5. Extreme locale pentru funcții reale de variabilă vectorială

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x^0 \in A$.

Spunem că:

a) x^0 este **punct de minim (local)** al lui f dacă

$$\exists\, r > 0 \text{ a.î. } f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \cap A$$

b) x^0 este **punct de maxim (local)** al lui f dacă

$$\exists\, r > 0 \text{ a.î. } f(x^0) \geq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \cap A.$$

c) x^0 este **punct de extrem (local)** al lui f dacă el este punct de minim sau maxim local.

T (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) $x^0 \in \operatorname{int} A$

ii) f este derivabilă parțial în x^0

iii) x^0 este punct de extrem

atunci $\nabla f(x^0) = 0_m$.

Dem: Considerăm că x^0 este punct de minim local $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $f(x^0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^0, r) \subseteq A$,

deoarece $x^0 \in \operatorname{int} A$.

Fie $H(x^0, l) = [x_1^0 - l, x_1^0 + l] \times \ldots \times [x_m^0 - l, x_m^0 + l]$

hipercubul de centru x^0 și latură $2l$.

Evident $\exists\, l > 0$ a.î. $H(x^0, l) \subseteq B(x^0, r)$.

Fie $i \in \{1, \dots, m\}$ fixat și funcția $\varphi : (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \to \mathbb{R}$,

$\varphi(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$.

Funcția φ este derivabilă în $t = x_i^0$ și $\varphi'(x_i^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$.

Avem $\varphi(x_i^0) = f(x^0) \le \varphi(t)$, $\forall t \in (x_i^0 - l, x_i^0 + l) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^0$ este punct de minim al lui $\varphi \overset{T.F.}{\Longrightarrow} \varphi'(x_i^0) = 0$, deci

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$.

<u>Def</u>: Cu notațiile din teorema anterioară, un punct $x^0 \in \operatorname{int} A$ cu proprietatea că $\nabla f(x^0) = 0_m$ se numește <u>punct critic</u> al lui f.

<u>Obs</u>: Orice punct de extrem local din interiorul domeniului lui f este punct critic al lui f. Reciproca nu este adevărată.

<u>Ex</u>: a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^4$.

Evident $(0,0)$ este punct de extrem, $f(0,0) \le f(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dar $(0,0)$ este și punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$.

$(0,0)$ este punct critic, deoarece $\nabla f(0,0) = 0_2$, dar $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

$\forall r > 0$, $(t, 0), (0, t) \in B(0_2, r)$ pentru $t \ne 0$ suficient de mic.

$f(0,0) = 0 < t^2 = f(t, 0)$ și $f(0,0) = 0 > -t^2 = f(0, t)$.

Def: Punctele critice ale unei funcții care nu sunt puncte de extrem local se numesc puncte șa.

Obs: Studiul punctelor de extrem local se poate face cu ajutorul diferențialei de ordinul 2.

Def: Fie $C=(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,m}}}$ o matrice pătratică cu coeficienți reali.

a) Funcția $\phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $\phi(u)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\cdot u_i\cdot u_j$, $\forall u=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m$ se numește formă pătratică asociată matricei C.

b) Spunem că ϕ este pozitiv definită dacă

$$\phi(u)>0,\ \forall u\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}$$

c) Spunem că ϕ este negativ definită dacă

$$\phi(u)<0,\ \forall u\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}$$

d) Spunem că ϕ este indefinită dacă

$$\exists u,v\in\mathbb{R}^m \text{ a.î. } \phi(u)<0<\phi(v).$$

Obs: a) $\phi(0_m)=0$

b) Diferențiala de ordinul 2 a unei funcții f într-un punct x^0 este o formă pătratică asociată matricei hessiene, $H(f)(x^0)$.

Ex: Natura următoarelor forme pătratice:

a) $\phi(u_1,u_2)=-(u_1)^2-(u_2)^2$; b) $\phi(u_1,u_2)=u_1\cdot u_2$; c) $\phi(u_1,u_2)=(u_1+u_2)^2$.

Prop (criteriul lui Sylvester)

Fie $\phi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată unei matrici simetrice $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}$ și $\Delta_k = \det(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,k}}}$, $k = \overline{1,m}$ (numiți determinanții lui Sylvester). Au loc afirmațiile:

1°. ϕ este pozitiv definită $\iff \Delta_k > 0$, $\forall k = \overline{1,m}$

2°. ϕ este negativ definită $\iff (-1)^k \cdot \Delta_k > 0$, $\forall k = \overline{1,m}$

Obs: $\Delta_1 = c_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_m = \det(C)$.

