Schwartzschild 時空の測地線

平川浩正「相対論」により.

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\kappa}{1-\frac{R}{r}} = \frac{\kappa}{1-x} \qquad (6.47)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{R^2}x^2 \qquad (6.50)$$

$$\left[\frac{du}{d\varphi}\right]^2 + u^2 = (\kappa^2-1)\frac{c^2}{h^2} + \frac{c^2R}{h^2}u + Ru^3 \qquad (6.55)$$

計算の便の為、無次元量を変数にとることとし、

$$x \equiv \frac{R}{r} \qquad (R\text{は Schwartzschild 半径})$$

$$P \equiv (\kappa^2-1)\frac{c^2R^2}{h^2}$$

$$Q \equiv \frac{c^2R^2}{h^2} \geq 0$$

$$f(x) \equiv x^3 - x^2 + Qx + P$$

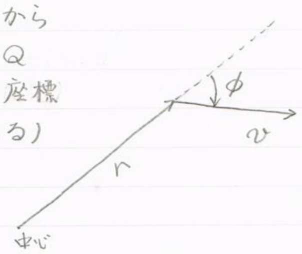
のように諸量を定義する。

(6.55)は、

$$\left[\frac{dx}{d\varphi}\right]^2 = f(x)$$

と書け、測地線は P, Q で完全に記述できてしまう。
(積分定数は、角度の原点の決め方で消える。)

Black hole の中心から距離 r の点を、動径から角度 ϕ ずれた方向に速度 v で動く質点の P, Q を求めてみる。(v, ϕ は、r に静止した座標(この座標での量には添字 0 をつけることにする)でのものである)



Schwartzschild の線素の式により、

$$\frac{dt_0}{dt} = \sqrt{1-\frac{R}{r}} = \sqrt{1-x}$$

$$\frac{dr_0}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

また

$$\left[\frac{dr}{d\tau}\right]^2 = (\kappa^2-1)c^2 + \frac{c^2R}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2R}{r^3} \qquad (6.53)$$

$$= \frac{h^2}{R^2}\left[(\kappa^2-1)\frac{c^2R^2}{h^2} + \frac{c^2R^2}{h^2}x - x^2 + x^3\right]$$

$$= \frac{h^2}{R^2} f(x)$$

$$r\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h}{r} = \frac{h}{R}x$$

ゆえに、

$$v^2 = \left[\frac{dr_0}{dt_0}\right]^2 + \left[r\frac{d\varphi}{dt_0}\right]^2 = \left[\frac{dt}{dt_0}\frac{d\tau}{dt}\right]^2\left\{\left[\frac{dr_0}{dr}\frac{dr}{d\tau}\right]^2 + \left[r\frac{d\varphi}{d\tau}\right]^2\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1-x}{\kappa}\right]^2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^2\frac{h^2}{R^2}f(x) + \frac{h^2}{R^2}x^2\right\}$$

$$= \frac{h^2}{\kappa^2R^2}\left[f(x) + x^2(1-x)\right] = \frac{h^2}{\kappa^2R^2}(Qx + P)$$

$$v^2 = c^2\left(\frac{x}{\kappa^2} + 1 - \frac{1}{\kappa^2}\right)$$

光の場合、$\kappa^{-2}=0$ だから、x によらず常に $v=c=\mathrm{const}$ である。

$$\tan^2\phi = \left[\frac{r\frac{d\varphi}{dt_0}}{\frac{dr_0}{dt_0}}\right]^2 = \frac{\frac{h^2}{R^2}x^2}{\frac{1}{1-x^2}\frac{h^2}{R^2}f(x)} = \frac{(1-x)x^2}{f(x)}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + Qx + P = \frac{(1-x)x^2}{\tan^2\phi}$$

$$Qx + P = (1-x)x^2\left[1+\frac{1}{\tan^2\phi}\right] = \frac{(1-x)x^2}{\sin^2\phi}$$

$$\sin^2\phi = \frac{(1-x)x^2}{Qx+P}$$

$$v^2 = \frac{h^2}{\kappa^2R^2}(Qx+P) = \frac{h^2}{\kappa^2R^2}\frac{(1-x)x^2}{\sin^2\phi}$$

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{c^2-v^2}{c^2(1-x)}$$

$$Q = \frac{c^2R^2}{h^2} = \frac{c^2}{v^2\kappa^2}\frac{(1-x)x^2}{\sin^2\phi} = \frac{c^2-v^2}{v^2}\frac{x^2}{\sin^2\phi}$$

$$P = (\kappa^2-1)Q = \frac{v^2-c^2x}{\cancel{c^2-v^2}}\frac{\cancel{c^2-v^2}}{v^2}\frac{x^2}{\sin^2\phi} = \frac{v^2-c^2x}{v^2}\frac{x^2}{\sin^2\phi}$$

以上のようにして、$P, Q \Leftrightarrow v, \phi$ の対応がついた。

近(遠)点距離と近(遠)点速度から P, Q を求めてみる。

$\phi = \dfrac{\pi}{2}$ だから、近(遠)点で $x = \beta$ とすれば、(β は $f(x) = 0$ の根)

$$Q = \frac{c^2 - v^2}{v^2} \beta^2$$

$$P = \frac{v^2 - c^2\beta}{v^2} \beta^2$$

$f(\beta) = 0$ となっているので、$z = x - \beta$ と原点を移動して、

$$f(x) = z\,[\,z^2 + (3\beta - 1)z + (3\beta^2 - 2\beta + Q)\,] = z f_1(z)$$

と書くことができる。$f_1(z) = 0$ の判別式は、

$$D = 1 - 4Q + 2\beta - 3\beta^2 \equiv \lambda^4$$

$D > 0$ で、$f(x) = 0$ がさらに2実根 α, γ ($\alpha > \gamma$) を持つとき、

$$\alpha = \frac{1 - \beta + \lambda^2}{2}, \quad \gamma = \frac{1 - \beta - \lambda^2}{2}$$

