А. В. Кравченко, О. В. Кудинов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

исчисления предикатов, теория моделей, теория вычислимости

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра дискретной математики и информатики

А. В. Кравченко, О. В. Кудинов

Сборник задач по математической логике

(исчисления предикатов, теория моделей, теория вычислимости)

Учебное пособие

Новосибирск
2014

УДК 510.6 (075.8)
ББК В12я73-1
К772

Рекомендовано к изданию кафедрой
дискретной математики и информатики ММФ НГУ

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Кравченко, А. В.
К772 Сборник задач по математической логике: учеб. пособие / А. В. Кравченко, О. В. Кудинов; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. — 76 с.

ISBN 978-5-4437-0314-5

Учебное пособие соответствует программе дисциплины и составлено в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по профессиональному циклу (базовая часть) по направлению подготовки «Математика». Для студентов 2-го курса ММФ НГУ.

УДК 510.6 (075.8)
ББК В12я73-1

ISBN 978-5-4437-0314-5

© Новосибирский государственный университет, 2014
© А. В. Кравченко, О. В. Кудинов, 2014

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Исчисления предикатов 7
1. Исчисление секвенциального типа 7
2. Исчисление гильбертовского типа 13
3. Нормальные формы 17

Глава 2. Теория моделей 19
1. Язык исчисления предикатов и структуры 19
2. Непротиворечивость и полнота 26
3. Аксиоматизируемые классы и ультрапроизведения 30

Глава 3. Аксиоматическая теория множеств 34
1. Система аксиом Цермело — Френкеля 34
2. Ординалы и их свойства 38

Глава 4. Вычислимые функции и множества 43
1. Примитивно вычислимые функции 43
2. Частично вычислимые функции 47
3. Вычислимые множества 49
4. Вычислимо перечислимые множества 51

Глава 5. Представимость в арифметике Пеано 54
1. Система аксиом Пеано 54
2. Представимость множеств и функций 58

Глава 6. Теорема Геделя о неполноте 63

Глава 7. Указания и наброски решений 68

Введение

Данное учебное пособие разработано для студентов механико-математического факультета НГУ, обучающихся по специальности «Математика». Сборник задач содержит задания для самостоятельной работы студентов в третьем семестре и дополняет классический сборник задач И. А. Лаврова и Л. Л. Максимовой.

Одна часть предлагаемых заданий позволяет студентам познакомиться с основными определениями и фактами, а также их взаимосвязями, другая посвящена доказательству технических деталей лекционного курса, а еще одна направлена на развитие практических навыков, необходимых для успешного освоения теоретического курса. Наконец, каждая глава содержит задачи повышенной сложности, требующие от студентов свободного владения материалом курса.

В качестве основной справочной литературы можно использовать учебное пособие С. С. Гончарова (*Лекции по математической логике* в двух частях, Новосибирск, НГУ, 2007 и 2009) и сборник задач И. А. Лаврова и Л. Л. Максимовой (*Сборник задач по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*, М.: Физматлит, 2001).

Первая глава знакомит студентов с исчислениями предикатов и предназначена для выработки навыков вывода секвенций в СИП и доказательства формул в ГИП (отдельно разбираются исчисления с равенством и без равенства). Студенты могут составить представление об основных способах доказательства секвенций через разбор логической структуры формул и применение правил вывода для соответствующих связок. Важным отличием исчислений предикатов от исчислений высказываний являются условия применимости кванторных правил вывода и аксиом, на что следует обратить особое внимание. Здесь же рассматривается вопрос о приведении формул исчисления предикатов к нормальной форме.

Вторая глава опирается на материал предыдущего семестра (истинность формул, свойства ультрапроизведений) и посвящена начальным

понятиям теории моделей. Студентам предлагаются задания на запись математических утверждений в виде формул исчисления предикатов. Этот навык позволяет применять методы математической логики для доказательства или опровержения утверждений, относящихся к различным разделам математики. Исследование непротиворечивости и полноты теорий позволяет разобраться с вопросами, возникающими при доказательстве одной из центральных теорем курса (о полноте исчислений предикатов). Знакомство с аксиоматизируемыми классами и их свойствами используется в дальнейшем при исследовании математических теорий.

Третья и пятая главы посвящены конкретным аксиоматизируемым классам: теории множеств в аксиоматике Цермело — Френкеля и теории арифметики в различных аксиоматиках. Студенты могут глубже понять смысл теоремы о полноте исчислений предикатов через использование этой теоремы для доказательства выводимости и невыводимости тех или иных утверждений из аксиом теорий. В частности, иллюстрируется важность двух вышеупомянутых теорий. Приводится современный подход к вычислимости как определимости в моделях арифметики на специальном языке.

В четвертой главе приводятся задания, позволяющие познакомиться с понятием эффективного задания функций и множеств, которые включают различные виды вычислимости для функций, а также вычислимость и вычислимую перечислимость для множеств.

Шестая глава содержит задания, позволяющие лучше понять круг вопросов, связанных с другим знаменитым математическим фактом — теоремой Геделя о неполноте эффективных расширений арифметики.

Наконец, в седьмой главе приведены указания к решению некоторых заданий. Это, как правило, задания либо более высокой сложности, либо требующие привлечение материала из других курсов.

Примерное соответствие между темами семинарских занятий в течение семестра и параграфами учебного пособия следующее.

(1–2) Секвенциальное исчисление предикатов, основные приемы доказательства секвенций (§ 1.1).

(3–4) Гильбертовское исчисление предикатов. Основные приемы построения выводов в гильбертовском исчислении предикатов (§ 1.2).

(5) Истинность доказуемых формул (задания 1.24–1.30).

(6) Полнота и непротиворечивость теорий (§ 2.2). Аксиоматизируемые классы (§ 2.3).

(7) Аксиоматика Пеано, ее модели и теоремы (§ 5.1).

(8) Теория множеств Цермело — Френкеля (§ 3.1). Ординалы и их свойства (§ 3.2).

(9–10) Примитивно (§ 4.1) и частично вычислимые функции (§ 4.2).

(11) Вычислимые (§ 4.3) и вычислимо перечислимые (§ 4.4) множества.

(12) Δ_0- и Σ-формулы. Представимость функций в стандартной модели и теории арифметики Пеано (§ 5.2).

(13–14) Геделевская нумерация термов и формул. Вычислимая перечислимость теорий. Неразрешимые проблемы и доказательство неразрешимости теорий (глава 6).

В течение семестра проводятся две контрольные работы. При их составлении также можно использовать материал пособия.

Контрольная работа № 1:

Исчисление предикатов: построить вывод секвенции, формулы в исчислении предикатов гильбертовского типа, проверить допустимость правила вывода, построить вывод формулы из набора посылок.

Можно использовать задания из главы 1.

Аксиоматические теории: установить, является ли класс систем (конечно) аксиоматизируемым, проверить теоретико-модельные свойства теории (непротиворечивость, полноту и т. п.), проверить свойства модели арифметики Пеано, построить модель арифметики Пеано с заданными свойствами, вывести предложение в теории множеств Цермело — Френкеля.

Можно использовать задания из глав 2 и 3 и § 5.1.

Контрольная работа № 2:

Вычислимые функции и множества: установить примитивную вычислимость, вычислимость или частичную вычислимость функции, проверить вычислимость или вычислимую перечислимость множества, указать алгоритм вычисления функции или решения проблемы вхождения для заданного множества.

Можно использовать задания из главы 4.

Неразрешимые проблемы: установить вычислимость, вычислимую перечислимость или невычислимость множества (геделевских номеров) формул, построить алгоритм проверки данного свойства формул или предложений по геделевскому номеру, указать представление функции Σ-формулой в теории арифметики Пеано или ее стандартной модели.

Можно использовать задания из главы 6 и § 5.2.

Глава 1

Исчисления предикатов

1. Исчисление секвенциального типа

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и φ — формулы исчисления предикатов. *Секвенциями* называются слова

$$\begin{array}{ll} \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi & (\text{«из } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ следует } \varphi\text{»}), \\ \vdash \varphi & (\text{«}\varphi \text{ истинна»}), \\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash & (\text{«}\varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ противоречивы»}) \end{array}$$

языка исчисления предикатов, дополненного символом выводимости $\vdash$.

Основным объектом исчисления СИП являются секвенции.

Аксиомы СИП — это тавтологии $\varphi \vdash \varphi$, где φ — формула исчисления предикатов. Для исчисления с равенством добавляются еще две схемы аксиом. Пусть x, y и z — переменные и $\varphi(x)$ — формула со свободными вхождениями переменной x такая, что подстановки y и z вместо x допустимые[1]. Тогда

$$\vdash x \approx x, \quad y \approx z, \varphi(y) \vdash \varphi(z)$$

также являются аксиомами.

Список *правил вывода* СИП включает 15 правил исчисления высказываний СИВ секвенциального типа и содержит 4 правила для работы с кванторами.

Правила с конъюнкцией:

$$(1)\ \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi;\ \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\varphi \wedge \psi)}; \quad (2)\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \varphi}; \quad (3)\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi}.$$

---

[1] Напомним, что подстановка терма t вместо переменной x в формулу $\varphi(x)$ допустимая, если в $\varphi(t)$ нет новых связанных вхождений переменных по сравнению с $\varphi(x)$. Допустимость подстановки равносильна тому, что ни одно свободное вхождение x в $\varphi(x)$ не находится в области действия квантора по переменной, входящей в t. Под $\varphi(t)$, как обычно, понимается результат подстановки терма t вместо каждого свободного вхождения переменной x в формулу $\varphi(x)$.

Правила с дизъюнкцией:

$$(4)\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}; \quad (5)\ \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)};$$

$$(6)\ \frac{\Gamma_1 \vdash (\varphi \vee \psi),\ \ \Gamma_2, \varphi \vdash \theta,\ \ \Gamma_3, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \theta}.$$

Правила с импликацией:

$$(7)\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}; \quad (8)\ \frac{\Gamma_1 \vdash (\varphi \to \psi),\ \ \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}.$$

Правила с отрицанием:

$$(9)\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\varphi}; \quad (10)\ \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi,\ \ \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}; \quad (11)\ \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}.$$

Структурные правила:

$$(12)\ \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \varphi}; \quad (13)\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi};$$

$$(14)\ \frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \theta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \theta}; \quad (15)\ \frac{\Gamma_1, \varphi, \varphi, \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \psi}.$$

Правила с квантором всеобщности:

$$(16)\ \frac{\Gamma \vdash \varphi(x)}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x)}; \quad (17)\ \frac{\Delta \vdash \forall x\, \varphi(x)}{\Delta \vdash \varphi(t)}.$$

Правила с квантором существования:

$$(18)\ \frac{\Delta \vdash \varphi(t)}{\Delta \vdash \exists x\, \varphi(x)}; \quad (19)\ \frac{\Gamma,\ \varphi(x) \vdash \psi}{\Gamma,\ \exists x\, \varphi(x) \vdash \psi}.$$

В двух последних группах правил Γ — конечная последовательность формул, не содержащих свободных вхождений переменной x, Δ — произвольная конечная последовательность формул, ψ — формула, не содержащая свободных вхождений переменной x, и подстановка терма t вместо переменной x в формулу $\varphi(x)$ допустимая. Если $\dfrac{S_1, \ldots, S_k}{S}$ — правило вывода, то секвенция S называется *непосредственным следствием* секвенций $S_1, \ldots, S_k$ по этому правилу.

Линейным выводом секвенции S называется конечная последовательность секвенций $S_0, \ldots, S_n$ такая, что $S = S_n$ и для любого $i \leqslant n$ секвенция S_i является либо аксиомой, либо непосредственным следствием $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$, где $i_1, \ldots, i_k < i$, по одному из правил вывода. Секвенция S называется *выводимой*, если существует линейный вывод S.

В СИП удобнее строить древовидные выводы секвенций. Определим *дерево вывода* секвенции до индукции. Любая секвенция S является деревом с корнем и вершиной S и пустым множеством переходов. Если $T_1, \ldots, T_k$ — деревья с корнями $S_1, \ldots, S_k$, множествами вершин $V_1, \ldots, V_k$ и множествами переходов $R_1, \ldots, R_k$, а секвенция S — непосредственной следствие $S_1, \ldots, S_k$ по одному из правил вывода, то $\dfrac{T_1, \ldots, T_k}{S}$ является деревом с корнем S, множеством вершин $V_1 \cup \cdots \cup V_k$ и множеством переходов

$$R_1 \cup \cdots \cup R_k \cup \left\{ \frac{S_1, \ldots, S_k}{S} \right\}.$$

Древовидным выводом секвенции S называется дерево вывода с корнем S, вершины которого — аксиомы, а все переходы осуществляются по правилам вывода (1)–(19).

Если из выводимости $S_1, \ldots, S_k$ в СИП следует выводимость S, то переход

$$\frac{S_1, \ldots, S_k}{S}$$

называется *допустимым правилом вывода.*

Так как все аксиомы СИВ (без равенства) являются тавтологиями $\varphi \vdash \varphi$, при построении дерева вывода секвенции полезно «упрощать» секвенции и формулы и искать обоснования заключений секвенций среди посылок. Для такого упрощения формул в зависимости от старшей связки могут использоваться различные основные или допустимые правила вывода (см. задания 1.4 и 1.6).

Задание 1.1. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — пропозициональные переменные секвенции S, выводимой в СИВ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — формулы исчисления предикатов и S' — секвенция, получающаяся из S заменой каждого вхождения A_i на φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажите, что секвенция S' выводимая. Сделайте вывод о связи исчислений СИВ и СИП.

Задание 1.2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что «допустимость правила равносильна тому, что оно не меняет множество выводимых секвенций».

Задание 1.3. Докажите, что следующие правила являются допустимыми:

(a) $$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \quad \Gamma_2, \varphi \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi}$$ (сечение);

(b) $$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \theta}{\Gamma_1, (\varphi \wedge \psi), \Gamma_2 \vdash \theta}$$ (объединение посылок);

(c) $$\frac{\Gamma_1, (\varphi \wedge \psi), \Gamma_2 \vdash \theta}{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \theta}$$ (разделение посылок);

(d) $$\frac{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \theta \quad \Gamma_1, \psi, \Gamma_2 \vdash \theta}{\Gamma_1, (\varphi \vee \psi), \Gamma_2 \vdash \theta}$$ (разбор случаев);

(e) $$\frac{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \neg\psi, \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}$$ (контрапозиция);

(f) $$\frac{\Gamma_1, \neg\psi, \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}{\Gamma_1, \varphi, \Gamma_2 \vdash \psi}$$ (от противного);

(g) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi; \quad \Gamma, \psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \equiv \psi)}$$ (эквивалентность).

Задание 1.4. Сформулируйте рекомендации по использованию основных и допустимых правил вывода.

(a) Каким правилом следует пользоваться, если старшая связка заключения — конъюнкция?

(b) Каким правилом следует пользоваться, если старшая связка посылки — конъюнкция?

(c) Какими правилами следует пользоваться, если старшая связка посылки — дизъюнкция?

(d) Какими правилами можно пользоваться, если старшая связка заключения — дизъюнкция? Как определить, какое из них использовать?

(e) Каким правилом следует пользоваться, если старшая связка заключения — импликация?

(f) Каким правилом следует пользоваться, если старшая связка посылки — импликация?

(g) Какими правилами можно пользоваться, если старшая связка посылки или заключения — отрицание?

(h) Какими правилами следует пользоваться, если ни одна из полученных выше рекомендаций не применима? Опишите использование правила с отрицанием (10) и допустимого правила из задания 1.3 (a).

Задание 1.5. При каких условиях на x и y выводимы секвенции $\forall x\, \varphi(x) \vdash \forall y\, \varphi(y)$ и $\exists x\, \varphi(x) \vdash \exists y\, \varphi(y)$? Постройте выводы.

Задание 1.6. Сформулируйте рекомендации по использованию правил вывода (16)–(19), аналогичные рекомендациям из задания 1.4.

Задание 1.7. Используя правила с кванторами, постройте выводы следующих секвенций, где переменная x не входит свободно в формулу θ:

(a) $\vdash (\forall x\, \theta \equiv \theta)$;
(b) $\vdash (\exists x\, \theta \equiv \theta)$;
(c) $\vdash (\forall x\, \forall y\, \varphi(x, y) \equiv \forall y\, \forall x\, \varphi(x, y))$;
(d) $\vdash (\exists x\, \exists y\, \varphi(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\, \varphi(x, y))$;
(e) $\forall x\, \forall y\, \varphi(x, y) \vdash \forall x\, \varphi(x, x))$;
(f) $\exists x\, \varphi(x, x) \vdash \exists x\, \exists y\, \varphi(x, y))$;
(g) $\exists x\, \forall y\, \varphi(x, y) \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$.

Задание 1.8. Используя правила с отрицанием и кванторами и допустимые правила, постройте выводы следующих секвенций:

(a) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \equiv \neg\forall x\, \neg\varphi(x))$;
(b) $\vdash (\forall x\, \varphi(x) \equiv \neg\exists x\, \neg\varphi(x))$;
(c) $\vdash (\neg\exists x\, \varphi(x) \equiv \forall x\, \neg\varphi(x))$;
(d) $\vdash (\neg\forall x\, \varphi(x) \equiv \exists x\, \neg\varphi(x))$.

Задание 1.9. Используя правила с конъюнкцией и кванторами и допустимые правила, постройте выводы следующих секвенций, где переменная x не входит свободно в формулу θ:

(a) $\vdash ((\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x)) \equiv \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)))$;
(b) $\exists x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \vdash (\exists x\, \varphi(x) \wedge \exists x\, \psi(x))$;
(c) $\vdash ((\theta \wedge \forall x\, \varphi(x)) \equiv \forall x\, (\theta \wedge \varphi(x)))$;
(d) $\vdash ((\theta \wedge \exists x\, \varphi(x)) \equiv \exists x\, (\theta \wedge \varphi(x)))$.

Задание 1.10. Используя правила с дизъюнкцией и кванторами и допустимые правила, постройте выводы следующих секвенций, где переменная x не входит свободно в формулу θ:

(a) $\vdash ((\exists x\, \varphi(x) \vee \exists x\, \psi(x)) \equiv \exists x\, (\varphi(x) \vee \psi(x)))$;
(b) $(\forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x)) \vdash \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(x))$;
(c) $\vdash ((\theta \vee \exists x\, \varphi(x)) \equiv \exists x\, (\theta \vee \varphi(x)))$;
(d) $\vdash ((\theta \vee \forall x\, \varphi(x)) \equiv \forall x\, (\theta \vee \varphi(x)))$.

Задание 1.11. Постройте выводы следующих секвенций, где переменная x не входит свободно в формулу θ:

(a) $\vdash ((\theta \to \forall x\, \varphi(x)) \equiv \forall x\, (\theta \to \varphi(x)))$;
(b) $\vdash ((\theta \to \exists x\, \varphi(x)) \equiv \exists x\, (\theta \to \varphi(x)))$;
(c) $\vdash ((\exists x\, \varphi(x) \to \theta) \equiv \forall x\, (\varphi(x) \to \theta))$;

(d) $\vdash ((\forall x\, \varphi(x) \to \theta) \equiv \exists x\, (\varphi(x) \to \theta))$;
(e) $\vdash (\exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \equiv (\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x)))$;
(f) $\exists x\, \varphi(x),\ \forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash \exists x\, \psi(x)$;
(g) $\forall x\, \varphi(x),\ \exists x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash \exists x\, \psi(x)$;
(h) $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x))$.

