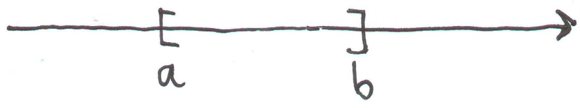
# 6. Integrale duble

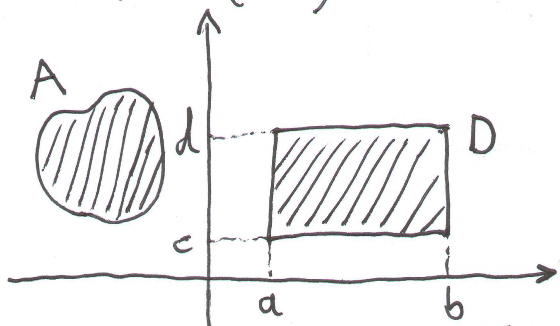
pe axa reală ($\mathbb{R}$)



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

în plan ($\mathbb{R}^2$)



$A\subseteq\mathbb{R}^2$ (compactă)

$f:A\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y)$

Def: Fie dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită și $n,m\in\mathbb{N}^*$. Notăm $\Delta_x=(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $\Delta_y=(y_0,y_1,\dots,y_m)$ diviziuni ale intervalului $[a,b]$, respectiv $[c,d]$ și $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$ sisteme de puncte intermediare (s.p.i.) asociate diviziunii $\Delta_x$, respectiv $\Delta_y$.

a) Numărul real

$$\sigma_f(\Delta_x,\xi,\Delta_y,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(y_j-y_{j-1})$$

se numește <u>suma Riemann</u> a funcției $f$ corespunzătoare diviziunilor $\Delta_x$, $\Delta_y$ și s.p.i. $\xi,\eta$.

b) Funcția $f$ se numește <u>integrabilă Riemann pe $D$</u> dacă

$$\exists\; I=\lim_{(\|\Delta_x\|,\|\Delta_y\|)\to(0,0)}\sigma_f(\Delta_x,\xi,\Delta_y,\eta)\in\mathbb{R},$$

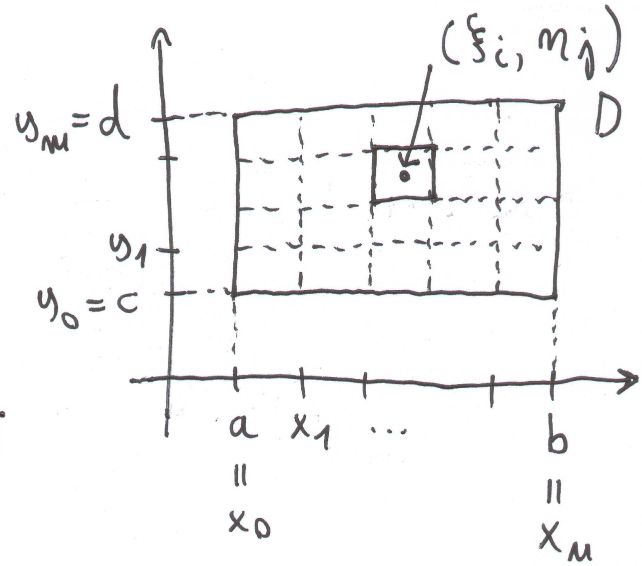
iar valoarea lui I nu depinde de alegerea s.p.i. $\xi$ și $\eta$.
Numărul I se numește integrala Riemann a funcției $f$ pe $D$ și se notează cu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ sau $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$.

---

$\Delta_x: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\Delta_y: c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$

notăm $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$




$\Rightarrow (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$

$\|\Delta_x\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$

$\|\Delta_y\| = \max\{y_j - y_{j-1} \mid j = \overline{1,m}\}$

<u>Ex:</u> $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in D = [a,b] \times [c,d]$

$$\sigma_f(\Delta_x, \xi, \Delta_y, \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \text{aria}(D_{ij}) = \text{aria}(D) = (b-a)(d-c)$$

$$\Rightarrow \iint_D dx\,dy = \text{aria}(D)$$

$\boxed{\text{T}}$ (Fubini)

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe dreptunghiul $D = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Au loc următoarele afirmații:

1° $f$ este integrabilă Riemann pe $D$

2° Funcțiile $I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$, $\forall x\in[a,b]$ și

$J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$, $\forall y\in[c,d]$ sunt bine definite și sunt integrabile Riemann pe mulțimile specificate

3°. Are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\underbrace{\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}=\underbrace{\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy}.$$

integralele iterate ale lui $f$

<u>Ex:</u> Calculați $\iint_{[0,1]\times[-1,1]}(x+y)\,dx\,dy$.

<u>Def:</u> Fie $A\subseteq\mathbb{R}^2$ mulțime compactă, $D=[a,b]\times[c,d]$ cu proprietatea că $A\subseteq D$ și $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Construim funcția

$$\bar{f}:D\to\mathbb{R},\quad \bar{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in A\\ 0, & (x,y)\in D\setminus A\end{cases}$$

o prelungire a lui $f$ la $D$. Spunem că $f$ este <u>integrabilă Riemann</u> pe $A$ dacă $\bar{f}$ este integrabilă Riemann pe $D$, iar valoarea integralei $\iint_D \bar{f}(x,y)\,dx\,dy$ nu depinde de alegerea lui $D$. În acest caz definim <u>integrala Riemann</u> a lui $f$ pe $A$ astfel

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \stackrel{def}{=} \iint_D \bar{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

<u>Prop</u>: Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulțime compactă având frontiera o curbă netedă pe porțiuni și $f: A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $A$ atunci $f$ este integrabilă Riemann pe $A$.

