複数の暦法の中心差を比較し可視化する手法の補足

須賀　隆[1)]

1．まえがき

標題の「複数の暦法の中心差を比較し可視化する手法」とは、“複数の暦法や天体理論での太陽の運行に関する中心差（日行盈縮、後述のν -M）を三角級数に展開して表現し、その係数の組を多次元空間上の点とみなして複数の暦法や天体理論をその多次元空間に配置し、最もその配置が見やすい方向から眺める[2)]ことによって複数の暦法や天体理論の関係を可視化する”という手法です。この手法は、本会報第23号「貞享暦のオリジナリティに関するノート」(2016年)[3)]で初めて用いたもので、その詳しい解説は「中心差にみる重修大明暦と授時暦の類似性」(2019年)[4)]で行っています。

後者（文献４）の続編を某誌に投稿した際に査読者より前者（文献３）にこの手法を用いた経緯を別途まとめてはどうかとのアドバイスをいただきました。そこで本稿では文献３に至る2015年６月の考察をWeb上で行った際の記述をできるだけそのまま[5)]再録し、経緯を第３章等に残すこととしたいと思います。

2．前提とした考察

第３章の議論の前には、前提として2015年５月26日付けの２つの考察がありました。

（1）2015-05-26『七政算外篇』[6)]

朝鮮王朝で編纂された『七政算』(内編は授時暦、外篇は回回暦）の外編に関して考察し、中心差の極大値について“貞享暦の値は「ぴたりと一致」しているわけではありませんが回々暦にかなり近い”としています。

（2）石原幸男「『アルマゲスト』と授時暦」[7)]

“日行盈縮に関する限り、授時暦と宣明暦に大きな差はない。さらにそれらはアルマゲストのモデルとも近い。それらに比べて貞享暦はたしかに進歩している。”としています。

以下、これらをうけての考察です。

3．2015年６月の考察

2015年６月の考察のあらすじは、

前章のとおり、アルマゲストと授時暦や宣明暦が近いとしても、理論の伝播経路[8)]を想像すると、必ずしも歴史的経緯として関係があるとは言えない。であれば、極大値が近いからと言って貞享暦と回回暦に関係があるとも言えない。理論や技術が進歩して現実に近づけば同じような値になりがちなのではないか？

そこで単に極大値だけに注目するのではなく、時間／角度ドメイン全体を確認すべき[9)10)]と、『日本暦日原典』[11)]p.521

1）　日本暦学会理事、暦の会会員、メールアドレス SGB02104@nifty.com
2）　本稿４．(1）の図がイメージとしてわかりやすいです。
3）　須賀隆「貞享暦のオリジナリティに関するノート」『日本暦学会』第23号、2016年、pp.11-13。http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/jokyo-originality.pdf

