④ Funcția Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exprimați cu ajutorul funcției $\Gamma$ valoarea unor integrale improprii

a) $$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \underset{dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt}{\overset{t = x^2,\ x = \sqrt{t}}{=\!=\!=}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt$$
$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) $$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \underset{x = \sqrt{2}t}{=\!=\!=} 2 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}2t^2} \sqrt{2}\, dt$$
$$= 2\sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

c) $$\int_0^1 (\ln x)^{\frac{1}{3}} dx = \int_{-\infty}^0 t^{\frac{1}{3}} e^t dt \underset{t=-u}{=} \int_\infty^0 (-u)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-u} \cdot (-du)$$

$\ln x = t$
$x = e^t$
$dx = e^t dt$
$x \searrow 0 \Rightarrow t \nearrow -\infty$
$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$= -\int_0^\infty u^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-u} du$$
$$= -\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

Seminar 9

Fie $x = (1, 0, -1)$, $y = (3, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Calc. $x+y$, $x \cdot y$, $\|x\|$, $\|-2y\|$ și $\|x-y\|$

$$x + y = (1+3,\ 0+(-1),\ -1+1) = (4, -1, 0)$$
$$x \cdot y = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3 - 1 = 2$$
$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\|-2y\| = |-2| \cdot \|y\| = 2\sqrt{9+1+1} = 2\sqrt{11}$$
$$\|x - y\| = \sqrt{(1-3)^2 + (0+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$, notăm $a = x \cdot y$, $b = \|x\|$, $c = \|y\|$

Exprimați urm. mărimi în fct. de $a, b, c$.

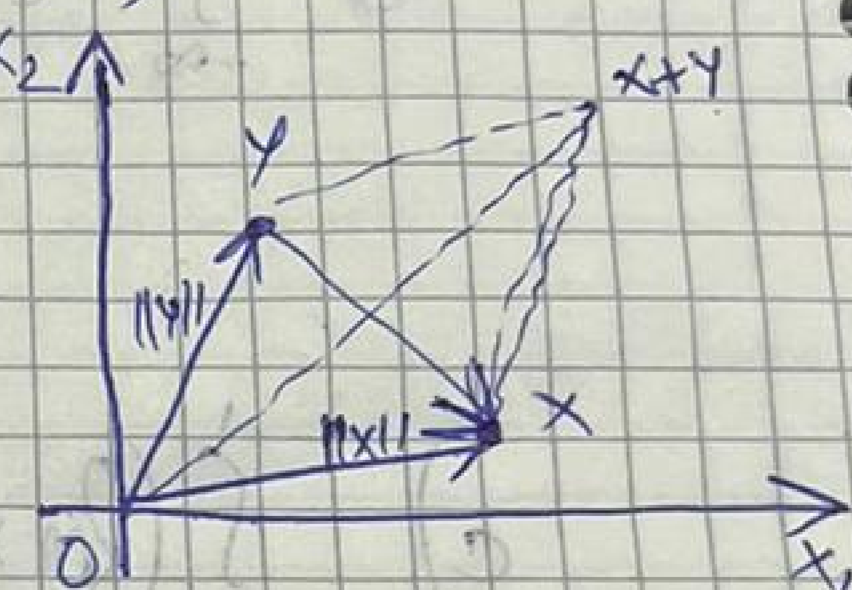
a) $(x+y)\cdot y = x\cdot y + y\cdot y = a + (\sqrt{y\cdot y})^2 = a + \|y\|^2$
$= a + c^2$

b) $x\cdot(2x-y) = 2x\cdot x - x\cdot y = 2\cdot\|x\|^2 - a = 2b^2 - a^2$

c) $\|x-y\| = \sqrt{(x-y)(x-y)} = \sqrt{x\cdot x - x\cdot y - y x + y\cdot y}$
$= \sqrt{\|x\|^2 - 2xy + \|y\|^2} = \sqrt{b^2 - 2a + c^2}$

3. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$. Det. identitatea paralelogramului

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$




$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y)(x+y) + (x-y)(x-y)$

$= x\cdot x + \cancel{2xy} + y\cdot y + x\cdot x - \cancel{2xy} + y\cdot y$

$= 2x\cdot x + 2y\cdot y = 2(x\cdot x + y\cdot y)$

$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ✓

4. Det. int $A$, fr $A$, precum și dacă $A$ este mulțime deschisă, respectiv închisă

$x \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$. $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|x-y\| < r\}$

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime de puncte

int $A$ mulțimea punctelor interioare

int $A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A\}$

fr $A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall r > 0: B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$

