普遍単位系の提案

須賀 隆

2002/01/01

1 まえがき

単位とは「ある量を表現するために基準として用いる, 表現しようとする量と同じ種類[1] の量」のことである[(1)]. 「度量衡」という呼び方があるように, 人の手足の長さや穀物の重さなどの日常的な量を単位として用いて, 長さ・体積・重さなどの日常的な量を表現する, という素朴な段階から歴史は始まる.

単位は, 人と人の交流に用いられるものである以上, その交流範囲において一定の大きさであることが保証されなければならない. 広い範囲で共通に合意でき基準となり得る量が探し求められ, 単位として選ばれるようになった. その究極のものがメートル法で, 全人類にとって共通の存在である地球そのものを単位の拠り所に選んだ. すなわち, 地球の自転周期の 1/86400 を second, 地球の子午線の全長の 1/40000000 を metre , 一辺 1/10metre の水の質量を kilogram としたのである.[2]

一方, 単位の歴史は, 自然科学の発展に伴う新しい概念の誕生の歴史でもある. 自然科学の法則は,「ある量」と「別の量」の間の「関係」を記述する, という形式で数学的表現として定着する. ここで言及される「ある量」や「別の量」は, 新発見にともなって「新規に誕生したり大きく変容したりした概念」に対応する量である場合が多いのである. 質量しかり, エネルギーしかり, 電荷しかり. このようにして新しい概念の量を扱う必要ができ, 基準となる量が選ばれて, それが新しい単位となる.

単位系とは, このような法則に基づいて複数の単位を関連付け, 体系的に整理したものである. 例えば, 長さと容積の単位を例にしてみよう. もちろん長さと容積の単位はフィートとガロンのように互いにほとんど無関係に定義することも可能である. しかし,「立方体の容積は立方体の辺の長さの 3 乗に比例する」という法則を関連づけに用い,「一辺 1 metre の立方体の容積を 1 metre^3 とする」方がより体系的であるわけである. このようにして, いくつかの基本単位と, 自然法則を記述する関係式から, その他のすべての単位を定義する (単位の世界の用語では「組み立てる」という) 単位系を一貫性のある (コヒレントな) 単位系という. コヒレントな単位系では, ひとつの種類の量にはひとつの単位しか存在しない. そしてコヒレントな単位系は, その拠って来る関係式をもっとも簡明に (具体的には係数がもっとも簡単になるように) 表現する.

さて, 次に来るものは何だろうか？

当然, 地球という枠を超えた, より広い範囲で共通に合意できる概念を用いて単位を定義するいう方向性が考えられる. そして, そのための基準とし得る量は「基礎物理定数」という範疇の量として我々の知識のおよぶところとなっているのである.「真空中の光速度」「作用量子」「Boltzmann 定数」などなど. これらの量は宇宙のどこでも一定の値になるものと思われている. しかし, コヒレントな単位系を構成しようとするならば, 無原則にすべての「基礎物理定数」を単位の定義に用いることはできない. そして, 単位の定義に用いられなかった「基礎物理定数」は同じ次元の単位量に対して半端な大きさを持つのではなかろうか？

[1] 詳細は Appendix A『単位に関する基本的な考え方』を参照せよ.
[2] 現在は, 単位の大きさをほとんど変えることなく, より再現性の良い別の定義方法に置き換えられている.

ところが驚くべき偶然[3] で, 進法として 12 進法を採用し,「真空中の光速度」「作用量子」を定義定数に用いてこれらの定数が厳密に単位量の 12 の整数乗倍になるようにすると, 定義に用いた定数だけでなく,Rydberg 定数 (R_∞)・原子質量単位 (u)・Bohr 半径 (a_B)・Planck の長さの半分 ($l_P = (1/2)\sqrt{G\hbar/c_0^3\alpha}$) が誤差 1% 未満で単位量の 12 の整数乗倍で近似できるようにコヒレントな単位系を構築し得るのである. このとき, その他に電子の電荷・電子の質量・微細構造定数・標準状態での理想気体のモル体積・氷点での黒体輻射・水の密度など多数の物理定数が単位量の 12 の整数乗倍で近似される. さらに「Boltzmann 定数」をも加えて熱力学的温度の定義に用いると, 理想気体の気体定数が単位量の 12 の整数乗倍で近似でき,Stephan-Boltzmann 定数・水の比熱もファクター 2 を残して単位量の 12 の整数乗倍で近似できる.

我々は『普遍単位系』を,“進法として 12 進法を採用し,「真空中の光速度」「作用量子」「Boltzmann 定数」を定義定数に用いてこれらの定数が厳密に単位量の 12 の整数乗倍になるようにし,「Rydberg 定数」「原子質量単位」「Bohr 半径」「Planck の長さの半分」が単位量の 12 の整数乗倍で近似できるように構成された単位系” と定義することにする. 本稿ではこの『普遍単位系』についてこれから説明する.

2 なぜ 12 進法か

まず「なぜ 12 進法か」, その物理的及び数学的利点をしめす.

2.1 自然界の基本的な物理定数の組み合わせでできる無次元量

単位系に左右されないように, 自然界の基本的な定数の組み合わせで無次元量を作っていくつか列挙してみた. これらの偶然を利用しようとするなら 12 進法以外には選択の余地がない.

2.1.1 微細構造定数と素電荷

微細構造定数αは無次元量で, もともとはスペクトルの輝線の微細構造を説明するために導入された定数である.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c_0 \hbar} \tag{1}$$

しかし式 (1) の両辺に$\dfrac{c_0\hbar}{r^2}$をかけた,

$$\alpha \frac{c_0\hbar}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{2}$$

の, 右辺は距離 r だけ離れた 2 つの素電荷の間に働く Coulomb 力をあらわし, 左辺はその力が$\dfrac{c_0\hbar}{r^2}$に比べてαだけ小さいことを示している. このためαは電磁相互作用の強さを表わす無次元量と解釈できる.

微細構造定数αは,12^{-2} に近い.

$$\alpha = \frac{1}{137.03599} = 1.0508188 \times 12^{-2}_{(10)} \tag{3}$$

よって, 素電荷 e と「真空中の光速度 c_0と作用量子$\hbar$ から導出した電荷の次元の量」との比は,

$$\alpha^{1/2} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 c_0\hbar}} = 1.0250946 \times 12^{-1}_{(10)} \qquad (!) \tag{4}$$

[3] **誤解のないように強調しておくが, これらの符合は物理学的には何れも単なる偶然である.** また, 筆者には現実の世界で『普遍単位系』を普及させようという意図もない. あしからずご了承願う.

2.1.2 Rydberg 定数と Bohr 半径

微細構造定数αの 12 の整数乗からのずれは,4πの 12 の整数乗からのずれと, ほとんど同じである.

$$4\pi = 1.0471976 \times 12^{1}_{(10)} = \frac{1}{137.50987} \times 12^{3} \tag{5}$$

Bohr 半径 a_B と「Rydberg 定数 R_∞ から導出した長さの次元の量」

$$L = 2\pi\mathrm{rad}/R_\infty = 0.91126705 \times 10^{-7}_{(10)}\mathrm{m} \quad \text{との比は,} \tag{6}$$

$$\frac{a_B}{L} = \frac{\alpha}{4\pi}(\text{厳密}) = 1.0034581 \times 12^{-3}_{(10)} \qquad (!!) \tag{7}$$

2.1.3 電子の質量と原子質量単位

電子の質量 m_e と「L と真空中の光速度 c_0 と作用量子$\hbar$ から導出した質量の次元の量」

$$M = \frac{\hbar}{c_0 L} \quad \text{との比は,} \tag{8}$$

$$\frac{m_e}{M} = \frac{4\pi}{\alpha^2}(\text{厳密}) = 0.94835932 \times 12^{5}_{(10)} \tag{9}$$

原子質量単位 u と電子の質量 m_e の比は,

$$\frac{u}{m_e} = 1822.8885_{(10)} = \frac{\alpha^2}{4\pi} \times 1.0004359 \times 12^{8}_{(10)} \tag{10}$$

比 (9) と比 (10) の 12 の整数乗倍からのずれは, ほとんど同じ大きさで逆方向である. よって,

$$\frac{u}{M} = 1.0004359 \times 12^{8}_{(10)} \qquad (!!!) \tag{11}$$

2.1.4 Planck の長さ

通常いわれる Planck の長さ$\sqrt{\dfrac{G\hbar}{c_0^3}}$と L の比は,12 の整数乗倍のファクタを除くと 2 に近く,

$$\frac{\sqrt{\dfrac{G\hbar}{c_0^3}}}{L} = 2 \times 1.0150587 \times 12^{-26}_{(10)} \tag{12}$$

超弦の張力を表現するため, 微細構造定数αにより補正した(2) $\sqrt{\dfrac{G\hbar}{c_0^3\alpha}}$を新たに Planck の長さと呼ぶと, Planck の長さと L との比は,

$$\frac{\sqrt{\dfrac{G\hbar}{c_0^3\alpha}}}{L} = 2 \times 0.9902098 \times 12^{-25}_{(10)} \qquad (!) \tag{13}$$

2.2 数学表現上の 12 進法の利点

数学の表現上の 12 進法の利点を, 一般的な観点 (約数の多さ・階乗) と個別の数学定数の観点から説明する.

2.2.1 約数の多さ

12 の約数は $1, 2, 3, 4, 6, 12$ であり,10 の約数 $1, 2, 5, 10$ に比べて数が多いため,10 進法に比べて,

1. 有限小数で表される分数が多い.
2. 九九が簡単になる.

という利点がある.

2.2.2 階乗

あまり指摘されない事であるが, 階乗は,10 進法で表わすよりも 12 進法で表わす方が, 末位の 0 が多くなって簡単に表わせる.1 から n までの数のうち 2^k個に 1 個の割合で 2 の素因子を k 個持つものがあるので,n の階乗に含まれる 2 の素因子の数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{n}{2^k}] \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^k} \sim n - O(\log n) \tag{14}$$

1 から n までの数のうち 3^k個に 1 個の割合で 3 の素因子を k 個持つものがあるので,n の階乗に含まれる 3 の素因子の数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{n}{3^k}] \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{3^k} \sim \frac{n}{2} - O(\log n) \tag{15}$$

ゆえに, 平均的に見て $12 = 2^2 \times 3$ には n の階乗を表現するのにちょうど適当な比率で $2, 3$ の素因子が入っているのである. このため一般に順列, 組み合わせなどの計算も楽になる.

(参考)

$$\begin{aligned}
& \text{最大の散在型単純有限群の位数} \\
= \;& 2^{46}3^{20}5^{9}7^{6}11^{3}13^{3}17^{1}19^{1}23^{1}29^{1}31^{1}41^{1}47^{1}59^{1}71^{1}_{(10)} \\
= \;& 888_8191_6727_3964_1634_7510_5895_4578_8183_2706_3298_0480_0000_0000_{(10)} \\
= \;& 992_4B98_B225_2AB9_530B_A466_1487_B0A8_0000_0000_0000_0000_0000_{(12)}
\end{aligned}$$

2.2.3 数学定数

これらにも比較的簡単な小数で近似できる無理数が散見される. そのうち興味深いものにコメントしておく.

