华南理工大学
South China University of Technology

课程设计报告书

题目：微分方程数值解第三次大作业报告

学　院　数学学院

专　业　数学与应用数学

学生姓名　雷皓兰

学生学号　202130320717

指导教师　黄凤辉

课程编号

课程学分　3.0

起始日期　2023.11.18

教师评语	教师签名： 日期：
成绩评定	
备注	

双曲型方程最简差分格式

编程计算：求解如下双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (x,t) \in \Omega$$

其中差分格式为：关于时间和空间的二阶偏导数均采用二阶中心差商

（1）

1. $a = 1$, $\Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < 1; 0 < t < T\}$，且初边条件如下：

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0; \end{cases}$$

存在精确解为： $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$

取 T=1，采用显格式求解：

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

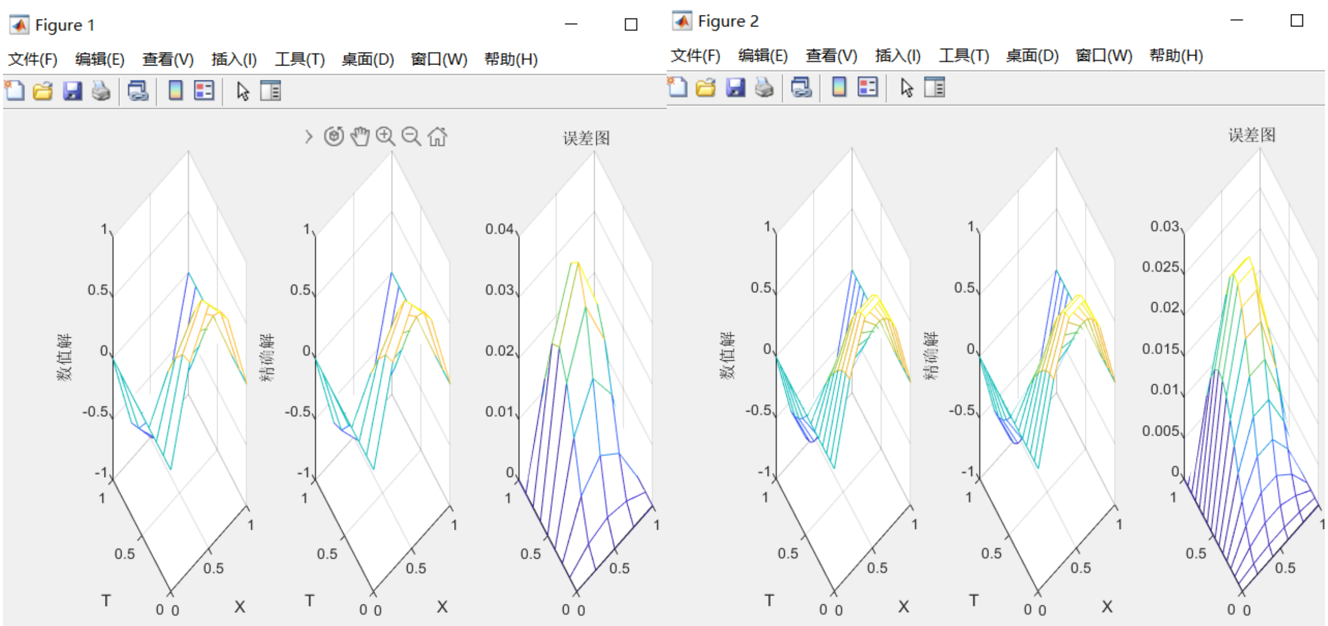
$$u_j^{n+1} = r^2(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + 2(1 - r^2)u_j^n - u_j^{n-1}$$

