параметров на границе множества D.

Теорема 3. Положение равновесия $P_1\left(0, 0, 0, \dfrac{s_1}{\mu_2}, 0\right)$ является неустойчивым в области D, а положение равновесия $P_2\left(0, c_2, 0, \dfrac{s_1}{\mu_2}, 0\right)$ является асимптотически устойчивым в области D при условии $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 < \alpha_1 c_2 \mu_2$ и неустойчивым в области D при условии $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 > \alpha_1 c_2 \mu_2$. При $k_1 r_1 s_1 + e_1 k_1 \mu_2 r_1 = \alpha_1 c_2 \mu_2$ необходимо дополнительное исследование.

Теорема 4. Положение $P_2\left(0,\, c_2,\, 0,\, \dfrac{s_1}{\mu_2},\, 0\right)$ асимптотически устойчиво на инвариантной плоскости $G = \{x_1 = x_3 = x_5 = 0\} \cap D$.

◀ На плоскости G исходная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \dfrac{x_2}{c_2}\right), \\ \dot{x}_4 = s_1 - \mu_2 x_4. \end{cases} \tag{2}$$

Положение равновесия P_2 также будет являться положением равновесия для системы пониженного порядка (2) и эквивалентно точке $\tilde{P}_2\left(c_2,\, \dfrac{c_1}{\mu_2}\right)$ на плоскости G. Тогда рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(x_2,\, x_4) = 2\hat{k}_1 \left(x_2 - c_2 - c_2 \ln \frac{x_2}{c_2}\right) + \frac{1}{2}\hat{k}_2 \left(x_4 - \frac{s_1}{\mu_2}\right)^2,$$

где $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ — некоторые положительные числовые коэффициенты. Производная функции Ляпунова в силу системы таким образом:

$$\dot{V}(x_2,\, x_4) = -(x_2 - c_2)\hat{k}_1 \frac{r_2}{c_2}(x_2 - c_2) - \left(x_4 - \frac{s_1}{\mu_2}\right) \mu_2 \hat{k}_2 \left(x_4 - \frac{s_1}{\mu_2}\right).$$

Ее можно представить как квадратичную форму следующего вида:

$$\dot{V}(x_2,\, x_4) = \begin{pmatrix} x_2 - c_2 & x_4 - \dfrac{s_1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{1}{2}a_{12} \\ \dfrac{1}{2}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - c_2 \\ x_4 - \dfrac{s_1}{\mu_2} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} = -\dfrac{r_2\hat{k}_1}{c_2}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = -\mu_2\hat{k}_2$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{r_2\hat{k}_1}{c_2} & 0 \\ 0 & -\mu_2\hat{k}_2 \end{pmatrix}$$

Согласно критерию Сильвестра, если

$$a_{11} < 0, \det A > 0,$$

то квадратичная форма, соответствующая $\dot{V}(x_2, x_4)$, отрицательно определена. Легко заметить, что

$$a_{11} = -\frac{r_2\hat{k}_1}{c_2} < 0,$$
$$\det A = a_{11}a_{22} - \frac{1}{4}a_{12}^2 = \frac{r_2\mu_2\hat{k}_1\hat{k}_2}{c_2} > 0$$

при положительных значениях параметров. Таким образом,

$$V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0, x \in G \setminus \left\{\tilde{P}_2\right\},$$

из чего $\tilde{P}_2$ асимптотически устойчиво на G. ▶

Теорема 5. Положение равновесия $P_1\left(0, 0, 0, \dfrac{s_1}{\mu_2}, 0\right)$ является неустойчивым на области D, а положение равновесия $P_2\left(0, c_2, 0, \dfrac{s_1}{\mu_2}, 0\right)$ является асимптотически устойчивым в D при условии $k_1r_1s_1 + e_1k_1\mu_2r_1 < \alpha_1c_2\mu_2$ и неустойчивым при условии $k_1r_1s_1 + e_1k_1\mu_2r_1 > \alpha_1c_2\mu_2$. При $k_1r_1s_1 + e_1k_1\mu_2r_1 = \alpha_1c_2\mu_2$ необходимо дополнительное исследование.