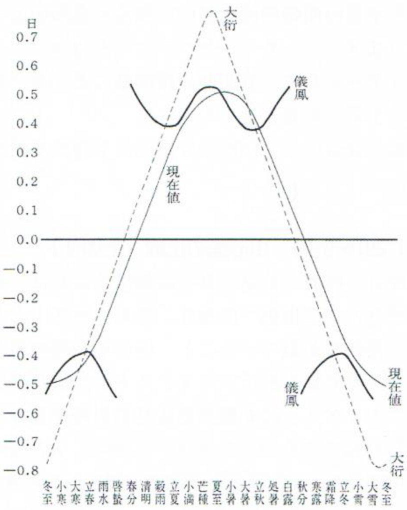
以下、本文で著者名を省略した文献・記事の著者は筆者です。

4）　須賀隆「中心差にみる重修大明暦と授時暦の類似性」『科学史研究』第291号、2019年、pp.233-238。https://independent.academia.edu/TakashiSUGA/Papers
5）　Web上でHTMLを用いて表現していたリンクを脚注に直すなど若干の改訂は行いました（これに伴う追記は“*斜体*”にしています)。また「回々暦」は「回回暦」に改めました。
6）　記事2015-05-26『七政算外篇』　https://suchowan.at.webry.info/201505/article_26.html
7）　石原幸男「『アルマゲスト』と授時暦」、2015年５月26日更新。http://www.asahi-net.or.jp/~jc1y-ishr/Almagest/Joukyoureki_NikkouEishuku.html
8）　歴史的経緯として関係があるのなら、大衍暦の理論伝播経路となるはずのインドの天体理論も近いものになるかどうかを確認する必要があります。
9）　このため文献３では、あえて「貞享暦の極大値が回回暦のそれにかなり近い」ことには言及していません。貞享暦と回回暦の近さについては表[16)]ではなく図[24)]で議論しています。
10）　竹迫忍「渋川春海の貞享暦の研究」(『数学史研究』No.233（2019年)、1-46頁）は文献３をリファーしてくださり、また太陽の中心差以外の様々な要素についても比較検討を行い、「貞享暦」を“授時暦をもとにイスラム暦（回回暦）の暦数を融合することにより、さらにそれらを越える暦法を目指していた”と評価しています。ただ、文献３が中心差の極大値のみに着目したという誤解を与える記述になっています。
11）　内田正男『日本暦日原典』雄山閣、1975年。

第６図（右図）に相当する図を描いてみた[12]。ところが、多数の暦法や天体理論の中心差のグラフを一枚にまとめると、多数の線が交錯し内容を把握しがたい。

多数の暦法や天体理論のそれぞれを線ではなく点で表現できないか？そういえば、大昔に「光世紀の世界」[13]の編集に協力した際に、新規に設定し三次元空間に配置した星座を、その配置が最も見やすい方向から眺めるというアプローチをとった。中心差を三角級数に展開して表現し、その係数の組を多次元空間上の点とみなせば極大値だけではなく周辺を含めた線全体を情報の欠落なく点で記述できる。複数の暦法や天体理論を表す点を、その多次元空間に配置し、以下文献13と同様の計算をしてみてはどうだろうか？

第６図



というようなものです。なお、3.(2) にある“貞享暦と回回暦のズレは、貞享暦が３次多項式による近似を選択したことによるのかもしれません”という仮説については、今後発表予定の文献４の続編で別途詳しく吟味します。

（1）2015-06-04　中心差の比較（その１）[14]

2015-05-26『七政算外篇』[6]の計算を、ちょっと腰を据えて水平展開してみました(→計算に用いたソースコード[15]、→*得られた表*[16])。

名前	中心差				三角級数振幅／度		
	最大値／度	真近点角／度	平均近点角／度	平均近点角／日	1	2	3
麟徳暦	2.727	90.000	87.273		2.1956	0.0505	−0.1949
アルマゲスト	2.388	90.000	87.612		2.3873	0.0497	0.0014
大衍暦	2.388	90.000	87.612		2.4782	0.0485	0.1173
宣明暦	2.394	90.000	87.606		2.4469	0.0495	0.0659
授時暦	2.367	90.000	87.633	88.909	2.4183	0.0326	0.0671
アールヤバティーヤ	2.149	92.149	90.000		2.1490	0.0000	−0.0001
スールヤ・シッダーンタ	2.176	92.176	90.000		2.1913	0.0000	0.0106
回回暦	2.013	90.036	88.023		2.0127	0.0354	0.0008
貞享暦	2.027	89.615	87.588	88.863	2.0696	0.0293	0.0540
楕円軌道	1.915	90.718	88.803		1.9148	0.0200	0.0003

三角級数振幅欄は、真近点角を υ、平均近点角をＭとするとき、中心差　$\upsilon - M$　をＭ　の三角級数で、

$$\upsilon - M = \Sigma a_n \sin(nM) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

のように表したときの、$a_1, a_2, a_3, \cdots$の値です。

中心差の欄は、

　　中心差の最大値（$\upsilon - M$）

　　そこでの真近点角（υ）

　　そこでの平均近点角（M）

です。平均近点角／日は過去の記事と対応させるために一部のみ記載しました。

12）　http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/anomaly-graph.png

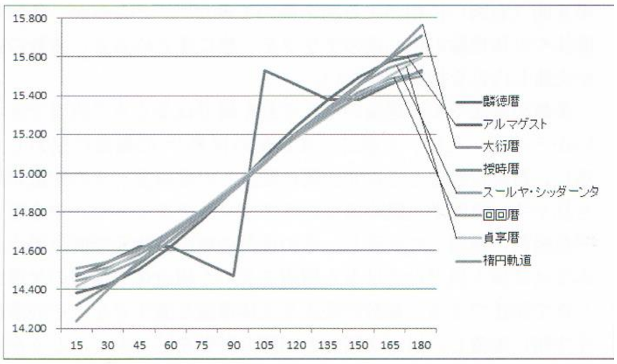
13）　石原藤夫『光世紀の世界』早川書房、1984年。https://ci.nii.ac.jp/ncid/BN01969949

