

Seminar 10

1. Studiați existența limitelor de funcții

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{xy}$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{xy-1}$
- g) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow O_3} \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}$

2. Se da funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y^2} + y \cos \frac{1}{x^2} & , xy \neq 0 \\ 0 & , xy = 0 \end{cases}$$

Este funcția continuă în $(0, 0)$? Dar în $(1, 0)$?

3. Verificați dacă funcțiile următoare își ating valorile extreme și determinați aceste valori

- a) $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
- b) $f : B(O_2, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
- c) $f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy(1-x-y), \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

4. Se da mulțimea $A = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 \mid x \neq y\}$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$

- a) Există limita funcției f în origine?
- b) Este mulțimea A compactă?
- c) Determinați valorile extreme ale lui f pe mulțimea A . Atinge funcția f aceste valori?

Inegalitatea mediilor. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ atunci

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Inegalitatea Cauchy-Schwarz. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ atunci

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

Exercitii suplimentare

1. Studiați existența limitelor de funcții

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+y^2)}{x^2-y^2}$
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow O_3} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow O_3} (xy+yz+zx)^2 \ln(x^2+y^2+z^2)$

2. Studiați continuitatea următoarelor funcții în origine

a)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Verificați dacă funcțiile următoare își ating valorile extreme și determinați aceste valori

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$
- $f: \overline{B}(O_2, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy + \frac{1}{xy}, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 2\}$

4. Se da mulțimea $A = \overline{B}(O_3, 1) \setminus \{O_3\}$ și funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

- Există limita funcției f în origine?
- Este mulțimea A compactă?
- Determinați valorile extreme ale lui f pe mulțimea A . Atinge funcția f aceste valori?