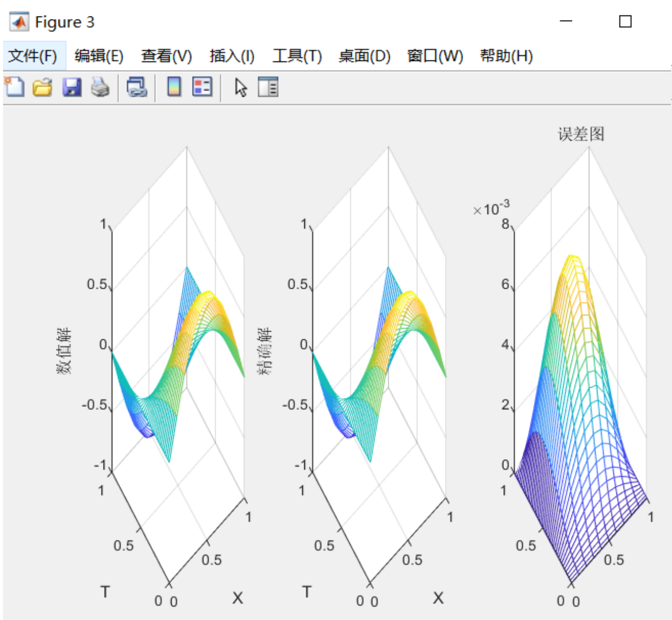
定义函数结构体后，主要求解代码：

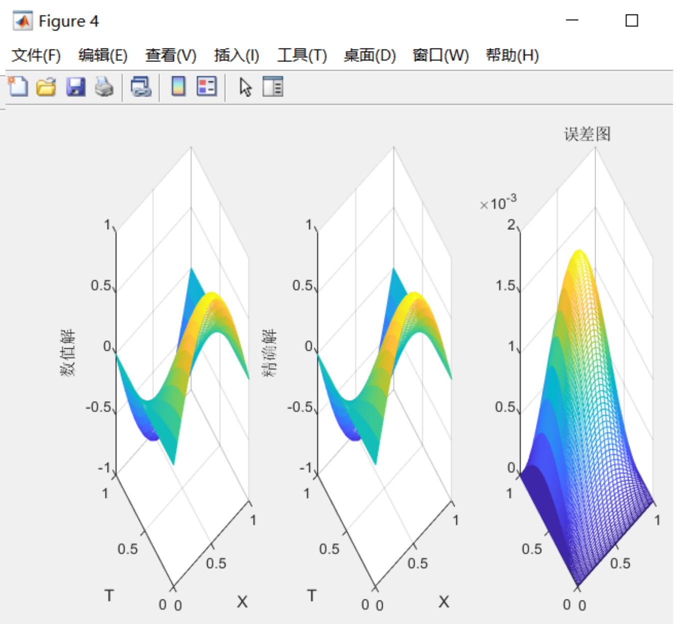
```
[X, h] = pde.space_grid(NS);
[T, tau] = pde.time_grid(NT);
N = length(X);
M = length(T);
r = pde.a()*tau/h;
if r >=1 && theta==0
   error('时间空间离散不满足显格式的稳定条件！')
end
r2 = r*r;
U = zeros(N,M);
% 初值条件
U(:,1) = pde.init_solution(X);
U(2:end-1,2) = r2/2*(U(1:end-2,1)+U(3:end,1)) + (1-r2)*U(2:end-1,1)...
    + tau*pde.init_dt_solution(X(2:end-1));
% 边值条件
```