であって

$$\alpha - \gamma = \lambda^2$$

となる。

$f(x)=0$ の根の求め方

$$z = x - \frac{1}{3}$$

$$\zeta^2 = -\xi^2 = \frac{4}{3}\left(Q - \frac{1}{3}\right)$$

$$\eta = -4\left(P + \frac{Q}{3} - \frac{2}{27}\right)$$

とおけば、$f(x)=0$ は

$$4z^3 + 3\zeta^2 z - \eta = 0 \quad \text{または}, \quad 4z^3 - 3\xi^2 z - \eta = 0$$

とかける。

(i) $\zeta^2 > 0$ のとき、

$\dfrac{\eta}{\zeta^3} = \sinh 3\theta$ となる θ をとれば、$z = \zeta \sinh\theta$ が単一実根

(ii) $\zeta^2 = -\xi^2 = 0$ のとき、

$z = \sqrt[3]{\dfrac{\eta}{4}}$ が単一実根

(iii) $\xi^2 > 0$ のとき

a) $\dfrac{\eta}{\xi^3} > 1$ の場合

$\dfrac{\eta}{\xi^3} = \cosh 3\theta$ となる θ をとれば、$z = \xi \cosh\theta$ が単一実根

b) $-1 \leq \dfrac{\eta}{\xi^3} \leq 1$ の場合

$\dfrac{\eta}{\xi^3} = \cos 3\theta$ となる θ をとれば、

$$\left.\begin{aligned} z &= \xi \cos\theta \\ z &= \xi \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ z &= \xi \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \text{が3実根}$$

以上によって、P, Q から $f(x) = 0$ の根を知ることができる。

(付) ニュートン法

$$z \leftarrow \frac{1}{3} \frac{8z^3 + \eta}{4z^2 + \xi^2}$$

とすることによって根を改良することができる。
(三角函数、双曲線函数を使って得た単精度の根を、この方法で倍精度化することができる。)

根の分離

(1) $f(x)=0$ が3実根 α, β, γ $(\alpha>\beta>\gamma)$ を持つ場合

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}-\varepsilon$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}+\varepsilon$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)=6x-2$	$-$	-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	4	$+$
$f'(x)=3x^2-2x+Q$	$+$	$Q>0$	$+$	0	$-$	$Q-\frac{1}{3}<0$	$-$	0	$+$	$1+Q>0$	$+$
$f(x)=x^3-x^2+Qx+P$		P				$P+\frac{Q}{3}-\frac{2}{27}$				$Q+P$	

(i) $P>0$, $(P+Q>0)$

$f(0)>0 \rightarrow$ 負の実根がひとつ(ただひとつ)ある。
$f(1)>0 \rightarrow$ 1より大きな実根はない。
$\Rightarrow$ $\underline{\gamma<0<\beta<\alpha<1}$

(ii) $P<0$, $P+Q>0$

$f(0)<0 \rightarrow$ 負の実根はない
$f(1)>0 \rightarrow$ 1より大きな実根はない。
$\Rightarrow$ $\underline{0<\gamma<\beta<\alpha<1}$

(iii) $(P<0)$, $P+Q<0$

$f(0)<0 \rightarrow$ 負の実根はない
$f(1)<0 \rightarrow$ 1より大きな実根がひとつ(ただひとつ)ある。
$\Rightarrow$ $\underline{0<\gamma<\beta<1<\alpha}$

(2) $f(x)=0$ が 1実根(α), 2虚根を持つ場合

(i) $P>0$, $(P+Q>0)$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} f(-\infty)<0 \\ f(0)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha<0}$$

(ii) $P<0$, $P+Q>0$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} f(0)<0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{0<\alpha<1}$$

(iii) $(P<0)$, $P+Q<0$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} f(1)<0 \\ f(\infty)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha>1}$$

xの函数として、φ, τ, tを求めること、

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{d\varphi}{dx} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{d\tau}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{R^2}{h} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{f(x)}}$$

$$t = \int dt = \int \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{R^2 \kappa}{h} \int \frac{dx}{(1-x) x^2 \sqrt{f(x)}}$$

であるが、

$$\frac{1}{(1-x)x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

と部分分数分解されるので、

$$\Delta t = \int dt - \kappa \int d\tau = \frac{R^2 \kappa}{h} \left[\int \frac{dx}{x \sqrt{f(x)}} - \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{f(x)}} \right]$$

の方が考えやすい。

楕円積分の漸化式により、

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} - Q \int \frac{dx}{x \sqrt{f(x)}} - 2P \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{f(x)}} = 2 \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$$

ゆえに

$$\tau = \int d\tau = \frac{R^2}{2Ph} \left[\int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} - Q \int \frac{dx}{x \sqrt{f(x)}} - 2 \frac{\sqrt{f(x)}}{x} \right]$$

簡単のため

$$\left.\begin{aligned} I_m &\equiv \int \frac{dx}{x^m \sqrt{f(x)}} \\ J_m &\equiv \int \frac{dx}{(x-1)^m \sqrt{f(x)}} \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 0, -1)$$

$$S^2 \equiv (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$

とおき、

$$\int \frac{z^2 dz}{S} = \frac{1}{k^2} \int \frac{dz}{S} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz$$

と漸化式

$$2k^2 \int \frac{z^2 dz}{S} - 2 \int \frac{dz}{z^2 S} = 2 \frac{S}{z}$$

および、これらから導びかれる

$$\int \frac{dz}{z^2 S} = \int \frac{dz}{S} - \int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz - \frac{S}{z}$$

などを随時使用することにする。

(I_{-1}, I_0, I_1, J_1 を計算すれば、φ, τ, Δt がわかる。)

また、

$$w = \int_0^z \frac{dz}{S} = sn^{-1} z$$

とすれば

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz = \int_0^w dn^2 w\, dw$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(1+mz^2)\, S} = \int_0^w \frac{dw}{1+m\, sn^2 w}$$

これは、$sn^2 w = -\frac{1}{m}$ となる w で発散する。

$z = sn\, w$ は

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4K(k),\quad 2i\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = 2iK(k')$$