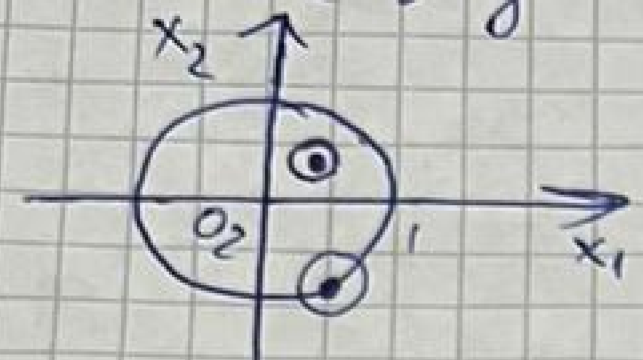
$A$ deschisă $\Leftrightarrow \forall x \in A$, $\underbrace{\exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq A}_{x \in \text{int} A}$

$A$ închisă $\Leftrightarrow \mathbb{R}^m \setminus A$ deschisă

A deschisă $\Leftrightarrow A \cap \text{fr} A \neq \emptyset$

A închisă $\Leftrightarrow \text{fr} A \subseteq A$

a) $A = B(O_2, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$




$B(O_2, 1) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \| O_2 - y \| < 1 \}$

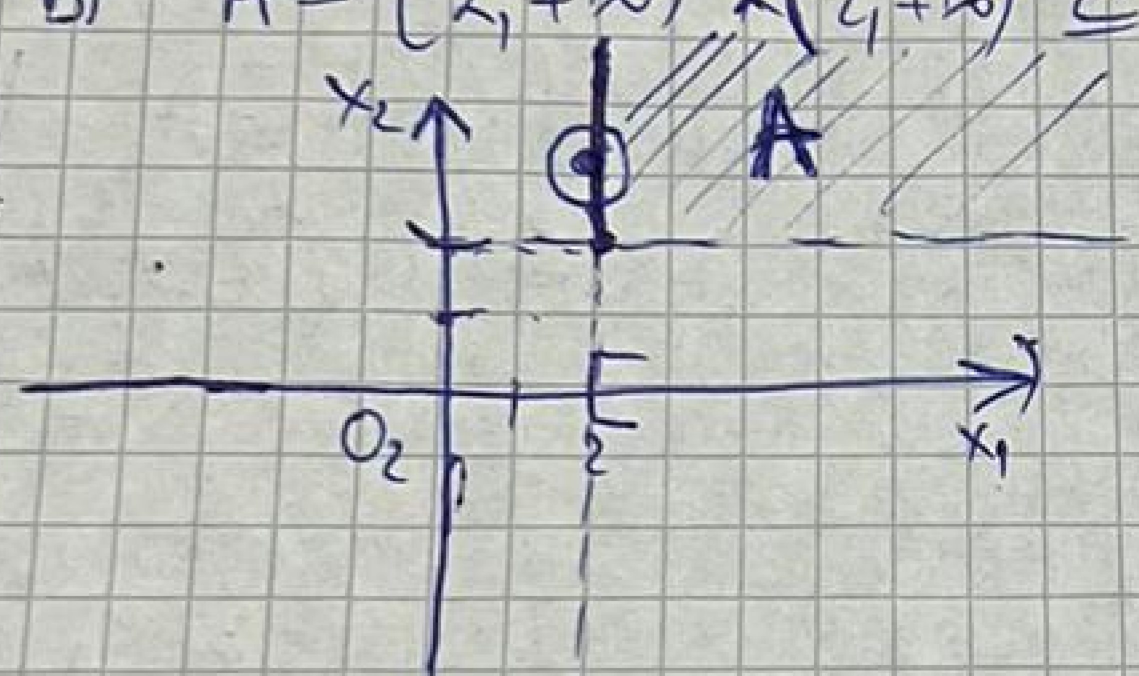
$= \{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1 \}$

$\text{int} A = A$

$\text{fr} A = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = 1 \}$

$A \cap \text{fr} A = \emptyset \Rightarrow A$ deschisă

b) $A = [2, +\infty) \times (2, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$