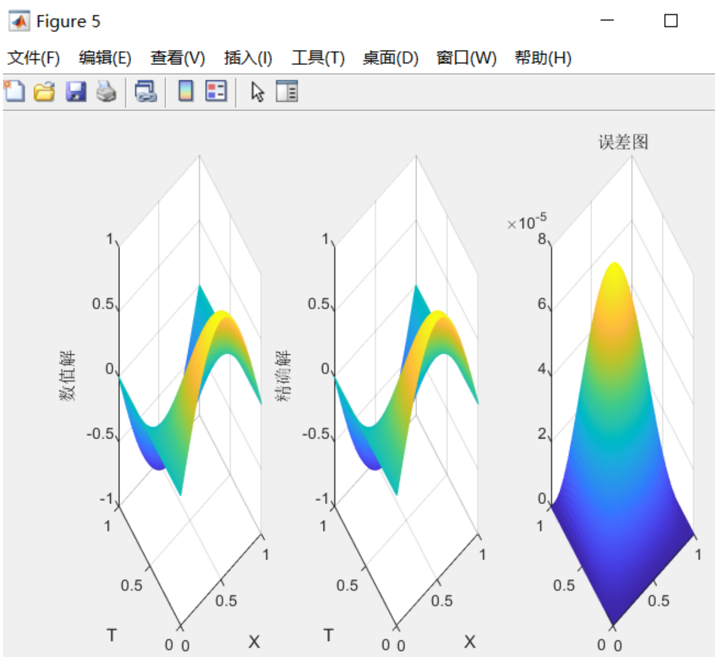
```
U(1,:) = pde.left_solution(T);
U(end,:) = pde.right_solution(T);

d = 1 + 2*ones(N-2,1)*r2*theta;
c = -ones(N-3,1)*r2*theta;
A2 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);

d = 2 - 2*ones(N-2,1)*r2*(1-2*theta);
c = ones(N-3,1)*r2*(1-2*theta);
A1 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);

d = -1 - 2*ones(N-2,1)*r2*theta;
c = ones(N-3,1)*r2*theta;
A0 = diag(c,-1) + diag(c,1)+diag(d);
for i=3:M
    RHS = tau*tau*pde.source(X,T(i));
    RHS(2) = RHS(2) + *r2*U(1,i-1);
    RHS(end-1) = RHS(end-1) + r2*U(end,i-1);
    U(2:end-1,i) = A2\(A1*U(2:end-1,i-1) + A0*U(2:end-1,i-2)+RHS(2:end-1));
End,
```

取不同步长求解结果:

