

## Seminar 13

1. Evaluati integralele

a)  $\int_0^1 (x^2 + xy + y^2) dy$

b)  $\int_y^{y^2} (y - x)^4 dx$

2. Evaluati integralele iterate

a)  $\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx \right) dy$

b)  $\int_1^2 \left( \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2y^2} dy \right) dx$

3. Evaluati integralele duble pe multimile specificate

a)  $\iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy, \quad A = [0, 1] \times [0, 2]$

b)  $\iint_A xy dx dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

c)  $\iint_A (y+1) dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este regiunea marginita de dreptele de ecuatii  $y = 0$ ,  $y = 3x$  si  $x + y = 3$

d)  $\iint_A dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este regiunea marginita de curbele de ecuatii  $y^2 = 2x$  si  $x^2 = 2y$

e)  $\iint_A \frac{y}{x} dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este placa triunghiulara de varfuri  $(5, 5)$ ,  $(2, 2)$  si  $(5, 2)$

4. Este multimea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$  simpla in raport cu vreuna dintre axe? Descompuneti multimea  $A$  in submultimi simple in raport cu una dintre axe, avand interioarele disjuncte.

5. Evaluati integrala iterata, schimband in prealabil ordinea de integrare

$$\int_0^1 \left( \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} dx \right) dy$$

## Exercitii suplimentare

1. Evaluati integralele iterate

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy \text{ si } \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx.$$

Contrazice acest lucru teorema lui Fubini?

2. Evaluati integralele duble pe multimile specificate

a)  $\iint_A \frac{1+x^2}{1+y^2} dx dy, \quad A = [0, 1]^2$

b)  $\iint_A dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este regiunea marginita de curba  $x^2 + y^2 = 1$  si situata deasupra dreptei  $x + y = 1$

c)  $\iint_A xy dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este regiunea marginita de dreapta  $y = x - 1$  si de parabola  $y^2 = 2x + 6$

d)  $\iint_A (\sqrt{x} - y^2) dx dy, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$  este regiunea marginita de curbele  $y = x^2$  si  $x = y^4$

3. Determinati aria multimii plane marginita de curbele

a)  $y^2 = ax, x^2 = by$ , unde  $a, b > 0$  sunt constante date

b)  $|x| + |y| = 1$

4. Evaluati integralele iterate, schimbând în prealabil ordinea de integrare

a)  $\int_0^4 \left( \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dy \right) dx$

b)  $\int_0^1 \left( \int_x^1 e^{x/y} dy \right) dx$

Fie un obiect plan, subtire si omogen, a carui imagine este multimea compacta  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ .  
Coordonatele centrului de greutate al acestui obiect sunt

$$x_g = \frac{1}{\sigma} \iint_A x dx dy, \quad y_g = \frac{1}{\sigma} \iint_A y dx dy$$

unde  $\sigma = \iint_A dx dy$  este aria multimii  $A$ .

5. Determinati coordonatele centrului de greutate al obiectului plan, subtire si omogen, a carui imagine este multimea  $A$  de mai jos

a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$