$\text{int} A = (2, +\infty) \times (2, +\infty) = (2, +\infty)^2$

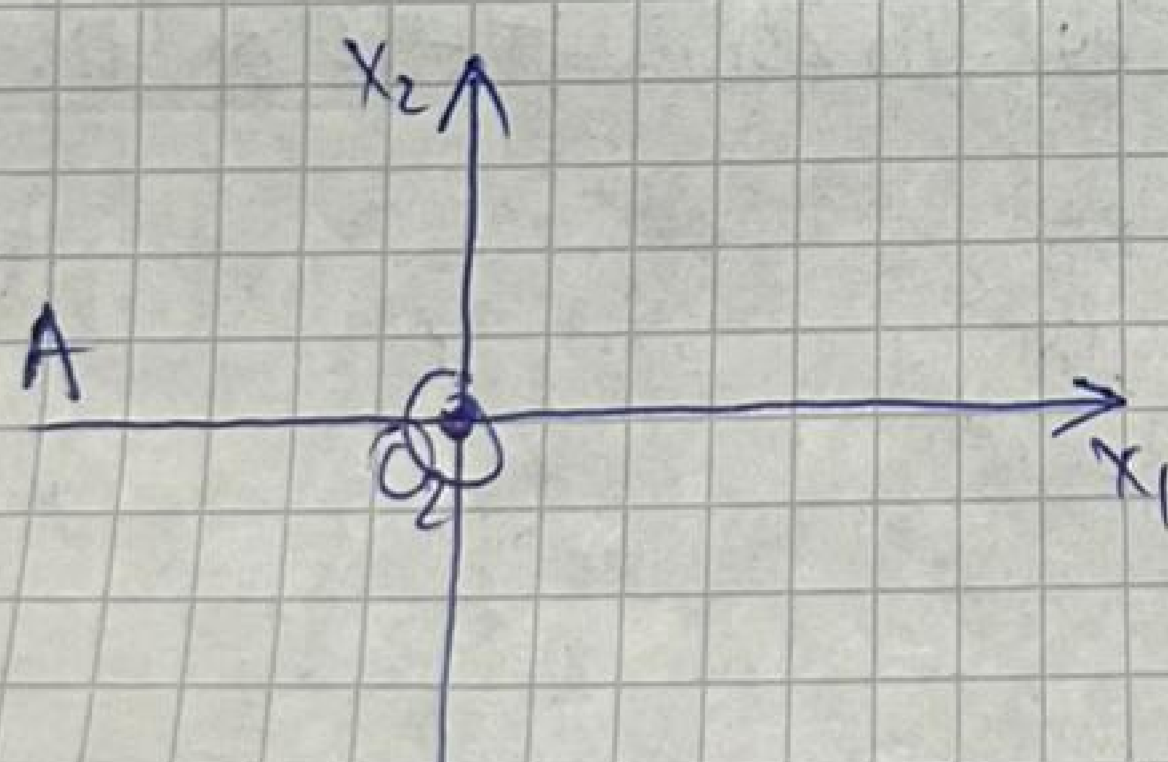
$\text{fr} A = ([2, +\infty) \times \{2\}) \cup (\{2\} \times [2, +\infty))$

$A \cap \text{fr} A \neq \emptyset$

$\text{fr} A \not\subseteq A$

$\Rightarrow$ A nu este deschisă nici închisă

c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$




$\text{int} A = \emptyset$

$\text{fr} A = A$

A închisă ($\text{fr} A \subseteq A$)

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (temă)

⑤ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă au loc afirmațiile

a) $\operatorname{int} A \subseteq A$

b) $\operatorname{int} A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$

c) $A \subseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A$ (cu egalitate dacă A este închisă)

d) $\operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$

a) Fie $x \in \operatorname{int} A \Rightarrow \exists\, r > 0 : B(x,r) \subseteq A$
$x \in B(x,r)$ $\Big| \Rightarrow x \in A \Rightarrow \operatorname{int} A \subseteq A$

$\|x - x\| = \|0_m\| = 0 < r$

b) Pres. prin absurd că $\exists\, x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{fr} A$

$\Rightarrow x \in \operatorname{int} A \Rightarrow \exists\, r_0 > 0 : B(x,r_0) \subseteq A \Rightarrow B(x,r_0) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow x \in \operatorname{fr} A \Rightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ și $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \operatorname{int} A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$

c) Fie $x \in A$

putem presupune că $x \notin \operatorname{int} A \Rightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \not\subseteq A$


$\Rightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$

$x \in \operatorname{fr} A \Leftrightarrow \forall r > 0 : \underbrace{B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$ și $\underbrace{B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset}$

$x \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Deci $x \in \mathrm{fr}\, A$

Dacă $A$ închisă avem $\mathrm{int}\, A \subseteq A$ și $\mathrm{fr}\, A \subseteq A \Rightarrow \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{fr}\, A \subseteq A$

$$\Rightarrow \boxed{A = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{fr}\, A}$$

d) temă