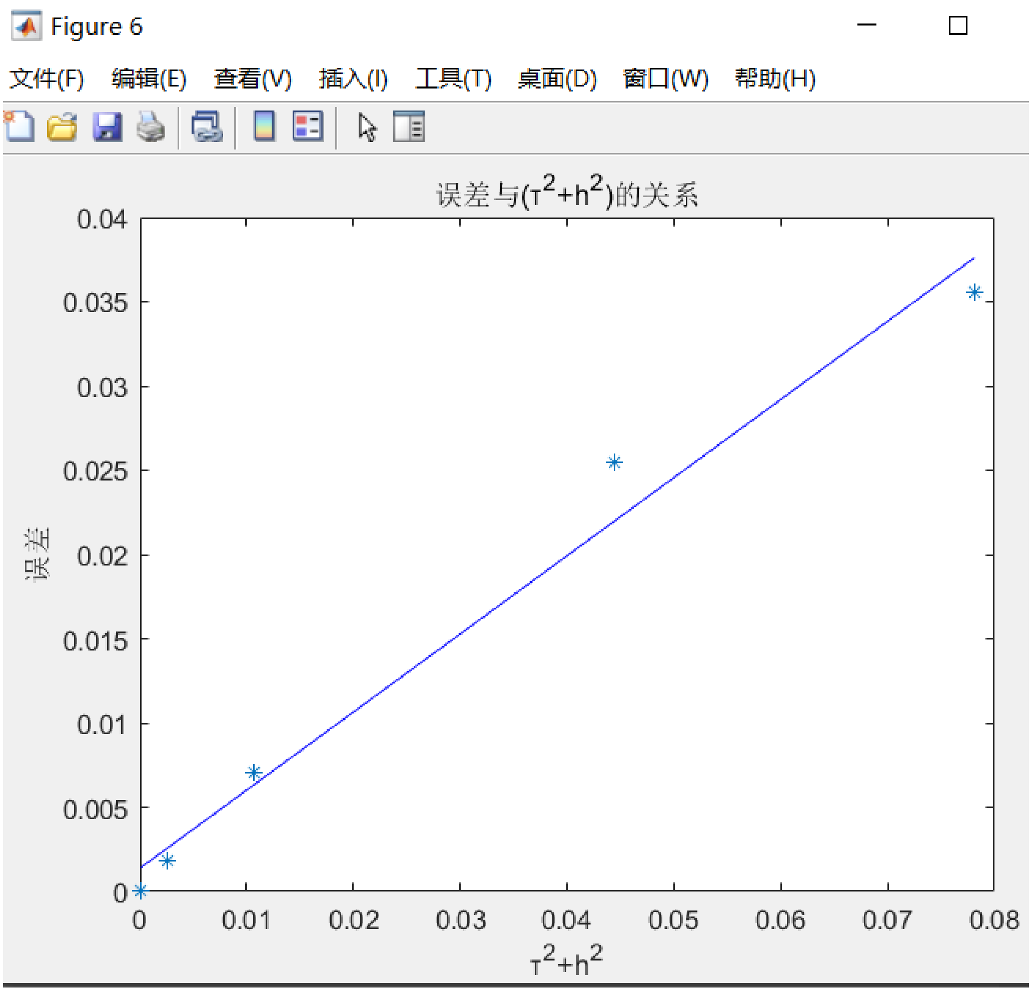








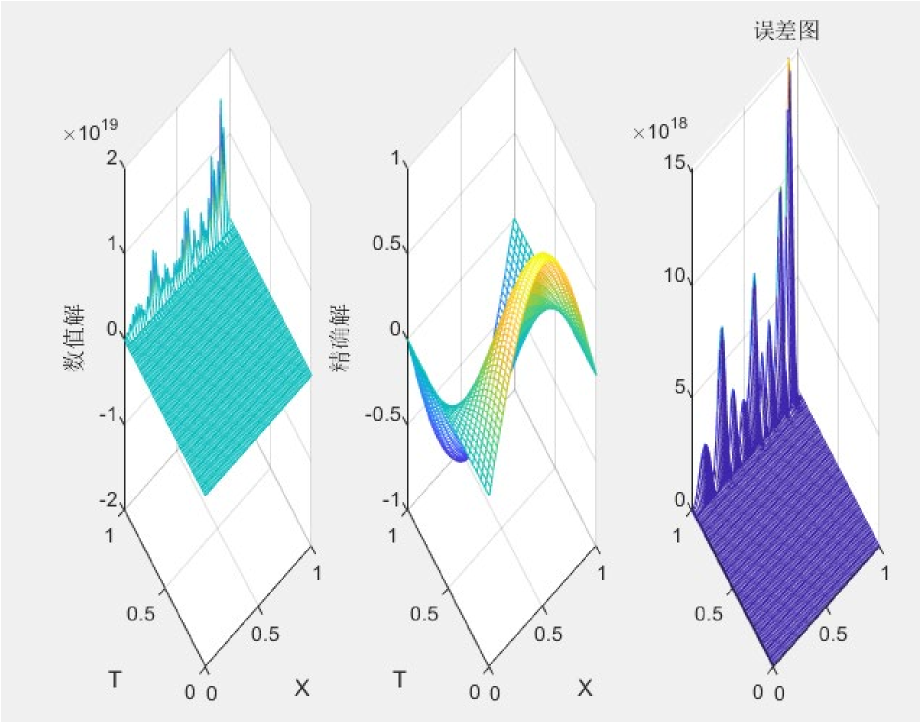
可见，本题的显格式及这么取值稳定。下面为步长的对数和误差的关系，二阶拟合如下：



可见该方法确实二阶收敛。

上述 h、τ 的取值均满足 aτ/h<1 的 Courant 条件（r=0.2,0.25，0.333,0.5，0.1），故稳定。

但当取值不满足稳定性条件时，如取 τ=500，h=100，运行结果如下：



可见若取值不满足稳定性条件，则结果不稳定。

（2）

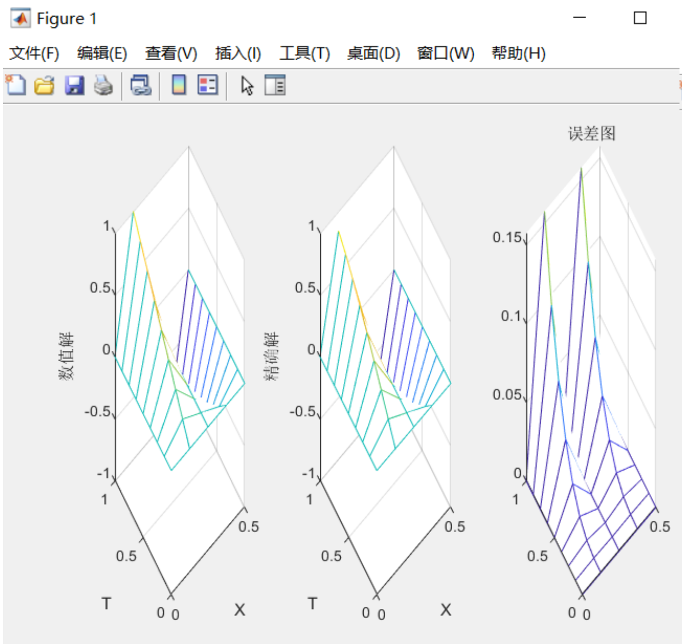
2. $a=\dfrac{1}{16\pi^2}$，$\Omega=\{(x,t)\,|\,0<x<0.5;0<t<T\}$，且初边条件如下：

