

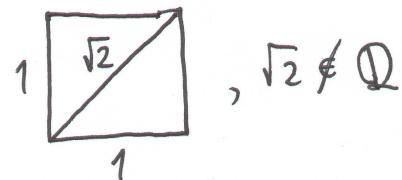
SIRURI și SERII DE NUMERE REALE

1. Numere reale

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$



Fie $p, q \in \mathbb{Z}^*$ numere prime între ele. Dacă numărul rational $\frac{p}{q}$ este rădăcina unei ecuații polinomiale cu coeficienți

intregi

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0, a_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

atunci 1º. p divide a_0

2º. q divide a_n

Dem: Arătăm 1º, analog 2º.

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot q^n = -p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}) \Rightarrow p \text{ divide } a_0 \cdot q^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \text{ divide } a_0.$$

Ex: a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Arătăm că ecuația $x^2 - 2 = 0$ nu are rădăcini racionale, dacă $x = \sqrt{2}$ este rădăcine $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Presupunem prin absurd că $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este rădăcine a ec.

$$\Rightarrow p/2 \text{ și } q/1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\} \text{ absurd!}$$

b) $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

$$\omega = \sqrt[3]{3+\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^3 = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow (\omega^3 - 3)^2 = 2,$$

adică ω este rădăcina ec. polinomială $x^6 - 6x^3 + 7 = 0$

Dacă $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcine a sa $\Rightarrow p/7 \text{ și } q/1$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{-7, -1, 1, 7\} \text{ alesă!}$$

c) $\pi, e \notin \mathbb{Q}$

Def: Multimea numerelor reale \mathbb{R} este acea multime de numere care satisfac axiomă infimului și, respectiv, axiomă supremului.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

a) $\text{MIN}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \leq a\}$ se numește multimea minorantilor lui A

b) $\text{MAG}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, x \geq a\}$ se numește multimea majorantilor lui A

c) A se numește mărginită inferior dacă $\text{MIN}(A) \neq \emptyset$

d) A se numește mărginită superior dacă $\text{MAG}(A) \neq \emptyset$

e) A se numește mărginită dacă c) și d) au loc simultan.

Axioma infimumului: Orice submultime nereidată și mărginită inferior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în \mathbb{R}) un cel mai mare minorant, numit mărginea inferioră (infimum) a lui A, notat $\inf A$.

Axioma supremului: Orice submultime nereidată și mărginită superior $A \subseteq \mathbb{R}$ posedă (în \mathbb{R}) un cel mai mic majorant, numit mărginea superioră (supremum) a lui A, notat $\sup A$.

Ex: a) Multimea \mathbb{Q} nu satisface axioma infimumului sau a supremumului

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}, \quad A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$\min(A) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}; \quad \max(A) = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$$

$\inf A, \sup A?$

$$b) A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\min(A) = (-\infty, -\sqrt{2}] \quad ; \quad \max(A) = [\sqrt{2}, +\infty)$$

$$\inf A = -\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sup A = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Obs:

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \min(A) \\ \forall m' \in \min(A) \text{ avem } m' \leq m \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \max(A) \\ \forall M' \in \max(A) \text{ avem } M' \geq M \end{cases}$$

Prop (caracterizarea algebrică a inf. și sup.)

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall x \in A, x \geq m \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A \text{ a.s.t. } y < m + \varepsilon \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall x \in A, x \leq M \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A \text{ a.s.t. } y > M - \varepsilon \end{cases}$$

Ex: $A = \mathbb{N}$, $\inf \mathbb{N} = 0$, $\sup \mathbb{N}?$ \mathbb{N} nemărginită.

Def: Considerăm două elemente $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$$

$$x + \infty = \infty + x = \infty; x - \infty = -\infty + x = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

$$\forall x > 0, x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$

$$\forall x < 0, x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty, x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty$$

Multimea $\bar{\mathbb{R}} \stackrel{\text{mat}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ se numește multimea extinsă a numerelor reale.

Obs: a) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

b) Următoarele operații nu se definesc:

$$\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot (\pm \infty), (\pm \infty) \cdot 0, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

Convenție:

- Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită inferior atunci $\inf A = -\infty$.
- Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este nemărginită superior atunci $\sup A = +\infty$.
- $\inf \emptyset = +\infty, \sup \emptyset = -\infty$.

Ex: $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Def: Numim valoarea absolută (modul) a numărului $x \in \mathbb{R}$,

numești

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Prop: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $a > 0$. Au loc

- 1°. $|x| \geq 0$
- 2°. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3°. $|x| = |-x|$
- 4°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 5°. $|x+y| \leq |x| + |y|$
- 6°. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Un interval de forma

- a) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ se numește vecinătate a lui x
- b) $(\varepsilon, +\infty)$ — vecinătate a lui $+\infty$
- c) $(-\infty, -\varepsilon)$ — vecinătate a lui $-\infty$



x - centrul vecinătății
 ε - raza vecinătății

2. Siruri de numere reale

Def: O funcție $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește sir de nr. reale.

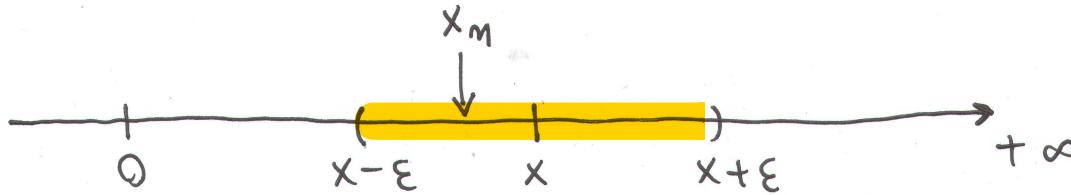
Dacă $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ atunci sirul se va nota $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Spunem că sirul (x_n) este convergent dacă $\exists x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.t. } \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Numește limită sirului (x_n) .

Notăție: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$)



$$|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Unicitatea: Dacă $\exists x, y \in \mathbb{R}$ a.i. $|x_n - x| < \varepsilon$ și $|x_n - y| < \varepsilon$
 $\Rightarrow |x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon$
 $\varepsilon > 0$ arbitrar $\Rightarrow x = y$.

b) Spunem că sirul (x_n) are limită $+\infty$ (respectiv $-\infty$)

dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq n_0 : x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < -\varepsilon$)

și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$)

c) Un sir care nu este convergent se numește divergent.

Ex: Justificați cu definiție că $\lim_{m \rightarrow \infty} a^m = 0$, $\forall a \in (-1, 1)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall m \geq n_0 : |a^m - 0| < \varepsilon$.
 $|a^m| < \varepsilon \Leftrightarrow |a|^m < \varepsilon \Leftrightarrow m \cdot \ln|a| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow m > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|}, a \neq 0$

Cum alegem $n_0 \in \mathbb{N}$?

$$n_0 = \max \left\{ 0, \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln|a|} \right] + 1 \right\}.$$