1. $4\pi(\approx 10_{(12)})$
   球の表面積はその半径を 1 辺とする正方形の面積より約 1 桁広いことになる. このため後に説明する電磁気量の単位 (Appendix B『電磁気量の次元の一整理法』参照) において, 非有理単位と有理単位の換算は, ほぼちょうど 1 桁の補正ですむ.
2. $\sqrt{2}$ $(\approx 1.5_{(12)})$
   この関係のため規格版型の紙の縦横を切りの良い長さにすることができる. 紙の版型については後に再度言及する (Appendix D.2『紙の版型の規格』参照).
3. 黄金分割比$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ $(\approx 1.75_{(12)})$
   Fibonacci 数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$の隣接する 2 項の比は急速に黄金分割比に収束することが知られている. その第 12 項が偶然 12^2なのである.12 進法ではたまたま黄金分割比の最良近似分数系列のひとつが小数点以下 2 桁で表現できるというわけである.

表 1: 数学定数 (12 進法で表現)

$\sqrt{\pi}$	=	1.9329_72A1	2^{-8}	=	0.0069	0!	=	1
2π	=	6.3494_16A0	2^{-7}	=	0.0116	1!	=	1
4π	=	10.6968_3170	2^{-6}	=	0.0230	2!	=	2
e	=	2.8752_3607	2^{-5}	=	0.0460	3!	=	6
$1/e$	=	0.44B8_4216	2^{-4}	=	0.0900	4!	=	20
γ	=	0.6B15_1888	2^{-3}	=	0.1600	5!	=	A0
ϕ	=	1.74BB_6773	2^{-2}	=	0.3000	6!	=	500
$\sqrt{2}$	=	1.4B79_170A	2^{-1}	=	0.6000	7!	=	2B00
$\sqrt{3}$	=	1.894B_9800	2^{+4}	=	14.0000	8!	=	1_B400
$\sqrt{5}$	=	2.29BB_1325	2^{+8}	=	194.0000	9!	=	15_6000
$\log_e 2$	=	0.8399_1248	2^{+14}	=	3_1B14.0000	A!	=	127_0000
$\log_2 3$	=	1.7029_9480	2^{+28}	=	9_BA46_1594.0000	B!	=	1145_0000
$z = \log_2 10$	=	3.7029_9480	2^{+37}	=	BA08_A990_A0A8.0000	10!	=	1_1450_0000

4. 音階の 12 平均律 $\log_2 3$ ($\approx 1.7_{(12)}$)[4]

   平均律の性能は, 周波数が簡単な整数比になるような音の組み合わせをいかに多くかつ精度良く近似できるかで評価できるわけであるが,12 平均律はこの点で優秀である.

   (a) 最も小さい素数比 2 : 1

   これは 1 オクターブそのものであるから, 厳密に表現できなければならない. 従って, 平均律の周波数の公比は $\sqrt[n]{2}$でなければならない (n は適当な自然数).

   (b) 次に小さい素数比 3 : 1

   条件 (a) を満たしつつ, この比を効率よく近似するには, $\log 3/\log 2 = \log_2 3 = 1.58496...$を最良近似分数で近似すれば良いわけである. 最良近似分数の分母が n の候補となる. 連分数展開すると,

$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}}} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}, \frac{485}{306}, \frac{1054}{665}, \cdots \tag{17}$$

   (c) 次に小さい素数比 5 : 1

   条件 (b) で求めた n の候補のうちこの比をも比較的よく近似するものを選ぶと,$n = 12, 53$ が残る.

   (d) より大きな素数比

   7 : 1 ないしそれより大きな比は人間の耳にとってあまり重要でないようである.

   と言うわけで, 実用的な平均律としては 12 平均律しか残らないのである.[5]

[4] $\log_2 3 \approx 1.7_{(12)}$ という関係のため $2^{37}_{(12)} \approx 10^{10}_{(12)}$ となる. これは 10 進法の $2^{10}_{(10)} \approx 10^{3}_{(10)}$ に相当するものである.

[5] 12 平均律を最初に定義したのは 16 世紀末の明の皇族朱伯勤であろう(3). また 19 世紀に T. Perronet Thompson や R. H. M. Bosanquet といった人たちが 53 平均律用の鍵盤を試作したという例はあるようである(4). しかし, これは実用的とはいえない.

3　普遍単位系規格

まえがきで述べたように『普遍単位系』を,“進法として 12 進法を採用し, 「真空中の光速度」「作用量子」「Boltzmann 定数」を定義定数に用いてこれらの定数が厳密に単位量の 12 の整数乗倍になるようにし,「Rydberg 定数」「原子質量単位」「Bohr 半径」「Planck の長さの半分」が単位量の 12 の整数乗倍で近似できるように構成された単位系” と定義した. この定義を満足する単位系はすべて『普遍単位系』である.

しかし, これは我々の世界の「メートル法」に相当する概念であって, まだ自由度を含んでいる. ちょうど, メートル法にも MKS 単位系や CGS 単位系, 絶対単位系や重力単位系, 有理単位系や非有理単位系のように, いろいろな種類があることに相当する.

そこで本章では, 我々の世界の「国際単位系 (SI—Système International d'Unités)」に相当する規格 (以下『普遍単位系規格』と呼び, 単なる『普遍単位系』と区別する) を提案してみたい.

規格をつくる上でのひとつのポイントは, 基本単位の次元の選び方である.

量の概念は, 自然法則を表現する公式によって公理的に定義されるから, 基本単位の次元もいわば「連立方程式を解く」ように[5,6,7], 互いの関連を考えながら, 単位の組み立てやすさを基準として選択される. したがって各基本単位の次元の選択経過を道筋を追って解説することは困難である. そこで「国際単位系 (SI)」を例にあげ,『普遍単位系規格』との食い違いについて解説する形式で説明したいと思う.

「国際単位系 (SI)」の基本単位の次元は, 長さ・時間・質量・熱力学的温度・電流・物質量・光度であり, 平面角・立体角の単位を性格の曖昧な補助単位に分類していた.

これに対して『普遍単位系規格』は基本単位の次元として, **インピーダンス・平面角・対数量・物質量・長さ・時間・エネルギー・熱力学的温度**を採用する. はじめの 4 つについては自然単位をそのまま基本単位として使用する. 残りの 4 つは, 単位の導出に使用する物理定数「Rydberg 定数[6] 」「真空中の光速度」「作用量子」「Boltzmann 定数」の乗除によってその次元の量をつくり, 基本単位とする.

1. 質量とエネルギーの差し替え
   質量にかえてエネルギーを選んだのは, 力・仕事率・圧力・電荷…などの単位を組み立てる出発点として, より適当であるからである. エネルギーを選んだことによって, 種々の量の次元を基本単位の次元の乗除で表わす時, その量の意味がわかりやすくなった. 例えば圧力は国際単位系 (SI) では,$\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2)$ となる. なぜ分母に m が 1 つあるのか直感的には理解できないだろう. これに対して『普遍単位系規格』では, 圧力の単位を基本単位の乗除であらわすと $\mathrm{J}_u/\mathrm{m}_u^3$ となる.[7] 圧力とはエネルギーを体積で割ったものであることをしめしている.
2. 電流とインピーダンスの差し替え
   電流にかえてインピーダンスを選んだのは, 電気的量と磁気的量の単位の対称性を重視したからである (Appendix B『電磁気量の次元の一整理法』参照). 電流の単位を基本単位にすると対称性がなくなって,C,V, Ω,F,H,T,Wb など組み立て方の分かりにくい単位がゴチャゴチャと必要になってしまう. 国際単位系 (SI) では, これらが電流の単位 A からどのように組み立てられたかは普通問題にされず, まったく独立した単位として使われている感がある.Appendix B の考え方を採用することによって, 固有の名称をもつ組み立て単位の数を最小にすることができた.
3. 光度の削除
   光度は人間の生物学的な特性に依存しているので省いた. 光学関係の単位はとくに設けず, 光束の単位として放射束 (仕事率と同じ次元) の単位 W_u を流用する. すなわち, 目に対して同じ効果を与える最大比視感度の光の放射束に換算して表現するわけである. ほかの光学的単位は光束の単位から導出する. 光束の単位から光度の単位を導出する方が, その逆よりも自然だと考えるからである (国際単位系 (SI)

[6] Rydberg 定義を定義定数に選択した判断の経緯は「定義定数と基本単位」の項で説明する.
[7] 仮に, 新規に必要となる『普遍単位系規格』の単位記号には, 国際単位系 (SI) の対応する単位記号に添字 n(natural の頭文字) または u(universal の頭文字) をつけたものを用いることとする. 以下同様である.

でも, 基本単位である光度の単位 (cd) は実際には放射束を使って定義されている).『普遍単位系規格』では光度の単位は $\mathrm{W}_u/\mathrm{rad}^2$ となる. 光の仕事当量は無次元量となり $K_m^{-1} = 0.002644_{(12)}$ である.

4. 補助単位の扱い

『普遍単位系規格』では補助単位を明確に独立した次元の量の単位として扱う.

(a) 平面角は, 基本単位の次元のひとつに数える.

(b) 立体角は, 平面角の平方量であるとみなす (後述).

また, 対数量は, 国際単位系 (SI) では無視されているが,『普遍単位系規格』では基本単位の次元として認めている. 情報量にも対数量と同じ次元を使用する.

『普遍単位系規格』で固有の名称を持つ「単位」は, 以下に列挙する 24 種類 (自然単位をそのまま用いる基本単位, コヒレントでないが自然単位に準じて使用できる補助定数, 定義定数, 定義定数から導出される基本単位, 力学量の組立単位, 電磁気量の組立単位–表 2 参照) のみとする. 補助定数に分類した定数は他の諸単位とはコヒレントではないが, 実用上はずすわけにはいかない.

3.1 自然単位

以下の 4 つの次元の単位は, 自然単位をそのまま用いて基本単位とする. インピーダンスについては Appendix B『電磁気量の次元の一整理法』を, 平面角・対数量については Appendix A.2『「数学的」単位』を参照してほしい. 物質量の自然単位は日本語でいう「個」そのものと思って良い.

インピーダンスの自然単位	—	$\Omega_n = \mathrm{sr}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 29.9792458\Omega$(厳密)
平面角・位 相の自然単位	—	$\mathrm{rad} = \dfrac{2}{\pi}\sin^{-1}1$
対数量・情報量の自然単位	—	$\mathrm{neper} = \log \mathrm{e}$
物質量・事象量の自然単位	—	$\mathrm{mol}_n =$ 個 $= N_A^{-1}$(Avogadro 定数の逆数)

3.2 補助定数

以下の 4 つの系列の量は自然単位に対してコヒレントではないが, 補助定数として位置づけて単位として使用しても良いこととする.