$\boxed{T}$ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 într-un punct $x^0 \in \text{int} A$ și $\nabla f(x^0) = 0_m$. Au loc afirmațiile:

1°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este pozitiv definită $\Rightarrow x^0$ punct de minim local

2°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este negativ definită $\Rightarrow x^0$ punct de maxim local

3°. Dacă $d^2 f(x^0)$ este indefinită $\Rightarrow x^0$ punct șa.

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + x_1 \cdot x_2 + (x_2)^2 + a \cdot x_1 + b \cdot x_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ constante date.

I). Căutăm punctele critice:

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2 + a, 2x_2 + x_1 + b) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + a = 0 \\ 2x_2 + x_1 + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3} \right)$$

II) Semnul diferențialei de ordinul 2:

$$H(f)(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = 3 > 0$$

$d^2 f(x_1^0, x_2^0)(u_1, u_2) = 2\cdot(u_1)^2 + 2\cdot(u_2)^2 + 2u_1u_2$ pozitiv definită

$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ punct de minim local.

$\inf f(\mathbb{R}^2) = -\frac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)$, $\sup f(\mathbb{R}^2) = +\infty$

<u>Ex:</u> Considerăm problema determinării distanței de la un punct dat la un plan dat în spațiul $\mathbb{R}^3$.

Fie $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ punctul dat și

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = c\}$ un plan dat,

$b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$ date.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in S$: $\|x - a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3^2)}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2$

De minimizat $f|_S \Rightarrow$ problemă de extrem condiționat.

În continuare considerăm numerele naturale $m > p \geq 1$.

<u>Def:</u> Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $F = (F_1, \dots, F_p): A \to \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială, notăm

$$S = \{x \in A \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\} \qquad (1)$$

numită <u>mulțimea restricțiilor</u>.

Un punct $x^0 \in S$ se numește <u>punct de extrem condiționat</u> al lui f relativ la S dacă x^0 este punct de extrem local al funcției $f|_S$.

T (metoda multiplicatorilor lui Lagrange)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ și $F = (F_1, \dots, F_p) : A \to \mathbb{R}^p$ funcții cu proprietatea că $f, F_1, \dots, F_p$ sunt toate de clasă C^1 pe A, $x^0 \in S$ un punct de extrem condiționat al lui f relativ la mulțimea S dată de (1) și rang $J(F)(x^0) = p$. Atunci funcția $L : A \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin

$$L(x, y) = f(x) + y \cdot F(x) \quad , \quad \forall x \in A, \ \forall y \in \mathbb{R}^p \qquad (2)$$

admite un punct critic de forma (x^0, λ), cu $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Cu alte cuvinte

$$\nabla L(x^0, \lambda) = 0_{m+p} \qquad (3)$$

Obs: a) Teorema dă o condiție necesară ca x^0 să fie punct de extrem condiționat.

b). Funcția L dată de (2) se numește funcția lui Lagrange asociată funcțiilor f și F. Ea se mai scrie:

$$L(x, y) = f(x) + y_1 \cdot F_1(x) + \dots + y_p \cdot F_p(x) \quad , \quad \forall x \in A, \ \forall y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$$

c) Numerele $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \lambda \in \mathbb{R}^p$ a căror existență este garantată de teoremă se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

d) Relația (3) se poate scrie

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^0, \lambda) = 0 \ , \quad \forall i = \overline{1, m} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y_j}(x^0, \lambda) = 0, \quad \forall j = \overline{1, p}$$

al doilea set de egalități fiind echivalent cu $F_j(x^0) = 0$, $j = \overline{1, p}$, ceea ce este evident.

Ex: Revenim la exemplul anterior.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2, x_3) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c$, $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$

$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$.

$m = 3$, $p = 1$

$J(F)(x_1, x_2, x_3) = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \operatorname{rang} J(F) = 1$ dacă $(b_1, b_2, b_3) \neq 0_3$.

Introducem funcția lui Lagrange:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + \lambda (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c)$$

Formăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \\ F(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x_1 - a_1) + \lambda b_1 = 0 & / \cdot b_1 \\ 2(x_2 - a_2) + \lambda b_2 = 0 & / \cdot b_2 \\ 2(x_3 - a_3) + \lambda b_3 = 0 & / \cdot b_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - c = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele x_1, x_2, x_3, λ.

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2 \cdot (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + \lambda \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$x_1 - a_1 = -\frac{\lambda b_1}{2}, \quad x_2 - a_2 = -\frac{\lambda \cdot b_2}{2}, \quad x_3 - a_3 = -\frac{\lambda \cdot b_3}{2}$$

ce permite determinarea lui (x_1, x_2, x_3) punct de extrem condiționat al lui f relativ la S.

$$\Rightarrow \min f(S) = \left(-\frac{\lambda b_1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda b_3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c)^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Distanța căutată va fi egală cu

$$\frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$