

## 《微分方程数值解》大作业（一）

### ——椭圆型方程五点差分格式

编程计算：采用五点差分格式求如下椭圆型方程

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega;$$

其中  $f(x, y)$ 、 $\Omega$  及边条件为：

1.  $f(x, y) = 0$ ,  $\Omega = (1, 2) \times (0, 1)$ , 且边条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = 2 \ln x, & u(x, 1) = \ln(x^2 + 1), & 1 < x < 2; \\ u(1, y) = \ln(1 + y^2), & u(2, y) = \ln(4 + y^2), & 0 < y < 1. \end{cases}$$

问题存在精确解为：  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

2.  $f(x, y) = -4$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 2)$ , 且边条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2, & u(x, 2) = (x - 2)^2, & 0 < x < 1; \\ u(0, y) = y^2, & u(1, y) = (y - 1)^2, & 0 < y < 2. \end{cases}$$

问题存在精确解为：  $u(x, y) = (x - y)^2$

3.  $f(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ ,  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$ , 且边条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = \cos x, & u(x, \frac{\pi}{2}) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0, y) = \cos y, & u(\pi, y) = -\cos y, & 0 < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

问题存在精确解为：  $u(x, y) = \cos x \cos y$ .

请进行相关数值测试检验，比如

(1) 方法理论结果验证：截断误差分析（讨论是否收敛及收敛阶，

通过选取不同的步长，观测步长与误差的关系）。

(2) 不同求解离散系统的方法测试等。