"curbă netedă pe porțiuni" = reuniunea unui număr finit de curbe descrise prin funcții de clasă $C^1$.

<u>Obs</u>: În continuare vom lucra cu mulțimi care au această proprietate a frontierei, fără a preciza acest lucru.

<u>Prop</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțime compactă și $f, g: A \to \mathbb{R}$ funcții continue pe $A$. Au loc afirmațiile:

1°. (monotonia integralei)

Dacă $f(x,y) \le g(x,y)$, $\forall (x,y) \in A$ atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_A g(x,y)\,dx\,dy$$

2°. (liniaritatea integralei)

$$\iint_A (\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \cdot \iint_A f(x,y)\,dx\,dy + \beta \cdot \iint_A g(x,y)\,dx\,dy, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3°. (aditivitatea integralei)

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

$\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mulțimi compacte cu proprietățile

$$A_1 \cup A_2 = A \quad \text{și} \quad \operatorname{int} A_1 \cap \operatorname{int} A_2 = \emptyset$$

## 4°. (formula ariei)

$$\text{aria}(A) = \iint_A dx\,dy .$$

**Obs:** Calculul unei integrale duble depinde în mare măsură de forma mulțimii.

**Def:** O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se numește

a) <u>simplă în raport cu axa Ox</u> dacă $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ și $\alpha_1, \alpha_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții de clasă $C^1$ pe $(a,b)$ astfel încât

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha_1(x) \le y \le \alpha_2(x)\}$$

b) <u>simplă în raport cu axa Oy</u> dacă $\exists\, c, d \in \mathbb{R}$ și $\beta_1, \beta_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funcții de clasă $C^1$ pe $(c,d)$ astfel încât

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta_1(y) \le x \le \beta_2(y),\ c \le y \le d\}$$

**Obs:** a) Orice mulțime simplă în raport cu una dintre axe este compactă

b) Un dreptunghi $D = [a,b] \times [c,d]$ este mulțime simplă în raport cu ambele axe.

**Ex:** Este mulțimea $A = \bar{B}(0_2, 1)$ simplă în raport cu vreuna dintre axe?

$\boxed{\text{T}}$ (calculul integralelor duble pe mulțimi simple în raport cu o axă)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A.

1°. Dacă A este simplă în raport cu axa Ox atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

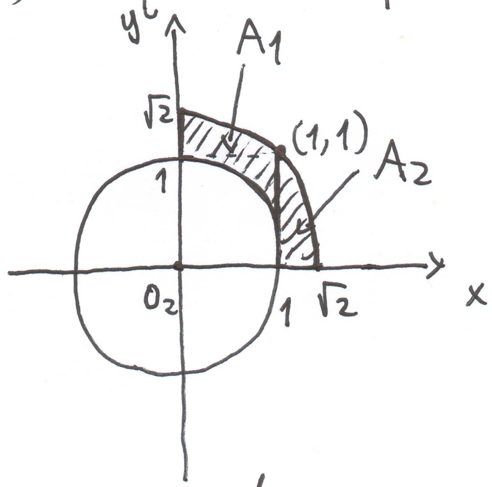
2°. Dacă A este simplă în raport cu axa Oy atunci

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left( \int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Obs: În cazul particular $A = D = [a,b] \times [c,d]$ teorema se reduce la teorema lui Fubini.

Ex: Evaluați integrala dublă

$$\iint_A xy\,dx\,dy, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$




$A = A_1 \cup A_2$

$\mathrm{int}\, A_1 \cap \mathrm{int}\, A_2 = \emptyset$

A nu este simplă în raport cu vreo axă.

$A_1$ este simplă în raport cu Ox

$A_2$ este simplă în raport cu Ox și Oy

Avem $\iint_A xy\,dx\,dy = \iint_{A_1} xy\,dx\,dy + \iint_{A_2} xy\,dx\,dy$

$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$

$$\iint_{A_1} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \left(2-x^2-1+x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\quad 1 \le x \le \sqrt{2-y^2} \right\}$$

$$\iint_{A_2} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_1^{\sqrt{2-y^2}} xy\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} y \Bigg|_{x=1}^{x=\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} \cdot \left(2-y^2-1\right) dy = \int_0^1 \left( \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left( \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Elemente de geometrie analitică în plan:

- ecuația normală a dreptei:

$$ax+by=c, \quad a,b,c \in \mathbb{R} \text{ constante}$$

- ecuația dreptei prin două puncte $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- ecuația cercului de centru $(x_0,y_0)$ și raza $r$:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

- ecuația parabolei de vârf $(x_0,y_0)$ și orientare de-a lungul axei $Oy$:

$$y-y_0 = p\cdot(x-x_0)^2, \quad p \in \mathbb{R}^* \text{ constantă}$$