素 電 荷	$e = \sqrt{\alpha\hbar/\Omega_n}$	$=$	$1.0374\_43\mathrm{B}6 \times 10^{-14}_{(12)}\mathrm{C}_u$
超球面全立体角	$\Omega_k(k = 1, 2, ..)$	$=$	$\dfrac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}\mathrm{rad}^k$
整数の対数	$\mathrm{B}_k(k = 1, z, ..)$	$=$	$\log_{\mathrm{e}} 2^k\mathrm{neper}$
普遍モル	$\mathrm{mol}_u = 10^{20}_{(12)}(N_A^{-1})$	$=$	$10^{20}_{(12)}\mathrm{mol}_n$

3.2.1 素電荷

微細構造定数αが無次元量であるために, インピーダンスの自然単位Ω_nを基本単位とするかぎり, 作用量子$\hbar$ と素電荷 e をともに定義定数とするコヒレントな単位系は作れない. 作用量子$\hbar$ のかわりに素電荷 e を定義定数に用いないのは, 電子の性質を表わす諸量にのみ微細構造定数αが顕れるべきであるからである.[8]

素電荷 e を単位として用いることができるように素電荷 e を補助定数と位置づける. なお, 素電荷は電子の電荷を正とし, 国際単位系 (SI) とは符号を逆にする.

[8] 補助定数のうち, 定義に測定によって得られる量を含むものは素電荷だけである. 私は微細構造定数も早晩厳密に計算できる数学定数になるのではないかと期待している.

3.2.2　超球面全立体角

超球面立体角は, 平面角の概念を多次元に拡張したもので, 単位半径の超球面上の単位「面積」の区画を球の中心から「見た」ときの「広さ」を rad^k($k=2$ のときは国際単位系 (SI) の sr) とする.rad^2 と書いて “steradian” と読んでほしい. 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ なので, 球面の全立体角は $4\pi\mathrm{sr}(=\Omega_2)$ になる.

『普遍単位系規格』では, 超球面立体角は平面角の整数乗であるとみなす. 1 辺θの球面正方形 (4 辺がすべて長さθで,4 角がすべて等しい球面四辺形) の面積 S は,

$$S = 4\mathrm{sr}/\mathrm{rad} \times \sin^{-1}\tan^2\frac{\theta}{2} \tag{18}$$

になるので, 平面角θに対して立体角θ^2を,

$$\theta^2 = \lim_{n\to\infty} n^2 \times (1\,\text{辺}\frac{\theta}{n}\text{の球面正方形の立体角}) \tag{19}$$

と “定義” することにしてもよい (Appendix A.3「一貫性のある (コヒレントな) 単位系」参照). このようにして, 立体角を平面角によって組み立てるようにすると, 一般的に高次元の超球面を考える時, 際限無く単位が増えずにすむ.k 次元の超球面全立体角Ω_kは(8),

$$\Omega_k = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}\mathrm{rad}^k \tag{20}$$

特に,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2\pi\mathrm{rad} && (\Omega_1\ \text{と書いて “cycle” と読んでほしい.}\\
&&& \text{また}\ 10_{(12)}^{-1}\Omega_1 = 30\,\text{度}, 10_{(12)}^{-2}\Omega_1 = 2.5\,\text{度}, 10_{(12)}^{-4}\Omega_1 = \text{約 1 分である.})\\
\Omega_2 &= 4\pi\mathrm{rad}^2 && (\Omega_2\ \text{と書いて “turn” と読んでほしい.})\\
\Omega_3 &= 2\pi^2\mathrm{rad}^3
\end{aligned}$$

立体角はインピーダンスと対になって電磁気量の次元において「荷」の量から「場」の量を導出する上で対称な役割をになっている (Appendix B 『電磁気量の次元の一整理法』参照).

3.2.3　整数の対数

情報量を対数量と同じ次元にした理由は, 情報とは無秩序性を限定するもので, 限定された「場合の数」の対数によって測られる量だからである. 対数量・情報量の底として実際に使われるであろう k としては,$1, z(=\log_2 12), 4, 8, \ldots$(一般に z を除いて 2 の整数乗) を想定している. $\mathrm{B}_1 = \mathrm{bit}, \mathrm{B}_z = \mathrm{digit}_{(12)}$ である. また 12 平均律の半音 (短 2 度) は $0.1_{(12)}\mathrm{B}_1$ と表される.

3.2.4　普遍モル

物質量の自然単位は Avogadro 定数の逆数 $\mathrm{mol}_n = N_A^{-1}$ であるが, 国際単位系 (SI) では, 原子質量単位 u と質量の単位 g を用いて, 物質量の基本単位 mol を

$$\mathrm{mol} = \frac{\mathrm{g}}{u}N_A^{-1} \tag{21}$$

と定義している. これと同様のことを『普遍単位系』において行って得られる量が普遍モル

$$\mathrm{mol}_u = \frac{\mathrm{g}_u}{u}N_A^{-1} \tag{22}$$

である. ただし$\frac{\mathrm{g}_u}{u}$という無次元量はもともと $10_{(12)}^{20}$ に非常に近く[9] , かつある程度の任意性があり, 厳密に $10_{(12)}^{20}$ としても許容される.

[9] すなわち $2_{(12)}^{72}$ にもある程度近いということになる.$\log(\mathrm{mol}_u/\mathrm{mol}_n) = 72.057694_{(12)}\mathrm{B}_1$ である.

3.3 定義定数と基本単位

波 数 の定義定数 (R_∞) と,	長さの基本単位	($\mathrm{m}_u = 10^6_{(12)}\Omega_1/R_\infty = 27.21028842\mathrm{cm}$ $= 38999.753\mathrm{km}/(4\times 12^7_{(10)})$)
速 度 の定義定数 (c_0) と,	時間の基本単位	($\mathrm{s}_u = 10^8_{(12)}\mathrm{m}_u/c_0 = 390.2675219\mathrm{ms}$)
作 用 の定義定数 ($\hbar$) と,	エネルギーの基本単位	($\mathrm{J}_u = 10^{26}_{(12)}\hbar/\mathrm{s}_u = 64.1433465\mathrm{mJ}$)
エントロピーの定義定数 (k_B) と,	熱力学的温度の基本単位	($\mathrm{K}_u = 10^{-18}_{(12)}\mathrm{J}_u/k_B = 1.211831\mathrm{K}$)

固有の名称のない組立単位 (例)

面 積	(m_u^2	=	$740.39980\mathrm{cm}^2$		)
体 積	(m_u^3	=	$20.146492\mathrm{dm}^3$		)
速 度	($\mathrm{m}_u/\mathrm{s}_u$	=	$0.697221442\mathrm{m/s}$	$= 2.50999719\mathrm{km/h}$	)
周 波 数	(Ω_1/s_u	=	$2.562344915\mathrm{Hz}$		)
モル濃度	$\mathrm{mol}_u/\mathrm{m}_u^3$	=	$6.552393\mathrm{mol/dm}^3$		)

基本単位の次元は本章冒頭のような経緯で選定された. 次は物理定数の中から定義定数を選ばなければならない. 『普遍単位系』の定義により,「真空中の光速度」「作用量子」「Boltzman 定数」を使用することはすでに決まっている. 自然単位でない残りの 4 つの基本単位を定義するにはもうひとつの物理定数が必要であるが, これは「Rydberg 定数」「原子質量単位」「Bohr 半径」「Planck の長さの半分」の中から選ぶことになる.

「原子質量単位」は化学の分野のためにはぜひとも定義定数としたいところだが, どの元素を基準とするか, また特定の核種を選ぶかそれとも元素の平均を使うか, など不確定な部分が多い. ある一定の範囲内であれば, どんな値でもよいため, 『普遍単位系規格』の定義定数としてはふさわしくない.

「Planck の長さの半分」は他の 3 つの候補に対して相対誤差が 1% 近くあり, 実用的にも定数の測定精度が足りないという問題がある.

「Rydberg 定数」「Bohr 半径」には,「原子質量単位」のような曖昧さはない. また電子にからむ定数なので, 微細構造定数が正確に決定されれば, 電子にからむ基礎物理定数 (電荷, 質量, 古典半径,Bohr 磁子) および電圧標準現示に用いられている (Josephson 効果の)Josephson 定数 K_J や電気抵抗標準現示に用いられている (量子ホール効果の)von Klitzing 定数 R_K をすべて正確に表現できるという利点がある.

「Rydberg 定数」を定義定数に用いると, 導出される質量の単位がそのまま「原子質量単位」として使える大きさの範囲内に入る (アルミニウムの核子の平均質量にほぼ等しい).「Bohr 半径」ではそう言うわけにはいかない. また「Rydberg 定数」は光学測定に関連した定数で, 無次元量でない基礎物理定数のうち唯一有効精度 10 桁を超える再現性があり, 定義定数として最も実用的である. そこで結局, 「Rydberg 定数」を第 4 の定義定数として選んだ. 基本単位は, 直前に定義された基本単位と, 新たな定義定数によって, 次の基本単位を生成していく構成にしている.

最後に基本単位を日常的な大きさにするためにつける $10_{(12)}$ の整数乗をいくつにするかという問題が残る. これについては,$c_0 = 10^P_{(12)}\mathrm{m}_u/\mathrm{s}_u$, $e \approx 10^Q_{(12)}\mathrm{C}_u$,$u = 10^R_{(12)}\mathrm{g}_u$ とするとき,P, Q, R の最大公約数をできるだけ大きくするように $10_{(12)}$ の整数乗倍を選らぶという方針を取った. 現在のところ最大公約数は 8 で, 日常的な大きさに基本単位を選ぶ限りこれが最大の様である ($e = \sqrt{\alpha\hbar/\Omega_n}$ という関係があるので, 適当な大きさを選ぶには意外と制限が大きいのである. 表 2 備考欄参照). このため, 国際単位系 (SI) での接頭語に相当するものは $10^4_{(12)}$ の整数乗を用いる.

3.4 力学量の組立単位

質 量の組立単位	(g_u	$= J_u s_u^2/m_u^2$	$= 131.950228g$	$= 19.000833kg/12^2_{(10)}$)
仕事率の組立単位	(W_u	$= J_u/s_u$	$= 164.357378mW$	$= 112.256089lm$)
力 の組立単位	(N_u	$= J_u/m_u$	$= 235.731961mN$	$= 24.037970g$ 重)
圧 力の組立単位	(P_u	$= J_u/m_u^3$	$= 3.18384692Pa$	$= atm/1\_6500_{(12)}$)

＜固有の名称のない組立単位 (例) ＞
トルク ($J_u/rad = 64.1433465mN \cdot m/rad$)

エネルギーの次元の量を基本単位とした以上, これらの単位の選択については異論はないであろう. ごらんのように質量の単位は $g_u = 131.950228g$, 一方 (Avogadro 定数の測定値より) 国際単位系 (SI) の物質量の単位 mol と『普遍単位系規格』の補助定数 mol_u の関係は $mol_u = 132.007729mol$, 両者の符合がまったくの偶然だということは驚くべきことである. これは原子質量単位が精度よく近似できるということを, 日常的な大きさで表現したものなのである.