Пример 1. Рассмотрим систему (1) при значениях параметров, данных в [1]. В [1] указан только диапазон значений параметра a_2, поэтому положим, что $a_2 = 0.25$. Тогда имеет граничные положения равновесия

$$P_1\left(0,\ 0,\ 0,\ 9134.920635,\ 0\right),\ P_2\left(0,\ 1000000,\ 0,\ 9134.920635,\ 0\right)$$

и внутреннее положение равновесия

$$P_3\left(875419.175014,\, 943091.744167,\, 151.680467,\, 9135.646993,\, 0.15168\right).$$

Проведем численное исследование полученной системы.

Численно найдем матрицу Якоби системы с заданными параметрами в точке P_1:

$$\begin{pmatrix} 0.010000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.330700 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000022 & 0 & -0.007000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6.933988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000102 & 0 & -0.102000 \end{pmatrix}.$$

Спектр данной матрицы имеет следующий вид:

$$\lambda_1 = -6.933988,\ \lambda_2 = -0.102000,$$
$$\lambda_3 = -0.007000,\ \lambda_4 = 0.010000,\ \lambda_5 = 0.3307000.$$

Спектр содержит два положительных собственных значения, т.е. положение равновесия P_1 неустойчиво в D.

Численно найдем матрицу Якоби системы с заданными параметрами в точке P_2:

$$\begin{pmatrix} 0.007097 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.718519 & -0.293721 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000022 & 0 & -0.007000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6.933988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000102 & 0 & -0.102000 \end{pmatrix}.$$

Спектр данной матрицы имеет следующий вид:

$$\lambda_1 = -6.933988,\ \lambda_2 = -0.293721,$$
$$\lambda_3 = -0.102000,\ \lambda_4 = -0.007000,\ \lambda_5 = 0.007097.$$

Собственное число λ_5 — положительное действительное число, следовательно, положение равновесия P_2 неустойчиво в D.

Матрица Якоби системы с заданными параметрами в точке P_3:

$$\begin{pmatrix} -0.009635 & -0.000071 & -0.000014 & 0.003766 & 0 \\ -0.003638 & -0.309228 & 0 & 0. & 0 \\ 0.000014 & 0 & -0.129571 & -0.001766 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6.933988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000102 & 0 & -0.102000 \end{pmatrix}.$$

Спектр данной матрицы имеет следующий вид:

$$\lambda_1 = -6.933988, \ \lambda_2 = -0.309229,$$
$$\lambda_3 = -0.129571, \ \lambda_4 = -0.102000, \ \lambda_5 = -0.009634.$$

Все собственные значения являются отрицательными действительными числами, т.е. положение равновесия P_3 асимптотически устойчиво.