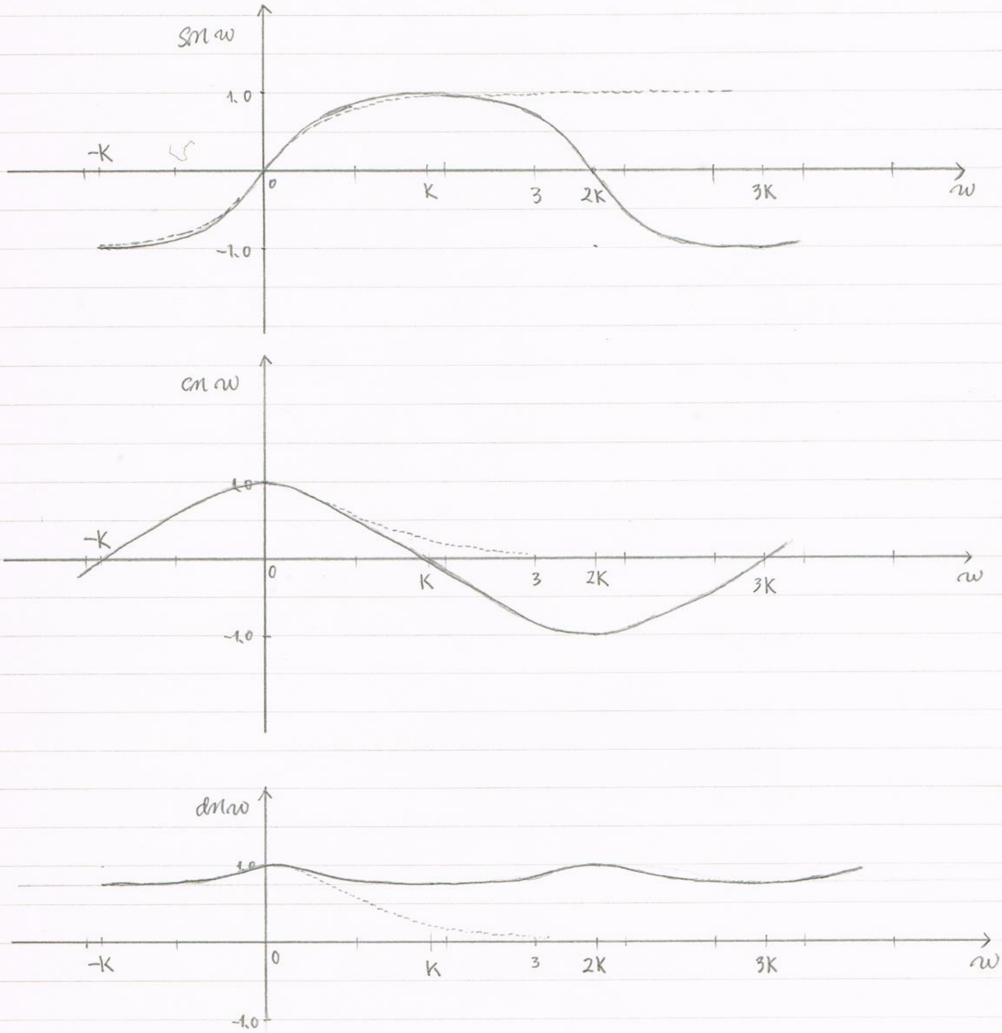
を周期とする2重周期函数である　($k^2+k'^2=1$)

（$K=K(k)$, $K'=K(k')$ と略記する。）

$$cn\, w = \sqrt{1-sn^2 w}$$

$$dn\, w = \sqrt{1-k^2 sn^2 w}$$

で，cn, dn を定義する。（分岐は $w=0$ で 1になるようにする）



実線 $k^2=0.5$
破線 $k^2=1.0$

Jacobi楕円函数

(I) $f(x)=0$ が 3実根 α, β, γ $(\alpha>\beta>\gamma)$ を持つ場合

$$\left.\begin{aligned} \lambda &\equiv \sqrt{\alpha-\gamma} \\ k &\equiv \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}} \end{aligned}\right\}$$ のように補助量を定義する。

a) $\beta > x > \gamma$ の場合

$$x = (\beta-\gamma)z^2+\gamma \qquad \left(\Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta-\gamma}} \quad \left[\begin{matrix} z(\gamma)=0 \\ z(\beta)=1 \end{matrix}\right]\right)$$

と変数変換する。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= (\beta-\gamma)z^2\left[(\beta-\gamma)z^2-(\beta-\gamma)\right]\left[(\beta-\gamma)z^2-(\alpha-\gamma)\right] \\ &= (\beta-\gamma)^2\lambda^2z^2(z^2-1)(k^2z^2-1) \end{aligned}$$

$$dx = 2(\beta-\gamma)z\,dz$$

ゆえに、

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{2(\beta-\gamma)z\,dz}{(\beta-\gamma)\lambda z\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{2}{\lambda}\frac{dz}{S}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\gamma}^{x}\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{0}^{z}\frac{dz}{S} = \mathrm{sn}^{-1}z = \underline{w}$$

$$\varphi \equiv \int_{\beta}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{2}{\lambda}\int_{1}^{z} \frac{dz}{S} = \frac{2}{\lambda}\left[\int_{0}^{z}\frac{dz}{S} - \int_{0}^{1}\frac{dz}{S}\right] = \frac{2}{\lambda}(w - K)$$

よって

$$w = \frac{\lambda\varphi}{2} + K$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\gamma}^{x}\frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{0}^{z}[(\beta-\gamma)z^2+\gamma]\frac{dz}{S} = (\beta-\gamma)\int_{0}^{z}\frac{z^2dz}{S} + \gamma\int_{0}^{z}\frac{dz}{S}$$

$$= \cancel{(\beta-\gamma)}\,\frac{\alpha-\gamma}{\cancel{\beta-\gamma}}\left\{\int_{0}^{z}\frac{dz}{S} - \int_{0}^{z}\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz\right\} + \gamma\int_{0}^{z}\frac{dz}{S}$$

$$= \alpha w - \lambda^2\int_{0}^{w}\mathrm{dn}^2 w\,dw$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\gamma}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{f(x)}} = \int_{0}^{z}\frac{dz}{[(\beta-\gamma)z^2+\gamma]S} = \frac{1}{\gamma}\int_{0}^{z}\frac{dz}{\left(1+\frac{\beta-\gamma}{\gamma}z^2\right)S}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int_{0}^{w}\frac{dw}{1+n_1\,\mathrm{sn}^2 w}\quad\left[n_1 = \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\right]$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\gamma}^{x}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{f(x)}} = \int_{0}^{z}\frac{dz}{[(\beta-\gamma)z^2+\gamma-1]S}$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\int_{0}^{w}\frac{dw}{1+n_2\,\mathrm{sn}^2 w}\quad\left[n_2 = \frac{\beta-\gamma}{\gamma-1}\right]$$

b) $x > \alpha$ の場合

$$x = \frac{\alpha-\gamma}{z^2} + \gamma \qquad \left(\Leftrightarrow \ z = \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{x-\gamma}} \quad \left[\begin{array}{l} z(\alpha)=1 \\ z(\infty)=0 \end{array} \right] \right)$$