14）　３.（1）は、記事2015-06-04　中心差の比較（その１）https://suchowan.at.webry.info/201506/article_4.html

15）　http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/anomaly.zip

16）　http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/anomaly.pdf

『日本暦日原典』[11]p.521 第６図に対応する節気と中気の間隔の図を描いてみると*右図*のようになります[12][17]。アールヤバティーヤはスールヤ・シッダーンタに、宣明暦は授時暦に近いので見やすくするため省きました。



長くなるので、内容の分析は日を改めて書きます。

(2) 2015-6-05　中心差の比較（その２）[18]

昨日[14]の表[16]を見て第一に気付くことは、石原幸男さんのご指摘[7]の通り、アルマゲストと大衍暦〜授時暦が似ていること。特に中心差の最大値で見るとアルマゲストと大衍暦はほとんど一致します。ただしグラフ[12]の方で見ると、アルマゲストと大衍暦では、近日点や遠日点付近で少し差が目立ちます。

アルマゲストに記載のある月の出差が取り入れられなかったわけですから、唐代の中国でアルマゲストを直接参考にしたのではないでしょう。しかし、大衍暦の編者は仏僧である一行ですから、インド経由での影響が疑われます。アルマゲストの太陽運行理論で、周転円の大きさが1/24 (2p30/60p) であるのは、プトレマイオスより300年近く遡るヒッパルコスの研究によります。よってインドでアルマゲストより前の段階のギリシア天文学を受容したことと矛盾しません。

しかしインド経由の影響であったならアールヤバティーヤやスールヤ・シッダーンタと、もっと似ていてもおかしくありません。似ていない以上、この表の結論としては、アルマゲストと大衍暦の類似は偶然とするのが妥当です。この表だけではなんとももどかしい限りです。

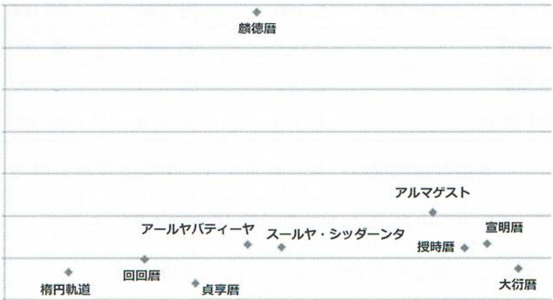
回回暦の値は三角級数の高調波成分が少なく、全体に楕円軌道をよく近似しています。貞享暦と回回暦のズレは、貞享暦が３次多項式による近似を選択したことによるのかもしれません。

技術的な観点で気が付いたことをいくつか。

隋唐代の太陽の運行表は各二十四節気での定気と平気のズレを時間で表現したものです。これは、言い換えると「真近点角 ν から中心差 ν -M を引く表」とみなせます。

これに対して回回暦の太陽加減表は独立変数が90度から２度ずれたあたりに中心差の最大値があり、今回計算してみるとそれがちょうど真近点角90度に相当します。つまり「平均近点角Ｍから中心差 ν -M を引く表」になっているのです。授時暦や貞享暦の３次多項式も同じ考え方とみられます。貞享暦の中心差の最大値が真近点角90度にない[19]のは、おそらく意図したものではなく多項式の誤差でしょう。

ギリシアでもインドでも中心差は周転円[20]で考えるのは同じですが、インドのマンダ周転円の計算は半算術的に行われるようです。このため純粋に幾何学的に計算するアルマゲストとは異なり三角級数の高調波成分があまりありません。これはインドの特徴と言えると思います。



(3) 2015-06-06　中心差の比較（その３）[21]

昨日の記事[18]で文章で書いたことを視覚化できないかと考えて n＝11[22]の高調波までの成分の振幅をベクトルとみなして主成分分析[23]（PCA）にかけてみました（→ソースコード[15]に主成分分析ロジック追加、→*得られた図*[24]）。