Задание 1.12. Постройте выводы следующих секвенций, где переменная y не входит в формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:
(a) $\forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \to \psi(y)) \vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))$;
(b) $(\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x)) \vdash \forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \to \psi(y))$;
(c) $(\exists x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x)) \vdash \exists x\, \exists y\, (\varphi(x) \to \psi(y))$;
(d) $\forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \to \psi(y)) \vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \exists y\, \psi(y))$;
(e) $\forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \to \psi(y)) \vdash (\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))$;
(f) $\forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \to \psi(y)) \vdash (\forall x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x))$;
(g) $\forall x\, \exists y\, (\varphi(x) \vee \psi(y)) \vdash \exists y\, \forall x\, (\varphi(x) \vee \psi(y))$;
(h) $\exists y\, \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(y)) \vdash \forall x\, \exists y\, (\varphi(x) \wedge \psi(y))$;
(i) $\forall x\, \exists y\, (\varphi(x) \to \psi(y)) \vdash \exists y\, \forall x\, (\varphi(x) \to \psi(y))$;
(j) $\vdash ((\forall x\, \varphi(x) \vee \forall x\, \psi(x)) \equiv \forall x\, \forall y\, (\varphi(x) \vee \psi(y)))$;
(k) $\vdash ((\exists x\, \varphi(x) \wedge \exists x\, \psi(x)) \equiv \exists x\, \exists y\, (\varphi(x) \wedge \psi(y)))$.

Задание 1.13. Пусть f — унарный функциональный символ, а p — унарный предикатный символ. Постройте выводы следующих секвенций в исчислении СИП с равенством:
(a) $\vdash \forall x\, x \approx x$;
(b) $\vdash \forall x\, \forall y\, (x \approx y \to y \approx x)$;
(c) $\vdash \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \approx y \wedge y \approx z) \to x \approx z)$;
(d) $\vdash \forall x\, \forall y\, (x \approx y \to f(x) \approx f(y))$;
(e) $\vdash \forall x\, \forall y\, ((x \approx y \wedge p(x)) \to p(y))$.

Задание 1.14. Пусть f и g — унарные функции, а h — n-арная функция. Сформулируйте и докажите следующие утверждения в исчислении СИП с равенством:
(a) если $f(x) = f(y)$, то $g(f(x)) = g(f(y))$;
(b) если $x = y$, то

$$h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

(c) если f и g — сюръективные функции, то композиция $f \circ g$ также является сюръективной функцией.

2. Исчисление гильбертовского типа

Основным объектом исчисления ГИП являются формулы исчисления предикатов.

Схемами аксиом исчисления ГИП являются следующие:

(1) $(\varphi \to (\psi \to \theta))$;

(2) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta)))$;

(3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$;

(4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi)$;

(5) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \wedge \theta))))$;

(6) $(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$;

(7) $(\psi \to (\varphi \vee \psi))$;

(8) $((\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta)))$;

(9) $((\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi))$;

(10) $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$;

(11) $(\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t))$;

(12) $(\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x))$.

В схемах (1)–(10) формулы φ, ψ и θ произвольные, в схемах (11)–(12) подстановка терма t вместо переменной x в формулу $\varphi(x)$ допустимая.

Аксиомы ГИП — это формулы, получающиеся подстановками формул исчисления предикатов в схемы (1)–(12) вместо φ, ψ и θ.

Для исчисления с равенством добавляются еще две схемы аксиом:

$$x \approx x \quad \text{и} \quad (y \approx z \to (\varphi(y) \to \varphi(z))),$$

где x, y и z — переменные и $\varphi(x)$ — формула со свободными вхождениями переменной x такая, что подстановки y и z вместо x допустимые.

Правила вывода для ГИП следующие:

$$\text{(I)}\ \frac{\varphi, (\varphi \to \psi)}{\psi};$$

$$\text{(II)}\ \frac{(\psi \to \varphi(x))}{(\psi \to \forall y\, \varphi(y))}; \qquad \text{(III)}\ \frac{(\varphi(x) \to \psi)}{(\exists y\, \varphi(y) \to \psi)}.$$

Для применения правил (II) и (III) дополнительно требуется выполнение следующих условий:

(а) переменная x не входит свободно в формулу ψ;

(б) переменная y не входит свободно в формулу $\varphi(x)$ при $x \neq y$;

(в) подстановка переменной y вместо переменной x в формулу $\varphi(x)$ допустимая.

Выводом формулы φ в ГИП называется конечная последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такая, что $\varphi = \varphi_n$ и для каждого $i \leqslant n$ формула φ_i либо аксиома, либо непосредственное следствие одной или двух формул вида φ_j, $j < i$, по одному из правил вывода. Формула называется *выводимой*, если существует вывод этой формулы в ГИП. Запись $\triangleright\varphi$ означает, что формула φ выводима.

Пусть Γ — множество формул (которое может быть бесконечным). *Квазивыводом из множества посылок* Γ в ГИП называется конечная последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такая, что для каждого $i \leqslant n$ формула φ_i либо аксиома, либо одна из посылок ($\varphi_i \in \Gamma$), либо непосредственное следствие одной или двух формул вида φ_j, $j < i$, по одному из правил вывода.

Для квазивывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ из множества посылок Γ определим по индукции множества посылок, использованных для вывода формулы φ_i, $i \leqslant n$. Если φ_i — аксиома, то $\Delta(\varphi_i) = \varnothing$. Если $\varphi_i \in \Gamma$, то $\Delta(\varphi_i) = \{\varphi_i\}$. Если φ_i — непосредственное следствие φ_j и φ_k по правилу (I), то $\Delta(\varphi_i) = \Delta(\varphi_j) \cup \Delta(\varphi_k)$. Если φ_i — непосредственное следствие φ_j по правилу (II) или (III), то $\Delta(\varphi_i) = \Delta(\varphi_j)$.

Выводом формулы φ в ГИП *из набора посылок* Γ называется квазивывод $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такой, что $\varphi = \varphi_n$ и дополнительно выполняется условие

(г) для любого $i \leqslant n$, если φ_i — непосредственное следствие φ_j по правилу (II) или (III), то переменная x не входит свободно в формулы из $\Delta(\varphi_j)$.

Формула называется *выводимой из* Γ, если существует вывод этой формулы в ГИП из набора посылок Γ. Запись $\Gamma \triangleright \varphi$ означает, что формула φ выводима из Γ.

Задание 1.15. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — пропозициональные переменные формулы A, выводимой в ГИВ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — формулы исчисления предикатов и A' — формула, получающаяся из A заменой каждого вхождения A_i на φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажите, что формула A' выводимая. Сделайте вывод о связи исчислений ГИВ и ГИП.

Задание 1.16. Как изменятся условия применения правил вывода, если в качестве кванторных правил использовать следующие:

$$\frac{(\psi \to \varphi(x))}{(\psi \to \forall x\, \varphi(x))}; \quad \frac{(\varphi(x) \to \psi)}{(\exists x\, \varphi(x) \to \psi)}?$$

Что изменится, если считать все посылки предложениями?

Задание 1.17. Покажите, что исчисление ГИП эквивалентно исчислению, в котором девятая схема аксиом сформулирована в виде

$$((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi).$$

Задание 1.18. Пусть x и y — переменные, p — унарный предикатный символ, φ — формула с двумя свободными переменными и ψ — формула с одной свободной переменной. Определите, какие из следующих последовательностей являются выводами:

(a) $(\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists y\, \varphi(y, y))$;

(b) $(\forall x\, p(x) \to p(y))$, $(\forall x\, p(x) \to \forall z\, p(z))$;

(c) $((\psi(x) \to \exists x\, \psi(x)) \to (\psi(y) \to (\psi(x) \to \exists x\, \psi(x))))$, $(\psi(x) \to \exists x\, \psi(x))$, $(\psi(y) \to (\psi(x) \to \exists x\, \psi(x)))$;

(d) $(p(x) \to p(x))$, $(p(x) \to \forall x\, p(x))$, $(\exists x\, p(x) \to \forall x\, p(x))$;

(e) $(p(x) \to p(x))$, $(\exists x\, p(x) \to p(x))$, $(\exists x\, p(x) \to p(y))$;

(f) $(p(x) \to p(y))$, $(\varphi(x, z) \to \varphi(y, z))$.

Задание 1.19. Укажите условия, при выполнении которых следующие последовательности формул являются выводами:

(a) $(\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(y))$, $(\forall x\, \varphi(x) \to \forall y\, \varphi(y))$;

(b) $(\varphi(y) \to \exists x\, \varphi(x))$, $(\exists y\, \varphi(y) \to \exists x\, \varphi(x))$.

Задание 1.20. Постройте выводы следующих формул:

(a) $(\forall x\, \forall y\, \varphi(x, y) \to \forall y\, \forall x\, \varphi(x, y))$;

(b) $(\exists x\, \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists y\, \exists x\, \varphi(x, y))$;

(c) $(\exists x\, \forall y\, \varphi(x, y) \to \forall y\, \exists x\, \varphi(x, y))$;

(d) $(\exists x\, \varphi(x) \to \neg\forall x\, \neg\varphi(x))$;

(e) $(\forall x\, \varphi(x) \to \neg\exists x\, \neg\varphi(x))$.

Задание 1.21. Пусть $\Gamma = \{(\psi \to \varphi(x))\}$, где переменная x не входит свободно в формулу ψ. Установите, при каких дополнительных условиях следующие последовательности формул являются выводами из Γ:

(a) $(\psi \to \varphi(x))$, $(\psi \to \forall y\, \varphi(y))$;

(b) $((\psi \to \varphi(x)) \to (\theta(y) \to (\psi \to \varphi(x))))$, $(\psi \to \varphi(x))$, $(\theta(y) \to (\psi \to \varphi(x)))$, $(\exists y\, \theta(y) \to (\psi \to \varphi(x)))$;

(c) $((\psi \to \varphi(x)) \to (\theta(y) \to (\psi \to \varphi(x))))$, $(\psi \to \varphi(x))$, $(\theta(y) \to (\psi \to \varphi(x)))$, $\theta(y)$, $(\psi \to \varphi(x))$.

Задание 1.22. Постройте выводы формул из посылок, где p и r — унарные предикатные символы:

(a) $p(y)$ из $\Gamma = \{\forall x\, p(x)\}$;

(b) $\forall y\, p(y)$ из $\Gamma = \{\forall x\, p(x)\}$;

(c) $\forall x\, r(x)$ из $\Gamma = \{p(x), (p(x) \to \forall y\, r(y))\}$.

Задание 1.23. Постройте выводы следующих формул из посылок:
(a) $(\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))$ из $\Gamma = \{(\varphi(x) \to \psi(x))\}$;
(b) $(\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x))$ из $\Gamma = \{(\varphi(x) \to \psi(x))\}$;
(c) $(\psi \to \forall y\, \varphi(y))$ из $\Gamma = \{\forall x\, (\psi \to \varphi(x))\}$;
(d) $(\exists x\, \varphi(x) \to \exists x\, \psi(x))$ из $\Gamma = \{\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x))\}$;
(e) $(\forall y\, \varphi(y) \to \forall z\, \psi(z))$ из $\Gamma = \{\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x))\}$.

Задание 1.24. Покажите, что все аксиомы ГИП являются тождественно истинными формулами.

Задание 1.25. Пусть формулы φ и $(\varphi \to \psi)$ тождественно истинные. Докажите, что формула ψ тождественно истинная.

Задание 1.26. Пусть формула $(\psi \to \varphi(x))$ тождественно истинная, переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y, отличная от x, не входит свободно в $\varphi(x)$ и подстановка y вместо x в $\varphi(x)$ допустимая. Докажите, что формула $(\psi \to \forall y\, \varphi(y))$ тождественно истинная. Укажите, где именно использованы предположения о переменных.

Задание 1.27. Пусть формула $(\varphi(x) \to \psi)$ тождественно истинная, переменная x не входит свободно в формулу ψ, а переменная y, отличная от x, не входит свободно в $\varphi(x)$ и подстановка y вместо x в $\varphi(x)$ допустимая. Докажите, что формула $(\exists y\, \varphi(y) \to \psi)$ тождественно истинная. Укажите, где именно использованы предположения о переменных.

Задание 1.28. Докажите, что все выводимые в ГИП формулы тождественно истинные.

Задание 1.29. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что «применение правил вывода ГИП сохраняет истинность формул». Сделайте вывод о том, что для любого множества формул $\Gamma \cup \{\varphi\}$, если $\Gamma \rhd \varphi$, то φ — семантическое следствие множества посылок Γ.

Задание 1.30. Проверьте, что условия (а)–(г) в определении вывода являются существенными, т. е. при нарушении любого из них вывод, сделанный в задании 1.29, перестает быть верным.

Задание 1.31. Верно ли, что $\Gamma \rhd \varphi$, если
(a) $\Gamma = \{\forall x\, (p(x) \to q(x))\}$ и $\varphi = q(x)$;
(b) $\Gamma = \{p(x), (p(x) \to q(x))\}$ и $\varphi = \forall x\, q(x)$.

Задание 1.32. Проведите доказательство теоремы о дедукции для случая, когда среди посылок Γ есть формулы со свободными вхождениями переменных.

Задание 1.33. Пусть f — унарный функциональный символ, а p — унарный предикатный символ. Докажите следующие формулы в исчислении ГИП с равенством:

(a) $\forall x\, x \approx x$;

(b) $\forall x \forall y\, (x \approx y \to y \approx x)$;

(c) $\forall x \forall y \forall z\, ((x \approx y \wedge y \approx z) \to x \approx z)$;

(d) $\forall x \forall y\, (x \approx y \to f(x) \approx f(y))$;

(e) $\forall x \forall y\, ((x \approx y \wedge p(x)) \to p(y))$.

Задание 1.34. Пусть f и g — унарные функции, а h — n-арная функция. Сформулируйте и докажите следующие утверждения в исчислении ГИП с равенством:

(a) если $f(x) = f(y)$, то $g(f(x)) = g(f(y))$;

(b) если $x = y$, то

$$h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

(c) если f и g — сюръективные функции, то композиция $f \circ g$ также является сюръективной функцией.

3. Нормальные формы

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — все пропозициональные переменные формулы A, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — атомарные формулы[2] и A' — формула, получающаяся из A заменой каждого вхождения A_i на φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если A находится в дизъюнктивной нормальной форме, то будем говорить, что A' также находится в дизъюнктивной нормальной форме.

Формула φ находится в *пренексной нормальной форме*, если φ имеет вид $Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m\, \psi$, где Q_i — квантор $\forall$ или $\exists$, x_i — переменная для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и формула ψ находится в дизъюнктивной нормальной форме.

Задание 1.35. Докажите, что для любой формулы существует эквивалентная[3] ей формула в пренексной нормальной форме. Запишите алгоритм приведения к пренексной нормальной форме.

---

[2] Напомним, что атомарными называются формулы вида $t_1(\overline{x}) \approx t_2(\overline{x})$ и $p(t_1(\overline{x}), \ldots, t_n(\overline{x}))$, где t_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — термы данной сигнатуры с переменными из кортежа $\overline{x}$ и p — n-арный предикатный символ.

[3] Эквивалентность понимается в смысле выводимости формул друг из друга в исчислении предикатов.

Задание 1.36. Приведите следующие формулы к пренексной нормальной форме:

(a) $\neg\forall x\,\exists y\,\exists z\,\forall u\,R(x,y,z,u)$;

(b) $(\forall x\,R(x,y) \to (\exists y\,R(y,y) \vee \exists z\,R(z,x))$;

(c) $(\exists x\,R(x,y) \to (\forall y\,R(y,y) \vee \forall z\,R(z,x))$;

(d) $(\forall x\,R(x) \to \forall y\,(R(y) \to \forall z\,R(z)))$.

Задание 1.37. Приведите следующие формулы к пренексной нормальной форме:

(a) $(\forall x\,\varphi(x) \vee (\exists x\,(\varphi(x) \to \forall y\,\psi(y))))$;

(b) $(\exists x\,(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \forall x\,(\psi(x) \to \exists y\,\varphi(y)))$;

(c) $((\neg\exists x\,\varphi(x) \vee \forall x\,\psi(x)) \wedge (\theta \to \forall x\,\eta(x)))$;

(d) $((\neg\exists x\,\varphi(x) \vee \forall x\,\psi(x)) \wedge (\theta \to \exists x\,\eta(x)))$;

(e) $(\forall x\,\varphi(x) \equiv \exists x\,\psi(x))$;

(f) $\forall x\,\exists y\,((\varphi(x) \to \psi(y,z)) \to \exists x\,\forall z\,(\psi(x,z) \wedge \varphi(y)))$;

(g) $(\forall x\,\varphi(x) \to \forall y\,(\forall z\,\psi(x,z) \to \forall u\,\varphi(u)))$.

Определите наименьшее возможное число кванторов в каждом случае.

Глава 2

Теория моделей

1. Язык исчисления предикатов и структуры

Сигнатура σ (реже используется термин *язык*) является объединением множества *предикатных* символов $\sigma_P = \{P_i^{n(i)} : i \in I\}$ и множества *функциональных* символов $\sigma_F = \{F_i^{m(i)} : i \in J\}$, где n и m — функции арности с положительными целыми и натуральными значениями. Обычно, если не оговорено противное, считается, что σ_P содержит специальный бинарный символ равенства $\approx$, а функциональные символы нулевой арности (с $m(i) = 0$) называются *константными.*

Под *интерпретацией* $\mathbf{I}$ сигнатуры на непустом множестве M понимается отображение, ставящее каждому m-арному функциональному символу m-арную операцию на M, а каждому n-арному предикатному символу — n-арное отношение на M. Формально структурой (сигнатуры σ) с (непустым) носителем M называется соответствующая тройка $(M, \sigma, \mathbf{I})$, но в случае понятных или привычных интерпретаций запись сокращается до $\mathcal{M} = (M, \sigma)$. Если на одном множестве заданы две структуры сигнатур σ_1 и σ_2, где $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, то структура $\mathcal{M}_2 = (M; \sigma_2)$ называется *обогащением* структуры $\mathcal{M}_1 = (M; \sigma_1)$ (а $\mathcal{M}_1$ — *обеднением* $\mathcal{M}_2$) при условии, что символы из σ_1 интерпретированы одинаково. Если на множествах $M_1 \subseteq M_2$ заданы структуры $\mathcal{M}_1 = (M_1, \sigma)$ и $\mathcal{M}_2 = (M, \sigma)$ одной сигнатуры и все сигнатурные символы интерпретируются в них одинаково на элементах из M_1, то первую называем *подструктурой* второй (и пишем $\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_2$), а вторую — *расширением* первой.

Для терма t пусть $\mathrm{FV}(t)$ обозначает множество переменных, входящих в t. Для формулы φ пусть $\mathrm{FV}(\varphi)$ обозначает множество свободных переменных φ. Для структуры $\mathcal{M}$ функции вида $\gamma : \mathrm{FV}(t) \to M$ и $\gamma : \mathrm{FV}(\varphi) \to M$ называются *означиваниями* (для соответствующих термов и формул). При этом означивание может быть определено и для

переменных, не входящих в терм или формулу, но при нахождении значений термов такие «лишние» значения переменных не учитываются.