と変数変換する

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= \frac{\alpha-\gamma}{z^2}\left[\frac{\alpha-\gamma}{z^2} - (\alpha-\gamma)\right]\left[\frac{\alpha-\gamma}{z^2} - (\beta-\gamma)\right]$$
$$= \frac{\lambda^6}{z^6}(1-z^2)(1-k^2z^2)$$

$$dx = -\frac{2\lambda^2}{z^3}dz$$

ゆえに、

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{2\cancel{\lambda^2}}{\cancel{z^3}}\frac{\cancel{z^3}\,dz}{\lambda^{\cancel{3}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -\frac{2}{\lambda}\frac{dz}{S}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \frac{dz}{S} = \mathrm{sn}^{-1} z = \underline{w}$$

$$\varphi \equiv \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{2}{\lambda}\int_0^z \frac{dz}{S} = -\frac{2w}{\lambda}$$

$$w = -\frac{\lambda\varphi}{2}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \left[\gamma + \frac{\alpha-\gamma}{z^2}\right]\frac{dz}{S} = \gamma\int_0^z \frac{dz}{S} + (\alpha-\gamma)\int_0^z \frac{dz}{z^2 S}$$

$$= \gamma\int_0^z \frac{dz}{S} + (\alpha-\gamma)\left\{\int_0^z \frac{dz}{S} - \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz - \frac{S}{z}\right\}$$

$$\underline{= \alpha w - \lambda^2\int_0^w dn^2 w\,dw - \lambda^2\,\frac{cn\,w\,dn\,w}{sn\,w}}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \frac{dz}{\left(\frac{\lambda^2}{z^2}+\gamma\right)S} = \int_0^z \frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{1}{\frac{\gamma}{\lambda^2}z^2+1}\right]\frac{dz}{S}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\int_0^z \frac{dz}{S} - \int_0^z \frac{dz}{\left(1+\frac{\gamma}{\lambda^2}z^2\right)S}\right]$$

$$\underline{= \frac{1}{\gamma}\left[w - \int_0^w \frac{dw}{1+n_3\,sn^2 w}\right] \quad \left[n_3 = \frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\right]}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \frac{dz}{\left(\frac{\lambda^2}{z^2}+\gamma-1\right)S}$$

$$\underline{= \frac{1}{\gamma-1}\left[w - \int_0^w \frac{dw}{1+n_4\,sn^2 w}\right] \quad \left[n_4 = \frac{\gamma-1}{\alpha-\gamma}\right]}$$

(II) $f(x)=0$ が 1実根 β, 2虚根を持つ場合

$$\left.\begin{aligned} \mu &\equiv \sqrt[4]{f'(\beta)} \\ \nu &\equiv \frac{f''(\beta)}{2} \\ k &\equiv \frac{\sqrt{2\mu^2-\nu}}{2\mu} \end{aligned}\right\}$$ のように補助量を定義する。

$$f(x) = (x-\beta)\left[(x-\beta)^2+\nu(x-\beta)+\mu^4\right]$$

とかくことができる

i) $$x-\beta = -\mu^2\frac{t\mp 1}{t\pm 1} \qquad \left(\Leftrightarrow t = \mp\frac{(x-\beta)-\mu^2}{(x-\beta)+\mu^2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{lll} \beta < x < \beta+\mu^2 \text{ のときは 上側の符号} & t(\beta) & = 1 \\ & t(\beta+\mu^2) & = 0 \\ & & \\ \beta+\mu^2 < x \quad \text{ のときは 下側の符号} & t(\beta+\mu^2) & = 0 \\ & t(\infty) & = 1 \end{array}\right]$$

$$dx = \mp\frac{2\mu^2}{(t\pm 1)^2}\,dt$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\mu^2\frac{t\mp 1}{t\pm 1}\right]\left[\mu^4\frac{(t\mp 1)^2}{(t\pm 1)^2} - \nu\mu^2\frac{t\mp 1}{t\pm 1} + \mu^4\right] \\ &= -\mu^4\frac{t^2-1}{(t\pm 1)^4}\left[\mu^2(t\mp 1)^2 - \nu(t^2-1) + \mu^2(t\pm 1)^2\right] \\ &= \frac{\mu^4}{(t\pm 1)^4}(1-t^2)\left[(2\mu^2+\nu)+(2\mu^2-\nu)t^2\right] \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mp \frac{\cancel{2\mu^2}}{\cancel{(t\pm1)^2}} \frac{\cancel{(t\pm1)^2}}{\mu^{\cancel{2}}\sqrt{2\mu^2-\nu}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(t^2+\frac{2\mu^2+\nu}{2\mu^2-\nu}\right)}}$$

$$= \mp \frac{1}{k\mu} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(t^2+\frac{2\mu^2+\nu}{2\mu^2-\nu}\right)}}$$