3.5 電磁気量の組立単位

電 荷の組立単位	(C_u	$= \sqrt{J_u s_u \Omega_n^{-1}}$	$= 28.8965943mC$)
電 流の組立単位	(A_u	$= \sqrt{J_u s_u^{-1} \Omega_n^{-1}}$	$= 74.0430416mA$)
場の強さの組立単位	(O_u	$= A_u/m_u$	$= 272.114137mA/m$)
束 密 度の組立単位	(G_u	$= C_u/m_u^2$	$= 390.283662mC/m^2$)

＜固有の名称のない組立単位 (例) ＞

磁 極	($C_u \Omega_n/rad^2$	$= 10.8862230Wb/\Omega_2$)
磁 束	($C_u \Omega_n = \sqrt{J_u s_u \Omega_n}$	$= 0.86629810Wb$)
磁 位	($A_u rad^2$	$= 5.8921580mA\Omega_2$)
磁場強度	($O_u rad^2$	$= 21.6541550mA\Omega_2/m$)
磁束密度	($G_u \Omega_n$	$= 11.7004098T$)
インダクタンス	($s_u \Omega_n$	$= 11.6999260H$)
透 磁 率	($\Omega_n/rad^2 c_0$	$= \mu_0$)
電 束	($C_u rad^2$	$= 2.2995179mC\Omega_2$)
電 位	($A_u \Omega_n = \sqrt{J_u s_u^{-1} \Omega_n}$	$= 2.2197545V$)
電場強度	($O_u \Omega_n$	$= 8.1577766V/m$)
電束密度	($G_u rad^2$	$= 31.0577870mC\Omega_2/m^2$)
電気容量	(s_u/Ω_n	$= 13.0179233mF$)
誘 電 率	($rad^2/\Omega_n c_0$	$= \epsilon_0$)

インピーダンスの単位に自然単位を採用したので, 電荷の単位はすでに定義した単位から組み立てられて導出される.Appendix B『電磁気量の次元の一整理法』の電荷間の力の公式を見ると,

$$\frac{\text{エネルギー}}{\text{長さ}} = \text{インピーダンス}\frac{\text{長さ}}{\text{時間}}\frac{\text{電荷}^2}{\text{長さ}^2} \tag{23}$$

となっている. これを電荷について解くと, 電荷の次元は

$$\text{電荷} = \sqrt{\text{エネルギー} \times \text{時間}/\text{インピーダンス}} \tag{24}$$

となる.

Coulomb の法則の比例定数を真空中の光速度とインピーダンスの自然単位の積で表現したことが,『普遍単位系規格』が採用している公式集 (Appendix B『電磁気量の次元の一整理法』参照) の特徴である. 電気的量と磁気的量の対称性に注目してほしい. この対称性ゆえに, あえて電位の単位に名称を与えなかった.

『普遍単位系規格』ではコヒレント性の例外として補助定数の使用を許容しているので, 立体角の単位として rad^2を使っても, 補助定数Ω_2を使ってもよい (ただし, 計算をする場合は, どちらでもよいから一方に単位を揃える必要がある). 上記で rad^2を使った国際単位系 (SI) との換算値を示しているのは, たまたま国際単位系 (SI) がΩ_2にコヒレントであるためである.Ω_2を使った場合の換算値は電荷・電流・束密度・場の強さの組立単位の換算値をそのまま使えばよい. いわゆる有理単位はΩ_2にコヒレント, 非有理単位は rad^2 にコヒレントである.

4 普遍単位系規格の単位のまとめ

以上をまとめ,『普遍単位系規格』の固有名称を持つ単位一覧を表 2 にしめす.

表 2: 普遍単位系規格の固有名称を持つ単位一覧

カテゴリー	項目	単位記号	値		備考			
	波数	R_∞				$\equiv$	12^{-2}	Ω_1/D
定義定数	速度	c_0						
	作用	$\hbar$						
	エントロピー	k_B						
コヒレント	素電荷	e						
でない	超球面全立体角	Ω_k	$\Omega_1=2\pi\mathrm{rad}$,	$\Omega_2=4\pi\mathrm{sr}$	k	$=$	$1,2,..$	
補助定数	整数の対数	B_k	$\mathrm{B}_1=\mathrm{bit}$,	$\mathrm{B}_z=\mathrm{digit}_{(12)}$	k	$=$	$1,z,..$	
	普遍モル	mol_u	132.007729	mol				
自然単位	インピーダンス	Ω_n	29.9792458	Ω				
である	平面角・位相	rad	57.2957795	度				
基本単位	対数量・情報量	neper	4.34294482	dB				
	物質量・事象量	mol_n	1	個				
自然単位	長さ	m_u	27.21028842	cm	12^8	$\times$	1	D
でない	時間	s_u	390.2675219	ms	12^{16}	$\times$	1	D/c_0
基本単位	エネルギー	J_u	64.1433465	mJ	12^{16}	$\times$	12^{-2}	$\hbar c_0/D$
	熱力学的温度	K_u	1.211831	K	12^{-4}	$\times$	12^{-2}	$\hbar c_0/Dk_B$
	質量	g_u	131.950228	g	12^{32}	$\times$	12^{-2}	$\hbar/c_0D$
力学量の	仕事率	W_u	164.357378	mW	1	$\times$	12^{-2}	$\hbar c_0^2/D^2$
組立単位	力	N_u	235.731961	mN	12^8	$\times$	12^{-2}	$\hbar c_0/D^2$
	圧力	P_u	3.18384692	Pa	1	$\times$	12^{-2}	$\hbar c_0/D^3$
	電荷	C_u	28.8965943	mC	12^{16}	$\times$	12^{-1}	$\sqrt{\hbar/\Omega_\mathrm{n}}$
電磁気量の	電流	A_u	74.0430416	mA	1	$\times$	12^{-1}	$\sqrt{\hbar/\Omega_\mathrm{n}}c_0/D$
組立単位	場の強さ	O_u	272.114137	mA/m	12^{-8}	$\times$	12^{-1}	$\sqrt{\hbar/\Omega_\mathrm{n}}c_0/D^2$
	束密度	G_u	390.283662	$\mathrm{mC/m^2}$	1	$\times$	12^{-1}	$\sqrt{\hbar/\Omega_\mathrm{n}}/D^2$

A 単位に関する基本的な考え方

(本 Appendix は『普遍単位系規格』の一部を構成する.)

A.1 量の分類

まえがきでは, 天下り的に「同じ種類」(単位の言葉で言うと, 同次元) という言葉を導入した. しかし実は, 客観的に同じ種類であるかないかを見分ける基準はない. 量が同じ種類かどうかは約束によって取り決めるべきものなのである. 我々が直接測定できるのは, 純粋な数に限られることに注目してほしい. 我々は「長さを測る」と称するが, 実際には物差しについている目盛りの数を読んでいるにすぎないのである.

例えば, 垂直方向の長さ (高さ) と水平方向の長さ (水平距離) を別の単位で表わしてもいっこうにかまわない. 現実にエベレスト山の高さを 8.048km と表現することはないし, マラソンの距離を 42,195m と表現することもない. これは高さと水平距離を別種の量とする意識の現われと言えよう.

しかし量の分類は完全に恣意的なものでもない. 恣意が入り込むのは, 概ね量を細かく分類するか, 粗く分類するかという点である. これらの量の概念は, 実は, 自然法則の網の目のなかで公理的に定義されているのである. 言い替えると自然法則を表現する公式自体によって量の概念が定義されているものとみることができる. 自然法則において高さや水平距離などの量を区別する必要がないため, 長さという範疇にまとめられたのである.

A.2 「数学的」単位

「数学的」単位は, 量の分類について考える場合, 格好の材料である.

「数学的」単位は純粋な数とは異なる, という立場から議論してみると以下のようになる.

「ある量を測定・表現するための基準となる同じ種類の量」が単位なのであるから, 対象が物理学的なものではなく, 数学的対象に限ったとしても単位を見出すことができる.

例えば,$\log_{10} 2$ は 0.3010.. という値を持つ純粋な数である. では, (省略しているのではなく始めから) 底のない $\log 10$ を導入してみよう. これに公理的に加減乗除を定義して, 数学的考察の対象とすることは容易である. このとき $\log 10$ は「底のない対数」という量の単位となり,

$$\log 2 = 0.3010..\log 10 \tag{25}$$

のように使われる. 式の両辺は「底のない対数」という量であって数には還元できない.

底のない対数なんて他の文献には出てこないであろうが, この logを $\sin^{-1}$ に置き換えるとどうなるであろうか?複素関数論では対数関数と逆三角関数は同種のものなのである.[10] 実はこれは我々のよく知っている「平面角」に他ならない.

すなわち主値をとって,

$$\mathrm{rad} = \frac{2}{\pi}\sin^{-1} 1 \tag{26}$$

$$度 = \frac{1}{90}\sin^{-1} 1 \tag{27}$$

これらの関係が式 (25) とまったく並行的であることは明らかだ.

[10] $\sin^{-1} x = -\imath \log(\imath x \pm \sqrt{1-x^2})$ である.

このようにして, まったく数学的な量に対しても純粋な数に還元しない単位を想定することができる. もちろん「数学的」単位を, 普通そう考えられているように, 純粋な数とみなしても矛盾は生じない. これは, どちらかの立場が正しいというわけではなく, 規約で取り決めるべき問題なのである. 本稿では「数学的」単位は純粋な数に還元しない単位の一種であるという立場をとっている.

なお,「国際単位系 (SI)」では角度を, 基本単位であるのか, 長さを長さで割った組立単位（純粋な数）であるのか決めかねて, かつては補助単位という別の分類を設けていた.SI 文書 (“Le Système International d'Unités”(2nd ed.1973) 計量研究所編訳) から問題の部分を引用しておこう.[11]

「SI 単位といえば基本単位か組立単位かどちらかだと考えることはできるのだけれども, 国際度量衡総会（第 11 回,1960 年）は, 単位の第 3 クラスとして補助単位というものを認めることにした. そして補助単位が基本単位と組立単位とのどちらにかかわり合っているのかは, 決めなかった.」

「国際度量衡総会は, いくつかの SI 単位に関し, それが基本単位に属するのか組立単位に属するのかを決めなかった（というか, まだ決めていない）. それらの SI 単位は,“補助単位” という第 3 のクラスに位置づけられている. 補助単位を基本単位として扱うか組立単位として扱うか, それは自由である.」

A.3 一貫性のある（コヒレントな）単位系

いくつかの基本単位と, 自然法則を記述する関係式から, その他のすべての単位を定義（単位の言葉では,「組み立てる」と言う）している単位系を一貫性のある（コヒレントな）単位系という.