Значение $t_\gamma^{\mathcal{M}}$ *терма* t в системе $\mathcal{M}$ при означивании γ определяется естественным образом по индукции по длине терма. В случае, когда переменных мало, удобно переобозначить переменные и считать, что $\mathrm{FV}(t) = \{x_1, \ldots x_n\}$ и $\gamma(x_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а значение терма t удобнее обозначать через $t(a_1, \ldots, a_n)$. Аналогично поступают и с формулами при вычислении их истинностных значений — в скобках вместо свободных переменных просто указываются их значения при означивании. Сам же результат (истина либо ложь) неформально определяется при прочтении в формуле квантора $\forall z$ как «для всех $z \in M$», а квантора $\exists z$ — как «существует $z \in M$ такой, что ...»; атомная формула $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ читается как «кортеж значений термов $t_1, \ldots, t_n$ лежит в отношении $\mathbf{I}(P^n)$» (сопоставленном символу P^n при интерпретации). Формальное определение истинности формулы также дается по индукции по длине формулы. Кратко истинность формулы $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ в структуре $\mathcal{M}$ при значениях $\gamma(x_i) = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, записывают в виде $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Формула φ называется *тождественно истинной*, если она истинна при всех означиваниях своих переменных во всех структурах, и *выполнимой*, если она истинна в некоторой структуре при некотором означивании. Аналогично определяется выполнимость множества формул Γ: все формулы из Γ должны быть истинными при одном и том же означивании (в этом случае говорят также, что Γ *имеет модель*). Говорят, что формула φ *семантически следует* из множества формул Γ, и пишут $\Gamma \models \varphi$, если в любой структуре, при любом одновременном означивании всех переменных, входящих свободно в формулы из $\Gamma \cup \{\varphi\}$, из истинности всех формул из Γ следует истинность φ.

Пусть P — унарный предикатный символ, не входящий в σ. Каждой формуле φ сигнатуры σ сопоставим формулу $\rho_P(\varphi)$ (*релятивизацию* φ относительно P) по правилам:

- $\rho_P(A) = A$ для атомарной формулы A;
- $\rho_P(A_1 \tau A_2) = \rho_P(A_1) \tau \rho_P(A_2)$ для каждой $\tau \in \{\vee, \wedge, \to\}$;
- $\rho_P(\neg A) = \neg \rho_P(A)$;
- $\rho_P(\forall x\, A) = \forall x\, (P(x) \to \rho_P(A))$;
- $\rho_P(\exists x\, A) = \exists x\, (P(x) \wedge \rho_P(A))$.

Пусть $\mathcal{M}_1 = (M_1, \sigma, \mathbf{I}_1)$ и $\mathcal{M}_2 = (M_2, \sigma, \mathbf{I}_2)$ — структуры и $h : M_1 \to M_2$ — отображение. Говорят, что h — *гомоморфизм* из $\mathcal{M}_1$ в $\mathcal{M}_2$, если

(1) $h(\mathbf{I}_1(c)) = \mathbf{I}_2(c)$ для каждого константного символа $c \in \sigma$;

(2) $h(\mathbf{I}_1(f)(a_1,\ldots,a_n)) = \mathbf{I}_2(f^n)(h(a_1),\ldots,h(a_n))$ для каждого n-арного функционального символа $f \in \sigma$ и любых $a_1,\ldots,a_n \in M_1$;

(3) для каждого n-арного предикатного символа $P \in \sigma$ и любых $a_1,\ldots,a_n \in M_1$ из $\mathcal{M}_1 \models P(a_1,\ldots,a_n)$ следует $\mathcal{M}_2 \models P(a_1,\ldots,a_n)$.

Гомоморфизм h называется *эпиморфизмом*, если h — сюръективное отображение (т. е. «на M_2»), и *сильным гомоморфизмом*, если из условия $\mathcal{M}_2 \models P(b_1,\ldots,b_n)$, где $b_1,\ldots b_n \in h(M_1)$, следует, что существуют $a_1,\ldots,a_n \in M_1$ такие, что $h(a_i) = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\mathcal{M}_1 \models P(a_1,\ldots,a_n)$.

Гомоморфизм h называется *вложением*, если в пункте (3) определения выполняется и обратная импликация, т. е.

(4) $\mathcal{M}_1 \models P(a_1,\ldots,a_n) \iff \mathcal{M}_2 \models P(a_1,\ldots,a_n)$ для каждого n-арного предикатного символа $P \in \sigma$ и любых $a_1,\ldots,a_n \in M_1$.

Сюръективное вложение называется *изоморфизмом*.

Обычно в определении вложения (изоморфизма) формулируется дополнительное требование, что h — инъективное (биективное) отображение, но это не обязательно, так как при наличии символа равенства $\approx$ в сигнатуре σ инъективность следует из условия (4).

(Сильной) *конгруэнцией* на структуре $\mathcal{M} = (M, \sigma, \mathbf{I})$ называется отношение эквивалентности $\sim$ на носителе M, обладающее следующим свойством:

для любого n-арного функционального символа $f \in \sigma$ и любых элементов $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ таких, что $a_i \sim b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедливо $\mathbf{I}(f)(a_1,\ldots,a_n) \sim \mathbf{I}(f)(b_1,\ldots,b_n)$.

Для любой конгруэнции $\sim$ на $\mathcal{M}$ на фактор-множестве $M/\sim$ канонически определяется следующая интерпретация $\mathbf{I}_\sim$ сигнатуры σ.

Для любого n-арного функционального символа $f \in \sigma$ положим

$$\mathbf{I}_\sim(f)([a_1]_\sim,\ldots,[a_n]_\sim) = [\mathbf{I}(f)(a_1,\ldots,a_n)]_\sim.$$

Для любого n-арного предикатного символа $P \in \sigma$ положим

$$([a_1]_\sim,\ldots,[a_m]_\sim) \in \mathbf{I}_\sim(P) \iff (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbf{I}(P)$$

для некоторых $b_1 \in [a_1]_\sim,\ldots,b_n \in [a_n]_\sim$.

Полученную структуру называют *фактор-структурой* (структуры $\mathcal{M}$ по конгруэнции $\sim$) и обозначают $\mathcal{M}/\sim$.

Для произвольной структуры $\mathcal{M} = (M, \sigma, \mathbf{I})$ обогатим сигнатуру до сигнатуры σ_M, добавив в него по новому константному символу c_a для каждого элемента $a \in M$. Получим естественное обогащение до структуры $\mathcal{M}^* = (M, \sigma, \mathbf{I}^*)$ сигнатуры σ_M по правилу $\mathbf{I}^*(c_a) = a$, $a \in M$. Напомним, что *атомными* называются атомарные формулы и их отрицания. (*Атомная*) *диаграмма* структуры $\mathcal{M}$ состоит из всех истинных в

$\mathcal{M}^*$ атомных предложений сигнатуры σ_M и обозначается $D(\mathcal{M})$. *Полная диаграмма* структуры $\mathcal{M}$ состоит из всех истинных в $\mathcal{M}^*$ предложений сигнатуры σ_M и обозначается $FD(\mathcal{M})$.

Задание 2.1. Пусть $\mathcal{M} = (M, \cap^2, \cup^2)$, где $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ — множество подмножеств натуральных чисел, а символы $\cap$ и $\cup$ интерпретируются стандартным образом. Покажите определимость следующих отношений на этой структуре:

(a) $\{(x, y) \in M^2 : x \subseteq y\}$;
(b) $\{x \in M : x = \varnothing\}$;
(c) $\{(x, y) \in M^2 : x = y\}$;
(d) $\{x \in M : x = \mathbb{N}\}$;
(e) $\{(x, y) \in M^2 : x = \mathbb{N} \setminus y\}$;
(f) $\{x \in M : x$ одноэлементное$\}$.

Задание 2.2. Постройте пример неопределимого унарного отношения на структуре $\mathcal{M}$ из задания 2.1.

Задание 2.3. Пусть $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ — модель арифметики натуральных чисел с обычными бинарными операциями сложения и умножения. Запишите предложения, выражающие в этой структуре следующие свойства:

(a) коммутативность операций;

(b) ассоциативность операций;

(c) дистрибутивность умножения относительно сложения;

(d) существование наибольшего общего делителя для любой пары чисел, отличной от пары $(0, 0)$;

(e) существование наименьшего общего кратного для любой пары чисел;

(f) представимость каждого числа суммой двух квадратов;

(g) представимость каждого число суммой четырех квадратов;

(h) бесконечность множества простых чисел;

(i) существование простого числа $n > 1$ и $2n$ для любого числа n (теорема Чебышева).

Задание 2.4. Определите, какие из предложений задания 2.3 истинные, а какие — ложные. Запишите в виде предложения данной сигнатуры какую-нибудь теоретико-числовую гипотезу, для которой до сих не установлено, справедлива она или нет (например, гипотезу Гольдбаха о представимости четных чисел, больших 2, в виде суммы двух простых).

Задание 2.5. Пусть $(M, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Запишите формулами следующие свойства элементов и структуры в целом:

(a) элемент x наименьший;

(b) элемент x минимальный;

(c) M плотно упорядочено, т. е. между любыми двумя его сравнимыми элементами найдется отличный от них третий;

(d) элементы x и y несравнимые;

(e) в M нет ни минимальных, ни максимальных элементов;

(f) $(M, \leqslant)$ — решетка;

(g) $(M, \leqslant)$ — дистрибутивная решетка;

(h) $(M, \leqslant)$ — булева алгебра;

(i) $(M, \leqslant)$ — безатомная булева алгебра.

Задание 2.6. Запишите в сигнатуре, состоящей из одного бинарного функционального символа $\cdot$, аксиомы

(a) группы;

(b) абелевой группы;

(c) делимой группы;

(d) группы без кручения.

Задание 2.7. Запишите в сигнатуре, состоящей из константного символа 0 и бинарных функциональных символов $+$ и $\cdot$, аксиомы

(a) кольца;

(b) ассоциативного коммутативного кольца;

(c) кольца без делителей нуля;

(d) поля;

(e) поля нулевой характеристики;

(f) алгебраически замкнутого поля;

(g) вещественно замкнутого поля.

Задание 2.8. Пусть $\mathcal{M} = (M, f)$ — структура, сигнатура которой состоит из одного n-арного функционального символа. Введем новый $(n+1)$-арный предикатный символ P и определим его интерпретацию на M как график функции f.

Сравните $\mathcal{M}$ с полученной структурой $\mathcal{M}^* = (M, P)$. Покажите, что каждая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры структуры $\mathcal{M}$ может быть «переписана» в формулу $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры структуры $\mathcal{M}^*$ так, что $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$ и для всех $a_1, \ldots, a_m \in M$ выполняется

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m) \iff \mathcal{M}^* \models \psi(a_1, \ldots, a_m).$$

Обобщите и сформулируйте подобный переход к предикатной сигнатуре в случае произвольной (конечной) сигнатуры. Сделайте вывод о принципиальной возможности рассмотрения только чисто предикатных сигнатур (без функциональных и константных символов).

Задание 2.9. Для произвольной структуры $\mathcal{M}$ пусть $\mathcal{M}^*$ обозначает структуру предикатной сигнатуры, определенную в задании 2.8. Покажите, что отображение f, являющееся гомоморфизмом из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, является гомоморфизмом из $\mathcal{M}^*$ в $\mathcal{N}^*$.

Задание 2.10. Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ — подструктура структуры $\mathcal{N} = (N, \sigma)$. Обогатим структуру $\mathcal{N}$ до структуры $\mathcal{N}_1$ сигнатуры $\sigma_P = \sigma \cup (P)$, где P — новый унарный предикатный символ с интерпретацией

$$\mathcal{N}_1 \models P(a) \Leftrightarrow a \in M.$$

Докажите, что для каждой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ и элементов $a_1, \ldots a_n \in M$ выполняется

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \iff \mathcal{N}_1 \models \rho_P(\phi)(a_1, \ldots, a_n).$$

Задание 2.11. Докажите, что

(a) формула φ невыполнима тогда и только тогда, когда формула $\neg\varphi$ тождественно истинна;

(b) если $\forall$-предложение истинно в структуре, то оно истинно и в любой ее подструктуре;

(c) если $\exists$-формула истинна в структуре на наборе ее элементов, то она истинна и в любом ее расширении (на том же наборе элементов).

Задание 2.12. Приведите пример $\exists$-предложения, истинного на некоторой бесконечной структуре, но ложного на всех ее собственных подструктурах.

Задание 2.13. Докажите, что бескванторная формула тождественно истинна тогда и только тогда, когда она получается из некоторой тождественно истинной формулы ИВ подстановкой формул исчисления предикатов вместо пропозициональных переменных.

Задание 2.14. Проверьте тождественную истинность всех аксиом ГИП. Подробно проведите доказательство для кванторных аксиом. Убедитесь, что условия на допустимость подстановки терма в формулу для этого существенны (приведите контрпример к какой-нибудь аксиоме в случае недопустимой подстановки терма).

Задание 2.15. Покажите, что следующие предложения истинны в любой конечной структуре (предложенного языка), но не тождественно истинные:

(a) $\forall x \forall y \forall z\, (P(x,x) \wedge ((P(x,y) \wedge (P(y,x)) \to x \approx y) \wedge (P(x,y) \to (P(y,z) \to P(x,z))) \to \exists x \forall y\, (P(y,x) \to y \approx x)$;

(b) $\forall x \forall y \forall z\, (x \cup x \approx x \wedge x \cup y = y \cup x \wedge ((x \cup y) \cup z) \approx (x \cup (y \cup z))) \to \exists x \forall y\, (x \cup y \approx x)$.

Задание 2.16. Докажите, что для конечной структуры $\mathcal{M}$ конечного языка для каждого предложения φ можно построить бескванторное предложение φ^* языка диаграммы $\mathcal{M}$, эквивалентное данному относительно $\mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{M} \models (\varphi \equiv \varphi^*)$. Сделайте вывод о наличии алгоритма проверки истинности предложений на конечной модели.

Задание 2.17. Докажите следующие утверждения:

(a) любой изоморфизм является сильным эпиморфизмом;

(b) биекция φ между носителями двух структур одного языка является изоморфизмом тогда и только тогда, когда отображения φ и φ^{-1} являются гомоморфизмами;

(c) если сигнатура не содержит отличных от $\approx$ предикатных символов, то каждый гомоморфизм является сильным;

(d) существует биективный эпиморфизм одного частичного упорядоченного множества на другое, не являющийся сильным эпиморфизмом;

(e) любой эпиморфизм конечной структуры на себя является изоморфизмом.

Задание 2.18. Покажите, что каноническое отображение $\varphi : M \to M/\sim$ структуры на фактор-структуру по конгруэнции $\sim$ является сильным эпиморфизмом.

Задание 2.19. Для каждого гомоморфизма $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ определим бинарное отношение на M по правилу

$$\sim_\varphi = \{(x,y) \in M^2 : \varphi(x) = \varphi(y)\}.$$

Докажите, что $\sim_\varphi$ — конгруэнция.

Задание 2.20. Докажите, что $\mathcal{N} \simeq M/\sim_\varphi$, если φ — сильный эпиморфизм (т. е. структура $\mathcal{N}$ полностью определяется отображением φ).

Задание 2.21. Используя теоремы о гомоморфизмах групп, опишите конгруэнции произвольной группы G как отношения вида $\{(x,y) \in G^2 : xH = yH\}$, где H — нормальная подгруппа G.

Задание 2.22. Покажите, что всякая конгруэнция на булевой алгебре $\mathcal{B} = (B, \cup^2, \cap^2, -^1, 0, 1)$ представима в виде

$$\sim_I = \{(x, y) : x \cup a = y \cup b \text{ для некоторых } a, b \in I\},$$

где I — идеал булевой алгебры $\mathcal{B}$.

Задание 2.23. Опишите конгруэнции колец, используя понятие идеала кольца.

Задание 2.24. *Позитивной* называется формула, которая не содержит импликаций и отрицаний. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что «истинность позитивных формул сохраняется при эпиморфизмах».

Убедитесь на примерах частично упорядоченных множеств, что для непозитивных формул истинность может не сохраняться даже при сильных эпиморфизмах.

Задание 2.25. Пусть $D(\mathcal{M})$ — диаграмма структуры $\mathcal{M} = (M, \sigma)$, а $\mathcal{M}_1 = (M_1, \sigma_M)$ — произвольная ее модель. Докажите, что $\mathcal{M}$ вложима в обеднение $\mathcal{M}_1$ до сигнатуры σ.

Задание 2.26. Пользуясь заданием 2.25 и обогащая при необходимости сигнатуру константными символами, запишите системы предложений, выражающие наличие в частично упорядоченном множестве $(M, \leqslant)$

(a) возрастающей цепи элементов (упорядоченной по типу натуральных чисел);

(b) убывающей цепи элементов (упорядоченной по типу отрицательных целых чисел);

(c) бесконечной антицепи (состоящей из попарно несравнимых элементов).

2. Непротиворечивость и полнота

Теорией (данной сигнатуры) называется множество предложений, замкнутое относительно выводимости (в ГИП или СИП).

Множество формул Γ *противоречивое*, если для каких-то формул $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$ секвенция $A_1, \ldots, A_n \vdash$ доказуема в СИП (запись $\Gamma \vdash$ неточна, но популярна).

Непротиворечивая теория T *полна*, если для каждого предложения φ той же сигнатуры либо $\varphi \in T$, либо $\neg\varphi \in T$. (*Элементарной*) *теорией* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ структуры $\mathcal{M}$ называется множество всех предложений, истинных в $\mathcal{M}$.

Структуры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ *элементарно эквивалентны* (обозначение: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), если $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Подструктура $\mathcal{M}$ структуры $\mathcal{N}$ называется *элементарной* (обозначение: $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$), если при соответствующем расширении сохраняется истинность всех формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ данного языка, т. е. условия $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ равносильны для всех формул φ и элементов $a_1, \ldots, a_n \in M$. Под *элементарным вложением* в $\mathcal{M}$ понимается изоморфное вложение, образ которого — элементарная подструктура в $\mathcal{M}$.

Типом от одной переменной x непротиворечивой теории T называется любое множество формул $p(x)$, свободные переменные которых содержатся в $\{x\}$, замкнутое относительно выводимости (в указанном классе формул) и такое, что множество $T \cup p(x)$ непротиворечиво. Типы (особенно полные) служат для выражения элементарных свойств элементов структур. Так, говорят, что тип $p(x)$ *реализуется* на элементе a структуры $\mathcal{M}$, если для всех $\varphi \in p$ выполняется $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ (обозначение: $\mathcal{M} \models p(a)$).

В некоторых заданиях этого раздела без упоминания используются такие теоремы, как *критерий Робинсона*, *теорема Левенгейма — Скулема*, *теоремы Мальцева о компактности* и *об элементарном расширении* и др.

Задание 2.27. Покажите, что множество Γ противоречиво тогда и только тогда, когда существует формула φ такая, что $\Gamma \rhd \varphi$ и $\Gamma \rhd \neg\varphi$.

Задание 2.28. Покажите, что из противоречивого множества выводима любая формула данной сигнатуры.

