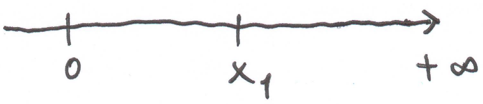
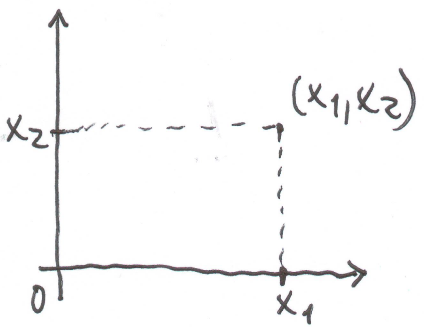
FUNCȚII VECTORIALE DE VARIABILĂ VECTORIALĂ

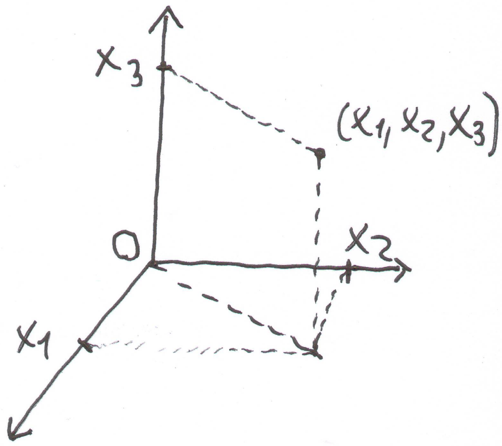
1. Topologia spațiului $\mathbb{R}^m$

$$m\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{m \text{ ori}} = \left\{(x_1,x_2,\dots,x_m) \;\middle|\; x_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m}\right\}$$

Cazuri particulare:







$m=1$, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$

$m=2$, $\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$,

$m=3$, $\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$

Def: Elementele mulțimii $\mathbb{R}^m$ se numesc <u>puncte (vectori)</u> cu m componente, iar numerele din $\mathbb{R}$ se numesc <u>scalari</u>.

Def: Definim operațiile:

a) $\forall\, x=(x_1,\dots,x_m),\ y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$

$$x+y \overset{\text{def}}{=} (x_1+y_1,\dots,x_m+y_m)\in\mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

numită <u>adunarea vectorilor</u>.

b) $\forall\, x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$

$$\alpha x \overset{\text{def}}{=} (\alpha x_1,\dots,\alpha x_m)\in\mathbb{R}^m, \qquad (2)$$

numită <u>înmulțirea cu scalar</u>.

<u>Obs</u>: Mulțimea $\mathbb{R}^m$ împreună cu operațiile (1) și (2) formează o structură algebrică de <u>spațiu vectorial real</u> m-dimensional

(a se vedea cursul de algebră).

Notații: 1) $0_m = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ <u>vectorul nul</u>.

2) $\forall\, x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ fie $-x \overset{not}{=} (-x_1, \dots, -x_m) \in \mathbb{R}^m$ numit <u>opusul</u> lui x.

3) $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e^m = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^m$ numiți <u>vectorii canonici</u>.

<u>Def</u>: $\forall\, x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ definim operația

$$x \cdot y \overset{def}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \in \mathbb{R}$$

numită <u>produsul scalar</u> al vectorilor x și y.

<u>Prop</u> (proprietăți ale produsului scalar)

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^m$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au loc:

1°. $x \cdot y = y \cdot x$

2°. $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$

3°. $x \cdot x \geq 0$

Dem: 1°, 3° (temă)

2°. $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_m + \beta y_m)$,

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i + \beta y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{m} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{m} y_i z_i = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$$

T (inegalitatea lui Cauchy-Schwarz)

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ avem $|x\cdot y| \le \sqrt{x\cdot x}\cdot\sqrt{y\cdot y}$

Dem: $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$, inegalitatea se scrie

$$|x_1y_1+\dots+x_my_m| \le \sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_m^2} \qquad (*)$$

Considerăm funcția $f(t)=\sum_{i=1}^{m}(x_it+y_i)^2 \ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$$f(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{m}x_i^2}\cdot t^2+2\cdot\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot y_i\cdot t+\sum_{i=1}^{m}y_i^2 .$$

caz I: $\sum_{i=1}^{m}x_i^2=0 \Rightarrow x=0_m \Rightarrow (*)$ este adevărată cu egalitate.

caz II: $\sum_{i=1}^{m}x_i^2>0 \Rightarrow f(t)\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ este o inecuație de gradul 2.

$$\Delta_t=\left(2\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot y_i\right)^2-4\sum_{i=1}^{m}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{m}y_i^2\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot y_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{m}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{m}y_i^2 \xRightarrow{\sqrt{\ }} (*)$$

Def: $\forall\, x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ definim numărul real pozitiv

$$\|x\| \overset{def}{=} \sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_m^2}$$

numit norma (lungimea) euclidiană a vectorului x.

Prop: (proprietăți ale normei)

$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^m$, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ au loc:

1°. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_m$

$2^\circ.\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$3^\circ.\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului)

Dem: $1^\circ, 2^\circ$ (temă)

$3^\circ.\ \|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + \underline{x\cdot y} + \underline{y\cdot x} + y\cdot y =$

$= \|x\|^2 + 2(x\cdot y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2 \overset{C-S}{\leq}$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: $\forall\ x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ numărul real pozitiv

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

este numit distanța euclidiană de la x la y.