(ii) さらに、

$$t^2 = 1 - z^2 \qquad (\Leftrightarrow z = \sin\cos^{-1} t)$$

と変換すれば

$$dt = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \mp \frac{1}{k\mu} \frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} \frac{1}{z\sqrt{1+\frac{2\mu^2+\nu}{2\mu^2-\nu}-z^2}}$$

$$= \pm \frac{1}{k\mu} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(\frac{1}{k^2}-z^2\right)}}$$

$$= \pm \frac{1}{\mu} \frac{dz}{S}$$

$$x = \beta - \mu^2 \frac{\sqrt{1-z^2} \mp 1}{\sqrt{1-z^2} \pm 1} = \beta - \mu^2 + 2\mu^2 \frac{1 \mp \sqrt{1-z^2}}{z^2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\beta - \mu^2} - \frac{1}{2\beta} \frac{\beta + \mu^2}{\beta - \mu^2} \frac{1}{1 + \frac{(\beta-\mu^2)^2}{4\beta\mu^2} z^2} \pm \frac{1}{2\beta} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1 + \frac{(\beta-\mu^2)^2}{4\beta\mu^2} z^2}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\beta-1-\mu^2} - \frac{1}{2(\beta-1)} \frac{\beta-1+\mu^2}{\beta-1-\mu^2} \frac{1}{1 + \frac{(\beta-1-\mu^2)^2}{4(\beta-1)\mu^2} z^2} \pm \frac{1}{2(\beta-1)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1 + \frac{(\beta-1-\mu^2)^2}{4(\beta-1)\mu^2} z^2}$$

この式を見れば判かるように楕円積分以外に次の2種の積分が必要となる。

$$\int \frac{dz}{z^2\sqrt{1-k^2z^2}} = k \int \frac{\cancel{\cos\theta}\, d\theta}{\sin^2\theta\, \cancel{\cos\theta}} = -k \cot \sin^{-1} kz = -\cancel{k} \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\cancel{k} z}$$

$$= - \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{z}$$

$$I_A(m) = \int \frac{dz}{(1+mz^2)\sqrt{1-k^2z^2}} = k \int \frac{\cancel{\cos\theta}\, d\theta}{(k^2 + m \sin^2\theta)\cancel{\cos\theta}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m+k^2}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{m+k^2}}{k} \tan \sin^{-1} kz = \dfrac{1}{\sqrt{m+k^2}} \tan^{-1} z \sqrt{\dfrac{m+k^2}{1-k^2z^2}} & (m > -k^2) \\ \dfrac{1}{k} \tan \sin^{-1} kz = \dfrac{z}{\sqrt{1-k^2z^2}} & (m = -k^2) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|m+k^2|}} \ln \left| \dfrac{\tan \sin^{-1} kz + \dfrac{k}{\sqrt{|m+k^2|}}}{\tan \sin^{-1} kz - \dfrac{k}{\sqrt{|m+k^2|}}} \right| = \dfrac{1}{2\sqrt{|m+k^2|}} \ln \left| \dfrac{z\sqrt{|m+k^2|} + \sqrt{1-k^2z^2}}{z\sqrt{|m+k^2|} - \sqrt{1-k^2z^2}} \right| & (m < -k^2) \end{cases}$$

(a) $\beta < x < \beta + \mu^2$ の場合には、

$$\mu \int_\beta^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \frac{dz}{S} = w_+$$

$$\varphi = \frac{w_+ - 2K}{\mu}$$

$$w_+ = \mu\varphi + 2K$$

$$\mu \int_\beta^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} = (\beta - \mu^2)\int_0^z \frac{dz}{S} + 2\mu^2\left\{\int_0^z \frac{dz}{S} - \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz - \frac{S}{z}\right\} + 2\mu^2 \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{z}$$

$$= (\beta + \mu^2) w_+ - 2\mu^2 \int_0^{w_+} \mathrm{dn}^2 w\, dw + 2\mu^2 \frac{\mathrm{sn}\, w_+ \,\mathrm{dn}\, w_+}{1 \mp \mathrm{cn}\, w_+}$$

$$\mu \int_\beta^x \frac{dx}{x\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\beta - \mu^2}\int_0^z \frac{dz}{S} - \frac{1}{2\beta}\frac{\beta + \mu^2}{\beta - \mu^2}\int_0^z \frac{dz}{(1+n_5 z^2)S} \pm \frac{1}{2\beta}\int_0^z \frac{dz}{(1+n_5 z^2)\sqrt{1-k^2z^2}}$$

$$= \frac{1}{\beta - \mu^2} w_+ - \frac{1}{2\beta}\frac{\beta + \mu^2}{\beta - \mu^2}\int_0^{w_+} \frac{dw}{1 + n_5 \mathrm{sn}^2 w} \overset{\text{注)}}{\pm} \frac{1}{2\beta} I_A(n_5)\Big|_0^z$$

$$\mu \int_\beta^x \frac{dx}{(x-1)\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\beta - 1 - \mu^2} w_+ - \frac{1}{2(\beta-1)}\frac{\beta - 1 + \mu^2}{\beta - 1 - \mu^2}\int_0^{w_+} \frac{dw}{1 + n_6 \mathrm{sn}^2 w} \pm \frac{1}{2(\beta-1)} I_A(n_6)\Big|_0^z$$

ただし $n_5 = \dfrac{(\beta - \mu^2)^2}{4\beta\mu^2}$, $n_6 = \dfrac{(\beta - 1 - \mu^2)^2}{4(\beta-1)\mu^2}$

注) 複号は＋をとる。

b) $x > \beta + \mu^2$ の場合には、

$$\mu \int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^z \frac{dz}{S} = w_-$$

$$\varphi = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = -\frac{w_-}{\mu}$$

$$w_- = -\mu \varphi$$

$$\int_{\beta}^{x} = \int_{\infty}^{x} - \int_{\infty}^{\beta} = -\int_x^{\infty} + \left\{ \int_{\beta}^{\beta+\mu^2} + \int_{\beta+\mu^2}^{\infty} \right\}$$

であるから

$$\mu \int_{\beta}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\int_0^1 \frac{dz}{S} - \int_0^z \frac{dz}{S} = 2K - w_- = w_+$$

として一貫性をもたせている。

$$\mu \int_x^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} = (\beta-\mu^2)\int_0^z \frac{dz}{S} + 2\mu^2 \left\{ \int_0^z \frac{dz}{S} - \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} - \frac{S}{z} \right\} - 2\mu^2 \frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{z}$$

$$= \underline{(\beta+\mu^2) w_- - 2\mu^2 \int_0^{w_-} \mathrm{dn}^2 w\, dw - 2\mu^2 \frac{\mathrm{dn}\, w_-(1+\mathrm{cn}\, w)}{\mathrm{sn}\, w_-}}$$