一貫性のある単位系では, ひとつの量にはひとつの単位しか存在しない. そして一貫性のある単位系は, その関係式群をもっとも簡明（すなわち具体的には係数がもっとも簡単になるよう）に表現する. 前節で「自然法則を表現する公式自体によって量の概念が定義されている」と述べた事からも分かるように, 一貫性という用語は, 自然法則を記述する関係式群を指定したとき, はじめて意味を持つ. 例えば,

我々は 3 角形の面積 S を, 底辺の長さを a, 高さを h とするとき

$$S = \frac{1}{2}ah \tag{28}$$

と計算する. しかしこれは本当に明らかなことであろうか?

$$S = ah \tag{29}$$

と書いて, 不都合があるのであろうか?$^{(9)}$

実は式 (29) のように書いても, 面積をあらわすすべての公式の係数が 2 倍になるだけで, 論理的な不都合は生じないのである. 円の面積は $2\pi r^2$ になるが, これを「円周の長さ × 半径」と考えれば我々の公式よりもむしろ自然であろう. 天から与えられたかのように思っていた係数 1/2 は, 実は単なる人間の約束ごとなのである.

この例からわかるように, 長さの単位を m とするときコヒレントな面積の単位に m^2 という名前をつけることは勝手だが, その定義は対応する関係式を具体的に指定しないと決まらないのである. そして, このことは単に面積にとどまらずすべての組立単位にあてはまることなのである.

もちろん, 式 (29) は作為的で極端な例なので, 実用的には不便で使い物にならないかもしれない. しかし数学では, 同じ概念の量なのに, 本によって符号が逆だったり, ファクターに 2π の違いがあったりすることは, 日常茶飯事である. また, 電磁気学において, 同じコヒレントなメートル単位系でありながら有理単位と非有利単位で同じ量の単位に 4π のファクターの違いができるのはまさにこれと同じ種類の現象なのである.

単位の一貫性という概念は非常に重要だが, 絶対ではない. 単位の一貫性をセールスポイントにしている国際単位系 (SI) ですら問題をはらんでいる.

[11] その後の改訂で補助単位というカテゴリーは削除された.

1. Celsius 温度

   国際単位系 (SI) では,Celsius 温度を以下のように定義して,℃を組立単位に分類している.

   「セルシウス温度 t は,$T_0 = 273.15\mathrm{K}$ のときの二つの熱力学温度 T と T_0との差, t $= T - T_0$として定義される. 温度間隔または温度差は, ケルビンまたはセルシウス度のいずれを用いて表わしてもよい."セルシウス度" の単位は単位 "ケルビン" に等しい.」

   単位は「ある量を測定・表現するための基準となる同じ種類の量」なので, 代数的には K と℃は完全に一致する. 温度という次元の量に二つの単位があることになり, 例え両者の比が 1 であっても 1 量 1 単位の原則の例外になっていることには変わりがない.

   Celsius 温度の定義からして「正常な人体の Celsius 温度は 37.00K である」という表現は正しく, 逆に「正常な人体の温度は 37.00 ℃である」という表現は不完全であることがおわかりいただけるだろうか?(1)

2. 周波数

   ヘルツ (Hz) は周波数の単位で, 秒の逆数として定義されているが, 周期現象に関連した場合にのみ用いるべきだとの警告がついている. 例えば, 台風の風速は 30m/s と表わすべきで 30mHz と表わしてはいけないわけである. 周波数は［周期数（＝位相）／時間］の次元の量であるので, 一貫性の原則に従えば,Hz = rad/s となるはずである. しかし種々の公式から判断すると, むしろ$\Omega_1 = 2\pi\mathrm{rad}$ とおいて $\mathrm{Hz} = \Omega_1/\mathrm{s}$ となっていると考えるしかない. コヒレントでない単位であれば, 使用範囲に制限がつくのもあたりまえである.

以上の例でも分かるように一貫性はなかなか貫徹しがたいものである. 公式の数を減らすために単位の一貫性を犠牲にすべき場合もある. これは概念の数を減らすために同じ種類の量に複数の単位を認めると言い替えてもかまわない.

素粒子の崩壊を考えてみよう.

寿命は素粒子が崩壊するまでの平均時間のことで, 崩壊で数が 1/e になるまでの時間とも言える. 一方, 半減期は崩壊で数が 1/2 になるまでの時間である. 我々は, 両者を時間の次元を持った別概念の量と考えている. しかし対数量に $\log \mathrm{e}(= \mathrm{neper})$ と $\log 2(= \mathrm{B}_1)$ の二つの単位を認めることによって, これらを崩壊の遅さを表わす 1 つの量 (次元：時間/対数量) を 2 つの単位で表現したものと解釈することもできる（例えば, 半減期が 7 秒というのと寿命が 10 秒というのはほぼ同じことを表わしている. そこで, これを「崩壊の遅さが 7 秒 / B_1」または「崩壊の遅さが 10 秒 / neper」と表現しようというわけである).

振動数と角振動数についても同様のことが言える. 作用量子$\hbar$ と Planck 定数 h の関係は,

$$h = \hbar/\mathrm{rad} = 2\pi\hbar/\Omega_1 \tag{30}$$

であると考えるべきである.

もちろんこのような非一貫性は,「数学的」単位のように複数の単位の間の比が正確に決まっている場合に限る方がよい.[12]

[12] 微細構造定数が厳密に計算できる数学定数になることが望まれるのもこのためである.

B　電磁気量の次元の一整理法

(本 Appendix は『普遍単位系規格』の一部を構成する.[(10)])

B.1　まえがき

電磁気学が理解しにくい理由のひとつとして, 単位系の複雑さが挙げられることがある. 過去提案された単位系としては, 表 3 のようなものがあるが, 最近は MKSA 系に基づく国際単位系 (SI) が普及してきたため, かつての様な混乱はなくなってきた. 現実世界に対して単位系を提案する時代は終わったが, 有理単位系と非有理単位系の関係及び三元単位系と四元単位系の関係を整理するという視点は現時点でも教育的に有意義であると考える. 本稿では, 立体角を独立次元をもつ物理量とみなす立場をとって, 各種単位系及び電磁気量の次元の間の関係を整理してみたいと考える. これは, 有理単位系と非有理単位系の関係を整理するために必須であるが, 後に図 1 にしめすように, 電磁気量の次元の間の関係を整理する上からも有用であることがわかる（この立場は国際単位系 (SI) と矛盾しない. しかし不思議なことに, 表 3 によれば[(9)]過去に深く議論されたことがないようである）.

表 3: 過去に提案された単位系

独立次元数	名 称	独立した次元とする物理量
三元	CGS 静電系	長さ, 質量, 時間
	CGS 電磁系	長さ, 質量, 時間
	CGSGauss 系	長さ, 質量, 時間
四元	CGS-Fr 系	長さ, 質量, 時間, 電荷
	CGS-Bi 系	長さ, 質量, 時間, 電流
	MKSμ系	長さ, 質量, 時間, 透磁率
	MKSϵ系	長さ, 質量, 時間, 誘電率
	MKVA 系	長さ, 質量, 電圧, 電流
	MKSΩ系	長さ, 質量, 時間, 電気抵抗
	MKSC 系	長さ, 質量, 時間, 電荷
	MKSA 系	長さ, 質量, 時間, 電流
	VAMS 系	電圧, 電流, 長さ, 時間
五元	LMTQP*系	長さ, 質量, 時間, 電束, 磁束
	LMTIϕ*系	長さ, 質量, 時間, 電流, 磁束
	LMTIγ系	長さ, 質量, 時間, 電流, 電気と磁気の結合係数
	LMT$\epsilon\mu$系	長さ, 質量, 時間, 誘電率, 透磁率

B.2　立体角の導入

有理単位系と非有理単位系の公式にあらわれる係数 4πの違いは, よく知られている様に幾何学的なものである. 最も端的にその由来を示しているのは, Gauss の定理（積分形）,

有理単位系　　　　非有理単位系

$$\int\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = Q \qquad \int\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = 4\pi Q$$

であろう. 有理単位系では, 単位点電荷が全空間に出す電束を単位電束と考え, 非有理単位系では, 単位点電荷が 1 ステラジアン（sr）に出す電束を単位電束と考えているわけである. そこで, 立体角を独立次元とみてこれを書き直すと,

$$\int\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \Omega_2 Q \tag{31}$$

となる. ただしΩ_2は球面の全立体角である.$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$ を考慮して次元解析を行うと, インピーダンスの次元の定数Ω_nと真空中の光速度 c_0を用いて,

真空の誘電率	$\epsilon_0 = \dfrac{\mathrm{sr}}{\Omega_n\cdot c_0}$
真空の透磁率	$\mu_0 = \epsilon_0^{-1}c_0^{-2} = \dfrac{\Omega_n}{\mathrm{sr}\cdot c_0}$
真空の固有インピーダンス	$Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \dfrac{\Omega_n}{\mathrm{sr}} = 4\pi\dfrac{\Omega_n}{\Omega_2}$

電圧と電流の比 [Ω] と電場と磁場の比 [Ω/sr] では次元が異なる事に注意が必要である.

B.3 立体角を考慮した公式集

以下に, 立体角を独立次元とみて, 電磁気学の公式集を書き直してみる. 幾何学的にあるべき所にΩ_2があらわれていることが確認できる（B.4 節参照）. 有理単位系はΩ_2を数 1 とする単位系, 非有理単位系は sr を数 1 とする単位系と位置づけられる. なお, 電流間の力の公式とメートルおよびアンペアの定義とを比較すると$\Omega_n = 29.9792458\Omega$（厳密）を得る.

電荷間の力	$f = \dfrac{1}{\epsilon_0}\dfrac{\Omega_2 Q}{4\pi r^2}Q' = \Omega_n c_0\dfrac{QQ'}{r^2}$
電流間の力	$df = \mu_0\dfrac{\Omega_2 I}{2\pi r}I' = \dfrac{2\Omega_n}{c_0}\dfrac{II'}{r}$
Lorentz の力	$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$
電磁場のエネルギー密度	$u = \dfrac{1}{2\Omega_2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$
Poynting ベクトル	$\mathbf{S} = \dfrac{1}{\Omega_2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$
電磁誘導の法則	$\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
電流と変位電流の作る磁場	$\nabla\times\mathbf{H} = +\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \Omega_2\mathbf{J}$
Gauss の定理（微分形）	$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{D} = \Omega_2\rho \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\end{cases}$
電荷保存則	$\nabla\cdot\mathbf{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
スカラポテンシャル	$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
ベクトルポテンシャル	$\mathbf{B} = +\nabla\times\mathbf{A}$
ポテンシャルが満たす方程式	$\begin{cases}\Delta\phi - \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\Omega_2\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta\mathbf{A} - \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\Omega_2\mu_0\mathbf{J}\end{cases}$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\text{磁束密度 } B \arrow[d, shift right, "\times\text{ 面積}"'] & \text{電荷密度}\rho \arrow[l, "\times\text{ インピーダンス}"'] \arrow[r, "\times\text{ 立体角}"] \arrow[d, shift right, "\times\text{ 面積}"'] & \text{電束密度 } D \arrow[d, shift right, "\times\text{ 面積}"'] \\
\text{磁束}\varPhi \arrow[u, shift right, "\div\text{ 面積}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 時間}"'] & \text{電荷 } Q \arrow[l, "\times\text{ インピーダンス}"'] \arrow[r, "\times\text{ 立体角}"] \arrow[u, shift right, "\div\text{ 面積}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 時間}"'] & \text{電束}\varPsi \arrow[u, shift right, "\div\text{ 面積}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 時間}"'] \\
\text{電位 } V \arrow[u, shift right, "\times\text{ 時間}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 長さ}"'] & \text{電流 } I \arrow[l, "\times\text{ インピーダンス}"'] \arrow[r, "\times\text{ 立体角}"] \arrow[u, shift right, "\times\text{ 時間}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 長さ}"'] & \text{磁位 } V_m \arrow[u, shift right, "\times\text{ 時間}"'] \arrow[d, shift right, "\div\text{ 長さ}"'] \\
\text{電場強度 } E \arrow[u, shift right, "\times\text{ 長さ}"'] & \text{電流密度 } j \arrow[l, "\times\text{ インピーダンス}"'] \arrow[r, "\times\text{ 立体角}"] \arrow[u, shift right, "\times\text{ 長さ}"'] & \text{磁場強度 } H \arrow[u, shift right, "\times\text{ 長さ}"']
\end{tikzcd}
$$