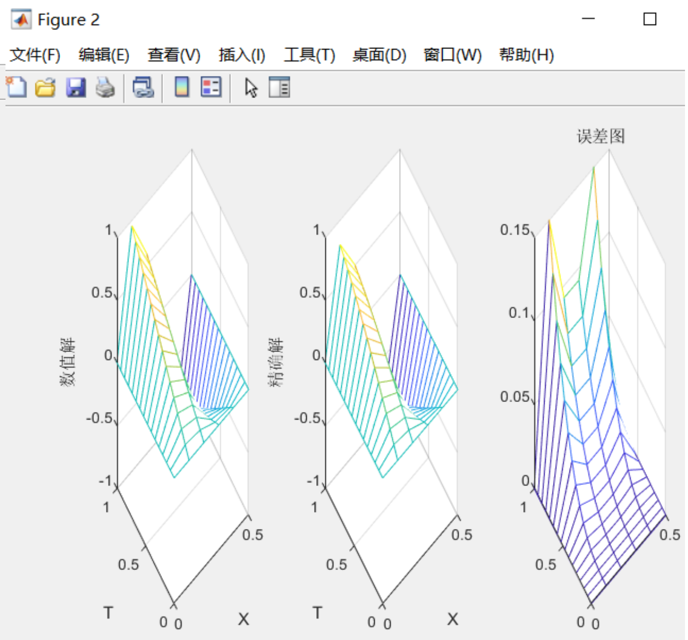
$$\begin{cases} u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin(4\pi x),\ 0<x<0.5; \\ u(0,t)=u(0.5,t)=0, \quad t>0; \end{cases}$$