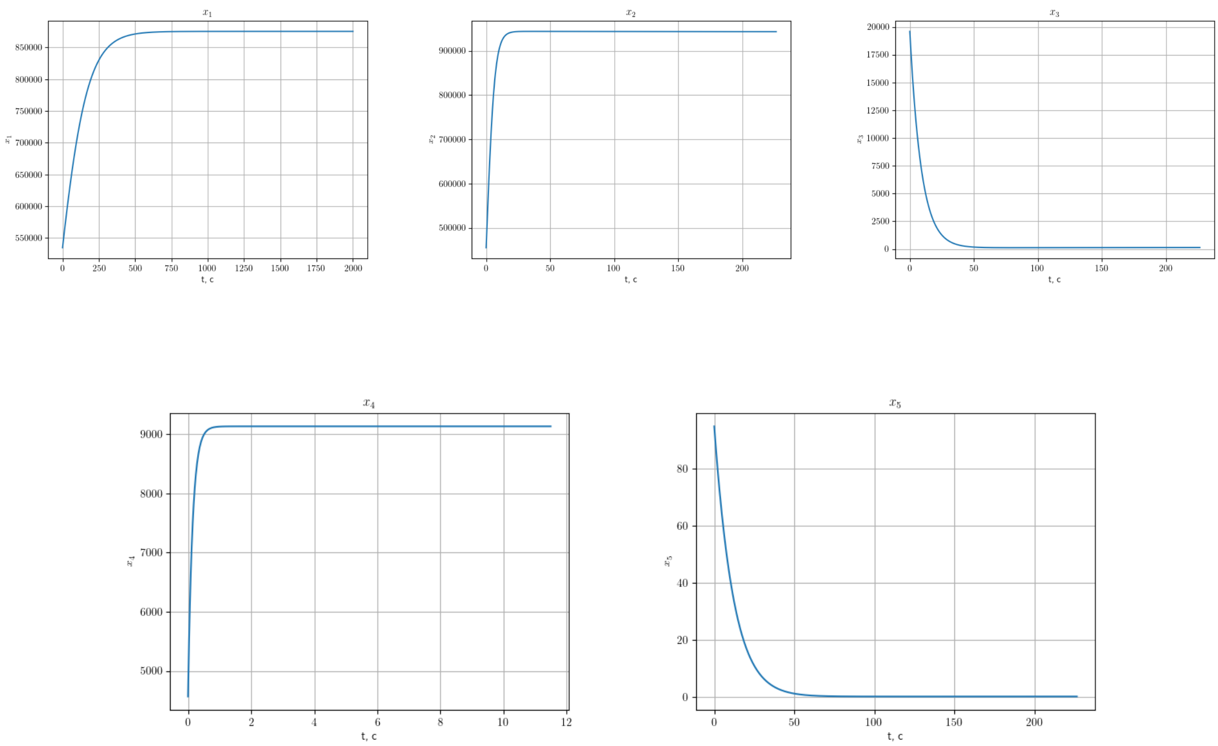

Рис. 1. Переходные процессы системы для каждой координаты при выборе начальной точки внутри множества D.

На рис. 1 представлены переходные процессы системы при выборе начальной точки внутри множества D. Легко заметить, что траектории стремятся к внутреннему положению равновесия P_3.

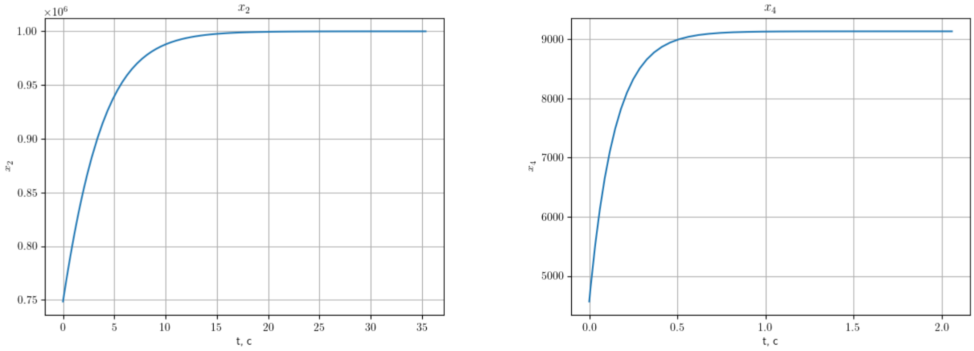

Рис. 2. Переходные процессы системы координат при выборе начальной точки на на плоскости $x_1 = x_3 = x_5 = 0$.

Проведем аналогичное моделирование для случайной траектории на плоскости $x_1 = x_3 = x_5 = 0$. Из рис. 2 можно делать вывод о том, что траектория стремится к положению равновесия P_2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Khajanchi, S., “Uniform Persistence and Global Stability for a Brain Tumor and Immune System Interaction”, *Biophysical Reviews and Letters*, vol. 12, no. 4, pp. 187–208, 2017. doi:10.1142/S1793048017500114.