図 1: 電磁気量の次元の間の関係

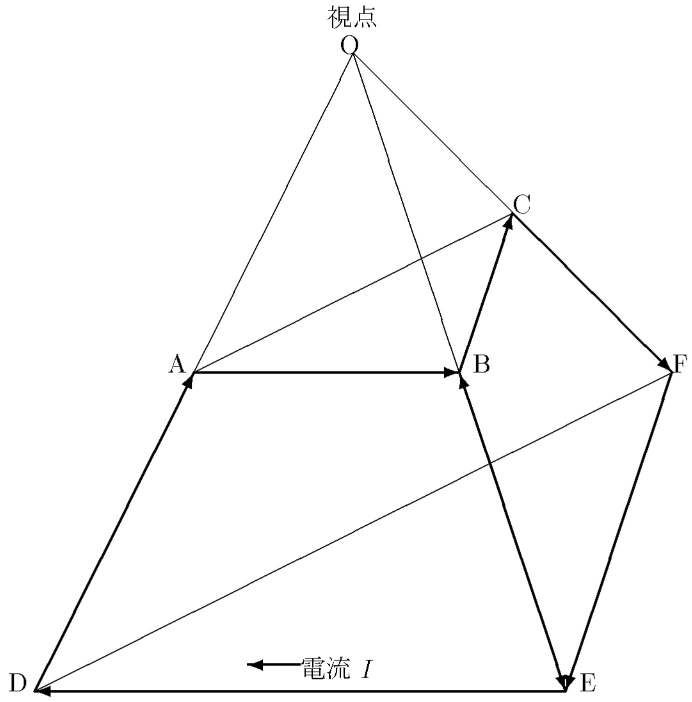

図 2: 磁位の説明

B.4　電磁気量の次元の間の関係

上記公式集をもとに次元解析を試みると, 電磁気量の次元の間の関係図を得る事ができる. これを図 1 に示した.「荷」に関する量をはさんで, 電「場」に関する量と磁「場」に関する量が対称をなしており, また, インピーダンスと立体角が「荷」の量から「場」の量を生成する上で対称な役割をになっている. 識別されるべき概念が量の次元のレベルですべて互いに異なるように配置され, 一見複雑な電磁気量の次元が整然と体系づけられるのである.

次元解析の結果, 図 1 にしめすように磁位＝電流×立体角となる. 以下にその幾何学的根拠を説明しておく.[11]

1. 磁位には重ね合わせの原理が成立する.
2. 回路を真横から見たときの磁位を 0 とする.

ものとすると, 図 2 の視点 O での磁位は,3 枚の側面による磁位の和, すなわち 0 である. 一方これは, 回路 ABC と回路 FED による磁位の和でもある.

よって, 三角形の回路による磁位は, 回路を流れる電流と, 回路をみこむ立体角の積に比例すると言える. 任意の回路は三角形の重ね合わせで表現できるから, 任意の回路についても同様の事が言える.

視点を回路をくぐらせて一周すると回路を見込む立体角はΩ_2だけ変化する.1 回巻き回路の回りを n 周することと,n 回巻き回路の回りを 1 周することは位相幾何学的に同等であり, アンペア・「ターン」の「ターン」はΩ_2 とみなしてよい.

B.5 静電・電磁・対称単位系

図 1 をみると, インピーダンスの次元を長さと時間から組み立てることにより, 電磁気量の次元を整理し, 独立な次元の数をひとつ少なくできることがわかる.[(12)] 静電・電磁・対称単位系は, このような整理を行った単位系と位置づけることができる.

1. 静電単位系
   電荷間の力の公式の右辺の係数が数 1 となるように$\Omega_n = c_0^{-1}$ と置いた単位系で, 図 1 中列と右列の量の $(\Omega_n c_0)^{1/2}$倍を新たに中列と右列の量と, 左列の量の $(\Omega_n c_0)^{-1/2}$倍を新たに左列の量とよび, このため電束密度/電場強度 = 立体角となる. 静電単位系の公式集は, B.3 節の公式集において $\epsilon_0 = \mathrm{sr}$ としたものとなる. さらに sr = 数 1 とすると ϵ_0 = 数 1 になる.
2. 電磁単位系
   電流間の力の公式の右辺の係数が数 2 となるように$\Omega_n = c_0$と置いた単位系で, 図 1 中列と右列の量の $(\Omega_n/c_0)^{1/2}$倍を新たに中列と右列の量と, 左列の量の $(\Omega_n/c_0)^{-1/2}$倍を新たに左列の量とよび, このため磁束密度/磁場強度 = 立体角$^{-1}$となる. 電磁単位系の公式集は,B.3 節の公式集において $\mu_0 = \mathrm{sr}^{-1}$ としたものとなる. さらに sr = 数 1 とすると μ_0 = 数 1 になる.
3. 対称単位系
   静電単位系において, 磁束及び磁束密度のかわりにその c_0倍を新たに磁束及び磁束密度と呼び, 磁位及び磁場強度のかわりにその c_0^{-1}倍を新たに磁位及び磁場強度と呼ぶ様にした単位系で[13] , 電束密度/電場強度 = 立体角かつ磁束密度/磁場強度 = 立体角$^{-1}$となる. 対称単位系の公式集は,B.3 節の公式集において $\epsilon_0 = \mathrm{sr}$ とした上,A, B があらわれる所をすべて $c_0^{-1}A, c_0^{-1}B$ で,H があらわれる所をすべて $c_0 H$ で置き換えたものとなる. さらに sr = 数 1 とすると $\epsilon_0 = \mu_0$ = 数 1 になる.

B.6 まとめ

立体角を独立次元をもつ物理量とみなす立場から出発した場合の, 既存の単位系の位置づけを表 4 にまとめた. これによって, 有理単位系と非有理単位系の関係及び三元単位系と四元単位系の関係を簡潔に整理できたと考える. また, 図 1 は, 電磁気量の次元の間の関係を理解する上で, 教育的見地から有用であろう.

表 4: 既存の単位系の位置づけ

独立次元数	名 称	位置づけ
三元	CGS 静電系	sr = 数 $1, \Omega_n = c_0^{-1}$
	CGS 電磁系	sr = 数 $1, \Omega_n = c_0$
	CGSGauss 系	sr = 数 $1, \Omega_n = c_0^{-1}$
		ただし, 図 1 左上・右下部を c_0だけ修正
四元	MKSA 系	Ω_2 = 数 1

[13] すなわち, これらについて電磁単位系の次元の量を用いるということである.

C　重力に関する事項

(本 Appendix は『普遍単位系規格』の一部を構成する.)

C.1　重力定数と重力場の方程式

『普遍単位系規格』で天体の質量を表現する時は, 直接に質量では表現せず, その重力半径 (Schwarzshild 半径の半分) を用いる. 万有引力定数 (Newton の定数) の測定精度が悪いため, 天体の質量を直接質量で表現すると精度が悪くなるのに, 重力半径は 10 桁を超える精度で測定することができるためである. 万有引力定数の測定精度が悪い理由は, 天文学の計算において必要となる量がほとんど常に万有引力定数と質量の積の形であらわれ, 直接に万有引力定数のみがあらわれることが少ないため, あらわに万有引力定数を高精度で測定する観測や実験を構成することが困難であるからである. 重力半径は数値が日常的な大きさになるのも好都合である.[13]

「力」の次元を持った量を「重力定数」として定義すると, 幾何学的な部分が公式において係数として分離して見通しが良い.

$$\text{重力定数}\ N_G \;=\; c_0^4 G^{-1} = \frac{c_0\hbar}{4\alpha l_P^2} = 2\mathrm{A.B33B}\times 10^{34}_{(12)}\mathrm{N}_u(\text{「力」の次元を持ち, 理解しやすい}) \tag{32}$$

とすると,

$$\text{重力半径}\ r_m \;=\; \frac{Gm}{c_0^2} = \frac{mc_0^2}{N_G}(\text{Schwarzschild 半径の半分}) \tag{33}$$

$$\text{万有引力}\ f \;=\; N_G\frac{r_m r_{m'}}{r^2} = c_0^2\frac{r_m m'}{r^2} \tag{34}$$

$$\text{重力加速度}\ g \;=\; c_0^2\frac{r_m}{r^2} = \frac{r_m}{(r/c_0)^2} \tag{35}$$

$$\text{重力場の方程式}\ T_{ik} \;=\; \frac{N_G}{2\Omega_2}(R_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ik}R) \tag{36}$$

重力場の方程式 (36) において R は曲率テンソルであるから立体角/面積の次元をもつ. 一方 T はエネルギー運動量テンソルであるからエネルギー密度の次元をもつ. ゆえに係数$\dfrac{N_G}{2\Omega_2}$の分母は立体角の次元でなければならない (これを電磁場のエネルギー密度の式と比較してみるとおもしろい).

C.2　Planck の長さ

超弦理論を特徴づける Planck の長さも,『普遍単位系』では, きり良く表現できる.

すなわち, 通常いわれる Planck の長さの半分は,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\hbar}{c_0^3}} = 1.022031\times 10^{-28}_{(12)}\mathrm{m}_u \tag{37}$$

超弦の張力を表現するため, 微細構造定数αにより補正した[2]Planck の長さの半分 l_Pは,

$$l_P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\hbar}{c_0^3\alpha}} = 0.\mathrm{BA70BB}\times 10^{-27}_{(12)}\mathrm{m}_u \tag{38}$$

となる.

D　普遍単位系規格外の単位

(本 Appendix は参考のためのものであり『普遍単位系規格』の一部を構成しない.)

D.1　地球の回転に準拠した時刻の単位

普遍分	[universal minute]	$=$	$100.17_{(12)}\mathrm{s}_u$ (厳密)
刻	[clock]	$=$	$10_{(12)}$ 普遍分
日	[day]	$=$	128 刻
年	[year]	$=$	365 日 31 刻
世紀	[universal century]	$=$	64 年
		$=$	$10\_0513\_16A2.8_{(12)}\mathrm{s}_u$)

時刻の単位は, 時間の単位とも, 空間に対する地球の回転角の単位ともみることができる.

