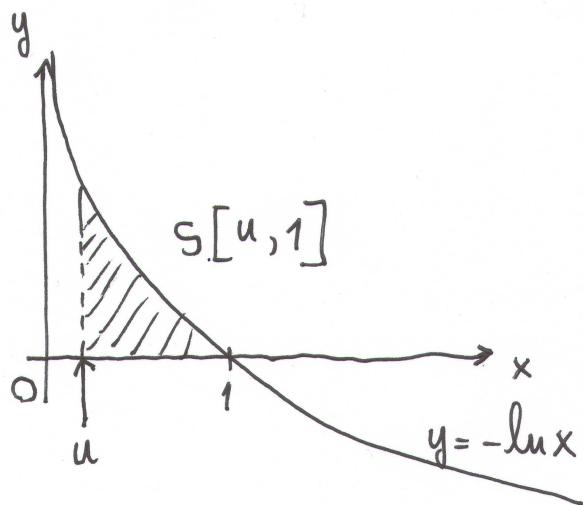


7. Integrale improprii

Ex: $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$

$$S[0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

nemărginită, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.



$$\text{aria } S[0, 1] = \lim_{u \rightarrow 0} \text{aria } S[u, 1] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^1 (-\ln x) dx = \lim_{u \rightarrow 0} (x - x \cdot \ln x) \Big|_u^1 = \lim_{u \rightarrow 0} (1 - u + \underbrace{u \cdot \ln u}_{\rightarrow 0}) = 1$$

$\Rightarrow S[0, 1]$ este nemărginită dar de aria finită.

Obs: Teoria integrării poate fi extinsă și la funcții definite pe intervale necomplete. Astfel de intervale fie sunt mărginite, fie nu sunt închise.

$a, b \in \mathbb{R}$

interval compact: $[a, b]$

intervale necomplete

tipul I: $[a, b)$, $[a, +\infty)$

tipul II: $(a, b]$, $(-\infty, b]$

tipul III: (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$

Def: Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, spunem că funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I dacă f este integrabilă Riemann pe orice subinterval compact $[a, x] \subseteq I$.

Def: a) Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe $[a, b]$. Limita

$$\lim_{u \nearrow b} \int_a^u f(x) dx \quad (1)$$

se numește integrală improprie a lui f pe $[a, b]$ și se notează cu $\int_a^{b-0} f(x) dx$.

b) Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ și $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe $(a, b]$. Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^b f(x) dx \quad (2)$$

se numește integrală improprie a lui f pe $(a, b]$ și se notează cu $\int_{a+0}^b f(x) dx$.

c) Fie $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ și $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă pe (a, b) . Limita

$$\lim_{u \searrow a} \int_u^c f(x) dx + \lim_{v \nearrow b} \int_c^v f(x) dx, \quad c \in (a, b) \quad (3)$$

se numește integrală improprie a lui f pe (a, b) și se notează cu $\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx$.

d) O integrală improprie este convergentă dacă limita corespunzătoare există și este finită.

e) O integrală improprie care nu este convergentă se numește divergentă.

Obs: a) dacă limita (3) există atunci valoarea sa nu depinde de alegerea punctului intermediar $c \in (a, b)$.

b) Studiul integralelor de tipul (3) se reduce la studiul integralelor de tipul (1) și (2).

c). Studiul integralelor de tipul (2) se reduce la studiul integralelor de tipul (1).

$$\begin{aligned} \int_{a+0}^b f(x) dx &= \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx \stackrel{x=-u}{=} \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_{-u}^b f(x) dx = \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_b^{-u} (-f(x)) dx = \\ &= \lim_{\substack{u \rightarrow 1^- \\ x=-t}} \int_{-b}^u f(-t) dt = \int_{-b}^{-a-0} f(-t) dt. \end{aligned}$$

Ex: a) Calculați $\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p} dx$, $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Caz } p \neq 1, \quad \lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v \frac{1}{(b-x)^p} dx &= \lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v (b-x)^{-p} dx = \\ &= \lim_{v \rightarrow b^-} \frac{-1}{-p+1} \cdot (b-x)^{-p+1} \Big|_a^v = \lim_{v \rightarrow b^-} \frac{1}{p-1} \cdot \left[(b-v)^{-p+1} - (b-a)^{-p+1} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p} (b-a)^{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Caz } p=1, \quad \lim_{v \rightarrow b^-} \int_a^v \frac{1}{b-x} dx = \lim_{v \rightarrow b^-} \left(-\ln|b-x| \right) \Big|_a^v =$$

$$= \lim_{x \nearrow b} (-\ln(b-x) + \ln(b-a)) = +\infty$$

$\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p} dx$ convergește $\Leftrightarrow p < 1$.

