education

［投稿］電磁気量の次元の一整理法

須賀 隆

まえがき

電磁気学が理解しにくい理由の1つとして，単位系の複雑さがあげられることがある。過去提案された単位系としては〈表1〉のようなものがあるが，最近はMKSA系に基づくSI単位系が普及したため，かつてのような混乱はなくなった。もはや単位系を提案する時代は終わったが，有理単位系と非有理単位系の関係および3元単位系と4元単位系の関係を整理するという視点は，現時点でも教育的に有意義であると考える。

SI単位系では立体角は補助単位に分類され，基本単位として扱うか，組立単位として扱うかは自由ということになっている[1]。立体角を独立次元をもつ物理量とみなす立場は，有理単位系と非有理単位系の関係を整理するために必要であるばかりでなく，後に〈図1〉に示すように，より一般的に電磁気量の次元の間の関係全体を整理する上からも有用であるが，〈表1〉によれば過去にくわしく議論されたことがないようである。本稿では，立体角を独立次元をもつ物理量とみなす立場をとって，各種単位系および電磁気量の次元の間の関係を整理してみたい。

立体角の導入

有理単位系と非有理単位系の公式に現われる係数4πの違いは，よく知られているように幾何学的なものである。もっとも端的にその由来を示しているのは，ガウスの定理(積分形)

有理単位系 $$\iint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=Q \quad (1a)$$

非有理単位系 $$\iint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=4\pi Q \quad (1b)$$

であろう。有理単位系では，単位点電荷が全空間に出す電束を単位電束と考え，非有理単位系では，単位点電荷が1ステラジアン(sr)に出す電束を単位電束と考えているわけである。そこで，立体角を独立次元とみてこれを書き直すと，

$$\iint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\Omega_2 Q \quad (1c)$$

となる。ただし，Ω_2は球面の全立体角である。$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$を考慮して次元解析を行うと，インピーダンスの次元の定数Ω_{u}と真空中の光速度c_0を用いて，

真空の誘電率

$$\varepsilon_0=\frac{\mathrm{sr}}{\Omega_{\mathrm{u}}\cdot c_0} \quad (2)$$

が得られる。さらに，

真空の透磁率

$$\mu_0=\varepsilon_0^{-1}c_0^{-2}=\frac{\Omega_{\mathrm{u}}}{\mathrm{sr}\cdot c_0} \quad (3)$$

真空の固有インピーダンス

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{\Omega_{\mathrm{u}}}{\mathrm{sr}}=4\pi\frac{\Omega_{\mathrm{u}}}{\Omega_2} \quad (4)$$

となる。電圧と電流の比[Ω]と電場と磁場の比[Ω/sr]では，次元が異なることに注意が必要である。

立体角を考慮した公式集

立体角を独立次元とみて，電磁気学の公式集を書き直してみた。幾何学的にあるべきところにΩ_2が現われている。この公式集のもとでは，有理単位系はΩ_2を数1とする単位系，非有理単位系はsrを数1とする単位系と位置づけられる。また，電流間の力の公式(6)とアンペアの定義とを比較して，$\Omega_{\mathrm{u}}=29.979\,245\,8\,\Omega$(厳密)を得る。

電荷間の力

$$f=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_2 Q}{4\pi r^2}Q'=\Omega_{\mathrm{u}}c_0\frac{QQ'}{r^2} \quad (5)$$

電流間の力

$$\mathrm{d}f=\mu_0\frac{\Omega_2 I}{2\pi r}I'=\frac{2\Omega_{\mathrm{u}}}{c_0}\frac{I\ I'}{r} \quad (6)$$

ローレンツ力

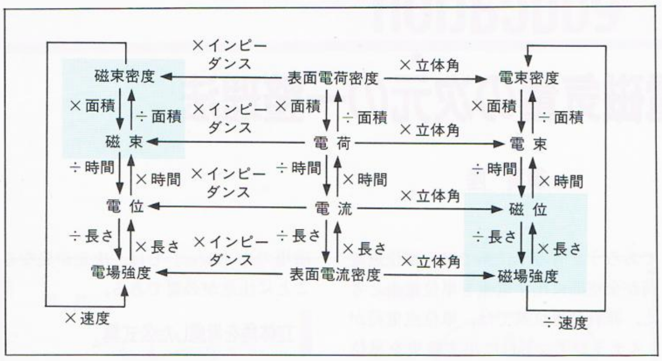
$$\boldsymbol{F}=Q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \quad (7)$$