Obs: $x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$

Prop: (proprietăți ale distanței)

$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ au loc:

$1^\circ.\ \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

$2^\circ.\ \|x-y\| = \|y-x\|$

$3^\circ.\ \|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

Dem: $1^\circ, 2^\circ$ (temă)

$3^\circ.\ \|x-y\| = \|\underline{x-z} + \underline{z-y}\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$.

Def: Fie $x^0 \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$. Mulțimea

a) $B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| < r\}$ se numește bila deschisă de centru x^0 și rază r.

b) $\bar{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ se numește **bila închisă** de centru x^0 și rază r

Cazuri particulare:

$m = 1$: $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, $x^0 \in \mathbb{R}$

$\|x - x^0\| < r \iff |x - x^0| < r \iff x \in (x^0 - r, x^0 + r)$

deci $B(x^0, r) = (x^0 - r, x^0 + r)$, $\bar{B}(x^0, r) = [x^0 - r, x^0 + r]$.

$m = 2$: $x = (x_1, x_2)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$.

$\|x - x^0\| < r \iff \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r \iff$

$\iff (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2$.

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime nevidă.

a) $\text{int}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq A\}$ se numește **mulțimea punctelor interioare** ale lui A.

b) $A' = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, r > 0 : B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$ se numește **mulțimea punctelor de acumulare** ale lui A.

c) $\text{fr}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ și } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$ se numește **mulțimea punctelor frontieră** ale lui A.

d) A se numește **mulțime deschisă** dacă $\forall\, x \in A$, $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$.

e) A se numește **mulțime închisă** dacă $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

Obs: Prin convenție, $\mathbb{R}^m$ este atât o mulțime deschisă cât și o mulțime închisă.

Prop: (caracterizarea mulțimilor deschise și închise cu ajutorul punctelor frontieră)

Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este o mulțime nevidă atunci

1°. A este deschisă $\Leftrightarrow A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$

2° A este închisă $\Leftrightarrow \operatorname{fr} A \subseteq A$.

Dem: 1° „$\Rightarrow$"

Presupunem prin absurd că $A \cap \operatorname{fr} A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in A \cap \operatorname{fr} A$

$x \in A \Rightarrow \exists\, r_0 > 0$ a.î. $B(x, r_0) \subseteq A$

$x \in \operatorname{fr} A \Rightarrow \forall\, r > 0 : B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$, adică $B(x,r) \not\subseteq A$.

-absurd $\Rightarrow A \cap \operatorname{fr} A = \emptyset$

„$\Leftarrow$"

Fie $x \in A \Rightarrow x \notin \operatorname{fr} A \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $\underbrace{B(x,r) \cap A = \emptyset}_{\text{nu este adevărată}}$ sau

$B(x,r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r) \subseteq A \Rightarrow A$ deschisă.

2°. „$\Rightarrow$"

Fie $x \in \operatorname{fr} A \Rightarrow \forall\, r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, r > 0 : B(x,r) \not\subseteq \mathbb{R}^m \setminus A$.

Presupunem prin absurd că $x \notin A \Rightarrow x \in \mathbb{R}^m \setminus A$.

A închisă $\Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus A$ deschisă $\Rightarrow \exists\, r_0 > 0$ a.î. $B(x, r_0) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus A$.

-absurd $\Rightarrow x \in A$, deci $\operatorname{fr} A \subseteq A$.

„$\Leftarrow$"

Arătăm că $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

Presupunem prin absurd că $\mathbb{R}^m \setminus A$ nu este deschisă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^m \setminus A$ a.î. $\forall\, r > 0 : B(x,r) \not\subseteq \mathbb{R}^m \setminus A \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}^m \setminus A \text{ a.î. } \forall r>0 : B(x,r)\cap A \neq \emptyset \\ \text{Dar } \quad x \in B(x,r)\cap(\mathbb{R}^m\setminus A)\neq\emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow x \in \operatorname{fr} A$$

$\Rightarrow x \in A$ -absurd.

<u>Cons:</u> În $\mathbb{R}^m$ au loc afirmațiile:

1°. Bilele deschise sunt mulțimi deschise

2°. Bilele închise sunt mulțimi închise.

<u>Prop:</u> Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este mulțime nevidă atunci au loc:

1°. $\operatorname{int} A \subseteq A$

2°. $A' \subseteq A \cup \operatorname{fr} A$

3°. $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{fr} A$

4°. $\operatorname{fr} A = \operatorname{fr}(\mathbb{R}^m \setminus A)$

5°. $\operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^m\setminus A) = \mathbb{R}^m$

6°. $\operatorname{int} A$ este mulțime deschisă

7°. $\operatorname{fr} A$ este mulțime închisă

<u>Dem:</u> (la seminar)

<u>Ex:</u> Fie $A = (a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$\operatorname{int} A = (a,b)$

$A' = [a,b]$

$\operatorname{fr} A = \{a,b\}$

A nu este nici deschisă, nici închisă.