地球上で生活する場合, 時刻の単位として年と日を無視することはできない. しかし年や日は s_u の 12 の整数乗で表現できないだけでなく, 互いの比も簡単な値にはならない. そこで,

1. 地球にローカルな時刻の最大の単位と s_u の比は, 近似的に 12 の整数乗
2. 地球にローカルな時刻の最大の単位と年の比は, 正確にある整数 n の整数乗
3. 地球にローカルな時刻の最小の単位と日の比は, 正確に同じ整数 n の整数乗
4. 地球にローカルな時刻の最小の単位と s_u の比は, 近似的に 12 の整数乗

とできないか?実は $n=2$ として, 比較的小さな整数乗の範囲内でこのような単位を構成できるのである.

世紀	$=$	地球にローカルな時刻の最大の単位	$=$	2^6年	$\approx$	$12^9\mathrm{s}_u$
刻	$=$	地球にローカルな時刻の最小の単位	$=$	2^{-7}日	$\approx$	$12^3\mathrm{s}_u$

刻〜日・年〜世紀の間は完全に 2 進法になっているが, 刻と世紀はともに近似的に s_u の 12 の整数乗倍であり[14] , 滑らかに『普遍単位系』に接続する. 人間は大きな量には大きな単位を, 小さな量には小さな単位を使う性癖があるので, この両者を滑らかに『普遍単位系』に接続することによって, 年や日などが『普遍単位系』から外れざるを得なかった不都合を軽減する.

現在の地球では, 偶然ユリウス年と回帰年の差がちょうど 1 刻であり,

$$1\,\text{回帰年} = 365\frac{2^5-1}{2^7}\,\text{平均太陽日} \tag{39}$$

という関係がきわめて精確 (誤差 10^{-8}のオーダー) に成り立っている. しかも, 閏年が 2^2年ごと, 閏年の補正が 2^7年ごとというだけではなく,2 の整数乗年に関しては表 5 のようなおもしろい偶然もある. このため 1 世紀を 64 年とすれば毎世紀, 太陽・金星・地球・火星はほぼ同じ位置関係を繰り返すことになる (なお, 金星の自転は公転と逆向きのため 8 地球回帰年の間に金星は太陽に対してちょうど 25 回自転する).

表 5: 地球公転と金星・火星

惑星	自転・公転	地球平均太陽日数	地球回帰年数	2 の巾
金星	3 自転	729.06 日	1.9961 年	1
	13 公転	2921.16 日	7.9979 年	3
火星	17 公転	11678.77 日	31.9754 年	5

[14] $12 = 2^2 \times 3$ であるから, 必然的に日〜年の間に 3 の因子がしわ寄せされることになる. 実際 $3^6/2 = 364.5$ である. 揚雄 (53BC〜AD18) の太玄暦にこの $3^6/2$ という数値が使われているというから驚く.(14) なお太玄暦は施行はされなかった.

刻および世紀と s_u の比は厳密なものとし, 実際の地球回転との誤差は世紀末におかれる負の閏刻によって調整するようにする (現在の傾向からすると, ほとんど毎世紀負の閏刻がはいることになる〜というか, その程度しかずれが生じないのである).

D.1.1 暦法 1

大の月を 31 日, 小の月を 30 日とし, 平年は小大小大小大小大小大小小 (365 日), 閏年は小大小大小大小大小大小大 (366 日) とする. 閏日は 2 世紀毎の最後の年を除く, すべての 4 年毎の年の年末日になる. こうすると 4 世紀は 93502 日となるが, これはマヤ暦の 13 カトゥン (=93600 日) にほぼ一致する. もし「普遍単位暦」の元期をグレゴリオ暦 2012 年 12 月 21 日[15] にすれば,4 世紀毎の世紀末は, おおまかにマヤ暦アハウ 4 のカトゥンの終わりに同期する.

また, 刻と日時分秒には下記のような関係があるので,

$$
\begin{array}{rcll}
1 & 刻 & = & 11\ 分\ 15\ 秒 \\
4 & 刻 & = & 45\ 分 \\
10_{(12)} & 刻 & = & 2\ 時間\ 15\ 分 \\
100_{(12)} & 刻 & = & 27\ 時間 = 1\ 日\ 3\ 時間
\end{array}
$$

1 日が午前 0 時に始まるとすれば, 午前 9 時が $40_{(12)}$刻, 午後 6 時が $80_{(12)}$刻, 翌朝の午前 3 時が $100_{(12)}$刻になる.

D.1.2 暦法 2

太陽年だけでなく近点年をもサポートする場合の例を示す.

大の月を 31 日, 小の月を 30 日とし, 次ページに定義するルールに従って, 大の月を地球が遠日点を通過する前後の連続した 5〜6ヶ月に配置する. 閏日は世紀番号を $27_{(10)}$ で割った余りが奇数になる世紀の最後の年を除く, すべての 4 年毎の近点年の年末日になる. グレゴリオ暦 2012 年 12 月 21 日を元期にすることは, 暦法 1 と同様である. 次ページに本暦法のルール定義を, その次のページに Perl 言語で記述した計算方法を示す.

刻の替わりに普遍分と時間 (我々の用いている単位と共通) を用いる. 普遍分, 時間と日時分秒には下記のような関係があるので,

$$
\begin{array}{rcll}
1 & 普遍分 & = & 56.25\ 秒 \\
1 & 時間 & = & 64\ 普遍分 \\
1 & 日 & = & 24\ 時間 \\
23_{(12)} & 時間 & = & 1\ 日\ 3\ 時間
\end{array}
$$

年〜世紀〜27 世紀と, 普遍分〜時間〜27 時間とは並行的な関係となる. 翌日午前 3 時は 27 時である. よって, この暦法では午前 3 時を日の境界とするのが良い. また普遍分を厳密に $100_{(12)}s_u$ とし, 真夜中を $20_{(12)}$ 時に固定し, 日の境界である翌日 3 時の直前に $1.7_{(12)}$分の閏分を設けるバリエーションも考えられる.

[15] この日付はほとんどすべての時間帯で西暦 2012 年の冬至日になる. そして G.M.T. 修正第 2 案によれば, マヤ暦アハウ 4 のバクトゥンの終了日でもある.

** The Sample Rule and Perl Program of the Universal Unit System Calendar **

1. The date notation

```
   The date notation is made C/Y/M/D. where
   D: day              0 <= D <  31_(10) =  27_(12)
   M: month            0 <= M <  12_(10) =  10_(12)
   Y: year             0 <= Y <  64_(10) =  54_(12)
   C: universal century 0 <= C < 324_(10) = 230_(12)
  (* valid range is 20736_(10)(=10000_(12))years)
```

2. Calendar Epoch

   Calendars Epoch 121/0/0/0 is December 21st, 2012 (JDN=2456283).

3. Month(days and arrangement)

   3.1 The months which consist of 31 days:
      Continuous 5 or 6 months sequence whose start month number is equal to the quotient of C divided by 27.

   3.2 The months which consist of 30 days:
      The other months.

4. The definition of the normal year/leap year

   4.1 Normal year
      When the sequence of 3.1 clauses consists of 5 months, the year which contains the first month is defined as the normal year.

   4.2 Leap year
      When the sequence of 3.1 clauses consists of 6 months, the year which contains the first month is defined as the leap year.

   (* When the 6th month of the sequence belongs in the next year, the days of the leap year are 365 days though it is contrary to the etymology of 'leap'.)

5. The arrangement of the normal year/leap year

   5.1 The year when the remainder of Y divided by 4 is not 3 is a normal year.

   5.2 The year of the end of universal century when the remainder of C divided by 27 is odd number is a nomal year.

   5.3 The other years are leap years.

```
#! /usr/bin/perl

 # month ofset tables for nomal year
 @MM = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5);

 # usage
 die "Usage: cal c/y/m/d" if ($ARGV[0] eq undef);

 # get date form
($cc,$yy,$mm,$dd) = split('/',$ARGV[0]);

 # date normalization
 $cl  =  $cc      % 27;
 $ct  = ($cc-$cl) / 27;
 $cm  =  $ct      % 12;
 $ch  = ($ct-$cm) / 12;
 $mm -=  $cm;
($yy,$mm)     = ($yy-1,$mm+12  ) if ($mm < 0);
($cl,$yy)     = ($cl-1,63      ) if ($yy < 0);
($cm,$cl,$mm) = ($cm-1,26,$mm+1) if ($cl < 0);
($ch,$cm)     = ($ch-1,11      ) if ($cm < 0);
 $yl =   $yy      %  4;
 $yh =  ($yy-$yl) /  4;

 # conversion to Julian Day Number
 $jdn =  $ch *(((365*4+1)*16*27-13)*12-5)
       + $cm * ((365*4+1)*16*27-13 +30)
       + $cl *  (365*4+1)*16       - int($cl/2)
       + $yy *   365               + $yh
       + $mm *    30               + $MM[$mm]
       + $dd +  (2526409-2898564);

 # adjustment of leap day
 $jdn++ if ($yl ==  3 && $mm > 5 &&
          !($yh == 15 &&($cl % 2 > 0)));

 print "$ARGV[0]:  $jdn";
```

D.2 紙の版型の規格

これは単位とすら言えないが面白い偶然の一致なので取り上げておく.
An 版は,「面積 $2^{-n}\times 1\mathrm{m}^2$, 長辺と短辺の比$\sqrt{2}:1$ の長方形」,
Bn 版は,「面積 $2^{-n}\times 1.5\mathrm{m}^2$, 長辺と短辺の比$\sqrt{2}:1$ の長方形」である. そこで,
紙の版型の系列を「面積 $2^{n/2}\times(\mathrm{m}_u/12)^2$, 長辺と短辺の比$\sqrt{2}:1$ の長方形」とすると,

n=22	A0	$2^{5.3}_{(12)}\times 2^{5.9}_{(12)}$	n=23	B0	$2^{5.6}_{(12)}\times 2^{6.0}_{(12)}$
n=20	A1	$2^{4.9}_{(12)}\times 2^{5.3}_{(12)}$	n=21	B1	$2^{5.0}_{(12)}\times 2^{5.6}_{(12)}$
n=18	A2	$2^{4.3}_{(12)}\times 2^{4.9}_{(12)}$	n=19	B2	$2^{4.6}_{(12)}\times 2^{5.0}_{(12)}$
n=16	A3	$2^{3.9}_{(12)}\times 2^{4.3}_{(12)}$	n=17	B3	$2^{4.0}_{(12)}\times 2^{4.6}_{(12)}$
n=14	A4	$2^{3.3}_{(12)}\times 2^{3.9}_{(12)}$	n=15	B4	$2^{3.6}_{(12)}\times 2^{4.0}_{(12)}$
n=12	A5	$2^{2.9}_{(12)}\times 2^{3.3}_{(12)}$	n=13	B5	$2^{3.0}_{(12)}\times 2^{3.6}_{(12)}$
n=10	A6	$2^{2.3}_{(12)}\times 2^{2.9}_{(12)}$	n=11	B6	$2^{2.6}_{(12)}\times 2^{3.0}_{(12)}$
n= 8	A7	$2^{1.9}_{(12)}\times 2^{2.3}_{(12)}$	n= 9	B7	$2^{2.0}_{(12)}\times 2^{2.6}_{(12)}$
n= 6	A8	$2^{1.3}_{(12)}\times 2^{1.9}_{(12)}$	n= 7	B8	$2^{1.6}_{(12)}\times 2^{2.0}_{(12)}$
n= 4	A9	$2^{0.9}_{(12)}\times 2^{1.3}_{(12)}$	n= 5	B9	$2^{1.0}_{(12)}\times 2^{1.6}_{(12)}$
n= 2	A10	$2^{0.3}_{(12)}\times 2^{0.9}_{(12)}$	n= 3	B10	$2^{0.6}_{(12)}\times 2^{1.0}_{(12)}$
n= 0	A11	$2^{-0.3}_{(12)}\times 2^{0.3}_{(12)}$	n= 1	B11	$2^{0.0}_{(12)}\times 2^{0.6}_{(12)}$

B5 版の版型は,181.40mm$\times$256.54mm となって, 現実の値 182.06mm$\times$257.47mm とほとんど一致する. このことは B 系列すべてについて言えることである (週刊誌［B5］の上辺の長さはほとんど正確に $2/3\mathrm{m}_u$ である).