Задание 2.29. Пусть $\{\Gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$ — семейство непротиворечивых множеств, причем $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ при $i \leqslant j$. Докажите, что $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ — непротиворечивое множество.

Задание 2.30. Докажите, что непротиворечивая теория T полна тогда и только тогда, когда все ее модели элементарно эквивалентны.

Задание 2.31. Являются ли полными следующие теории:

(a) теория частичного порядка (рефлексивного, антисимметричного и транзитивного бинарного отношения);

(b) теория линейного порядка;

(c) теория линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов;

(d) теория плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элементов?

Задание 2.32. Пусть T — теория, не имеющая конечных моделей и β-категоричная для бесконечного кардинала β (т. е. все ее модели мощности β изоморфны). Докажите, что T — полная теория (теорема Воота о категоричности).

Объясните на примере теории равенства, почему в формулировке необходимо говорить об отсутствии конечных моделей.

Задание 2.33. Пусть Γ — полное множество предложений сигнатуры σ, которая обогащается до двух новых сигнатур σ_1 и σ_2 путем добавления непересекающихся множеств C_1 и C_2 новых константных символов. Пусть $\Gamma_1 \supseteq \Gamma$ и $\Gamma_2 \supseteq \Gamma$ — непротиворечивые множества предложений сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно. Докажите, что множество $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ непротиворечивое (частный случай теоремы Робинсона).

Задание 2.34. Справедливо ли утверждение из задания 2.33 без предположения о полноте Γ?

Задание 2.35. Установите неполноту следующих теорий[1]:

(a) теории абелевых групп без кручения;

(b) теории полей нулевой характеристики;

(c) теории алгебраически замкнутых полей;

(d) теории упорядоченных абелевых групп;

(e) теории булевых алгебр;

(f) теории плотных линейных порядков;

(g) теории равенства.

Задание 2.36. Установите полноту следующих теорий:

(a) теории делимых (полных) абелевых групп без кручения;

(b) теории плотных линейных порядков без концевых (наименьшего и наибольшего) элементов;

(c) теории унаров без развилок, циклов и начальных элементов[2];

(d) теории дискретных линейных порядков[3];

(e) теории алгебраически замкнутых полей данной характеристики;

(f) теории безатомных булевых алгебр;

(g) полной диаграммы некоторой структуры, а также элементарной теории этой структуры.

---

[1] Здесь сигнатура либо ясна из контекста, либо точный ее выбор несущественен.

[2] Развилкой в унаре (M, f) называется тройка его элементов (a, b, c) таких, что $f(a) = f(b) = c$ и $a \neq b$, петли $\{a\}$, $a = f(a)$ рассматриваются как циклы длины 1, элемент a начальный, если он не лежит в образе отображения f.

[3] Система аксиом содержит аксиомы линейно упорядоченных множеств и утверждения о наличии наименьшего элемента 0, а также непосредственных последователя у каждого элемента и предшественника у каждого ненулевого элемента.

Задание 2.37. Какие из следующих подструктур являются элементарными:

(a) подструктура $(2\mathbb{Z}, \leqslant)$ линейно упорядоченного множества целых чисел $(\mathbb{Z}, \leqslant)$;

(b) поле рациональных чисел $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ как подструктура поля вещественных чисел $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$;

(c) поле вещественных чисел $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ как подструктура поля комплексных чисел $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$;

(d) поле алгебраических чисел $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0, 1)$ как подструктура поля комплексных чисел $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$;

(e) делимая абелева группа ранга 1[4] как подструктура произвольной делимой абелевой группы большего ранга;

(f) подструктура $(\mathbb{N}, \leqslant)$ частично упорядоченного множества $(\mathbb{Z}, \leqslant)$?

Задание 2.38. Являются ли элементарно эквивалентными следующие структуры:

(a) линейно упорядоченные множества $(\mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{Z}, \leqslant)$;

(b) частично упорядоченные множества $(\mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;

(c) линейно упорядоченные множества $(\mathbb{N}, \leqslant)$ и $(\mathbb{N}, \geqslant)$;

(d) моноиды $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$ и $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$;

(e) полугруппы $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Z}, +)$?

Задание 2.39. Пусть $\mathrm{FD}(\mathcal{M})$ — полная диаграмма структуры $\mathcal{M} = (M, \sigma)$, а $\mathcal{M}_1 = (M_1, \sigma_M)$ — произвольная ее модель. Докажите, что структура $\mathcal{M}$ элементарно вложима в обеднение структуры $\mathcal{M}_1$ до сигнатуры σ.

Задание 2.40. Докажите, что любая непротиворечивая теория T совпадает с

(a) пересечением всех полных диаграмм своих моделей;

(b) пересечением всех своих пополнений (т. е. полных расширений той же сигнатуры).

Задание 2.41. Сколько пополнений может иметь непротиворечивая теория счетной сигнатуры? Приведите полный список возможных мощностей с обоснованием.

Задание 2.42. Сформулируйте и докажите свойство транзитивности отношения «быть элементарной подструктурой» на классе структур данного языка.

---

[4] Это означает, что для любых ее ненулевых элементов a и b найдутся натуральные числа $m, n > 0$ такие, что $ma = nb$, где ma — сокращение записи $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{m}$.

Задание 2.43. Покажите, что полная диаграмма произвольной конечной структуры (конечной сигнатуры) семантически эквивалентна одному предложению.

Задание 2.44. Пусть $\mathcal{A} = (A, \sigma)$, $\mathcal{B} = (B, \sigma)$ и $\mathcal{C} = (C, \sigma)$ — структуры одной сигнатуры, причем $B \cap C = A$ и $\mathcal{A}$ является элементарной подструктурой в двух оставшихся. Пользуясь методом диаграмм из задания 2.39 и частным случаем теоремы Робинсона из задания 2.33, покажите, что найдется четвертая структура $\mathcal{D} = (D, \sigma)$ такая, что структуры $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ являются элементарными подструктурами $\mathcal{D}$ (свойство амальгамируемости).

Задание 2.45. Пусть $(I, \leqslant)$ — направленное частично упорядоченное множество, т. е. для любых $x, y \in I$ существует $z \in I$ такой, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$. Семейство структур $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ сигнатуры σ назовем *элементарной направленностью*, если из условия $i \leqslant j$ следует, что $\mathcal{A}_i$ — элементарная подструктура $\mathcal{A}_j$ (если $(I, \leqslant)$ — цепь, то говорят об *элементарной цепи*). На множестве $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ естественно определена интерпретация символов из σ, поскольку каждое конечное подмножество его элементов уже содержится в каком-то A_i. Полученную структуру обозначим через $\mathcal{A}$.

Докажите, что $\mathcal{A}$ является элементарным расширением каждой из структур данного семейства (рекомендуется использовать критерий Робинсона). В частности, объединение по элементарной цепи элементарно расширяет каждую структуру цепи.

Задание 2.46. Счетную модель $\mathcal{M}$ непротиворечивой теории T назовем *элементарно универсальной*, если в нее элементарно вложима любая не более чем счетная модель теории T.[5] Покажите, что наличие такой модели влечет полноту теории T, а обратное утверждение неверно.

Задание 2.47. Докажите, что существует собственное счетное элементарное расширение стандартной модели арифметики. Сколько всего таких расширений с точностью до изоморфизма?

3. Аксиоматизируемые классы и ультрапроизведения

Пусть Sent_σ обозначает множество всех предложений сигнатуры σ, а $\mathfrak{K}_\sigma$ — класс всех структур сигнатуры σ. Для $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ через $\mathrm{Mod}(\Phi)$

[5] Типичным примером такой модели служит алгебраическое замыкание поля рациональных функций от счетного числа переменных над полем рациональных чисел, менее типичен пример подходящей модели теории дискретного порядка.

обозначим класс всех структур $\mathcal{M} \in \mathfrak{K}_\sigma$, в которых выполнены все предложения из Φ (обозначение: $\mathcal{M} \models \Phi$). Классы структур такого вида называются *аксиоматизируемыми.*

Если существует конечное множество Φ такое, что $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$, то говорят, что класс $\mathfrak{K}$ *конечно аксиоматизируемый.* Если существует множество универсальных предложений Φ такое, что $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$, то говорят, что класс $\mathfrak{K}$ *универсально аксиоматизируемый* и т. п.

Множество предложений Φ называется *системой аксиом* (для данного класса). Под *элементарной теорией класса* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_\sigma$ понимается множество предложений данной сигнатуры, истинных в каждой системе из $\mathfrak{K}$ (обозначение: $\mathrm{Th}(\mathfrak{K})$). Другой способ задания теорий основан на логическом выводе из аксиом: *теорией с аксиомами* Φ, где $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, называется наименьшая теория T_Φ, содержащая Φ, или, что равносильно, $T_\Phi = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_\sigma : \Phi \rhd \varphi\}$.

Носителем *прямого* (или *декартова*) произведения $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ семейства структур $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ данной сигнатуры σ является декартово произведение носителей $M = \prod_{i \in I} M_i$, а сигнатурные символы интерпретируются «покомпонентно»:

- $\mathcal{M} \models P(f_1, \ldots, f_m)$ тогда и только тогда, когда
$$\mathcal{M}_i \models P(f_1(i), \ldots, f_m(i)) \text{ для всех } i \in I;$$
- $F_{\mathcal{M}}(f_1, \ldots, f_n)(i) = F_{\mathcal{M}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))$ для всех $i \in I$.

Для любого фильтра D над I определим на $\prod_{i \in I} M_i$ отношение эквивалентности $\sim_D$ по правилу
$$f \sim_D g \iff [\![f = g]\!] = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D.$$
Классы $[f]_{\sim_D}$ обычно обозначают f/D. Нетрудно проверить, что $\sim_D$ — конгруэнция на структуре $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Фактор-структуру $\mathcal{M}/\sim_D$ называют *фильтрованным произведением* и обозначают $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i/D$. Если D — ультрафильтр, то используется термин *ультрапроизведение.*

Задание 2.48. Докажите, что объединение и пересечение аксиоматизируемых классов — аксиоматизируемые классы.

Задание 2.49. Сформулируйте и докажите теорему о замкнутости аксиоматизируемых классов относительно ультрапроизведений.

Задание 2.50. Тип $p(x)$ непротиворечивой теории T назовем *тотально неглавным*, если для каждой формулы $\varphi(x) \in p(x)$ найдется модель множества $T \cup \exists x \varphi(x)$, в которой p не реализуется (опускается).

Пусть непустой класс $\mathfrak{K}$ состоит из всех моделей теории T, в которых тотально неглавный тип $p(x)$ опускается (не реализован ни на одном элементе). Докажите, что класс $\mathfrak{K}$ не аксиоматизируемый.

Задание 2.51. Пусть $\mathfrak{K}$ — аксиоматизируемый класс, не имеющий (конечной) границы для мощностей своих конечных структур. Докажите, что $\mathfrak{K}$ содержит структуры любой бесконечной мощности.

Задание 2.52. Докажите, что следующие классы неаксиоматизируемые:

(a) класс конечных абелевых групп;

(b) класс конечных полей данной характеристики;

(c) класс конечных булевых алгебр;

(d) класс полей, изоморфно вложимых в поле комплексных чисел.

Задание 2.53. Пользуясь методом задания 2.49, докажите, что следующие классы неаксиоматизируемые:

(a) класс всех полей ненулевой характеристики;

(b) класс полей, изоморфных полям алгебраических чисел (т. е. алгебраическим расширениям поля рациональных чисел);

(c) класс упорядоченных абелевых групп, не имеющих элементов a, b, удовлетворяющих условиям

$$ma < nb \iff m/n < \pi \text{ и } ma > nb \iff m/n > \pi, \text{ где } m, n > 0.$$

Задание 2.54. Установите двумя способами, что класс вполне упорядоченных множеств неаксиоматизируемый:

(a) установив и использовав его незамкнутость относительно ультрапроизведений,

(b) используя метод задания 2.26.

Задание 2.55. Докажите, что для конечной аксиоматизируемости класса $\mathfrak{K}$ необходимо и достаточно, чтобы классы $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}_\sigma \setminus \mathfrak{K}$ являлись аксиоматизируемыми.

Задание 2.56. Докажите, что следующие классы не являются конечно аксиоматизируемыми:

(a) класс бесконечных абелевых групп;

(b) класс бесконечных линейно упорядоченных множеств;

(c) класс полей нулевой характеристики;

(d) класс абелевых групп без кручения;

(e) класс унаров без циклов.

Задание 2.57. Докажите, что $\sim_D$ действительно является конгруэнцией на прямом произведении $\prod_{i\in I}\mathcal{M}_i$. Покажите, что каноническое отображение $\varphi/\sim_D\colon \prod_{i\in I}\mathcal{M}_i \to \prod_{i\in I}\mathcal{M}_i/D$ является сильным эпиморфизмом, где D — фильтр над I.

Задание 2.58. Докажите, что

(a) любая ультрастепень конечной структуры $\mathcal{M}$ изоморфна $\mathcal{M}$;

(b) ультрастепени бесконечной структуры по мощности не ограничены.

Задание 2.59. Докажите, что

(a) для любого непустого класса $\mathfrak{K}$ множество $\mathrm{Th}(\mathfrak{K})$ является непротиворечивой теорией и $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K})) \supseteq \mathfrak{K}$;

(b) для любого $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ выполняется равенство $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Phi)) = T_\Phi$;

(c) класс $\mathfrak{K}$ является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K})) = \mathfrak{K}$.

Глава 3

Аксиоматическая теория множеств

1. Система аксиом Цермело — Френкеля

Аксиоматическая теория множеств — теория множеств, записанная в языке исчисления предикатов первого порядка с равенством сигнатуры, которая включает в себя единственный символ бинарного отношения $\in$, понимаемый как отношение принадлежности.

Считается, что любое математическое понятие можно сформулировать на этом языке и любое математическое утверждение можно записать в этом языке. В частности, на языке теории множеств могут быть записаны такие понятия, как упорядоченная и неупорядоченная пара, подмножество, декартово произведение, функция (см. задание 3.20), натуральное, целое, действительное и комплексное числа, алгебраическая система, последовательность и предел последовательности действительных чисел и т. п. Для функции f запись $f(u) = v$ является сокращением для $(u, v) \in f$.

Множества подчиняются следующей системе аксиом, известной как система аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (обозначается ZFC). Система аксиом Цермело — Френкеля без аксиомы выбора обозначается ZF.

Аксиома экстенсиональности: два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Аксиома пустого множества: существует множество, не содержащее ни одного элемента.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $\{x, y\}$.

Аксиома степени: для любого множества существует множество всех подмножеств этого множества.

Аксиома объединения: для любого множества x существует множество $\bigcup x = \{z : \exists y\,(y \in x \ \wedge z \in y)\}$.

Аксиома бесконечности: существует множество x такое, что $y^+ = y \cup \{y\} \in x$ для любого $y \in x$.

Схема аксиом выделения: для любого множества x и любой формулы $\varphi(y)$ языка теории множеств существует множество $\{y \in x : \varphi(y)\}$.

Схема аксиом подстановки: для любого множества x и любой формулы $\varphi(y, z)$ языка теории множеств такой, что $((\varphi(y, z_1) \wedge \varphi(y, z_2)) \to z_1 \approx z_2)$ при всех $y \in x$, существует множество $\{z : \exists y\, (y \in x \wedge \varphi(y, z))\}$.

Аксиома регулярности: для любого непустого множества x найдется $y \in x$ со свойством $y \cap x = \varnothing$.

Аксиома выбора: для любого множества x найдется функция f из множества непустых подмножества множества x во множество x такая, что $f(y) \in y$ для любого y.

Точные формулировки аксиом системы ZFC содержатся в заданиях этого параграфа.

Задание 3.1. Запишите на языке теории множеств аксиому экстенсиональности.

Задание 3.2. Запишите на языке теории множеств аксиому пустого множества.

Задание 3.3. Пользуясь аксиомой экстенсиональности, докажите, что пустое множество единственное.

Задание 3.4. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_0(x, y)$, означающее, что x — подмножество y.

Задание 3.5. Запишите на языке теории множеств аксиому степени.

Задание 3.6. Запишите на языке теории множеств аксиому объединения.

Задание 3.7. Запишите на языке теории множеств аксиому бесконечности.

Задание 3.8. Запишите на языке теории множеств схему аксиом подстановки.

Задание 3.9. Запишите на языке теории множеств схему аксиом выделения.

Задание 3.10. Пользуясь схемой аксиом выделения, покажите, что для любого непустого множества x существует множество $\bigcap x = \{z : \forall y\, (y \in x \to z \in y)\}$.

Задание 3.11. Выведите аксиому выделения из остальных аксиом системы ZF.

Задание 3.12. Запишите на языке теории множеств аксиому регулярности.

Задание 3.13. Пользуясь аксиомой регулярности, покажите, что ни одно множество не является собственным элементом.

Задание 3.14. *Неупорядоченной парой* называется множество $z = \{x, y\}$, где x и y — произвольные множества. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_1(x, y, z)$, означающее, что $z = \{x, y\}$.

Задание 3.15. Запишите на языке теории множеств аксиому пары.

Задание 3.16. *Упорядоченной парой* (x, y) называется множество $z = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_2(x, y, z)$, означающее, что $z = (x, y)$.

Задание 3.17. *Декартовым произведением* $x \times y$ называется множество всех упорядоченных пар (u, v) таких, что $u \in x$ и $v \in y$. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_3(x, y, z)$, означающее, что $z = x \times y$.

Задание 3.18. Пользуясь аксиомами пары, степени и выделения, докажите, что для любых множеств x и y существует декартово произведение $x \times y$.

Задание 3.19. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_4(x, y, z)$, означающее, что $z \subseteq x \times y$.

Задание 3.20. *Функцией* f из x в y называется подмножество $f \subseteq x \times y$ такое, что для любого $u \in x$ существует единственный $v \in y$ со свойством $(u, v) \in f$. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_5(x, y, f)$, означающее, что f — функция из x в y.

Задание 3.21. Опишите на языке теории множеств *область определения* δf и *область значений* ϱf функции (отношения) f.

Задание 3.22. Докажите, что для любого отношения $p \subseteq x \times y$ существует функция $f \subseteq x \times y$ такая, что $\delta f = \delta p$.

Задание 3.23. Запишите на языке теории множеств аксиому выбора.

Задание 3.24. Покажите, что аксиома выбора равносильна утверждению о том, что для любого множества x, не содержащего пустого множества, найдется функция f из x в $\bigcup x$ со свойством $f(y) \in y$ для любого $y \in x$.

Задание 3.25. Функция f из x в y называется *инъективной*, если из $f(u_1) = f(u_2)$ следует $u_1 = u_2$ для любых $u_1, u_2 \in x$. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_6(x, y, f)$, означающее, что f — инъективная функция из x в y.

Задание 3.26. Функция f из x в y называется *сюръективной*, если для любого $v \in y$ найдется $u \in x$ со свойством $f(u) = v$. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_7(x, y, f)$, означающее, что f — сюрьективная функция из x в y.

Задание 3.27. Функция f из x в y называется *биективной*, если она одновременно инъективна и сюрьективна. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_8(x, y, f)$, означающее, что f — биективная функция из x в y.