電磁場のエネルギー密度

$$u=\frac{1}{2\Omega_2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \quad (8)$$

〈表1〉 過去に提案された単位系[2),3)]

独立次元数	名 称	独立した次元とする物理量
3元	CGS静電系	長さ，質量，時間
	CGS電磁系	長さ，質量，時間
	CGSガウス系	長さ，質量，時間
4元	CGS-Fr系	長さ，質量，時間，電荷
	CGS-Bi系	長さ，質量，時間，電流
	MKSμ系	長さ，質量，時間，透磁率
	MKSε系	長さ，質量，時間，誘電率
	MKVA系	長さ，質量，電圧，電流
	MKSΩ系	長さ，質量，時間，電気抵抗
	MKSC系	長さ，質量，時間，電荷
	MKSA系	長さ，質量，時間，電流
	VAMS系	電圧，電流，長さ，時間
5元	LMTQP$_*$系	長さ，質量，時間，電束，磁束
	LMTIϕ_*系	長さ，質量，時間，電流，磁束
	LMTIγ系	長さ，質量，時間，電流，電気と磁気の結合係数
	LMT$\varepsilon\mu$系	長さ，質量，時間，誘電率，透磁率



〈図1〉 電磁気量の次元の間の関係

ポインティングベクトル

$$S=\frac{1}{\Omega_2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{9}$$

電磁誘導の法則

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10}$$

電流と変位電流のつくる磁場

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\Omega_2\boldsymbol{J} \tag{11}$$

ガウスの定理(微分形)

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\Omega_2\rho\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases} \tag{12a,b}$$

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

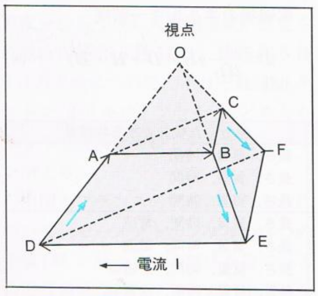
$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\end{cases} \tag{13a,b}$$

ポテンシャルが満たす方程式

$$\begin{cases}\Delta\phi-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\Omega_2\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \Delta\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\Omega_2\mu_0\boldsymbol{J}\end{cases} \tag{14a,b}$$

電磁気量の次元の間の関係

ここまでで話が終われば，ことさらあらためて本稿を投稿することもなかったであろう。ところが，上記公式集をもとに電磁気量の次元の関係図を作成したところ，〈図1〉に示すような興味深い図となったのである。



〈図2〉 磁位の説明図

〈表2〉 既存の単位系の位置づけ

独立次元数	名 称	位置づけ
3元	CGS 静電系 CGS 電磁系 CGS ガウス系	sr＝数1, $\Omega_u=c_0^{-1}$ sr＝数1, $\Omega_u=c_0$ sr＝数1, $\Omega_u=c_0^{-1}$, ただし〈図1〉のうす青色の部分を係数 c_0 だけ修正
4元	MKSA 系	Ω_2＝数1

“荷”に関する量をはさんで，電“場”に関する量と磁“場”に関する量が対称をなしており，またインピーダンスと立体角が“荷”の量から“場”の量を生成する上で対称な役割を担っている(うす青色の部分については後述)。一見複雑な電磁気量の次元が，整然と体系づけられるのである。

〈図1〉中，磁位＝電流×立体角となることが少々直観的にわかりにくいかもしれない。以下にその幾何学的解釈を説明しておく[4]。

1) 磁位には重ね合わせの原理が成立する

2) 回路を真横から見たときの磁位を0とする

ものとすると，〈図2〉の視点Oでの磁位は，3枚の側面による磁位の和，すなわち0である。一方これは，回路ABCと回路FEDによる磁位の和でもある。

よって，三角形の回路による磁位は，回路を流れる電流と，回路を見込む立体角の積に比例するといえる。任意の回路は三角形の重ね合わせで表現できるから，任意の回路についても同様のことがいえる。