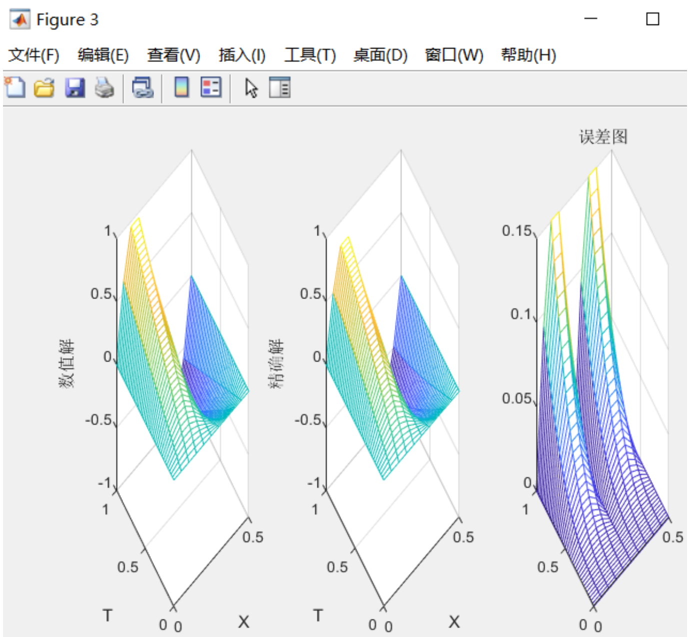
存在精确解为： $u(x,t)=\sin t\sin(4\pi x)$

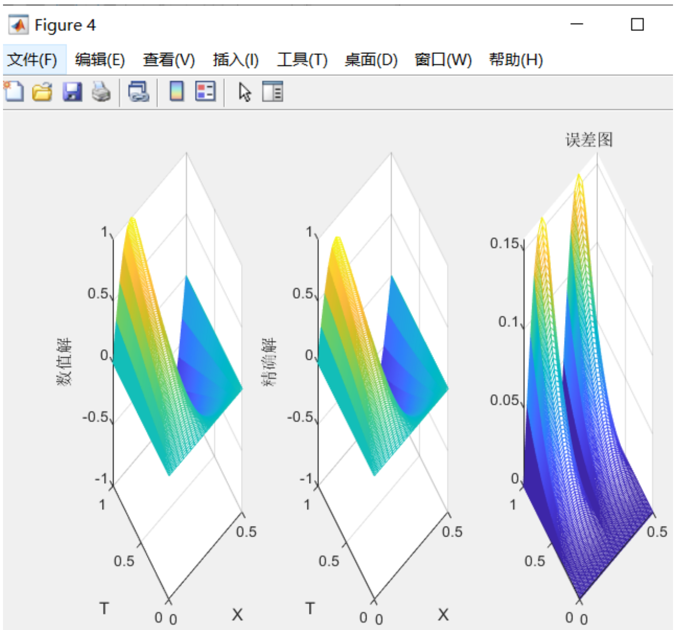
计算方法同上题类似，取 T=1，采用显格式求解，结果如下，

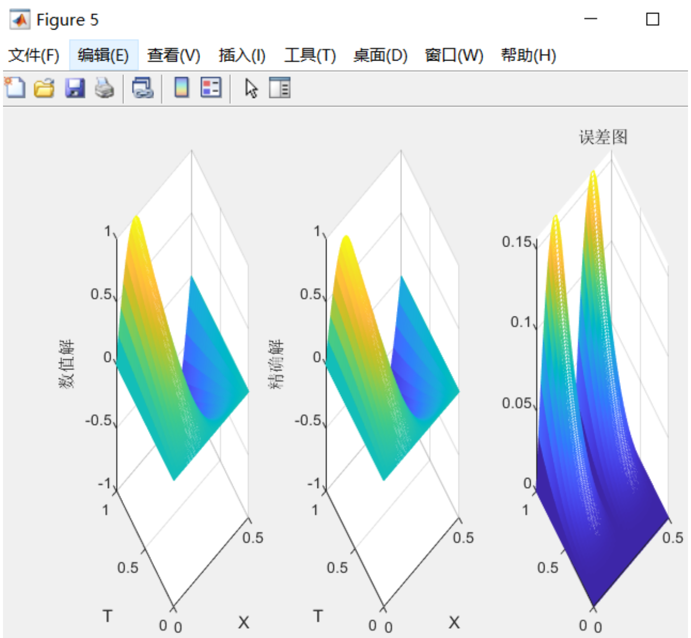
取不同步长计算结果：



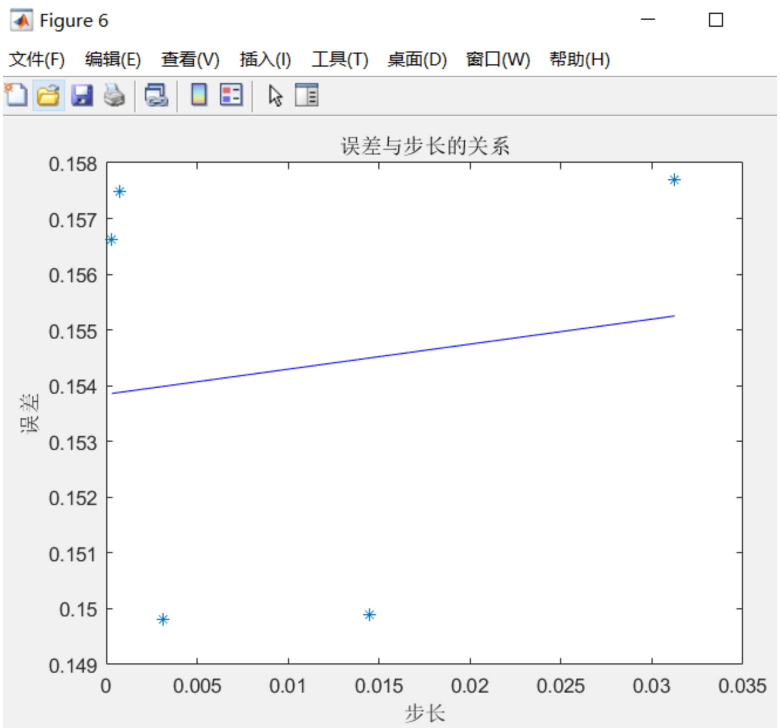