縦軸・横軸ともスケールに意味があるので正規化はし

17）ただし元の図12）は線の色を変えて暦法等を識別していますが、本誌はモノクロ印刷のためそのままでは識別ができません。そこで、本稿の図では凡例から線を延ばして一部の暦法等が識別できるようにしています。

18）３．(2) は、記事2015-06-05 中心差の比較（その２） https://suchowan.at.webry.info/201506/article_5.html

19）藤井康生「授時暦と関孝和・建部賢弘の招差法対貞享暦と渋川春海の招差法」（『数学史研究』Vol.220, 2014 pp.40-48）p.47では平均近点角／日＝89で極大にしようという意図ではないかとしています。

20）離心円で考えるのと同値

21）３．(3) は、記事2015-06-06　中心差の比較（その３）https://suchowan.at.webry.info/201506/article_6.html

22）表に対称性があるので、麟徳暦～宣明暦の独立な定数の数は、小寒から芒種までの11個なのです。n＝1～11の係数を定めれば原理的には情報は落ちません。

23）http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%BB%E6%88%90%E5%88%86%E5%88%86%E6%9E%90

24）http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/anomaly-PCA.png

ていません。

念のため R言語でも同じ計算をしてみましたが、図が180度回転しただけで実質同じ結果になったので、多分計算はあっていると思います。

昨日議論した“近さ”が確かにイメージできますね。

４．「中心差にみる重修大明暦と授時暦の類似性」発表後の補足

その後、文献４にいただいた一般的なコメントに対するフォローアップとして主成分分析に関する初歩的な補足を行った記事も書きましたので、それを本章に再録します。

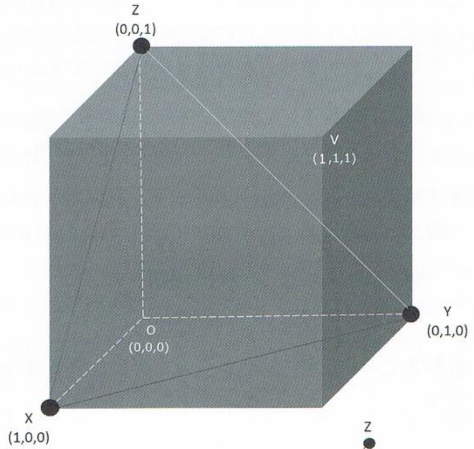
(1) 2019-11-19 重修大明暦と授時暦（散布図）[25]

もともとの2015-06-04中心差の比較（その１）[14]

| $\upsilon - M = \Sigma a_n \sin(nM)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$

の a_n $(n = 1,2,3,\cdots)$ を2019-10-29重修大明暦と授時暦[26]の図（**２次元の散布図**[24]）で可視化する問題意識を、シンプルな例を使って説明することを考えました。

図[27]のような立方体の３つの頂点 X，Y，Z にデータを表現する点が配置されているとして、この３点の関係を可視化したいとします。

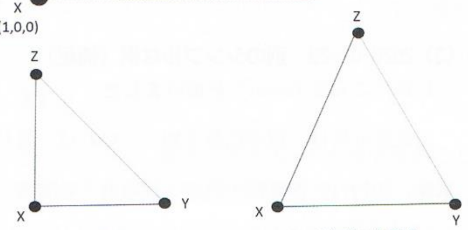


点 X から原点 O をながめると、左下の図のようになります。

- 点 X と原点 O は実際には立方体の辺の長さだけ離れているのに重なる[28]。
- ３点は等距離なのに Y－Z のみが長く見える。

ところが実は点 X，Y，Z は点 V と原点 O を結ぶ直線に垂直な１平面上にあるのです。このため、点 V から原点 O をながめると、右下の図のようになります。

- 点 X，Y，Z は正三角形の頂点に配置されて見える。
- この正三角形に奥行はない。



Xから0を見る　　Vから0を見る

奥行がないことによって、３次元の配置が２次元に次元圧縮され可視化できたのです。

この例では、点 V と原点 O を結ぶ直線を手作業で発見しましたが、データの共分散行列を対角化するという数学的テクニックを用いるとシステマティックに発見することができるのです。もちろん**元データの配置にはいっさい手を付けない**ので、元データが１平面上になければ、視点を変えても１平面にはなりません。その場合でも奥行が最もフラットになるような視点を得られます。