$\mu \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{f(x)}}$, $\mu \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{f(x)}}$ は a) 項のものとほとんど同じ。

w_+ を w_- にかえて、複号は−をとるようにする。

以上の場合分けをすべて表にすると、下のようになる。

		$P > 0$	$P < 0,\ P+Q > 0$	$P+Q < 0$
		$\gamma < 0 < \beta < \alpha < 1$	$0 < \gamma < \beta < \alpha < 1$	$0 < \gamma < \beta < 1 < \alpha$
3実根	(I) a) $\gamma < x < \beta$	擬双曲線運動 無限遠で I_1 が発散 $m_1 < -1$ $-k^2 < m_2 < 0$	擬楕円運動 $m_1 > 0$ $-k^2 < m_2 < 0$	$m_1 > 0$ $-1 < m_2 < -k^2$
	(I) b) $\alpha < x$	1度事象の地平線から現れ、再び、ブラックホールに落ち込んで行く。 $-k^2 < m_3 < 0$ $m_4 < -1$	光の運動 $m_3 > 0$ $m_4 < -1$	$m_3 > 0$ $-1 < m_4 < -k^2$
1実根	(II) $\alpha < x$	無限遠から、ブラックホールに落ち込む運動（またはその逆） 無限遠で I_1 が発散 事象の地平線で J_1 が発散 $m_5 < -1$ $m_6 < -1$	重根に対応する特殊な運動 事象の地平線で J_1 が発散 $m_5 > 0$ $m_6 < -1$	完全にブラックホール内に閉じ込められた運動 $m_5 > 0$ $m_6 > 0$
		$\alpha < 0$	$0 < \alpha < 1$	$1 < \alpha$

以上の議論で、一般的な場合について φ, τ, t を求めることができるようになったが、各場合について、x を φ の函数であらわすと、次のようにまとめることができる。

(I) a)

$$x-\beta = \frac{\mu^4}{\lambda^2}\frac{1-\mathrm{cn}\lambda\varphi}{k'^2+\mathrm{dn}\lambda\varphi+k^2\mathrm{cn}\lambda\varphi}$$

$$= \frac{\mu^4}{\lambda^2}\frac{\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}{\mathrm{dn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}} = \frac{\mu^4}{\lambda^2}\frac{\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}$$

b)

$$x-\alpha = \lambda^2\frac{\mathrm{dn}\lambda\varphi+\mathrm{cn}\lambda\varphi}{1-\mathrm{cn}\lambda\varphi}$$

$$= \lambda^2\frac{\mathrm{cn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}} = \lambda^2\frac{1-\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\lambda\varphi}{2}}$$

(II)

$$x-\beta = \mu^2\frac{1+\mathrm{cn}\mu\varphi}{1-\mathrm{cn}\mu\varphi}$$

$$= \mu^2\frac{\mathrm{cn}^2\frac{\mu\varphi}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\mu\varphi}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\mu\varphi}{2}} = \mu^2\frac{1-\mathrm{sn}^2\frac{\mu\varphi}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{\mu\varphi}{2}\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{\mu\varphi}{2}\right)}$$

ただし k, k' はそれぞれに対応するものをとることとする。

```
10 "k": input " k="; k
20          l = √(1-kk)
30          z = 1
40          for n = 27 to 99
50              a(n) = (l + a(n-1))/2
60              l    = √(l * a(n-1))
70              if abs(a(n)/l - 1) < E-9 then 90
80          next n
90          x = π/2l
100    print " k="; x
110    end

200 " ": input " w="; w
210          s = sin lw
220          for m = n to 27 step -1
230              q = a(m-1)/a(m)
240              s = qs/(1+(q-1)*ss)
250          next m
260    print " sn(w)="; s
270    end
```

$$\vartheta_1(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_2(v) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_3(v) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

$$\vartheta_4(v) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

$$\vartheta_1'(v) = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}(2n+1)\cos(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_2'(v) = -2\pi\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}(2n+1)\sin(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_3'(v) = -4\pi\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} n\sin 2n\pi v$$

$$\vartheta_4'(v) = -4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n q^{n^2} n\sin 2n\pi v$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = -i\,c\,e^{\tau' v^2\pi i}\vartheta_1(\tau' v|\tau')$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = c\,e^{\tau' v^2\pi i}\vartheta_4(\tau' v|\tau')$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = c\,e^{\tau' v^2\pi i}\vartheta_3(\tau' v|\tau')$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = c\,e^{\tau' v^2\pi i}\vartheta_2(\tau' v|\tau')$$

$$\sin iv = i\sinh v, \quad \cos iv = \cosh v$$

$$\tau = \frac{iK'}{K}, \quad \tau' = \frac{iK}{K'}, \quad q = e^{\tau\pi i}, \quad q' = e^{\tau'\pi i}$$

$$v = \frac{w}{2K}, \quad v' = \frac{w}{2K'}, \quad \tau' v = i v'$$

$$z^2 = e^{2\pi v'}$$

$$-i\,\vartheta_1(\tau' v|\tau') = -i\,2q'^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n q'^{n(n+1)}\sin(2n+1)\pi\tau' v$$

$$= 2q'^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n q'^{n(n+1)}\sinh(2n+1)\pi v'$$

$$= 2q'^{\frac14}(\sinh\pi v' - q'^2\sinh 3\pi v' + q'^6\sinh 5\pi v' - \cdots)$$

$$= q'^{\frac14}[(z-z^{-1}) - q'^2(z^3-z^{-3}) + q'^6(z^5-z^{-5}) - \cdots]$$

$$\vartheta_4(\tau' v|\tau') = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n q'^{n^2}\cos 2n\pi\tau' v$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n q'^{n^2}\cosh 2n\pi v'$$

$$= 1 - 2q'\cosh 2\pi v' + 2q'^4\cosh 4\pi v' - 2q'^9\cosh 6\pi v' + \cdots$$

$$= 1 - q'(z^2+z^{-2}) + q'^4(z^4+z^{-4}) - q'^9(z^6+z^{-6}) + \cdots$$

$$\vartheta_3(\tau' v|\tau') = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q'^{n^2}\cos 2n\pi\tau' v$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q'^{n^2}\cosh 2n\pi v'$$