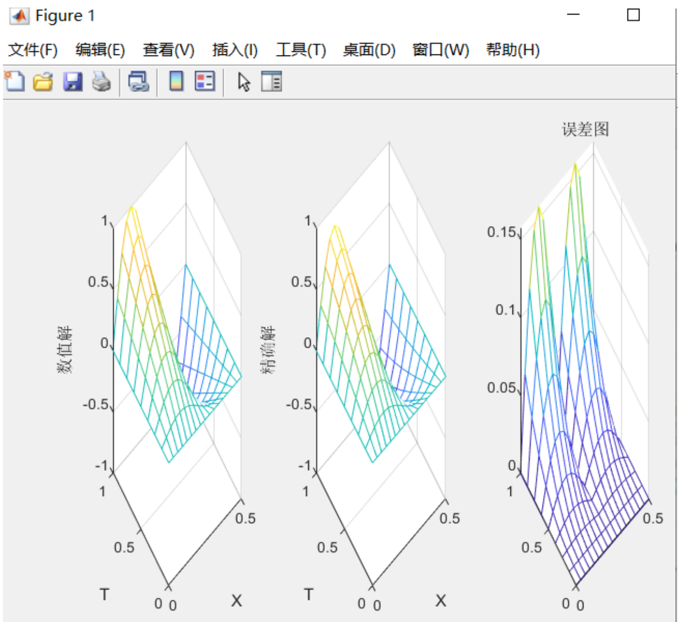


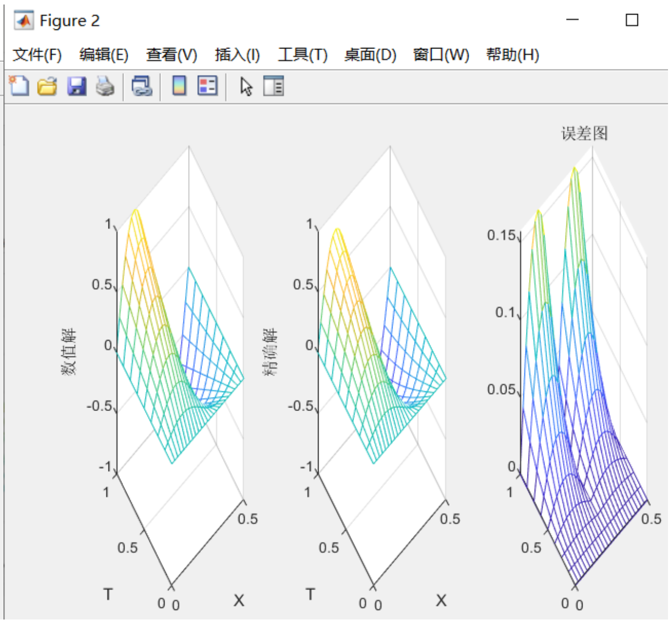


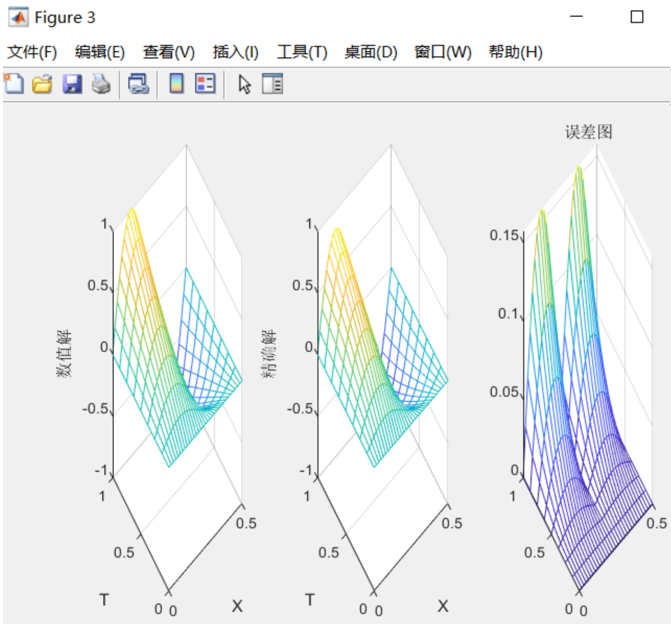
但是误差却没有做到很好的收敛，目前也没有找到原因：

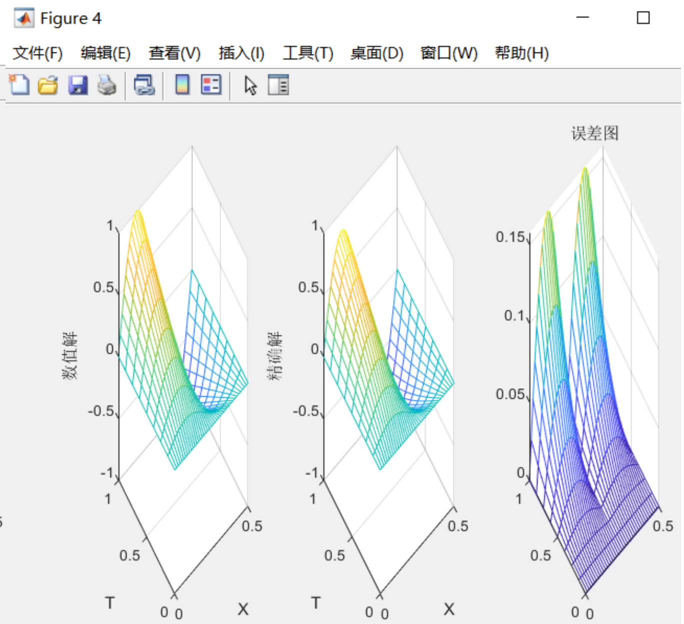


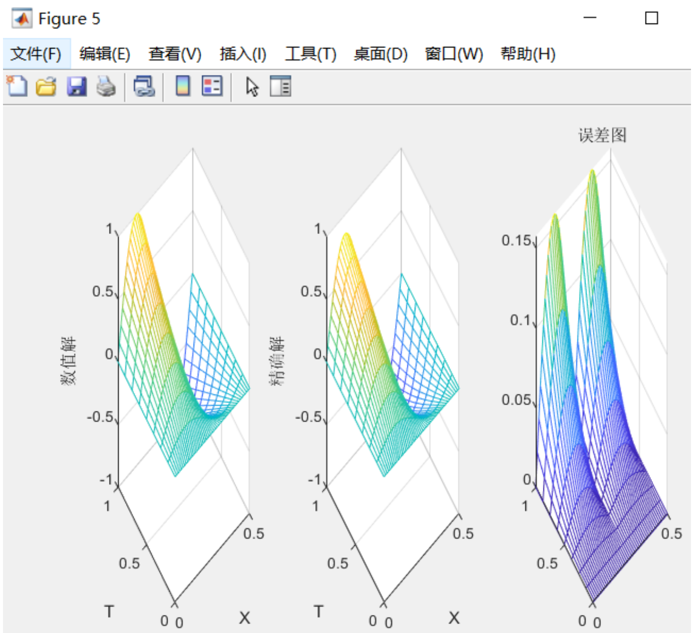
但本题中 h、 τ 的取值不满足 a τ /h<1 的 Courant 条件时，如分别取 a τ /h=2,3,4,5,6，结果仍然保持数值稳定。











原因尚且不清楚。可能是由数值计算方法的稳定性、数值计算的近似性以及实际问题的特性所导致的。

过程论述

参考书上理论知识，同时借鉴了网上的代码，经过不断地修改，完成了这次大作业。

总结

虽然一些双曲型方程不满足稳定性条件，但在实际数值计算中仍可能得到稳定的结果，如本次作业中的第二题。可能是由数值计算方法的稳定性、数值计算的近似性以及实际问题的特性所导致的。

参考文献

[1]《微分方程数值解》