どのくらいフラットになったかは対角化した共分散行列の対角要素（＝固有値）の大きさで評価できます。

(2) 2020-01-22 別のシンプルな例[29]

2019-1-19重修大明暦と授時暦（散布図）[25]に関連して、次元圧縮にはなりませんが、もう一つシンプルな例を構成してみます。

25）　４．（1）は、記事2019-11-19　重修大明暦と授時暦（散布図）https://suchowan.at.webry.info/201911/article_18.html

26）　記事2019-10-29　重修大明暦と授時暦　https://suchowan.at.webry.info/201910/article_28.html

27）　http://www.asahi-net.or.jp/~dd6t-sg/pcs/cube.png

28）　つまり　点 X は平面 OYZ から浮いている。

29）　４．（2）は、記事2020-01-22　別のシンプルな例 https://suchowan.at.webry.info/202001/article_21.html

国語（教科１）と数学（教科２）の２教科の学力テストをして１学年全体の点数を分析したとします。そして、その結果、

第１軸の成分値 ＝（国語の点数 ＋ 数学の点数）/ $\sqrt{2}$
第２軸の成分値 ＝（国語の点数 － 数学の点数）/ $\sqrt{2}$

という計算式で第１軸と第２軸を計算するのが良いとわかったとします。

国語と数学の点数の共分散は０ではないでしょうが、第１軸と第２軸の成分値の共分散は０でしょう。第１軸は総合的な学力、第２軸は文系指向とでもいえるかもしれません。

この場合、次元圧縮はしていないので、

国語の点数 ＝（第１軸の成分値 ＋ 第２軸の成分値）/ $\sqrt{2}$
数学の点数 ＝（第１軸の成分値 － 第２軸の成分値）/ $\sqrt{2}$

という計算式で情報の落ちなく成分値から教科の点数を復元できます。つまり「誤差」はありません。同じものを単に45度回転して眺めただけなのですから当然です。

そして、教科番号と軸番号は関係ないですから、

国語（教科**１**）の点数 － 第**１**軸の成分値
数学（教科**２**）の点数 － 第**２**軸の成分値

を「誤差」として議論するのはナンセンスです。

例えば、国語の点数が100点で数学の点数が０点の学生がいた場合、

第１軸の成分値 ＝ 70.710678
第２軸の成分値 ＝ 70.710678

教科**２**である数学の点数が０点なのに、第**２**軸の成分値が０でないのは異常でも何でもありません。当たり前のことです。

(3) 2020-01-23　別のシンプルな例（補足）[30)]

以前にこんな tweet[31)] を拾いました。

主成分分析は、線形代数を知っていれば、習わなくても、自分で思い付いて当然の話に過ぎない。

実際、2019-10-29重修大明暦と授時暦[32)] の論文[4)] でも、いかに可視化の工夫をするかという課題を、

「こうして」「こうして」「こう」するとうまくいく。
結果、やっていることは世の中で言う PCA に相当する。

という流れで説明しています。

思い返すと、この手法を最初に使ったのは、もう40年近く前、地球からの距離が50光年以内の球形の空間である光世紀世界の中に三次元に配置された恒星の集団が、できるだけフラットに見える視点を決めるにはどうすればよいかという課題[13)] を解決するためでした。

当然、その時点では PCA などという用語は意識していません。

習ったのではなく自然に思い付いてしまったものですから、昨日の記事[29)] のような例を用いた説明が、線形代数になじみのない方々に本当に有効な解説になっているのか、ポイントを突いているのか、逆に自身では判断しがたいというもどかしさがあります。

5．おわりに

以上、第３章、第４章が標題の手法に関する補足として理解に資すれば幸いです。

30） ４．(3) は、記事2020-01-23　別のシンプルな例（補足）https://suchowan.at.webry.info/202001/article_22.html
31） https://twitter . com/genkuroki/status/1137712841828458497
32） 記事2019-10-29　重修大明暦と授時暦　https://suchowan.at.webry.info/201910/article_28.html