Задание 3.28. Говорят, что множества x и y *равномощны*, и пишут $|x| - |y|$, если существует биективная функция из x в y. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_9(x, y)$, означающее, что множества x и y равномощны.

Задание 3.29. Говорят, что мощность множества x не превосходит мощность множества y, и пишут $|x| \leqslant |y|$, если существует инъективная функция из x в y. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{10}(x, y)$, означающее, что мощность множества x не превосходит мощность множества y.

Задание 3.30. Используя аксиому выбора, докажите, что $|x| \leqslant |y|$ тогда и только тогда, когда $x = \varnothing$ или существует сюрьективная функция из y в x.

Задание 3.31. Запишите на языке теории множеств теорему Кантора — Бернштейна, утверждающую, что $|x| = |y|$ тогда и только тогда, когда $|x| \leqslant |y|$ и $|y| \leqslant |x|$ для любых множеств x и y.

Задание 3.32. Запишите на языке теории множеств утверждение $\psi_{\mathrm{poset}}(p)$, означающее, что $p = (P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество (множество с бинарным отношением, удовлетворяющим аксиомам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности).

Задание 3.33. Сформулируйте и докажите в теории множеств утверждение о том, что для любого бесконечного алфавита A множество A^* слов над A равномощно A.

Задание 3.34. Запишите на языке теории множеств утверждение $\psi_{\mathrm{group}}(g)$, означающее, что $g = (G, \cdot)$ — группа (алгебраическая система с одной бинарной операцией, удовлетворяющая аксиомам группы).

2. Ординалы и их свойства

Множество называется *транзитивным*, если каждый его элемент является его подмножеством. Множество называется *ординалом*, если оно транзитивно и все его элементы транзитивны. Класс ординалов вполне упорядочен отношением $\leqslant$, где

$$\alpha \leqslant \beta \iff (\alpha = \beta) \vee (\alpha \in \beta).$$

Ординал α называется *предельным*, если он отличен от ординала $0 = \varnothing$ и для любого $\beta \in \alpha$ существует ординал γ со свойством $\beta \in \gamma \in \alpha$. Ординал α называется *последователем ординала* β, если $\alpha = \beta^+ = \beta \cup \{\beta\}$. Известно (см. задачу 3.41), что все ординалы можно разбить на 3 типа: нулевой ординал, предельные ординалы и ординалы-последователи.

Для ординалов справедлив принцип трансфинитной индукции: если $\varphi(x)$ — формула языка теории множеств и для каждого ординала α выполнено $(\forall\beta((\beta \in \alpha \wedge \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha))$, то $\varphi(\gamma)$ выполнена для всех ординалов γ.

С помощью принципа трансфинитной индукции на ординалах определяются следующие операции.

Сложение: $\alpha + 0 = 0$, $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$ и $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma \in \beta\}$ для предельного ординала β.

Умножение: $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$ и $\alpha + \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma \in \beta\}$ для предельного ординала β.

Возведение в степень: $\alpha^0 = 1 = \{\varnothing\}$, $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ и $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma \in \beta\}$ для предельного ординала β.

Каждое натуральное число с точки зрения формальной теории множеств — ординал. Выполняются равенства $0 = \varnothing$ и $n + 1 = \{0, \dots n\}$ для произвольного натурального числа n. Множество натуральных чисел совпадает с ординалом $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, являющимся первым среди предельных ординалов.

Известно, что для каждого вполне упорядоченного множества $(W, \leqslant)$ существует единственный ординал α, для которого $(W, \leqslant) \cong (\alpha, \leqslant)$. Кроме того, для любого ординала α множество $(\alpha, \leqslant)$ вполне упорядочено. Эти наблюдения позволяют воспринимать ординалы как типы изоморфизма вполне упорядоченных множеств (точнее, как канонические представители этих типов) и дать альтернативные определения суммы и произведения ординалов.

Пусть $\mathcal{L}_1 = (L_1, \leqslant_1)$ и $\mathcal{L}_2 = (L_2, \leqslant_2)$ — линейно упорядоченные множества и $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

Положим $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2 = (L_1 \cup L_2, \leqslant)$, где $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий: $(x \in L_1 \wedge y \in L_2)$, $(x, y \in L_1 \wedge x \leqslant_1 y)$ или $(x, y \in L_2 \wedge x \leqslant_2 y)$.

Положим $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = (L_1 \times L_2, \leqslant)$, где $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий: $(x_2 <_2 y_2)$ или $(x_2 = y_2 \wedge x_1 \leqslant_1 y_1)$.

Если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вполне упорядочены, то $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$ также вполне упорядочены. Поэтому для любых ординалов α и β однозначно определены ординалы γ и δ такие, что

$$(\gamma, \leqslant) \simeq (\alpha, \leqslant) + (\beta, \leqslant) \text{ и } (\delta, \leqslant) \simeq (\alpha, \leqslant) \cdot (\beta, \leqslant).$$

Оказывается, что $\gamma = \alpha + \beta$ и $\delta = \alpha \cdot \beta$.

Задание 3.35. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{11}(x)$, означающее, что x — транзитивное множество.

Задание 3.36. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{12}(x)$, означающее, что x — ординал.

Задание 3.37. Докажите, что любой элемент ординала — ординал.

Задание 3.38. Докажите, что для любых ординалов α и β если $\alpha^+ = \beta^+$, то $\alpha = \beta$.

Задание 3.39. Докажите, что для любого ординала α справедливо равенство $\alpha^+ = \alpha + 1$.

Задание 3.40. Докажите, что для любых ординалов α и γ либо $\gamma \leqslant \alpha$, либо $\alpha^+ \leqslant \gamma$.

Задание 3.41. Докажите, что ненулевой ординал α является предельным тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух (эквивалентных) условий:

(a) $\alpha \neq \beta^+$ для любого ординала β;

(b) $\alpha = \bigcup \alpha$.

Задание 3.42. Запишите на языке теории множеств принцип трансфинитной индукции.

Задание 3.43. Докажите, что если S — множество ординалов, то объединение $\bigcup S$ является ординалом, совпадающим с супремумом множества S на классе всех ординалов.

Задание 3.44. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{13}(x, y)$, означающее, что ординал x — последователь ординала y.

Задание 3.45. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{14}(x)$, означающее, что x — предельный ординал.

Задание 3.46. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{15}(x)$, означающее, что x — непредельный ординал.

Задание 3.47. Докажите, что для любых вполне упорядоченных множеств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ их сумма $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ и произведение $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$ также вполне упорядочены.

Задание 3.48. Докажите, что сумма и произведение ординалов, определенные через операции над линейными порядками, совпадают с суммой и произведением, определенным с помощью трансфинитной индукции.

Задание 3.49. Докажите, что операции сложения, умножения и возведения в степень монотонны по обоим аргументам.

Задание 3.50. Докажите, что операция сложения ординалов строго монотонна по второму аргументу.

Задание 3.51. Докажите, что при $\alpha \neq 0$ операция $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ строго монотонна по аргументу β.

Задание 3.52. Ординал x называется *конечным ординалом* или *натуральным числом*, если он непредельный и все его элементы также непредельные. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{16}(x)$, означающее, что x — конечный ординал.

Задание 3.53. Множество называется *конечным*, если оно равномощно конечному ординалу. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{17}(x)$, означающее, что x — конечное множество.

Задание 3.54. Пусть ε_0 — наименьший ординал, не представимый в виде степенного полинома от ординала ω и натуральных чисел. Докажите, что ординал ε_0 счетный.

Задание 3.55. Запишите на языке теории множеств принцип математической индукции для натуральных чисел.

Задание 3.56. Используя принцип трансфинитной индукции, докажите принцип математической индукции.

Задание 3.57. Множество называется *конечным по Дедекинду*, если оно не равномощно никакому собственному подмножеству (т. е. подмножеству, отличному от самого множества). Запишите на языке теории

множеств утверждение $\varphi_{18}(x)$, означающее, что x — конечное по Дедекинду множество.

Задание 3.58. Используя аксиому выбора, докажите, что множество конечно тогда и только тогда, когда оно конечно по Дедекинду.

Задание 3.59. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{19}(x, y, z)$, означающее, что x, y, z — ординалы и $x = y + z$.

Задание 3.60. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{20}(x, y, z)$, означающее, что x, y, z — ординалы и $x = y \cdot z$.

Задание 3.61. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{21}(x, y, z)$, означающее, что x, y, z — ординалы и $x = y^z$.

Задание 3.62. Запишите на языке теории множеств утверждение $\varphi_{22}(x)$, означающее, что x — четное натуральное число.

Задание 3.63. Покажите, что операции сложения и умножения ординалов ассоциативны.

Задание 3.64. Покажите, что операции сложения и умножения ординалов не коммутативны.

Задание 3.65. Докажите, что сумма и произведение натуральных чисел — натуральные числа.

Задание 3.66. Докажите, что операции сложения и умножения на натуральных числах коммутативны.

Задание 3.67. Докажите, что $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$.

Задание 3.68. Докажите, что операции сложения и умножения ординалов связаны законом левой дистрибутивности $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Задание 3.69. Приведите пример ординалов α, β и γ, для которых нарушается закон правой дистрибутивности $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Задание 3.70. Докажите, что для ординалов выполнено тождество $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Задание 3.71. Докажите, что для ординалов выполнено тождество $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\,\gamma}$.

Задание 3.72. Докажите, что для любых ординалов α и β справедливо $\alpha \leqslant \alpha + \beta$.

Задание 3.73. Докажите, что для любых ординалов $\alpha \leqslant \beta$ существует единственный ординал γ, для которого $\alpha + \gamma = \beta$.

Задание 3.74. Пусть β — некоторый ординал. Докажите, что ординал γ, для которого $\gamma + 1 = \beta$, существует тогда и только тогда, когда β — непредельный ординал.

Задание 3.75. Приведите пример ординалов $\alpha \neq \beta$ и γ таких, что $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Задание 3.76. Докажите, что для любого ординала $\alpha < \omega^\omega$ существует единственное представление α в виде конечной суммы $\alpha = \omega^{n_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{n_k} \cdot m_k$, где $n_1 > \dots > n_k \geqslant 0$ и $m_1, \dots, m_k$ — натуральные числа.

Задание 3.77. Докажите, что если $\alpha + \beta = \omega^\gamma$, то $\beta = 0$ или $\beta = \omega^\gamma$.

Задание 3.78. Какие ординалы удовлетворяют условиям
(a) $1 + \alpha = \alpha$;
(b) $2 \cdot \alpha = \alpha$;
(c) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$?

Задание 3.79. Решите уравнение $\omega^2 + 2 = (\omega + 2) \cdot x + y$ в ординалах с минимально возможным ординалом y.

Задание 3.80. Покажите, что для любого множества x существует *транзитивное замыкание* $\mathrm{TC}(x)$, т. е. наименьшее транзитивное множество, содержащее x в качестве частично упорядоченного подмножества.

Задание 3.81. Пусть α — ординал и пусть W_α состоит из всех множеств X таких, что не существует строго монотонной функции $f : \alpha \to X$. Покажите, что W_α является множеством.

Задание 3.82. Пусть $\varphi(x, y, u, \overline{v})$ — формула сигнатуры $\{\in\}$ теории множеств. Покажите, что из ZF выводима формула

$$(\forall x\, (x \in u \to \exists z\, \varphi(x, z, u, \overline{v})) \to \\ \to \exists y\, \forall x\, (x \in u \to \exists z\, (z \in y \wedge \varphi(x, z, u, \overline{v})))).$$

Глава 4

Вычислимые функции и множества

1. Примитивно вычислимые функции

В этом параграфе под функцией всегда понимается частичная n-арная функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.

Простейшими называются унарные функции o и s и n-арные проекции I_m для каждого $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$o(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad I_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m.$$

Пусть f — n-арная функция и $g_1, \ldots, g_n$ — m-арные функции. Будем говорить, что m-арная функция h получается из функций f и $g_1, \ldots, g_m$ с помощью *оператора суперпозиции*, если

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$$

для любых $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$.

Пусть f — n-арная функция и g — $(n+2)$-арная функция. Будем говорить, что $(n+1)$-арная функция h получается из функций f и g с помощью *оператора примитивной рекурсии*, если

$$h(x_1, \ldots, x_n, 0) = f(x_1, \ldots, x_n),$$
$$h(x_1, \ldots, x_n, y+1) - g(x_1 \ldots, x_n, y, h(x_1, \ldots, x_n, y))$$

для всех $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathbb{N}$. При $n = 0$ определение функции h выглядит следующим образом:

$$h(0) = a, \quad h(y+1) = g(y, h(y)),$$

где $a \in \mathbb{N}$.

Замыканием множества функций $\mathcal{F}$ относительно множества операторов O называется наименьшее множество функций, содержащее все функции из $\mathcal{F}$ и замкнутое относительно всех операторов из O. Множество *примитивно вычислимых функций* — это замыкание множества простейших функций относительно операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_k$ — семейства n-арных функций, причем при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$ существует единственное i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такое, что $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Будем говорить, что n-арная функция h получается из $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_k$ с помощью *кусочного определения*, если

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots & \\ f_k(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Пусть f — всюду определенная $(n+1)$-арная функция и g — всюду определенная n-арная функция. Будем говорить, что n-арная функция h получается из функций f и g с помощью *оператора ограниченной минимизации*, и писать

$$h(\overline{x}) = \mu y \leqslant g(\overline{x})[f(\overline{x}, y) = 0],$$

если $h(\overline{x})$ равно наименьшему y такому, что $y \leqslant g(\overline{x})$ и $f(\overline{x}, y) = 0$ (в случае, когда $f(\overline{x}, y) \neq 0$ для всех $y \leqslant g(\overline{x})$, полагаем $h(\overline{x}) = g(\overline{x}) + 1$).

Пусть f — n-арная, g — $(n+s+1)$-арная, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — унарные функции. Будем говорить, что $(n+1)$-арная функция h получается из f, g и $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ с помощью *возвратной рекурсии*, если

$$\begin{aligned} &h(\overline{x}, 0) = f(\overline{x}), \\ &h(\overline{x}, y+1) = g(\overline{x}, y, h(\overline{x}, \alpha_1(y)), \ldots, h(\overline{x}, \alpha_s(y))), \end{aligned}$$

где $\alpha_i(z) \leqslant z$ для любых $z \in \mathbb{N}$ и $i \leqslant s$.

Задание 4.1. Докажите, что функция f является примитивно вычислимой тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность $f_1, \ldots, f_n$ функций такая, что $f = f_n$ и для любого $i \leqslant n$ функция f_i либо простейшая, либо получается из $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$, где $i_1, \ldots, i_k < i$, с помощью оператора суперпозиции или примитивной рекурсии.

Задание 4.2. Покажите, что любая примитивно вычислимая функция является всюду определенной.

Задание 4.3. Пусть f — примитивно вычислимая функция. Покажите, что функции f_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$ также примитивно вычислимые, где

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n) \text{ (перестановка)};$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \text{ (цикл)};$$
$$f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n) \text{ (отождествление)};$$
$$f_4(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ (фиктивный аргумент)}.$$

Задание 4.4. Опишите замыкание класса простейших функций относительно оператора суперпозиции.

Задание 4.5. Покажите, что функция s не принадлежит замыканию класса функций $\{o\} \cup \{I_m : n \geqslant 1 \text{ и } 1 \leqslant m \leqslant n\}$ относительно операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.

Задание 4.6. Покажите, что следующие функции получаются из простейших с помощью оператора суперпозиции:

(a) $f(x) = a$, где $a \in \mathbb{N}$;
(b) $f(x) = x + a$, где $a \in \mathbb{N}$;
(c) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i + a$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $a \in \mathbb{N}$.

Задание 4.7. Покажите, что следующие функции являются примитивно вычислимыми, где g — примитивно вычислимая функция:

(a) $f(x, y) = x + y$;
(b) $f(x, y) = x \cdot y$;
(c) $f(x, y) = x^y$ (как следует определить значение $f(0, 0)$?);
(d) $f(x) = x!$;
(e) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum\limits_{i=0}^{y} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;
(f) $f(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod\limits_{i=0}^{y} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;
(g) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$
(h) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x > y, \\ 0, & x \leqslant y; \end{cases}$
(i) $f(x) = \mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$
(j) $f(x) = \overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Задание 4.8. Покажите, что следующие функции являются примитивно вычислимыми, так как получаются с помощью оператора суперпозиции из функций, приведенных в задании 4.7:

(a) $f(x, y) = \max\{x, y\}$;
(b) $f(x, y) = \min\{x, y\}$;
(c) $f(x, y) = |x - y|$.

Задание 4.9. Докажите, что функция, получающаяся из примитивно вычислимых функций с помощью кусочного определения, является примитивно вычислимой.

Задание 4.10. Докажите, что функция, получающаяся из примитивно вычислимых функций с помощью оператора ограниченной минимизации, является примитивно вычислимой.

Задание 4.11. Пусть f_1 и f_2 — примитивно вычислимые $(n+1)$-арные функции. Для каждого из следующих условий укажите примитивно вычислимую функцию f_0 такую, что $f_0(\overline{x}, y) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется это условие:

(a) $f_1(\overline{x}, y) = f_2(\overline{x}, y)$;
(b) $f_1(\overline{x}, y) \neq f_2(\overline{x}, y)$;
(c) $f_1(\overline{x}, y) \leqslant f_2(\overline{x}, y)$;
(d) $f_1(\overline{x}, y) > f_2(\overline{x}, y)$;
(e) $f_1(\overline{x}, y) \geqslant f_2(\overline{x}, y)$;
(f) $f_1(\overline{x}, y) < f_2(\overline{x}, y)$.

Задание 4.12. Определите функции h, заданные условиями

$$h(\overline{x}) = \mu y \leqslant g(\overline{x})[f_1(\overline{x}, y) = f_2(\overline{x}, y)],$$
$$h(\overline{x}) = \mu y \leqslant g(\overline{x})[f_1(\overline{x}, y) \neq f_2(\overline{x}, y)]$$

и т. д., и покажите, что они являются примитивно вычислимыми, если f_1, f_2 и g — примитивно вычислимые функции.

Задание 4.13. Докажите, что следующие функции примитивно вычислимые:

(a) $f(x, y) = \left[\dfrac{x}{y}\right]$ (неполное частное при делении x на y);
(b) $f(x, y) = \mathrm{rest}(x, y)$ (остаток от деления x на y);
(c) $f(x) = \tau(x)$ (количество делителей числа x);
(d) $f(x) = \sigma(x)$ (сумма делителей числа x);

(e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — простое число,} \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ (характеристическая функция множества простых чисел);

(f) $f(x) = p(x)$ (x-ое простое число);

(g) $f(x) = \mathrm{lh}(x)$ (количество простых делителей числа x);

(h) $f(x) = \pi(x)$ (количество простых чисел между 1 и x);

(i) $f(x) = \mathrm{long}(x)$ (наибольший простой делитель числа x);

(j) $f(x, y) = \mathrm{ex}(x, y)$ (показатель степени простого числа $p(x)$ в каноническом разложении числа y);

(k) $f(x) = [\sqrt{x}]$ (целая часть квадратного корня числа x);

(l) $f(x, y) = \mathrm{lcm}(x, y)$ (наименьшее общее кратное x и y);

(m) $f(x, y) = \gcd(x, y)$ (наибольший общий делитель x и y);

(n) $f(x) = \varphi(x)$ (количество чисел, взаимно простых с числом x и не превосходящих x).