$$= 1 + 2q'\cosh 2\pi v' + 2q'^4\cosh 4\pi v' + 2q'^9\cosh 6\pi v' + \cdots$$

$$= 1 + q'(z^2+z^{-2}) + q'^4(z^4+z^{-4}) + q'^9(z^6+z^{-6}) + \cdots$$

$$\vartheta_2(\tau' v|\tau') = 2q'^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty} q'^{n(n+1)}\cos(2n+1)\pi\tau' v$$

$$= 2q'^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty} q'^{n(n+1)}\cosh(2n+1)\pi v'$$

$$= 2q'^{\frac14}(\cosh\pi v' + q'^2\cosh 3\pi v' + q'^6\cosh 5\pi v' + \cdots)$$

$$= q'^{\frac14}[(z+z^{-1}) + q'^2(z^3+z^{-3}) + q'^6(z^5+z^{-5}) + \cdots]$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = c\, e^{\tau' v^2 \pi i}\, \vartheta_2(\tau' v|\tau')$$

$$\log \vartheta_4(v|\tau) = \log c + \tau' v^2 \pi i + \vartheta_2(\tau' v|\tau')$$

$$\frac{\vartheta_4'(v|\tau)}{\vartheta_4(v|\tau)} = 2\tau' v \pi i + \tau' \frac{\vartheta_2'(\tau' v|\tau')}{\vartheta_2(\tau' v|\tau')}$$

$$= -\frac{K}{K'} 2\pi v + \tau' \frac{\vartheta_2'(\tau' v|\tau')}{\vartheta_2(\tau' v|\tau')}$$

$$\int_0^w dn^2 w\, dw = \frac{1}{2K} \frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)} + 2Ev$$

$$= \left(2E - \frac{\pi}{K'}\right) v + \frac{i}{2K'} \frac{\vartheta_2'(iv'|\tau')}{\vartheta_2(iv'|\tau')}$$

$$= \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) w + \frac{\cancel{i}}{\cancel{2}K'} \frac{\cancel{-2\pi i\, q'^{\frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) q'^{n(n+1)} \sinh (2n+1)\pi v'}{\cancel{2 q'^{\frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} q'^{n(n+1)} \cosh (2n+1)\pi v'}$$

$$\doteqdot \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) w + \frac{\pi}{2K'} \frac{5q'^6 + 3q'^2 z + z^2 - z^3 - 3q'^2 z^4 - 5q'^6 z^5}{q'^6 + q'^2 z + z^2 + z^3 + q'^2 z^4 + q'^6 z^5}$$

(ただし $z = e^{-2\pi v'} = e^{-\frac{\pi w}{K'}}$)

$$\log \frac{\vartheta_4(v-b|\tau)}{\vartheta_4(v+b|\tau)} = \tau' [(v-b)^2 - (v+b)^2] \pi i + \log \frac{\vartheta_2(i(v'-b')|\tau')}{\vartheta_2(i(v'+b')|\tau')}$$

$$= -4\tau' b \pi i \cdot v + \log \frac{\vartheta_2(i(v'-b')|\tau')}{\vartheta_2(i(v'+b')|\tau')}$$

$$\Pi(w, a) = \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v-b)}{\vartheta_4(v+b)} + \frac{\vartheta_4'(b)}{\vartheta_4(b)} v$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_2(i(v'-b')|\tau')}{\vartheta_2(i(v'+b')|\tau')} + i \frac{\vartheta_2'(ib'|\tau')}{\vartheta_2(ib'|\tau')} v'$$

$$\vartheta_4(v+\frac{\tau}{2}) = i\, e^{-(v+\frac{\tau}{4})\pi i}\,\vartheta_1(v)$$

$$\log\vartheta_4(v+\frac{\tau}{2}) = \frac{\pi}{2} i - (v+\frac{\tau}{4})\pi i + \log\vartheta_1(v)$$

$$\frac{\vartheta_4'(v+\frac{\tau}{2})}{\vartheta_4(v+\frac{\tau}{2})} = -\pi i + \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}$$

$$\vartheta_1(v+\frac{\tau}{2}) = i\, e^{-(v+\frac{\tau}{4})\pi i}\,\vartheta_4(v)$$

$$\vartheta_4(v-\frac{\tau}{2}) = -i\, e^{(v-\frac{\tau}{4})\pi i}\,\vartheta_1(v)$$

$$\frac{\vartheta_4(v-b-\frac{\tau}{2})}{\vartheta_4(v+b+\frac{\tau}{2})} = \frac{-i\, e^{(v-b-\frac{\tau}{4})\pi i}\,\vartheta_1(v-b)}{i\, e^{-(v+b+\frac{\tau}{4})\pi i}\,\vartheta_1(v+b)}$$

$$= e^{\pi i} e^{2v\pi i}\frac{\vartheta_1(v-b)}{\vartheta_1(v+b)}$$

$$\Pi(w, a+iK') = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(b-v)}{\vartheta_1(b+v)} + \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}v$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = -ic\, e^{\tau' v^2 \pi i}\,\vartheta_1(\tau' v|\tau')$$

$$\log\vartheta_1(v|\tau) = \log(-ic) + \tau' v^2\pi i + \log\vartheta_1(\tau' v|\tau')$$

$$\frac{\vartheta_1'(v|\tau)}{\vartheta_1(v|\tau)} = 2\tau' v\pi i + \tau'\frac{\vartheta_1'(\tau' v|\tau')}{\vartheta_1(\tau' v|\tau')}$$

$$\log\frac{\vartheta_1(b-v|\tau)}{\vartheta_1(b+v|\tau)} = \tau'[(b-v)^2-(b+v)^2]\pi i + \log\frac{\vartheta_1(\tau'(b-v)|\tau')}{\vartheta_1(\tau'(b+v)|\tau')}$$

$$= -4\tau' b\pi i\cdot v + \log\frac{\vartheta_1(i(b'-v')|\tau')}{\vartheta_1(i(b'+v')|\tau')}$$

$$\Pi(w, a+iK') = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(i(b'-v')|\tau')}{\vartheta_1(i(b'+v')|\tau')} + \frac{\vartheta_1'(ib'|\tau')}{\vartheta_1(ib'|\tau')}iv'$$

No.

