Def: Un şir (x_n) de numere reale se numeşte

a) <u>mărginit inferior</u> dacă mulţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită inferior.

b) <u>mărginit superior</u> dacă mulţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior.

c) <u>mărginit</u> dacă şirul este atât mărginit inferior cât şi superior. În acest caz $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ a.î.

$$m \le x_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Obs:</u> Orice şir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată.

<u>Ex:</u> $x_n = (-1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Def:</u> Un şir (x_n) de numere reale se numeşte

a) <u>crescător</u> dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le x_{n+1}, \ \forall n \ge n_0$

b) <u>descrescător</u> dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \ge x_{n+1}, \ \forall n \ge n_0$

c) <u>monoton</u> dacă şirul este crescător sau descrescător.

Analog se introduc noţiunile de şir <u>strict crescător</u>, respectiv <u>strict descrescător</u>, înlocuind inegalităţile de mai sus cu inegalităţi stricte.

<u>Ex:</u> $x_n = \dfrac{2000^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2000^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2000^{n+1}} = \frac{n+1}{2000} > 1, \ \forall n \ge 2000.$$

$\boxed{T}$ (Weierstrass)

Fie (x_n) şir de numere reale. Au loc afirmaţiile

1°. Dacă (x_n) este descrescător şi mărginit inferior

$\Rightarrow (x_n)$ convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

2°. Dacă (x_n) este crescător şi mărginit superior

$\Rightarrow (x_n)$ convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

3°. Dacă (x_n) este monoton şi mărginit $\Rightarrow (x_n)$ convergent.

Dem: 1°. $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ mărginită inferior $\Rightarrow \alpha = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} i)\ \alpha \le x_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \\ ii)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0} < \alpha+\varepsilon \end{cases}$ $\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N} : \alpha < x_n+\varepsilon \quad (*)$

(x_n) descrescător $\Rightarrow x_n \le x_{n_0},\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow x_n < \alpha+\varepsilon,\ \forall n\ge n_0 \quad (**)$

Din $(*), (**) \Rightarrow \alpha-\varepsilon < x_n < \alpha+\varepsilon,\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n-\alpha| < \varepsilon,\ \forall n\ge n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \Rightarrow (x_n)$ convergent

2°. analog (temă)

3°. evidentă.

Prop: Fie (x_n) şir de numere reale. Au loc afirmaţiile

1°. Dacă (x_n) este crescător şi nemărginit superior

$\Rightarrow (x_n)$ are limita $+\infty$

2°. Dacă (x_n) este descrescător şi nemărginit inferior

$\Rightarrow (x_n)$ are limita $-\infty$.

3°. Dacă (x_n) este monoton $\Rightarrow (x_n)$ are limită (finită sau nu)

Dem:

1°. $\left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } x_{n_0} > \varepsilon \\ (x_n) \text{ crescător } \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}, \forall n \geq n_0\end{array}\right\} \Rightarrow x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

2° analog; 3° evident.

$\boxed{T}$ (criteriul cleștelui)

Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ trei șiruri de numere reale având următoarele proprietăți:

i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \stackrel{\text{not}}{=} \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha.$

Dem:

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_1$: $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

$\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_2$: $|z_n - \alpha| < \varepsilon$

Avem $x_n - \alpha \leq y_n - \alpha \leq z_n - \alpha, \forall n \geq n_0$

$\left.\begin{array}{l} y_n - \alpha \leq z_n - \alpha \leq |z_n - \alpha| \leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\} \\ \alpha - y_n \leq \alpha - x_n \leq |x_n - \alpha| \leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_n - \alpha| \leq \max\{|x_n-\alpha|, |z_n-\alpha|\}, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |y_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha.$

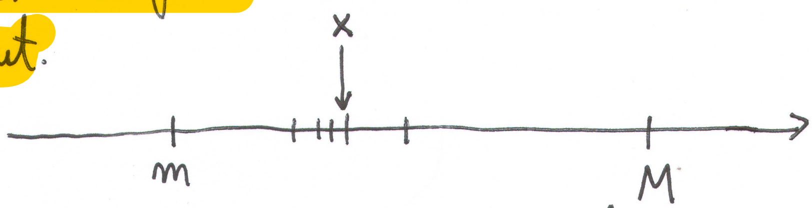
Def: Fie (x_n) un şir de numere reale şi $n_0<n_1<n_2<\dots$ un şir infinit strict crescător de indici (numere naturale). Şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte subşir al şirului (x_n).

Ex: $x_n=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad x_{2k}=1$, $x_{2k+1}=-1$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Prop: Şirul (x_n) are limita $x\in\overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ Orice subşir al şirului (x_n) are limita x.

$\boxed{T}$ (Cesaro)

Orice şir mărginit de numere reale are un subşir convergent.



Def: Fie (x_n) un şir de numere reale. Mulţimea

$$LIM(x_n) \overset{not}{=} \left\{x\in\overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; \exists\, (x_{n_k}) \text{ subşir al lui } (x_n) \text{ a.î. } \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x\right\}$$

se numeşte mulţimea punctelor limită ale şirului (x_n).

Ex: $x_n=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}$, $\quad LIM(x_n)=\{-1,1\}$.

Prop: Pentru orice şir de numere reale (x_n) are loc

$$LIM(x_n)\neq\emptyset$$

Def: a) Numărul $\inf LIM(x_n)$ se numeşte limita inferioară a şirului (x_n) şi se notează cu $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Numărul $\sup LIM(x_n)$ se numeşte limita superioară a şirului (x_n) şi se notează cu $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Prop: Fie (x_n) un şir de numere reale. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}} \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

Dem: Rezultă din echivalenţa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff LIM(x_n) = \{x\}$

Def: Un şir (x_n) de numere reale se numeşte fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Formularea este echivalentă cu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

punând $m = n + p \geq n_0$.

Prop: Orice şir fundamental este mărginit.

Dem: Pentru $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1$.

$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|, \forall n \geq n_0$

Dacă notăm $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0 - 1}|, 1 + |x_{n_0}|\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow -M \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ mărginit.

Prop: Orice şir fundamental este convergent.

Dem: (x_n) fundamental $\Rightarrow (x_n)$ mărginit $\overset{\text{Cesaro}}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k})$ un subşir convergent.

Notăm $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}$, deci

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

(x_n) fundamental $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

Alegem $m = n_k \geq k$ (căci $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$)

$\Rightarrow |x_{n_k} - x_n| < \varepsilon, \forall k \geq n_0$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $k \geq \max\{k_0, n_0\}$ obținem

$|x_n - x| = |\underline{x_n - x_{n_k}} + \underline{x_{n_k} - x}| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ convergent la x.

Prop: Orice șir convergent este fundamental.

Dem: Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, avem

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, astfel

$\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow (x_n)$ fundamental.

$\boxed{T}$ (Cauchy)

Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este fundamental

Obs: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Ex: Natura șirului $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$?

(x_n) strict crescător $\Rightarrow (x_n)$ are limită

Este (x_n) mărginit superior ?

$x_{10^9} \simeq 21$

Arătăm că (x_n) nu este fundamental

$\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m, l \geq n$ a.î. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$|x_{2n} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ se numeşte serie de numere reale asociată şirului (x_n) şi se notează cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$.

b) Şirul $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeşte convergentă dacă şirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ se numeşte suma seriei şi scriem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numeşte divergentă.