

《微分方程数值解》大作业（三）

——双曲型方程最简差分格式

编程计算：求解如下双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \Omega$$

其中差分格式为：关于时间和空间的二阶偏导数均采用二阶中心差商逼近；系数 a 、计算区域 Ω 及初边条件为：

1. $a=1$, $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1; 0 < t < T\}$, 且初边条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x), u_t(x, 0) = 0, 0 < x < 1; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t > 0; \end{cases}$$

存在精确解为： $u(x, t) = \cos(\pi t) \sin(\pi x)$

2. $a = \frac{1}{16\pi^2}$, $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 0.5; 0 < t < T\}$, 且初边条件如下：

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \sin(4\pi x), 0 < x < 0.5; \\ u(0, t) = u(0.5, t) = 0, t > 0; \end{cases}$$

存在精确解为： $u(x, t) = \sin t \sin(4\pi x)$

自行选择最终时间 T 的取值。数值测试内容包括（但不限于）：

- (1) 数值解与精确解的比较；
- (2) 收敛性及稳定性的数值分析；
- (3) 稳定性条件数值测试和 Courant 条件分析；