Задание 4.14. Пусть $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — *канторовская нумерация* пар натуральных чисел, т. е. биективное соответствие, задаваемое нумерацией пар «по диагонали». Покажите, что c — примитивно вычислимая функция.

Задание 4.15. Пусть l и r — унарные функции такие, что $x = c(l(x), r(x))$. Покажите, что l и r — примитивно вычислимые функции, $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$.

Задание 4.16. Аналогично заданиям 4.14 и 4.15 определите нумерацию наборов фиксированной длины n и функции, возвращающие компоненты набора с заданным номером. Покажите, что полученные функции примитивно вычислимые.

Задание 4.17. Покажите, что существует бинарная примитивно вычислимая функция β (*функция Геделя*) такая, что для любого $n > 0$ и любых $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $a_i = \beta(m, i)$ для всех $i \leqslant n$.

Задание 4.18. Докажите, что функция, получающаяся из примитивно вычислимых функций с помощью возвратной рекурсии, является примитивно вычислимой.

2. Частично вычислимые функции

Пусть f — $(n+1)$-арная функция. Будем говорить, что n-арная функция g получается из функции f с помощью *оператора минимизации*, и

писать

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0],$$

если $g(x_1, \ldots, x_n)$ определено и равно y тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ и для каждого $i < y$ значение $f(x_1, \ldots, x_n, i)$ определено и отличается от нуля.

Множество *частично вычислимых функций* — это замыкание множества простейших функций относительно операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Всюду определенные частично вычислимые функции называются *вычислимыми.*

Задание 4.19. Докажите, что функция f является частично вычислимой тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность $f_1, \ldots, f_n$ функций такая, что $f = f_n$ и для любого $i \leqslant n$ функция f_i либо простейшая, либо получается из функций $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$, где $i_1, \ldots, i_k < i$, с помощью оператора суперпозиции, примитивной рекурсии или минимизации.

Задание 4.20. Покажите, что любая примитивно вычислимая функция является вычислимой, а любая вычислимая — частично вычислимой.

Задание 4.21. Докажите, что множества примитивно вычислимых, вычислимых и частично вычислимых функций счетные.

Задание 4.22. Покажите, что существуют частичные функции, не являющиеся частично вычислимыми.

Задание 4.23. Докажите, что функции, полученные из вычислимых с помощью операторов суперпозиции и примитивной рекурсии, являются вычислимыми.

Задание 4.24. Покажите, что функция, полученная из вычислимой (простейшей) с помощью оператора минимизации, может оказаться не всюду определенной.

Задание 4.25. Аналогично заданию 4.11 определите функции g, заданные условиями

$$g(\overline{x}) = \mu y[f_1(\overline{x}, y) = f_2(\overline{x}, y)],$$
$$g(\overline{x}) = \mu y[f_1(\overline{x}, y) \neq f_2(\overline{x}, y)]$$

и т. д., и покажите, что они являются частично вычислимыми, если функции f_1 и f_2 частично вычислимые.

Задание 4.26. Докажите, что следующие функции частично вычислимые:

(а) $f(x, y) = x - y$;

(б) $f(x, y) - \dfrac{x}{y}4$

(в) унарная функция с пустой областью определения.

Задание 4.27. Докажите, что функция Геделя β принадлежит замыканию множества простейших функций, дополненного функциями сложения $+$, умножения $\cdot$ и усеченной разности $\dot{-}$, относительно операторов суперпозиции и минимизации.

Задание 4.28. Докажите, что множество всех частично вычислимых функций совпадает с замыканием множества простейших функций, дополненного функциями сложения $+$, умножения $\cdot$ и усеченной разности $\dot{-}$, относительно операторов суперпозиции и минимизации.

3. Вычислимые множества

Для любого $A \subseteq \mathbb{N}^n$ функция χ_A, определенная по правилу

$$\chi_A(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in A, \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \notin A, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества A. Множество называется *вычислимым*, если его характеристическая функция вычислимая. При $n > 1$ обычно говорят о *вычислимых n-арных отношениях* на множестве $\mathbb{N}$.

Множество (отношение) называется *примитивно вычислимым*, если его характеристическая функция примитивно вычислимая.

Для n-арных отношений R_1 и R_2 на множестве $\mathbb{N}$ естественным образом определим n-арные отношения

$$R_1 \vee R_2 = R_1 \cup R_2, \qquad R_1 \wedge R_2 = R_1 \cap R_2,$$
$$\neg R_1 = \mathbb{N}^n \setminus R_1, \qquad R_1 \to R_2 = \neg R_1 \vee R_2.$$

Для $(n \mid 1)$-арного отношения R на $\mathbb{N}$ определим еще два $(n \mid 1)$-арных отношения:

$$\exists y \leqslant z\, R(\overline{x}, y) \iff \exists y\, (y \leqslant z \wedge R(\overline{x}, y)),$$
$$\forall y \leqslant z\, R(\overline{x}, y) \iff \forall y\, (y \leqslant z \to R(\overline{x}, y)).$$

Задание 4.29. Докажите, что вычислимые подмножества множества $\mathbb{N}$ образуют счетное множество.

Задание 4.30. Покажите, что существует невычислимое подмножество $A \subseteq \mathbb{N}$.

Задание 4.31. Докажите, что объединение и пересечение двух вычислимых множеств, а также дополнение вычислимого множества являются вычислимыми множествами.

Задание 4.32. Докажите, что для любых вычислимых (примитивно вычислимых) отношений R, R_1 и R_2 отношения $R_1 \vee R_2$, $R_1 \wedge R_2$, $\neg R$, $R_1 \to R_2$, $\exists y \leqslant z\, R$ и $\forall y \leqslant z\, R$ также вычислимые (примитивно вычислимые).

Задание 4.33. Докажите, что следующие множества вычислимые:

(a) $\mathbb{N}$;
(b) $\varnothing$;
(c) любое одноэлементное множество;
(d) любое конечное множество;
(e) множество четных чисел;
(f) множество нечетных чисел;
(g) множество точных квадратов;
(h) множество простых чисел;
(i) множество нечетных простых чисел;
(j) множество $\{x : g(x) = n\}$, где g — вычислимая функция и $n \in \mathbb{N}$;
(k) множество чисел вида $1 + \cdots + n$, где $n \in \mathbb{N}$;
(l) множество чисел вида $1^2 + \cdots + n^2$, где $n \in \mathbb{N}$;
(m) множество чисел вида $1^{100} + \cdots + n^{100}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задание 4.34. Докажите, что следующие бинарные отношения на $\mathbb{N}$ вычислимые:

(a) $\{(x, y) : x = y\}$;
(b) $\{(x, y) : x \neq y\}$;
(c) $\{(x, y) : x \leqslant y\}$;
(d) $\{(x, y) : x > y\}$;
(e) $\{(x, y) : x \geqslant y\}$;
(f) $\{(x, y) : x < y\}$;
(g) $\{(x, y) : x \text{ делит } y\}$.

Задание 4.35. Пусть $A \backslash B$ и $B \backslash A$ — конечные множества. Покажите, что A вычислимое тогда и только тогда, когда B вычислимое.

Задание 4.36. Докажите, что бесконечное множество вычислимое тогда и только тогда, когда оно является областью значений строго возрастающей вычислимой функции.

Задание 4.37. Для любого множества $A \subseteq \mathbb{N}$ и любого $n > 0$ пусть $B \subseteq \mathbb{N}^n$ — множество, определенное по правилу

$$(x_0, \ldots, x_n) \in B \iff p(0)^{x_0} \ldots p(n)^{x_n} \in A,$$

где $p(x)$ — x-ое простое число. Докажите, что если множество A вычислимое, то множество B также вычислимое.

Задание 4.38. Покажите, что множество всех натуральных чисел n таких, что в десятичной записи числа π есть не менее n идущих подряд пятерок, вычислимое.

4. Вычислимо перечислимые множества

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Множество A называется *вычислимо перечислимым*, если $A = \varnothing$ или A является областью значений некоторой вычислимой функции f. Любое вычислимо перечислимое множество можно представить в виде $A = \{f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}$, т. е. вычислимая функция f «перечисляет» множество A.

Задание 4.39. Покажите, что любое вычислимое множество является вычислимо перечислимым.

Задание 4.40. Пусть f — вычислимая функция такая, что $f(x) \geqslant x$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Покажите, что область значений функции f — вычислимое множество.

Задание 4.41. Покажите, что любое бесконечное вычислимо перечислимое множество является областью значений вычислимой разнозначной функции.

Задание 4.42. Покажите, что каждое бесконечное вычислимо перечислимое множество содержит бесконечное вычислимое подмножество.

Задание 4.43. Докажите, что множество всех вычислимо перечислимых множеств счетное.

Задание 4.44. Покажите, что существует подмножество $A \subseteq \mathbb{N}$, не являющееся вычислимо перечислимым.

Задание 4.45. Докажите равносильность следующих утверждений:

(a) A — вычислимо перечислимое множество;

(b) $A = \varnothing$ или A является областью значений примитивно вычислимой функции;

(c) A — область значений частично вычислимой функции;

(d) A — область определения частично вычислимой функции;

(e) частичная характеристическая функция χ_A^*, где

$$\chi_A^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ \text{не определено}, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

частично вычислимая;

(f) существует примитивно вычислимое бинарное отношение R на $\mathbb{N}$ такое, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда существует $y \in \mathbb{N}$ такое, что $(x, y) \in R$;

(g) существует вычислимое бинарное отношение R на $\mathbb{N}$ такое, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда существует $y \in \mathbb{N}$ такое, что $(x, y) \in R$;

(h) A — множество решений уравнения $f(x) = a$, где $a \in \mathbb{N}$ и f — частично вычислимая функция.

Задание 4.46. Докажите, что для любых вычислимо перечислимых множеств A и B множества $A \cup B$ и $A \cap B$ являются вычислимо перечислимыми.

Задание 4.47. Покажите, что если множество A и его дополнение $\overline{A}$ вычислимо перечислимые, то A — вычислимое множество.

Задание 4.48. Пусть R — вычислимое тернарное отношение на $\mathbb{N}$. Покажите, что множество

$$\{x \in \mathbb{N} : (x, y, z) \in R \text{ для некоторых } y, z \in \mathbb{N}\}$$

является вычислимо перечислимым.

Задание 4.49. Пусть A — вычислимо перечислимое множество и f — вычислимая функция. Покажите, что $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — вычислимое перечислимые множества.

Задание 4.50. Пусть $A = \{x \in \mathbb{N} : f(x, x) \text{ определено}\}$, где f — частично вычислимая функция. Покажите, что A — вычислимо перечислимое множество.

Задание 4.51. Покажите, что следующие множества вычислимо перечислимые, где f — бинарная частично вычислимая функция, а g — унарная частично вычислимая функция:

(a) множество решений уравнения $g(x) = a$, где a — произвольное натуральное число;

(b) множество натуральных чисел, в десятичной записи которых есть пять идущих подряд пятерок;

(c) $\{x \in \mathbb{N} : f(x, y)$ определено для некоторого $y\}$;

(d) $\{x \in \mathbb{N} : f_x$ не инъективная$\}$, где $f_x(y) = f(x, y)$.

Задание 4.52. Пусть A и B — вычислимо перечислимые множества, а C — вычислимое множество, причем $A \cap B = \varnothing$ и $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Докажите, что множество A вычислимое.

Задание 4.53. Как можно продолжить определение вычислимо перечислимого множества на n-арные отношения на $\mathbb{N}$ с $n > 1$?

Задание 4.54. Пусть R — отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{N}^2 \setminus R$ — вычислимо перечислимое множество. Покажите, что существует вычислимо перечислимое множество T представителей смежных классов эквивалентности R.

Задание 4.55. Установите следующий *принцип редукции*: для любых вычислимо перечислимых множеств A и B существуют вычислимо перечислимые подмножества $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$ такие, что $A' \cap B' = \varnothing$ и $A' \cup B' = A \cup B$.

Глава 5

Представимость в арифметике Пеано

1. Система аксиом Пеано

Сигнатура σ_0 состоит из константного символа 0, унарного функционального символа s и бинарных функциональных символов $+$ и $\cdot$.

Аксиомы теории PA^- сигнатуры σ_0 — это следующие предложения:

$$\forall x\, \forall y\, ([s(x) \approx s(y)] \to [x \approx y]);$$
$$\forall x\, \neg[s(x) \approx 0];$$
$$\forall x\, \forall y\, (\neg[x \approx 0] \to \exists y\, [x \approx s(y))];$$
$$\forall x\, [x + 0 \approx x];$$
$$\forall x\, \forall y\, [x + s(y) \approx s(x + y)];$$
$$\forall x\, [x \cdot 0 \approx 0];$$
$$\forall x\, \forall y\, [x \cdot s(y) \approx x \cdot y + x].$$

Модель $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; 0, s, +, \cdot)$, где константа 0 интерпретируется числом 0, операции $+$ и $\cdot$ — сложением и умножением натуральных чисел, а операция s — взятием следующего натурального числа, называется *стандартной моделью арифметики.*

Хотя модель $\mathcal{N}$ удовлетворяет всем аксиомам теории PA^- (см. задание 5.2), теория PA^- существенно отличается от теории модели $\mathcal{N}$ (см. задания 5.9 и 5.10).

Введем сокращения $x \leqslant y$ для формулы $\exists z\, [y \approx x + z]$ и $x < y$ для формулы $(x \leqslant y \wedge \neg[x \approx y])$. Задание 5.11 показывает, что из аксиом теории PA^- не следует, что определенные таким образом отношения являются отношениями (частичного, строгого) порядка.

Для каждой формулы $\varphi(x, \overline{y})$ сигнатуры σ_0 определим *аксиому индукции* I_φ (по x) аналогично принципу математической индукции:

$$((\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall x\, (\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(s(x), \overline{y}))) \to \forall z\, \varphi(z, \overline{y})).$$

Пусть PA — теория сигнатуры σ_0, аксиомами которой являются все аксиомы теории PA^-, а также аксиомы I_φ для всех формул $\varphi(x, \overline{y})$ сигнатуры σ_0.

В отличие от теории PA^- теория PA не имеет моделей со свойствами, настолько отличающимися от свойств стандартной модели $\mathcal{N}$, но существуют нестандартные модели и этой теории (см. задание 5.14).

Пусть σ — обогащение сигнатуры σ_0 бинарным предикатным символом $\leqslant$ и пусть PA^+ — теория сигнатуры σ, аксиомами которой являются все аксиомы теории PA, а также аксиомы

$$\forall x\, \forall y\, (x \leqslant y \equiv \exists z\, [y \approx x + z]);$$
$$\forall x\, x \leqslant x;$$
$$\forall x\, \forall y\, ((x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \to x \approx y);$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \leqslant y \to (y \leqslant z \to x \leqslant z));$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \leqslant y \vee y \leqslant x).$$

Из заданий 5.19 и 5.21 следует, что теории PA и PA^+ в определенном смысле можно считать одинаковыми.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем сокращение $\mathbf{n}$ для терма $s(\ldots s(0))$, в котором символ s встречается n раз.

Пусть σ_1 — обогащение сигнатуры σ_0 бинарным предикатным символом $<$ и пусть A_0 — теория сигнатуры σ_1, аксиомами которой являются следующие предложения:

$$\forall x\, \forall y\, ([s(x) \approx s(y)] \to [x \approx y]);$$
$$\forall x\, \neg[s(x) \approx 0];$$
$$\forall x\, [x + 0 \approx x];$$
$$\forall x\, \forall y\, [x + s(y) \approx s(x + y)];$$
$$\forall x\, [x \cdot 0 \approx 0];$$
$$\forall x\, \forall y\, [x \cdot s(y) \approx x \cdot y + x];$$
$$\forall x\, \neg[x < 0];$$
$$\forall x\, \forall y\, (x < y \vee x \approx y \vee y < x);$$
$$\forall x\, \forall y\, (x \leqslant s(y) \leftrightarrow (x \approx y \vee x < y)).$$

Заметим, что A_0 является конечно аксиоматизируемой теорией и для отношения $<$ предполаются истинными только сформулированные выше аксиомы (в частности, оно не считается сокращением какой-либо формулы).

Из заданий 5.20 и 5.21 следует, что теория PA^+ расширяет теорию A_0. Как показывают задания 5.27 и 5.42, теория A_0, несмотря на отсуствие аксиом индукции, является достаточно выразительной.

Задание 5.1. Докажите, что все модели теории PA^- бесконечные.

Задание 5.2. Определите модель теории PA^- на множестве $\mathbb{N}$ (стандартную модель арифметики).

Задание 5.3. Покажите, что модели теории PA^- можно определить на множествах целых и рациональных чисел.

Задание 5.4. Докажите непротиворечивость теории PA^-.

Задание 5.5. Покажите, что стандартная модель арифметики $\mathcal{N}$ вложима в любую модель теории PA^-.

Задание 5.6. Докажите, что следующие формулы принадлежат теории PA^-:

$$(x + y \approx 0 \to (x \approx 0 \wedge y \approx 0));$$
$$(x \cdot y \approx 0 \to (x \approx 0 \vee y \approx 0)).$$

Задание 5.7. Является ли теория PA^- полной?

Задание 5.8. Определите модели теории PA^-, не изоморфные стандартной модели арифметики, на множествах $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\mathbb{N} \cup \{\infty_0, \infty_1\}$. Сделайте вывод о существовании нестандартных моделей арифметики.

Задание 5.9. Докажите, что формулы

$$\forall x\, \neg[x \approx s(x)], \quad \forall x\, \forall y\, \neg[(s(x) \approx y] \wedge [s(y) \approx x])$$

не принадлежат теории PA^-.

Задание 5.10. Покажите, что следующие формулы не принадлежат теории PA^-:

(a) $0 + x \approx x$;
(b) $0 \cdot x \approx 0$;
(c) $x + y \approx y + x$;
(d) $x \cdot y \approx y \cdot x$;
(e) $(x \approx x + y \to (y \approx 0 \vee x \approx s(x)))$.

Задание 5.11. Покажите, что следующие формулы не принадлежат теории PA^-:

(a) $\forall x\, \neg[x < x]$;
(b) $((x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \to x \approx y)$.

Задание 5.12. Покажите, что стандартная модель арифметики $\mathcal{N}$ является моделью теории PA.

Задание 5.13. Докажите непротиворечивость теории PA.

Задание 5.14. Покажите, что существуют нестандартные модели теории PA.

Задание 5.15. Является ли теория PA полной?

Задание 5.16. Покажите, что формулы из заданий 5.9, 5.10 и 5.11 принадлежат теории PA.

Задание 5.17. Докажите, что следующие законы сокращения принадлежат теории PA:
(a) $(x + z \approx y + z \to x \approx y)$;
(b) $(\neg[z \approx 0] \to ((x \cdot z \approx y \cdot z) \to x \approx y))$.

Задание 5.18. Покажите, что предложение $\neg\exists x\,[x \cdot \mathbf{2} \approx \mathbf{1}]$ принадлежит теории PA.

Задание 5.19. Сформулируйте и докажите утверждение о том, что «отношение $\leqslant$ является отношением линейного порядка на любой модели теории PA, причем $\mathbf{0}$ — наименьший элемент».