b) Calculați $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Caz $p \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{1}{x^p} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \Big|_a^x =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \cdot \left(x^{-p+1} - a^{-p+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \cdot a^{1-p}, & p > 1 \\ +\infty, & p < 1 \end{cases}$$

Caz $p = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_a^x = +\infty$$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ convergește $\Leftrightarrow p > 1$

T Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă ce poate fi prelungită prin continuitate la intervalul $[a, b]$, atunci

$$\int_a^{b-0} f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx,$$

unde f^* este prelungirea lui f la $[a, b]$.

Dem: f poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x=b$ dacă

$\exists \lim_{x \nearrow b} f(x) \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b) \\ \lim_{x \nearrow b} f(x), & x = b \end{cases}$$

f^* continuă pe $[a, b] \Rightarrow F^*(t) = \int_a^t f^*(x) dx, \forall t \in [a, b]$

este o primitivă a sa.

$$\begin{aligned} \int_a^{b-0} f(x) dx &= \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x) dx = \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f^*(x) dx = \lim_{u \uparrow b} F^*(u) = F^*(b) = \\ &= F^*(b) - \underbrace{F^*(a)}_{=0} = \int_a^b f^*(x) dx. \end{aligned}$$

În continuare considerăm cazul funcțiilor cu valori positive.

Prop: Dacă $-\infty < a < b \leq +\infty$, iar $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\exists \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x) dx$$

Dem: Fie $F(u) = \int_a^u f(x) dx, \forall u \in [a, b]$.

F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F'(u) = f(u) \geq 0 \Rightarrow F$ crește oară
 $\Rightarrow \exists \lim_{u \uparrow b} F(u) = \sup(F[a, b])$.

Obs: În ipotezele proprietății anterioare avem

$$\int_a^{b-0} f(x) dx \text{ este convergentă} \Leftrightarrow \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x) dx < +\infty.$$

T (criteriul comparației)

Dacă $-\infty < a < b \leq +\infty$, iar $f, g: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ sunt funcții pozitive și local integrabile pe $[a, b]$, atunci au loc:

1. Dacă $\exists c \in [a, b]$ a.s. $f(x) \leq g(x), \forall x \in [c, b]$ atunci

- i) Dacă $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă
- ii) Dacă $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x)dx$ este divergentă.

2º (criteriul comparației prin formă de limită)

Dacă $\exists \lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, +\infty]$ atunci

- i) Dacă $l < +\infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă
- ii) Dacă $l > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)dx$ divergentă $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ divergentă.

Prop: Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a, b]$ și $\exists \lim_{x \uparrow b} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

- i) Dacă $p < 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă
- ii) Dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergentă.

Dem: Fie $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$, $\forall x \in [a, b)$; $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Leftrightarrow p < 1$

$\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \uparrow b} f(x) \cdot (b-x)^p = \lambda$, deci conduced rezultă din criteriul comparației prin formă de limită.

Prop: Dacă $a, p \in \mathbb{R}$, $f: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $[a, +\infty)$ și $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

- i) Dacă $p > 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă

- ii) Dacă $p \leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ este divergentă.

Dem: Utilizăm $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $\forall x \in (0, +\infty)$

Prop: Dacă $a, b, p \in \mathbb{R}$, $f: (a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(a, b]$ și, $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p < 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x) dx$ este convergentă

ii) Dacă $p \geq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x) dx$ este divergentă

Prop: Dacă $b, p \in \mathbb{R}$, $f: (-\infty, b] \rightarrow [0, +\infty)$ este o funcție pozitivă și local integrabilă pe $(-\infty, b]$ și, $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci

i) Dacă $p > 1$ și $\lambda < +\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^b f(x) dx$ este convergentă

ii) Dacă $p \leq 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^b f(x) dx$ este divergentă.

Ex: Natura integralii $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$

$$\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = - \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin x) dx$$

Fie $f: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = -\ln(\sin x)$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot (-\ln(\sin x)) \stackrel{p=\frac{1}{2}}{\equiv} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot (-\ln(\sin x)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \cdot \cos x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 0 < +\infty, p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{integrală convergentă.}$$