視点が回路のまわりを1周すると，回路を見込む立体角は Ω_2 だけ変化する。1回巻き回路のまわりを n 周することと，n 回巻き回路のまわりを1周することは，位相幾何学的に同等であり，アンペア・ターンの“ターン”は Ω_2 のこととみなしてよい。

静電・電磁・対称単位系

〈図1〉を見ると，インピーダンスの次元を長さと時間から組み立てることにより，電磁気量の次元を整理し，独立な次元の数を1つ少なくできそうであ

る。実際，静電・電磁・対称単位系は，このような整理を行なった単位系と位置づけることができる。

i） 静電単位系

電荷間の力の公式(5)の右辺の係数が数1となるように$\Omega_u=c_0{}^{-1}$とおいた単位系で，〈図1〉中列と右列の量の$(\Omega_u c_0)^{1/2}$倍を新たに中列と右列の量と，左列の量の$(\Omega_u c_0)^{-1/2}$倍を新たに左列の量とよび[5]，このため電束密度/電場強度＝立体角となる。静電単位系の公式集は，前々節の公式集においてε_0＝srとしたものとなる。さらにsr＝数1とすると，ε_0＝数1になる。

ii） 電磁単位系

電流間の力の公式(6)の右辺の係数が数2となるように$\Omega_u=c_0$とおいた単位系で，〈図1〉中列と右列の量の$(\Omega_u/c_0)^{1/2}$倍を新たに中列と右列の量と，左列の量の$(\Omega_u/c_0)^{-1/2}$倍を新たに左列の量とよび[6]，このため磁束密度/磁場強度＝立体角$^{-1}$となる。電磁単位系の公式集は，前々節の公式集においてμ_0＝sr^{-1}としたものとなる。さらにsr＝数1とすると，μ_0＝数1になる。

iii） 対称単位系

静電単位系において，磁束および磁束密度のかわりにそのc_0倍を新たに磁束および磁束密度とよび，磁位および磁場強度のかわりにその$c_0{}^{-1}$倍を新たに磁位および磁場強度とよぶようにした単位系で，電束密度/電場強度＝立体角かつ磁束密度/磁場強度＝立体角$^{-1}$となる。対称単位系の公式集は，前々節の公式集においてε_0＝srとした上，A，Bが現われるところをすべて$c_0{}^{-1}A$，$c_0{}^{-1}B$で，Hが現われるところをすべて$c_0 H$で置き換えたものとなる。さらにsr＝数1とすると，$\varepsilon_0=\mu_0$＝数1になる。

まとめ

立体角を独立次元をもつ物理量とみなす立場から出発した場合の，既存の単位系の位置づけを〈表2〉にまとめた。これによって，有理単位系と非有理単位系の関係および3元単位系と4元単位系の関係を簡潔に整理できたと考える。また，〈図1〉は，電磁気量の次元の間の関係を理解する上で，教育的見地から有用であると期待している。

前出の公式集は，幾何学的意味に配慮しつつ書き直したものだが，Ω_2のみ出現し，srは現われなかった。より一般的な状況を考えても，立体角の次元で使用される量はΩ_2の整数倍とsrのみであろう。Ω_2＝数1とする現行のMKSA系の合理性と効率性を再認識する思いである。

参考文献

1） M. L. McGlashan：『SI単位と物理・化学量』化学同人（1974）pp.39。
2） 高田誠二：『単位と単位系』共立出版（1980）pp.42-44。
3） 今井功：『電磁気学を考える』 サイエンス社（1990）pp.191-193。
4） 高橋秀俊：『電磁気学』裳華房（1959）pp.183-189。
5） 青野修：『電磁気学の単位系』丸善（1990） pp.100。
6） 青野修：前掲書，pp.114。