Задание 5.20. Покажите, что следующие формулы принадлежат теории PA:
(a) $\neg[x < 0]$;
(b) $\neg[x < x]$;
(c) $([x < y] \to \neg[y < x])$;
(d) $x < s(x)$;
(e) $x \leqslant x + y$;
(f) $(x < y \to x + z < y < z)$;
(g) $(\neg y \approx 0 \to x \leqslant x \cdot y)$;
(h) $(\neg x \approx 0 \to (y < z \equiv x \cdot y < x \cdot z))$;
(i) $x < s(y) \to x \leqslant y$;
(j) $x \leqslant y \to x < s(y)$.

Задание 5.21. Сформулируйте и докажите утверждением о том, что «любая теорема теории PA^+ является также теоремой теории PA».

Задание 5.22. Покажите, что стандартная модель арифметики $\mathcal{N}$ вложима в любую модель $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ теории PA^+. Опишите образ этого вложения.

Задание 5.23. Пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma)$ — модель теории PA^+. Назовем элемент $m \in M$ *стандартным*, если он принадлежит образу стандартной модели арифметики $\mathcal{N}$ при ее вложении в $\mathcal{M}$. Покажите, что для любого $m \in M$ и любого стандартного элемента x из $m \leqslant x$ следует, что m — стандартный элемент.

Задание 5.24. Пусть $\varphi(x)$ — формула сигнатуры σ_0 с одной свободной переменной. Докажите, что следующие формулы принадлежат теории PA:

(a) $(\forall x\,(\forall z\,(z < x \to \varphi(z)) \to \varphi(x)) \to \forall y\,\varphi(y))$ (*принцип возвратной индукции*);

(b) $(\exists x\,\varphi(x) \to \exists y\,(\varphi(y) \wedge \forall z\,(z < y \to \neg\varphi(z)))$ (*принцип наименьшего числа*);

(c) $(\forall x\,(\varphi(x) \to \exists y\,(y < x \wedge \varphi(y))) \to \forall z\,\neg\varphi(z))$ (*метод бесконечного спуска*).

Задание 5.25. Верно ли, что класс моделей теории PA совпадает с классом σ_0-обеднений моделей теории A_0?

Задание 5.26. Докажите, что

$$\mathcal{M} \vdash x < s(\mathbf{n}) \iff \mathcal{M} \vdash \bigvee_{i=0}^{n} x = \mathbf{i}$$

для любой модели $\mathcal{M}$ теории A_0.

Задание 5.27. Сформулируйте и докажите аналог утверждения из задания 5.23 для теории A_0.

2. Представимость множеств и функций

В этом параграфе считаем, что сигнатура σ теории арифметики Пеано состоит из

- константного символа 0;
- унарного функционального символа s;
- бинарных функциональных символов $+$ и $\cdot$;
- бинарного предикатного символа $\leqslant$.

Определим понятие Δ_0-*формулы* сигнатуры σ по индукции:

- каждая бескванторная формула сигнатуры σ является Δ_0-формулой;
- если φ и ψ — Δ_0-формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ и $\neg\varphi$ — также Δ_0-формулы;

- если φ — Δ_0-формула, t — терм и x — переменная, не входящая в t, то $\forall x \leqslant t\, \varphi$ и $\exists x \leqslant t\, \varphi$ — также Δ_0-формулы;
- других Δ_0-формул нет.

Для Δ_0-формул стандартным образом определяются понятия свободных и связанных вхождений переменных.

Понятие истинности Δ_0-формулы на модели при заданном означивании свободных переменных определяется стандартным образом для бескванторных формул и Δ_0-формул, построенных с помощью логических связок. Для формул с ограниченными кванторами определим истинность с помощью эквивалентностей

$$\forall x \leqslant t\, \varphi \leftrightharpoons \forall x\, (x \leqslant t \to \varphi),$$
$$\exists x \leqslant t\, \varphi \leftrightharpoons \exists x\, (x \leqslant t \wedge \varphi).$$

Определим понятие Σ-*формулы* сигнатуры σ по индукции:

- каждая Δ_0 формула сигнатуры σ является Σ-формулой;
- если φ и ψ — Σ-формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ и $\exists x\, \varphi$ — также Σ-формулы;
- если φ — Σ-формула, t — терм и x — переменная, не входящая в t, то $\forall x \leqslant t\, \varphi$ и $\exists x \leqslant t\, \varphi$ — также Σ-формулы;
- других Σ-формул нет.

Для Σ-формул понятия свободных и связанных вхождений переменных определяются так же, как и для Δ_0-формул.

Понятие истинности Σ-формулы на модели при заданном означивании свободных переменных определяется стандартным образом для Σ-формул, построенных с помощью позитивных логических связок и неограниченного квантора существования. Для формул с ограниченными кванторами истинность определяется так же, как и для Δ_0-формул.

Напомним, что элементы стандартной модели арифметики можно отождествить с натуральными числами или термами $\mathbf{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется Δ_0-*определимым*, если существует Δ_0-формула $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ такая, что $(a_1, \ldots, a_k) \in A$ тогда и только тогда, когда формула $\varphi(a_1, \ldots, a_k)$ истинна в стандартной модели $\mathcal{N}$ арифметики Пеано.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^n$ называется Σ-*определимым*, если существует Σ-формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $(a_1, \ldots, a_n) \in A$ тогда и только тогда, когда формула $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ истинна в $\mathcal{N}$.

Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется *Σ-представимой в стандартной модели* арифметики Пеано, если ее график

$$\Gamma_f = \{(x_1, \ldots, x_k, y) : f(x_1, \ldots, x_k) = y\} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$$

является Σ-определимым множеством.

Определим еще две версии понятия Σ-представимости.

n-Арная функция f называется *Σ-представимой в моделях теории T*, если существует Σ-формула с $(n+1)$ свободной переменной такая, что для любой модели $\mathcal{M}$ теории T выполнены условия

$$f(n_1, \ldots, n_k) = n \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}),$$
$$f(n_1, \ldots, n_k) \neq n \Rightarrow \mathcal{M} \models \neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}).$$

n-Арная функция f называется *Σ-представимой в теории T*, если существует Σ-формула с $(n+1)$ свободной переменной такая, что

$$f(n_1, \ldots, n_k) = n \Rightarrow T \rhd \varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}),$$
$$f(n_1, \ldots, n_k) \neq n \Rightarrow T \rhd \neg\varphi(\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}).$$

Определения Δ_0-представимости функций аналогичные.

Задание 5.28. Докажите, что любое Δ_0-определимое множество является (примитивно) вычислимым.

Задание 5.29. Докажите, что любое Σ-определимое множество является вычислимо перечислимым.

Задание 5.30. Покажите, что простейшие функции o, s и I_m являются Σ-представимыми в $\mathcal{N}$.

Задание 5.31. Покажите, что функции сложения $+$, умножения $\cdot$ и усеченной разности $\dot{-}$ являются Σ-представимыми в $\mathcal{N}$.

Задание 5.32. Пусть функция h получается из Σ-представимых в $\mathcal{N}$ функций f и $g_1, \ldots, g_n$ с помощью оператора суперпозиции. Докажите, что h также Σ-представима в $\mathcal{N}$.

Задание 5.33. Пусть функция h получается из Σ-представимой в $\mathcal{N}$ функции f с помощью оператора минимизации. Докажите, что h также Σ-представима в $\mathcal{N}$.

Задание 5.34. Сформулируйте и докажите утверждение о Σ-представимости частично вычислимых функций в $\mathcal{N}$.

Задание 5.35. Пусть функция h получается из Σ-представимых в $\mathcal{N}$ функций f и g с помощью оператора примитивной рекурсии. Запишите Σ-формулу, определяющую график функции h в $\mathcal{N}$.

Задание 5.36. Запишите Δ_0-формулы, определяющие графики следующих функций в $\mathcal{N}$:

(a) $f(x) = x + a$, где $a \in \mathbb{N}$;
(b) $f(x, y) = \max\{x, y\}$;
(c) $f(x, y) = \min\{x, y\}$;
(d) $f(x) = \mathrm{sg}(x)$;
(e) $f(x) = \overline{\mathrm{sg}}(x)$;
(f) $f(x, y) = |x - y|$;
(g) $f(x, y) = \left[\dfrac{x}{y}\right]$;
(h) $f(x, y) = \mathrm{rest}(x, y)$.

Задание 5.37. Запишите Σ-формулы, определяющие графики следующих функций в $\mathcal{N}$:

(a) $f(x, y) = x - y$;
(b) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$;
(c) $f(x, y) = x^y$;
(d) $f(x) = x!$;
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$;
(f) $f(x, y) = \dfrac{x}{y - 1}$;
(g) $f(x, y) = (x + y)!$;
(h) $f(x) = 1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot x^x$;
(i) $f(x, y) = 1^y + 2^y + \dots + x^y$;
(j) $f(x) = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2x$.

Задание 5.38. Докажите, что любая всюду определенная Σ-представимая в PA функция является вычислимой.

Задание 5.39. Запишите Σ-формулы, представляющие в теории PA следующие функции

(a) $f(n) = 2^n$;
(b) $f(m, n) = m^n$;
(c) $f(n) = n!$.

Задание 5.40. (a) Предложите определение Δ_0-представимой в $\mathcal{N}$ и Δ_0-представимой в (моделях) PA функции.

(b) Докажите, что существует всюду определенная Σ-представимая функция, не являющаяся Δ_0-представимой;

(c) Докажите, что существует Σ-представимая в PA функция, не являющаяся Δ_0-представимой в PA.

Задание 5.41. Пусть φ — Δ_0-предложение сигнатуры σ. Докажите, что φ принадлежит теории A_0 тогда и только тогда, когда оно истинно в стандартной модели арифметики.

Задание 5.42. Докажите, что любая вычислимая функция f представима в теории A_0.

Глава 6

Теорема Геделя о неполноте

Геделевской нумерацией (счетного) множества слов A называется разнозначное отображение $\gamma : A \to \mathbb{N}$ такое, что

(a) существует алгоритм G_1, который для любого слова $u \in A$ возвращает число $\gamma(u) > 0$;

(b) существует алгоритм G_2, который для любого $n \in \mathbb{N}$ возвращает слово u такое, что $\gamma(u) = n$, если такое слово существует, или некоторый индикатор ошибки (например, число 0), если $n \notin \gamma(A)$.

Укажем пример геделевской нумерации термов и формул исчисления предикатов сигнатуры арифметики $\{0, s, +, \cdot, \leqslant\}$, использующий канторовскую нумерующую функцию c. Определим отображение γ индукцией по длине слова.

Для константы 0 и переменных x_i, $i \in \mathbb{N}$, положим

$$\gamma(0) = c(0,1) = 1; \quad \gamma(x_i) = c(1,i) = \frac{(1+i)^2 + 3 + i}{2}.$$

Пусть определены значения $\gamma(p)$ и $\gamma(q)$ для термов p и q и пусть терм t имеет вид $t = s(p)$, $t = p + q$ или $t = p \cdot q$. Тогда положим

$$\gamma(s(p)) = c(2, \gamma(p));$$
$$\gamma(p+q) = c(3, c(\gamma(p), \gamma(q))); \quad \gamma(p \cdot q) = c(4, c(\gamma(p), \gamma(q))).$$

По индукции для любого терма t сигнатуры арифметики определен его *геделевский номер* $\gamma(t)$. Определим нумерацию атомарных формул, т. е. формул вида $p \approx q$ и $p \leqslant q$, где p и q — термы:

$$\gamma(p \approx q) = c(5, c(\gamma(p), \gamma(q))); \quad \gamma(p \leqslant q) = c(6, c(\gamma(p), \gamma(q))).$$

Пусть определены значения $\gamma(\varphi)$ и $\gamma(\psi)$ для формул φ и ψ , а формула θ получается из φ и ψ с помощью логических связок. Тогда положим

$$\gamma(\varphi \wedge \psi) = c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)));$$
$$\gamma(\varphi \vee \psi) = c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)));$$
$$\gamma(\varphi \to \psi) = c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)));$$
$$\gamma(\neg\varphi) = c(10, \gamma(\varphi)).$$

Продолжим нумерацию на формулы с кванторами и ограниченными кванторами:

$$\gamma(\forall x_i\, \varphi) = c(11, c(i, \gamma(\varphi)));$$
$$\gamma(\exists x_i\, \varphi) = c(12, c(i, \gamma(\varphi)));$$
$$\gamma(\exists x_i \leqslant t\, \varphi) = c(13, c(c(i, \gamma(t)), \gamma(\varphi)));$$
$$\gamma(\forall x_i \leqslant t\, \varphi) = c(14, c(c(i, \gamma(t)), \gamma(\varphi))).$$

По индукции для каждой формулы и каждой RQ-формулы сигнатуры арифметики определен ее геделевский номер.

Назовем γ *геделевской нумерацией термов и формул.*

Множество слов Φ над алфавитом Σ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, позволяющий по любому слову над Σ узнать, принадлежит оно множеству Φ или нет. В силу тезиса Черча вопрос о разрешимости множества слов Φ сводится к вопросу о вычислимости множества геделевских номеров $\gamma(\Phi)$. Будем говорить, что множество Φ термов (формул) *разрешимое* (*перечислимое*), если множество $\gamma(\Phi)$ вычислимое (вычислимо перечислимое).

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — $(n+s+1)$-арные функции, $g_1, \ldots, g_k$ — $(n+1)$-арные функции и $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — унарные функции, причем при любых значениях $x_1, \ldots, x_n, y$ существует единственное i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такое, что $g_i(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Будем говорить, что $(n+1)$-арная функция h получается из $f_1, \ldots, f_k$, $g_1, \ldots, g_k$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ с помощью *кусочно-возвратной рекурсии*, если

$$h(\overline{x}, y) = \begin{cases} f_1(\overline{x}, y, h(\overline{x}, \alpha_1(y)), \ldots, h(\overline{x}, \alpha_s(y))), & \text{если } g_1(\overline{x}, y) = 0, \\ \ldots \\ f_k(\overline{x}, y, h(\overline{x}, \alpha_1(y)), \ldots, h(\overline{x}, \alpha_s(y))), & \text{если } g_k(\overline{x}, y) = 0, \end{cases}$$

где $\alpha_i(z) \leqslant z$ для любых $z \in \mathbb{N}$ и $i \leqslant s$. Известно, что функция, полученная из вычислимых функций с помощью кусочно-возвратной рекурсии, является вычислимой.

Задание 6.1. Опишите алгоритмы G_1 и G_2 для построенной выше нумерации γ.

Задание 6.2. Укажите бесконечное множество $\{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$ различных геделевских нумераций термов и формул исчисления предикатов сигнатуры арифметики. Покажите, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$ существует алгоритм, который для каждого слова u по номеру $\gamma_i(u)$ возвращает номер $\gamma_j(u)$.

Задание 6.3. Покажите, что следующие множества слов над алфавитом языка исчисления предикатов сигнатуры арифметики разрешимые, построив подходящие схемы кусочно-возвратной рекурсии:

(a) множество термов Term;

(b) множество формул Form;

(c) множество Δ_0-формул Δ_0Form;

(d) множество Σ-формул ΣForm;

(e) множество формул с ограниченными кванторами RQForm.

Задание 6.4. Покажите, что следующие отношения вычислимые, построив подходящие схемы кусочно-возвратной рекурсии:

(a) $R_1(i, m)$ — «переменная x_i входит в терм с номером m»;

(b) $R_2(i, n)$ — «существуют свободные вхождения переменной x_i в формулу с номером n»;

(c) $R_3(m, i, n)$ — «подстановка терма с номером m вместо переменной x_i в формулу с номером n допустимая».

Задание 6.5. Покажите, что следующие множества формул разрешимые:

(a) множество атомарных формул;

(b) множество бескванторных формул;

(c) множество $\forall$-формул;

(d) множество $\exists$-формул;

(e) множество позитивных формул;

(f) множество свободных переменных данной формулы;

(g) множество предложений, т. е. формул без свободных переменных;

(h) множество тождеств, т. е. формул вида $\forall \overline{x}\, \varphi(\overline{x})$, где $\varphi(\overline{x})$ — атомарная формула;

(i) множество квазитождеств, т. е. формул вида

$$\forall \overline{x}\, ((\varphi_1(\overline{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\overline{x})) \to \varphi_0(\overline{x})),$$

где $\varphi_i(\overline{x})$, $i \leqslant n$ — атомарные формулы.

Задание 6.6. Покажите, что следующие функции являются вычислимыми:

(a) возвращающая по натуральному числу n геделевский номер терма $\mathbf{n} = s(\ldots(s(0))\ldots)$, в котором функциональный символ s встречается n раз;

(b) возвращающая по номеру формулы $\gamma(\varphi)$, индексу i переменной x_i и номеру терма $\gamma(t)$ номер формулы, получающейся из φ заменой каждого свободного вхождения переменной x_i термом t;

(c) возвращающая по номеру формулы $\gamma(\varphi)$ номер формулы, получающейся из φ заменой каждого квантора существования квантором всеобщности;

(d) возвращающая по номеру формулы $\gamma(\varphi)$ количество вхождений константы 0 в φ;

(e) возвращающая по номеру формулы $\gamma(\varphi)$ номер формулы, получающейся из φ заменой каждой подформулы вида $\neg\neg\psi$ на формулу ψ.

Задание 6.7. Используя задание 5.28, покажите, что следующие множества формул являются разрешимыми:

(a) множество аксиом ГИП вида $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$;

(b) множество аксиом ГИП вида $(\neg\neg\varphi \to \varphi)$;

(c) множество аксиом ГИП, получающихся по схемам (2)–(9);

(d) множество аксиом ГИП вида $(\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t))$;

(e) множество аксиом ГИП вида $(\varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x))$;

(f) множество аксиом ГИП без равенства;

(g) множество аксиом ГИП с равенством.

Задание 6.8. Покажите, что следующие отношения вычислимые:

(a) $\mathrm{Rl}_1(x, y, z)$ — «формула с номером x получается из формул с номерами y и z по правилу вывода (I)»;

(b) $\mathrm{Rl}_2(x, y)$ — «формула с номером x получается из формулы с номером y по правилу вывода (II)»;

(c) $\mathrm{Rl}_3(x, y)$ — «формула с номером x получается из формулы с номером y по правилу вывода (III)».

Задание 6.9. Используя задание 5.29, покажите, что множество формул сигнатуры арифметики, выводимых в ГИП, перечислимое.

Задание 6.10. Пусть Γ — перечислимое множество предложений сигнатуры арифметики. Используя задание 5.29, покажите, что множество формул, выводимых в ГИП из Γ, перечислимое.

Задание 6.11. Верно ли, что множество формул сигнатуры арифметики, для которых существует вывод в ГИП из пустого множества

посылок с не более чем тремя переходами по правилам вывода, является разрешимым? Перечислимым?

Задание 6.12. Для любого множества предложений Γ сигнатуры арифметики пусть $T(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \rhd \varphi\}$ — *теория* с множеством аксиом Γ. Докажите, что для любого перечислимого множества предложений Γ сигнатуры арифметики существует вычислимое множество предложений Γ' такое, что $T(\Gamma) = T(\Gamma')$.

