

Нейросетевые методы решения задач вариационного исчисления

Прохоров Юрий

prokhoryurij@gmail.com

PROJECT PROPOSAL

В предлагаемой работе будут рассмотрены некоторые алгоритмы решения задач вариационного исчисления, основанные на “животных” принципах, а именно Whale Optimization Algorithm [3], Gray Wolf Optimizer [5], Moth Flame Optimization [6] и, возможно, некоторые другие. Будет проведено их общее описание, сравнение точности и скорости работы, а также будет предложена их модификация с использованием нейронных сетей. Также будет приведено интересное приложение данных алгоритмов для поиска путей.

1 Постановка задачи

В простейшем случае дана некоторая известная функция $L(t, x, \dot{x})$ и требуется решить задачу вариационного исчисления: минимизировать функционал

$$J[x(t)] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \longrightarrow \min \quad (1)$$

Иногда добавляются граничные условия.

Одной из основных идей является поиск решения в виде разложения по некоторому функциональному базису

$$x(t) = \sum_{k=1}^T c_k \mathbf{X}_k(t), \quad (2)$$

где функции базиса выбираются из некоторых практических соображений (например, можно строить в виде сплайнов, как описано в [1]).

Другой идеей является использование алгоритмов нулевого порядка. Например, метод Whale Optimization Algorithm [3] похож на генетический алгоритм и основан на создании популяции “китов”, которая будет последовательно “эволюционировать” и постепенно сходиться к решению.

Моя идея состоит в обобщении этих методов и использовании нейронных сетей для возможного улучшения качества их работы. Частично такое обобщение было проведено, например, в [2].

2 Планируемые результаты

В качестве результата проекта я планирую получить нейросетевой алгоритм, который на вход будет принимать задачу вариационного исчисления, а на выходе будет давать ее численное решение.

Строгих теоретических обоснований к такому алгоритму, скорее всего, не будет, потому что многие алгоритмы нулевого порядка основаны на идеях, которые часто бывает сложно строго математически сформулировать.

3 Литературный обзор

Основная идея в разложении решения вариационной задачи по функциональному базису и математические методы численного решения описаны в [7] и [10]. В работах [1], [2] рассказано, как эту идею можно

перенести на нейронные сети.

Упомянутые мною “животные” алгоритмы описаны в следующих работах: Whale optimization algorithm — [3], Gray wolf optimizer — [5], Moth flame optimization — [6]. Также в работе [4] приведено интересное улучшение “китового” алгоритма из [3].

Также в статьях [8] и [9] и приведены другие эффективные численные алгоритмы, которые я, возможно, также рассмотрю в своей работе.

4 Метрики качества

В качестве метрики качества предлагается следующая метрика. Рассмотрим некоторое количество N задач вариационного исчисления, для которых возможно найти точное решение из дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа. Затем для каждой (k -ой) из этих задач рассмотрим оценку L_1 -нормы между численным решением $x_{\text{num}}^k(t)$ и точным решением $x_*^k(t)$:

$$\|x_k^{\text{num}} - x_k^*\| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M_k} |x_k^{\text{num}}(t_i) - x_k^*(t_i)|,$$

где $\{t_i\}$ — некоторый набор точек. Тогда в качестве метрики качества можно взять метрику:

$$L(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^N \|x_k^{\text{num}} - x_k^*\|,$$

где \mathbf{A} — алгоритм, строящий численные решения.

Такая метрика предложена в нескольких работах, например, в [3].

5 Примерный план

1. Сейчас я читаю про реализацию алгоритмов вариационного исчисления с помощью нейронных сетей в [1] и [2].
2. Скоро я начну разбираться в принципах работы “животных” алгоритмов [3], [5] и [6].
3. Потом я попытаюсь скрестить эти методы, используя некоторые идеи из [4].
4. Потом я получу сравнение всех изученных мною методов.
5. Если успею, то приготовлю графическую анимацию этого метода на примере поиска наискорейшего пути.

Список литературы

- [1] Andrew J. Meade Jr., Hans C. Sonneborn. *Numerical solution of a calculus of variations problem using the feedforward neural network architecture*. Department of Mechanical Engineering and Materials Science, William Marsh Rice University, Houston, TX, USA, 1996.
- [2] Roberto Lopez Gonzalez. *Neural Networks for Variational Problems in Engineering*. Artificial Intelligence Department of Computer Languages and Systems, Technical University of Catalonia, 2008.
- [3] Seyed Hamed Hashemi Mehne, Seyedali Mirjalili. *A direct method for solving calculus of variations problems using the whale optimization algorithm*. Institute for Integrated and Intelligent Systems, Griffith University, Nathan Campus, Brisbane, Australia, 2019
- [4] Seyed Mostafa Bozorgi, Samaneh Yazdani. *IWOA: An improved whale optimization algorithm for optimization problems*. Department of Computer Engineering, North Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran, 2019

- [5] Mirjalili S, Mirjalili SM, Lewis A. *Grey wolf optimizer*. Adv Eng Softw 69:46–61, 2014
- [6] Mohammad Shehab, Laith Abualigah, Husam Al Hamad, Hamzeh Alabool, Mohammad Alshinwan, Ahmad M. Khasawneh. *Moth-flame optimization algorithm: variants and applications*. Faculty of Computer Sciences and Informatics, Amman Arab University, Amman, Jordan, 2019
- [7] Komzsik L. *Applied calculus of variations for engineers*. CRC Press, Boca Raton, 2009
- [8] A. R. Nazemi, S. Hesam, A. Haghbin. *A fast numerical method for solving calculus of variation problems*. Department of Mathematics, School of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, 2013.
- [9] M. Zarebnia, M. Birjandi. *The Numerical Solution of Problems in Calculus of Variation Using B-Spline Collocation Method*. Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, Iran, 2012
- [10] Hadi Rostamzadeh, Mohammad Lotfi, Keivan Mostoufi. *Application of Chebyshev Finite Difference Method (ChFDM) in Calculus of Variation*. Niroo Research Institute, Tehran, Iran, 2016