《微分方程数值解》大作业（二）

——抛物型方程几种最简差分格式

编程计算：分别采用向前差分格式、向后差分格式、六点对称格式求解如下抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad (x,t)\in\Omega$$

其中a、$f(x,t)$、Ω 及初边条件为：

1． $a=\frac{1}{16},\ f(x,y)=0,\ \Omega=\{(x,t)\,|\,0<x<1;\ 0<t<1\}$，

且初边条件如下：$\begin{cases}u(x,0)=2\sin(2\pi x),\ 0<x<1;\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t<1.\end{cases}$

存在精确解为： $u(x,t)=2e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}\sin(2\pi x)$.

2． $a=1,\ f(x,y)=2,\ \Omega=\{(x,t)\,|\,0<x<1;0<t<2\}$，

且初边条件如下：$\begin{cases}u(x,0)=\sin(\pi x)+x(1-x),\ 0<x<1;\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0.\end{cases}$

存在精确解为： $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+x(1-x)$

数值测试验证及方法数值比较，内容包括（但不限）：

（1）各方法截断误差分析（讨论是否收敛及收敛阶，通过选取不同的步长，观测步长与误差的关系）；

（2）各方法舍入误差的分析（论方法的稳定性，通过选取不同的网比$r=\frac{a\tau}{h^2}$，τ,h分别为时间和空间步长计算，观察计算结果是否稳定）；

（3）各方法的数值比较。