Задание 6.13. Пусть $T = T(\Gamma)$ — полная теория сигнатуры арифметики с перечислимым множеством аксиом Γ. Докажите, что T разрешима.

Задание 6.14. Пусть Γ — множество аксиом арифметики Пеано. Докажите, что теория $T(\Gamma)$ неразрешимая.

Задание 6.15. Пусть Γ — перечислимое множество предложений, расширяющее множество аксиом арифметики Пеано. Докажите, что теория $T(\Gamma)$ неразрешимая.

Задание 6.16. Докажите, что множество формул сигнатуры арифметики, выводимых в ГИП, неразрешимое (теорема Черча).

Задание 6.17. Приведите примеры подмножеств $A \subseteq \mathbb{N}$,

(a) являющихся вычислимо перечислимыми, но не являющихся вычислимыми;

(b) не являющихся вычислимо перечислимыми.

Глава 7

Указания и наброски решений

1.11. Используйте рекомендации из задания 1.4 (h), в качестве промежуточной формулы φ выберите эквивалентную доказываемой, но более удобную для построения вывода.

1.12. Аналогично заданию 1.11.

1.26. Обратите внимание на множества свободных переменных множеств формул, входящих в правило вывода над и под чертой.

1.27. Аналогично заданию 1.26.

1.30. Для условия (а) рассмотрите формулу $\varphi(x)$ с одной свободной переменной x, истинную ровно на одном элементе m неодноэлементной системы $\mathcal{M}$, а в качестве ψ возьмите ту же формулу $\varphi(x)$. Для условия (б) также можно взять $\varphi(x)$ и ψ одинаковыми, например, $\neg[x \approx y]$. Условие (в) рассматривается аналогично доказательству тождественной истинности аксиом по схеме (11). Для условия (г) можно рассмотреть $\Gamma = \{(\psi \to \varphi(x))\}$, где ψ — тождественно истинное предложение, $\varphi(x)$ — формула из условия (а).

2.2. Например, неопределимо отношение $\{\{0\}\}$.

2.8. Используйте стандартную индукцию по длине формулы.

2.10. Аналогично 2.8.

2.12. Например, предложение $\exists x\, \exists y\, (f(x) \approx f(y) \wedge \neg x \approx y)$, в качестве структуры можно взять унар, полученный добавлением к стандартному $\langle \omega, s \rangle$ пары элементов a, b с условием $s(a) = s(b) = 0$.

2.13. Сначала постройте саму формулу исчисления высказываний (это матрица исходной формулы), если она не является тождественно истинной, то в качестве опровергающей модели можно взять множество всех термов данного языка, подходящим образом интерпретируя предикатные символы.

2.15. (а) Формула утверждает, что если отношение P задает частичный порядок, то в структуре есть минимальный элемент.

(b) Формула утверждает, что если интерпретацией символа $\cup$ задана полурешетка $(M, \cup)$, то в ней есть наибольший элемент.

2.17. (d) На множестве $M = \{0, 1\}$ рассмотрите два возможных порядка и тождественное отображение из одного частично упорядоченного множества в другое. Это отображение монотонное, т. е. является гомоморфизмом.

2.24. Используйте индукцию по длине формулы, желательно явно указать правила построения позитивных формул (начиная с атомных). Для непозитивных формул рассмотрите эпиморфизм, отображающий все элементы в один.

2.29. Используйте финитарность выводов (если какая-то формула доказана из гипотез, то использовано лишь конечное число гипотез).

2.30. Используйте теорему о существовании модели.

2.32. Воспользуйтесь 2.30, отсутствием конечных моделей и (при необходимости) теоремой Мальцева о расширении. Теория равенства имеет конечные модели, неполна, но категорична в любой бесконечной мощности.

2.33. Воспользуйтесь стандартными свойствами непротиворечивых множеств и полнотой Г.

2.34. Нет, это неверно для любого неполного Г, причем можно обойтись и без добавления новых констант.

2.36. (a) Такие группы (по сложению) можно рассматривать как векторные пространства над полем рациональных чисел, а с точностью до изоморфизма есть лишь одно такое пространство первой несчетной мощности ω_1. Поэтому эта теория ω_1-категорична.

(b) Эта теория ω-категорична.

(c) Модели этой теории выглядят как наборы попарно непересекающихся копий унара $\langle \omega, s \rangle$, поэтому сама теория ω_1-категорична.

(d) Каждая счетная модель этой теории изоморфна подходящей комбинации вида $\omega + \mathcal{Z} \times \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ — не более чем счетное линейно упорядоченное множество, а $\mathcal{Z}$ — линейно упорядоченное множество целых чисел. Каждая такая модель элементарно вкладывается в специальную модель этой теории вида $\omega + \mathcal{Z} \times \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q}$ — (плотное) линейно упорядоченное множество рациональных чисел (для этого рекомендуется использовать задание 2.45), поэтому все ее счетные модели элементарно эквивалентны.

(e) Эта теория ω_1-категорична.

(f) Эта теория ω-категорична.

2.37. Элементарны лишь вложения в пунктах (d), (e). Для обоснования (d) достаточно использовать теорему Мальцева о расширении и указание 2.36 (e). Для обоснования (e) дополнительно надо рассмотреть

случай, когда ранг большей группы конечен (это в точности ранг соответствующего ей векторного пространства). Обе группы элементарно вложимы в (единственную) делимую абелеву группу A_{ω_1} без кручения ранга ω_1, причем любые два изоморфных вложения из них в A_{ω_1} сопряжены автоморфизмом последней. Поэтому каждое изоморфное вложение (группы конечного ранга) в нее элементарное, этого достаточно.

2.41. Ненулевые конечные мощности, счетная мощность, мощность континуума. Промежуточные (меньшие континуума) несчетные мощности невозможны (используйте свойства непротиворечивых множеств формул).

2.44. Рассмотрите диаграммы моделей B и C, их объединение и установите его непротиворечивость.

2.45. Проверку определения элементарности вложения рекомендуется осуществить индукцией по длине формулы, основным является случай, когда $\varphi(\overline{x})$ есть $\exists y\, \psi(y, \overline{x})$. Если на кортеже элементов структуры $\mathcal{A}_i$ выполнена φ в структуре $\mathcal{A}$, то для некоторых $j \in I$, $b \in A_j$ выполнено $\mathcal{A} \models \psi(b, \overline{a})$, в силу индукционного предположения $\mathcal{A}_j \models \psi(b, \overline{a})$. Тогда для подходящего $l \in I$ имеем $l > i, j$. Поэтому $\mathcal{A}_l \models \psi(b, \overline{a})$, $\mathcal{A}_l \models \varphi(\overline{a})$, а тогда и $\mathcal{A}_i \models \varphi(\overline{a})$.

2.46. Не имеет элементарно универсальной модели любая полная теория с континуальным множеством типов, примером служит элементарная теория поля вещественных чисел.

2.47. Существует континуум таких расширений.

2.48. Системой аксиом для класса $\mathrm{Mod}(\Phi) \cup \mathrm{Mod}(\Psi)$ является множество $\{\varphi \vee \psi : \varphi \in \Phi,\ \psi \in \psi\}$.

2.49. Это следствие теоремы Лося.

2.50. Пусть A — система аксиом для данного класса и c — новый константный символ. Множество формул $\Gamma = T \cup A \cup p(c)$ совместно по локальной теореме Мальцева, его модель не лежит в классе (ибо тип p реализован и лежит в $\mathrm{Mod}(A)$), противоречие.

2.51. Можно использовать теорему Мальцева о расширении.

2.53. Теории ясны из контекста, в качестве типа P можно выбрать

(a) множество бескванторных предложений, утверждающее, что характеристика поля равна нулю;

(b) множество формул от одной переменной x, утверждающее, что элемент x трансцендентен (не является алгебраическим);

(c) $P(x, y)$ — $\{mx < ny : m, n > 0 \wedge m/n < \pi\} \cup \{mx > ny : m, n > 0 \wedge m/n > \pi\} \cup \{x > 0, y > 0\}$.

2.54. Если A — система аксиом для класса вполне упорядоченных множеств, то множество $\Gamma = A \cup \{c_{n+1} < c_n : n \in \mathbb{N}\}$ локально совместно и несовместно, противоречие. Что касается ультрапроизведений, то с использованием теоремы Лося можно показать, что ультрапроизведение семейства конечных порядков $L_n = (\{x \in \mathbb{N} : x < n\}, \leqslant)$, $n \in \mathbb{N}$, по неглавному ультрафильтру D над ω имеет строго убывающую цепь элементов.

2.56. (e) Класс унаров, обладающих хотя бы одним циклом, неаксиоматизируем.

3.30. По сюръекции $f : y \to x$ построим семейство Y прообразов $\{f^{-1}(a)\}_{a \in x}$ (используется схема аксиом подстановки, Y является функцией из x в $P(y)$). Суперпозиция этой функции и функцией выбора для y (из $P(y) \setminus \{\varnothing\}$ в y) является требуемой инъекцией из x в y.

3.40. От противного, пусть α — минимальный первый элемент среди пар-контрпримеров (т. е. у остальных таких пар первые элементы не меньше α), а β выбран минимальным среди правых элементов контрпримеров, у которых первым элементом служит α. Тогда для всех $\gamma \in \alpha$ должно выполняться $\gamma \in \beta$, т. е. $\alpha \subseteq \beta$. Проверка $\beta \subseteq \alpha$ аналогична, поэтому $\alpha = \beta$, противоречие.

3.41. Если α — предельный ординал, то утверждение следует из определений и свойств β^+. Если же α не является предельным, то среди его элементов есть наибольший β (по определению предельности и 3.40). Тогда сравнение β^+ и α показывает, что они равны.

3.43. Достаточно установить, что $\bigcup S$ — ординал. Его транзитивность проверяется по определению, а его элементы являются ординалами по 3.37.

3.54. Покажите, что $\epsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$.

3.58. Конечность по Дедекинду конечных множеств доказывается по индукции (достаточно установить ее для самих конечных ординалов). Если же множество x бесконечно, то его можно вполне упорядочить и применить теорему о сравнении для пары вполне упорядоченных множеств ω и $(x, \leqslant)$: получим, что ω подобно начальному отрезку x. Пусть $f : \omega \to x$ — соответствующее вложение. Поскольку ω равномощно $\omega \setminus \{0\}$, x равномощно $x \setminus \{f(0)\}$.

3.69. Например, $(1+1) \times \omega - \omega \neq 1 \times \omega + 1 \times \omega$.

3.73. Единственность проще установить по трансфинитной индукции, для поиска надо доказать $\gamma - \sup\{\gamma' \leqslant \beta : \alpha + \gamma' \leqslant \beta\}$.

3.78. (c) Покажите, что $\alpha - \gamma x$, а $\beta - \gamma y$ для некоторых ординала γ и натуральных чисел x и y.

3.79. Достаточно заметить, что x должен быть конечным. Поэтому $y = \omega^2 + 2$.

3.81 Используйте принцип трансфинитной индукции.

3.82 Можно использовать множества W_α из задания 3.81.

4.4. Достаточно заметить, что получающиеся функции существенно унарные, т. е. зависят только от одного своего аргумента, и можно считать, что функции I_m и o встречаются только на первом шаге построения функции из простейших.

4.5. Покажите, что любая функция f из указанного замыкания обладает «свойством невозрастания»

$$x_1, \ldots, x_n \leqslant 1 \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 1,$$

которым не обладает функция s.

4.10. Для каждого $\imath$, $0 \leqslant \imath \leqslant g(\overline{x})$, с помощью функции $\overline{\mathrm{sg}}$ проверяем, выполняется ли условие $f(\overline{x}, \imath) = 0$. С помощью функции из задания 4.7 (f) организуем «счетчик проверенных значений», принимающий значение 1 до тех пор, пока не выполнится условие $f(\overline{x}, \imath) = 0$, и значение 0 с наименьшего $\imath$, при котором это условие выполняется. С помощью функции из задания 4.7 (e) суммируем количество проверок до первой успешной.

4.14. Покажите, что

$$c(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x,$$

и используйте задание 4.13 для доказательства примитивной вычислимости.

4.17. Рассмотрите функцию β, определенную по правилу

$$\beta(x, y) = \mathrm{rest}(l(x), 1 + r(x)(1+y)),$$

и покажите, что для любой последовательности $a_0, \ldots, a_n$ натуральных чисел существует (не обязательно единственное) решение x системы уравнений

$$\beta(x, 0) = a_0, \ldots, \beta(x, n) = a_n.$$

Для доказательства можно использовать такой известный факт из теории чисел, как Китайская теорема об остатках, а для доказательства примитивной вычислимости — задание 4.13.

4.22. Сравните мощность множества подмножеств множества натуральных чисел с мощностью множества частично вычислимых функций, найденной в задании 4.21.

4.24. Например, из простейшей функции s с помощью оператора минимизации можно получить нигде не определенную функцию: $g(x) = \mu y\,[s(y) = 0]$.

4.27. Проанализируйте доказательство примитивной вычислимости функции Геделя из задания 4.17 и внесите изменения, если потребуется.

4.28. Замените применение оператора примитивной рекурсии поиском кода набора $h(\overline{x}, 0), \ldots, h(\overline{x}, y)$ для каждого y.

4.36. Перечисляющая функция получается поиском следующего по возрастанию элемента множества с помощью минимизации. Проверка принадлежности числа x множеству осуществляется последовательным сравнением со значениями функции $f(0), f(1), \ldots$, пока не выполнится условие $f(i) \geqslant x$.

4.38. Это множество либо конечное, либо совпадает со множеством натуральных чисел (заметим, что данное решение не дает алгоритма проверки принадлежности множеству).

4.41. Достаточно «удалить» повторяющиеся значения, например, с помощью оператора минимизации.

4.42. Используйте задание 4.40 или 4.41.

4.51. В пунктах (c) и (d) полезно воспользоваться теоремой о совпадении классов частично вычислимых функций и функций, вычислимых на машинах (Шенфилда, Тьюринга и т. п.), и организовать проверку условий через пошаговое выполнение вычислений машиной.

4.52. Необходимо проверить принадлежность множеству C. В случае положительного результата параллельно запускаются перечисления множеств A и B (такая же идея использовалась при доказательстве теоремы Поста).

5.3. Рассмотрите произвольные биекции между множеством натуральных чисел и множествами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ и определите операции на этих множествах так, чтобы каждая из биекций осуществляла изоморфизм. Полезно явно описать операции s и $+$ для стандартного способа задания биекции между натуральными и целыми числами.

5.8. Определите операцию s так, чтобы нарушались предложения из задания 5.9. Операции $+$ и $\cdot$ можно определить так, чтобы нарушались предложения из задания 5.10.

5.9. Следует из задания 5.8.

5.10. Также следует из задания 5.8 при соответствующем определении бинарных операций.

5.14. Можно, например, построить ультрастепень большой мощности или ультрастепень с бесконечной убывающей цепью.

5.16. Здесь и далее необходимо использовать подходящие аксиомы индукции. Например,

$$(\neg[0 \approx s(0)] \wedge (\neg[x \approx s(x)] \to \neg[s(x) \approx s(s(x))])) \to \forall z \neg[z \approx s(z)]$$

для первого предложения задания 5.9.

5.35. Воспользуйтесь элиминацией примитивной рекурсии из задания 4.28.

5.36. Примитивно вычислимые представления функций построены в заданиях 4.7 и 4.8. Используйте задание 5.34 и при необходимости задание 5.35.

5.37. Аналогично заданию 5.36.

6.5. Аналогично заданию 6.3 (b), но проверяется вид формулы. Например, в п. (a) необходимо проверить, что формула имеет вид $t \approx s$ или $t \leqslant s$, где t и s — термы. В терминах введенной геделевской нумерации данная проверка описывается формулой

$$(l(n) = 5 \vee l(n) = 6) \wedge \mathrm{Term}(lr(n)) \wedge \mathrm{Term}(rr(n)),$$

где $\mathrm{Term}(x)$ — формула из задания 6.3, говорящая, что x — номер терма. В п. (g) для проверки отсутствия свободных вхождений переменных можно воспользоваться отношением R_2 из задания 6.4 и наблюдением, что номер формулы больше номеров входящих в нее переменных. Поэтому Δ_0-формула

$$(\mathrm{Form}(n) \wedge \forall \imath \leqslant n \neg R_2(\imath, n))$$

истинна тогда и только тогда, когда n — номер предложения.

6.6. Для вычисления номеров формул, получающихся из исходных заменой, необходимо найти заменяемые фрагменты и описать результат замены. Для этого удобно воспользоваться схемой кусочно-возвратной рекурсии. Например, в п. (b) при $l(n) = 1$ и $r(n) = \imath$ значением функции является $\gamma(t)$, а при $l(n) = 0$ или $l(n) = 1$ и $r(n) \neq \imath$ — $\gamma(\varphi)$. В оставшихся случаях осуществляется подстановка в подтермы или подформулы, из которых формула строится с использованием тех же правил построения. Значит, $f(n, \imath, m)$ описывается такой схемой кусочно-возвратной рекурсии:

$$\begin{cases} m, & l(n) = 1 \text{ и } r(n) = \imath, \\ c(l(n), f(r(n), \imath, m)), & l(n) = 2, 10 \\ c(l(n), c(f(lr(n), \imath, m), f(rr(n), \imath, m))), & 3 \leqslant l(n) \leqslant 9, \\ c(l(n), c(lr(n), f(rr(n), \imath, m))), & l(n) = 11, 12 \text{ и } lr(n) \neq \imath, \\ n & \text{иначе.} \end{cases}$$

6.7. Для схем (1)–(10) достаточно выяснить, с помощью каких связок построена формула, и убедиться, что соответствующие подформулы совпадают. Например, в п. (b) проверяем, что старшая связка — импликация, посылка начинается с двух отрицаний, а далее следует та же формула, что и в заключении:

$$(l(n) = 9 \wedge llr(n) = lrlr(n) = 10 \wedge rr(n) = rrlr(n)).$$

Для схем (11) и (12) используются задания 6.4 и 6.6 для проверки допустимости подстановки и того, что подформулы получаются друг из друга подстановкой терма вместо переменной. Номера заменяемой переменной и заменяющего терма не превосходят номер формулы.

6.9. Запишите Σ-формулу, говорящую, что найдутся $m, i \in \mathbb{N}$ такие, что вывод данной формулы в ГИП состоит из формул с номерами $\beta(m, 0), \ldots, \beta(m, i)$.

6.10. Воспользуйтесь заданием 6.9, теоремой о дедукции и тем фактом, что в выводе используется только конечное число посылок из Γ.

6.12. В качестве Γ' можно взять конъюнкции $(\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\gamma(\varphi_i) = f(i)$ и f — функция, перечисляющая номера аксиом из Γ. Остается воспользоваться заданием 4.36.

6.16. Можно заметить, что теория A_0 конечно аксиоматизируемая, и использовать задание 5.42.

6.17. Используйте задание 6.14 и теорему Поста.

Учебное издание

Кравченко Александр Владимирович
Кудинов Олег Викторович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ
(исчисление предикатов, теория моделей, теория вычислимости)

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалева*

Подписано в печать 25.11.2014 г.
Формат 60 x 84/16. Уч.-изд. л. 4,75. Усл. печ. л. 4,42.
Тираж 200 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

ISBN 978-5-4437-0314-5