Date

$$\vartheta_4(v) = Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{2v\pi i})(1 - q^{2n-1} e^{-2v\pi i})$$

$$\log \vartheta_4(v) = \log Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(1 - q^{2n-1} e^{2v\pi i}) + \log(1 - q^{2n-1} e^{-2v\pi i}) \right]$$

$$= \log Q_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[(q^{2n-1} e^{2v\pi i})^m + (q^{2n-1} e^{-2v\pi i})^m \right]$$

$$= \log Q_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \frac{e^{2mv\pi i} + e^{-2mv\pi i}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (q^m)^{2n-1}$$

$$= \log Q_0 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\pi v}{m} \frac{q^m}{1 - q^{2m}}$$

$$\log \vartheta_3(v) = \log \vartheta_4(v + \tfrac{1}{2}) = \log Q - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \cos 2m\pi(v + \tfrac{1}{2})$$

$$= \log Q_0 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \cos 2m\pi v$$

$$\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)} = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v$$

$$\frac{\vartheta_3'(v)}{\vartheta_3(v)} = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v$$

$$\log \frac{\vartheta_4(v-b)}{\vartheta_4(v+b)} = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \frac{1}{m} \left[\cos 2m\pi(v-b) - \cos 2m\pi(v+b) \right]$$

$$= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi b$$

$$\log \frac{\vartheta_3(v-b)}{\vartheta_3(v+b)} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi b$$

$$\vartheta_1(v) = -i q^{\frac{1}{4}}(e^{v\pi i} - e^{-v\pi i}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} e^{2v\pi i})(1 - q^{2n} e^{2v\pi i})$$

$$\log \vartheta_1(v) = \log(2q^{\frac{1}{4}}Q_0) + \log \sin \pi v + \sum_{n=1}^{\infty} [\log(1 - q^{2n} e^{2v\pi i}) + \log(1 - q^{2n} e^{-2v\pi i})]$$

$$= \log(2q^{\frac{1}{4}}Q_0) + \log \sin \pi v - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [(q^{2n} e^{2v\pi i})^m + (q^{2n} e^{-2v\pi i})^m]$$

$$= \log(2q^{\frac{1}{4}}Q_0) + \log \sin \pi v - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \frac{e^{2mv\pi i} + e^{-2mv\pi i}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (q^m)^{2n}$$

$$= \log(2q^{\frac{1}{4}}Q_0) + \log \sin \pi v - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\pi v}{m} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}}$$

$$\log \vartheta_2(v) = \log \vartheta_1(v + \frac{1}{2})$$

$$= \log(2q^{\frac{1}{4}}Q_0) + \log \cos \pi v - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \cos 2m\pi v$$

$$\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} = \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v$$

$$\frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)} = -\pi \tan \pi v + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v$$

$$\log \frac{\vartheta_1(v-b)}{\vartheta_1(v+b)} = \log \frac{\sin \pi(v-b)}{\sin \pi(v+b)} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi b$$

$$\log \frac{\vartheta_2(v-b)}{\vartheta_2(v+b)} = \log \frac{\cos \pi(v-b)}{\cos \pi(v+b)} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin 2m\pi v \sin 2m\pi b$$

No.

Date

$$\mathrm{sn}\, a = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(b)}{\vartheta_0(b)}$$

$$\mathrm{cn}\, a = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(b)}{\vartheta_0(b)}$$

$$\mathrm{dn}\, a = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(b)}{\vartheta_0(b)}$$

$$\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{k}}} \frac{\vartheta_1}{\cancel{\vartheta_0}} \sqrt{\frac{\cancel{k}}{k'}} \frac{\cancel{\vartheta_0}}{\vartheta_2} \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \frac{1}{k'} \frac{\vartheta_1 \vartheta_0}{\vartheta_2 \vartheta_3}$$

$$\int_0^w \frac{dw}{1 + n\, \mathrm{sn}^2 w} = \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v-b)}{\vartheta_4(v+b)} + \frac{\vartheta_4'(b)}{\vartheta_4(b)} v \right\} + w$$

$$= \frac{1}{k'} \frac{\vartheta_1(b)\vartheta_4(b)}{\vartheta_2(b)\vartheta_3(b)} \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v-b)}{\vartheta_4(v+b)} + \frac{1}{k'} \frac{\vartheta_1(b)\vartheta_4'(b)}{\vartheta_2(b)\vartheta_3(b)} v + w$$

$$= \frac{1}{2k'} \frac{\vartheta_1(b)\vartheta_4(b)}{\vartheta_2(b)\vartheta_3(b)} \log \frac{\vartheta_4(v-b)}{\vartheta_4(v+b)} + \left[\frac{1}{2k'K} \frac{\vartheta_1(b)\vartheta_4'(b)}{\vartheta_2(b)\vartheta_3(b)} + 1 \right] w$$

$$\int_0^w \mathrm{dn}^2 w\, dw = \frac{1}{2K} \frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)} + \frac{E}{K} w$$

$$\mathrm{sn}(u,k) = \frac{(1+k^*)\,\mathrm{sn}(u^*,k^*)}{1+k^*\,\mathrm{sn}^2(u^*,k^*)}$$

$$u^* = \frac{u}{1+k^*}$$

$$k'_0 = \frac{b_0}{a_0} \qquad k'_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad 1+k_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(1+k_n)\cdots\cdots(1+k_1) = \frac{a_0}{a_n}$$

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = k'$$

$$\mathrm{sn}(u_{n-1},k_{n-1}) = \frac{(1+k_n)\,\mathrm{sn}(u_n,k_n)}{1+k_n\,\mathrm{sn}^2(u_n,k_n)}$$

$$= \frac{\frac{a_{n-1}}{a_n}\,\mathrm{sn}(u_n,k_n)}{1+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-1\right)\mathrm{sn}^2(u_n,k_n)}$$

$$= \frac{a_{n-1}\,\mathrm{sn}(u_n,k_n)}{a_n+(a_{n-1}-a_n)\,\mathrm{sn}^2(u_n,k_n)}$$

$$\mathrm{sn}(u_0,k_0) = \frac{a_0\,\mathrm{sn}(u_1,k_1)}{a_1+(a_0-a_1)\,\mathrm{sn}^2(u_1,k_1)}$$