Seminar 2

1. Calculati limita sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru
   a) $x_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
   b) $x_n = \frac{n+\sin n}{n+\cos n}$
   c) $x_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{(\sqrt{2})^n+1}$

2. Justificati cu definitia valoarea limitelor
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

3. Studiati convergenta sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si calculati limita sa acolo unde este posibil (metode: monotonie si marginire, criteriul clestelui, subsiruri, sir fundamental)
   a) $x_n = a^n, \quad a \in \mathbb{R}$
   b) $x_n = \frac{2^n}{n!}$
   c) $x_n = \sqrt[n]{n}$
   d) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
   e) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
   f) $x_n = \frac{\sin(1!)}{1\cdot 2} + \frac{\sin(2!)}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sin(n!)}{n\cdot(n+1)}$
   g) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 > 0$

4. Determinati multimea punctelor limita, limita inferioara si limita superioara pentru sirurile
   a) $x_n = (-1)^n\, n \sin\frac{n\pi}{2}$
   b) $x_n = \left(1+\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n$

Exercitii suplimentare

1. Justificati cu definitia valoarea limitei
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+n} = 1$

2. Studiati convergenta sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si calculati limita sa acolo unde este posibil
   a) $x_n = 1.\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ ori}}$
   b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$
   c) $x_n = \frac{\sin(1)}{5} + \frac{\sin(2)}{5^2} + \ldots + \frac{\sin(n)}{5^n}$
   d) $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}, \quad x_1 = \sqrt{3}$
   e) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_1 = 1$

3. Se dau sirurile $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ si $y_n = x_n + \frac{1}{n\,n!}$. Justificati afirmatiile
   a) (y_n) strict descrescator si cu limita e.
   b) $0 < e - x_n < \frac{1}{n\,n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$
   c) $e \notin \mathbb{Q}$

4. Determinati multimea punctelor limita, limita inferioara si limita superioara pentru sirurile
   a) $x_n = \frac{1}{2+\sqrt{n}\cos(n\pi)}$
   b) $x_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n\sin\frac{n\pi}{3}}$