E　物理天文定数表

(本 Appendix は参考のためのものであり『普遍単位系規格』の一部を構成しない.)

最後に,『普遍単位系規格』であらわした基礎物理定数・物性物理定数・天文定数をしめす.[16]

* は微細構造定数に完全に連動している定数である.

表 6: 基礎物理定数

真空の固有 impedance	1		Ω_n/rad^2	$(\sqrt{\mu_0/\epsilon_0})$
Avogadro 定数	1		mol_n^{-1}	(N_A)
Rydberg 定数	1	$\times 10^{6}_{(12)}$	Ω_1/m_u	(R_∞)
真空中の光速度	1	$\times 10^{8}_{(12)}$	$\mathrm{m}_u/\mathrm{s}_u$	(c_0)
作用量子	1	$\times 10^{-26}_{(12)}$	$\mathrm{J}_u\mathrm{s}_u$	$(\hbar)$
Boltzmann 定数	1	$\times 10^{-18}_{(12)}$	$\mathrm{J}_u/\mathrm{K}_u$	(k_B)
気体定数	1	$\times 10^{4}_{(12)}$	$\mathrm{J}_u/(\mathrm{mol}_u\mathrm{K}_u)$	(R)
原子質量単位	1.0009_051B_6	$\times 10^{-20}_{(12)}$	g_u	$(m^{12}\mathrm{C}/12)$
Bohr 半径	1.005B_859A_5	$\times 10^{-9}_{(12)}$	m_u	$*(\alpha\Omega_1/4\pi R_\infty)$
微細構造定数	0.0107_3994_38	$_{(12)}$		$*(\alpha = e^2\Omega_n/\hbar)$
電子の電荷	1.0374_43B6_4	$\times 10^{-14}_{(12)}$	C_u	$*(\sqrt{\alpha\hbar/\Omega_n})$
電子の質量	0.B469_2178_0	$\times 10^{-23}_{(12)}$	g_u	$*(m_e = 4\pi R_\infty\hbar/\Omega_1\alpha^2 c_0)$
電子の古典半径	1.1368_3609_A	$\times 10^{-11}_{(12)}$	m_u	$*(\alpha^3\Omega_1/4\pi R_\infty)$
Bohr 磁子	0.659A_AB66	$\times 10^{-17}_{(12)}$	$\mathrm{A}_u\mathrm{m}_u^2$	$*(e\hbar/2m_\mathrm{e})$
陽子電子質量比	1090.19B5_78	$_{(12)}$		$(m_\mathrm{P}/m_\mathrm{e})$
重力定数	2A.B33B	$\times 10^{34}_{(12)}$	N_u	$(N_G = c_0^4/G)$
Planck の長さ/2	0.BA70BB	$\times 10^{-27}_{(12)}$	m_u	$(l_P = (1/2)\sqrt{G\hbar/c_0^3\alpha})$
Planck 質量	5A.B223	$\times 10^{-8}_{(12)}$	g_u	$(\sqrt{\hbar c_0/G})$
Stephan-Boltzmann 定数	0.1B82_B282	$\times 10^{-6}_{(12)}$	$\mathrm{W}_u/(\mathrm{m}_u^2\mathrm{K}_u^4)$	$(\pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c_0^2)$
Josephson 定数	0.3ABA_1394	$\times 10^{12}_{(12)}$	$\Omega_1/(\mathrm{C}_u\Omega_n)$	$*(K_J = 2e/h = (\Omega_1/\pi)\sqrt{\alpha/\hbar\Omega_n})$
von Klitzing 定数	5.B903_2B9B	$\times 10^{2}_{(12)}$	Ω_n/Ω_1	$*(R_K = h/e^2 = 2\pi\Omega_n/\Omega_1\alpha)$

[16] 本定数表は 1998 年推奨値を反映していない.1998 年推奨値については http://physics.nist.gov/constants を参照せよ.

表 7: 物性物理定数

氷点での黒体輻射	BA.2482_6	$_{(12)}$	W_u/m_u^2	
理想気体のモル体積	102.A553_0	$_{(12)}$	m_u^3/mol_u	(標準状態)
空気の密度	0.2451_8	$_{(12)}$	g_u/m_u^3	(標準状態)
空気中の音速	337.479	$_{(12)}$	m_u/s_u	(標準状態)
水の密度	108.817B_A6	$_{(12)}$	g_u/m_u^3	(最大密度)
氷の密度	B8.0	$_{(12)}$	g_u/m_u^3	(0 ℃)
塩水の浮力	6	$\times 10^2_{(12)}$	N_u/m_u^3	(比重 1.03)
同 上	6	$\times 10^2_{(12)}$	P_u/m_u	(水深と圧力の関係)
氷点	169.49BA_9	$_{(12)}$	K_u	(1 気圧)
水の沸点	217.B09B_0	$_{(12)}$	K_u	(1 気圧)
水の比熱	0.6052_24	$\times 10^4_{(12)}$	$J_u/(g_u K_u)$	(熱化学カロリーの定義による)
水の粘度	1.2A29	$\times 10^{-3}_{(12)}$	$P_u s_u$	(25 ℃)
水の動粘度	1.207B	$\times 10^{-5}_{(12)}$	m_u^2/s_u	(25 ℃)
水の表面張力	0.BB64_8	$\times 10^{-1}_{(12)}$	N_u/m_u	(25 ℃)
水の生成 enthalpy	1.4500_1	$\times 10^8_{(12)}$	J_u/mol_u	(25 ℃)
水の生成 Gibbs energy	1.1757_B	$\times 10^8_{(12)}$	J_u/mol_u	(25 ℃)
最高感度の光の波長	611	$\times 10^{-8}_{(12)}$	m_u/Ω_1	(candela の定義による)
最高感度の光子の energy	1.01	$_{(12)}$	$eA_u\Omega_n/mol_n$	(candela の定義による)
同 上	1.05	$\times 10^{-14}_{(12)}$	J_u/mol_n	

表 8: 天文定数

標準重力加速度	5.5A54_B	$_{(12)}$	$\mathrm{m}_u/\mathrm{s}_u^2$	
標準大気圧	165.0086	$\times 10^{2}_{(12)}$	P_u	
地球 geoid の potential	0.3719_A81	$\times 10^{8}_{(12)}$	$\mathrm{m}_u^2/\mathrm{s}_u^2$	(脱出速度の自乗)
地球の脱出速度	0.669B_3217	$\times 10^{4}_{(12)}$	$\mathrm{m}_u/\mathrm{s}_u$	(Potential の平方根)
地球の重力半径	241.B898_22	$\times 10^{-4}_{(12)}$	m_u	(大気を含む)
地球の赤道半径	7A2.4AAB	$\times 10^{4}_{(12)}$	m_u	
天文単位	8A6.7575_4	$\times 10^{8}_{(12)}$	m_u	(地球と太陽の距離)
平均太陽日	A8.14A7_261	$\times 10^{3}_{(12)}$	s_u	
回帰年	0.230B_59A6_37	$\times 10^{8}_{(12)}$	s_u	
世紀	10.0513_16A2_8	$\times 10^{8}_{(12)}$	s_u	(64 年)
月の重力半径	4.1A76_416	$\times 10^{-4}_{(12)}$	m_u	
月の赤道半径	218.04	$\times 10^{4}_{(12)}$	m_u	
月の平均距離	3.3513_B	$\times 10^{8}_{(12)}$	m_u	
朔望月	222B.AB7A	$_{(12)}$	clock	
交点月	2023.1B61	$_{(12)}$	clock	
太陽の重力半径	3182.870A_56	$_{(12)}$	m_u	
太陽の赤道半径	5.B475	$\times 10^{8}_{(12)}$	m_u	
太陽の輻射	25.57	$\times 10^{20}_{(12)}$	W_u	
太陽の光度	0.40	$\times 10^{20}_{(12)}$	$\mathrm{W}_u/\mathrm{rad}^2$	
太陽定数	435.1B	$_{(12)}$	$\mathrm{W}_u/\mathrm{m}_u^2$	
５等星の照度	1	$\times 10^{-A}_{(12)}$	$\mathrm{W}_u/\mathrm{m}_u^2$	
宇宙膨張定数	5.3〜7.0	$\times 10^{14}_{(12)}$	s_u	(Hubble 定数の逆数)

F　参考文献

表 9: 参考文献

項番	編著者	文献名	出版社 (出版年)
(1)	M.L.McGlashan	ＳＩ単位と物理・化学量	化学同人 (1974)
(2)	E. Witten	時空とは何か	丸善 (パリティ1997.1)
(3)	夏野編著	中国音楽簡史	高等教育出版社 (1991)
(4)	A. Wood	音楽の物理学	音楽之友社 (1976)
(5)	F. de Saussure	言語学序説	勁草書房 (1971)
(6)	R.L.Wilder	数学基礎論序説	培風館 (1969)
(7)	D.R.Hofstadter	ゲーデル・エッシャー・バッハ	白揚社 (1985)
(8)	森口繁一他編著	数学公式 III	岩波書店 (1960)
(9)	高田誠二	単位と単位系	共立出版 (1980)
(10)	須賀隆	電磁気量の次元の一整理法	丸善 (パリティ1997.4)
(11)	高橋秀俊	電磁気学	裳華房 (1959)
(12)	青野修	電磁気学の単位系	丸善 (1990)
(13)	平川浩正	相対論（第２版）	共立出版 (1986)
(14)	川原秀城	中国の科学思想	創文社 (1996)