Fie $m, p \in \mathbb{N}$, $m, p \geq 2$.

Def: a) O funcție $f : A \to \mathbb{R}^p$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$, se numește **funcție vectorială de variabilă reală**

$\forall x \in A$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$

b) O funcție $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^m$, se numește **funcție reală de variabilă vectorială**.

$\forall (x_1, \dots, x_m) \in A$, $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$

c) O funcție $f : A \to \mathbb{R}^p$, unde $A \subseteq \mathbb{R}^m$, se numește **funcție vectorială de variabilă vectorială**.

$\forall (x_1, \dots, x_m) \in A$, $f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^p$

$(x_1, \dots, x_m)$ - **variabilele** funcției

$(f_1, \dots, f_p)$ - **componentele scalare** ale funcției

2. Șiruri în $\mathbb{R}^p$

Def: Orice funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$ se numește **șir de puncte** din $\mathbb{R}^p$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \overset{not}{=} (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x^n = (x_1^n, \dots, x_p^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt șiruri de numere reale.

Spunem că $x \in \mathbb{R}^p$ este **limita șirului** (x^n) dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $\|x^n - x\| < \varepsilon$. (*)

Ex: $x^n = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}, \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \right) \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall n \geq 1$

$$\frac{(-1)^n}{n} \to 0, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$$

Este $x = (0, e^{-1})$ limita șirului (x^n) ?

<u>Lemă</u>: Afirmația (*) este echivalentă cu $\lim_{n\to\infty}\|x^n - x\| = 0$.

Dem: Notăm $a_n = \|x^n - x\|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci (a_n) șir de nr. reale

Avem $\|x^n - x\| < \varepsilon \iff a_n - \varepsilon \iff |a_n - 0| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\boxed{T}$ (convergența pe componente a unui șir de puncte)

Dacă $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de puncte din $\mathbb{R}^p$ cu $x^n = (x_1^n, \dots, x_p^n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $x = (x_1, \dots, x_p)\in\mathbb{R}^p$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x \iff \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i,\ \forall i=\overline{1,p}$$

Dem:

$$\begin{array}{ccccc} x^n = (x_1^n, & \dots, & x_p^n) \\ \downarrow \quad \downarrow & \dots & \downarrow \\ x = (x_1, & \dots, & x_p) \end{array}$$

„$\Rightarrow$" $\forall i=\overline{1,p}$: $|x_i^n - x_i| = \sqrt{(x_i^n - x_i)^2} \le \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + \dots + (x_p^n - x_p)^2} =$

$= \|x^n - x\|$. Din $\lim_{n\to\infty}\|x^n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|x_i^n - x_i| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$.

„$\Leftarrow$" Are loc inegalitatea $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_p^2} \le a_1 + \dots + a_p$, $\forall a_1, \dots, a_p \ge 0$.

$\|x^n - x\| = \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + \dots + (x_p^n - x_p)^2} \le |x_1^n - x_1| + \dots + |x_p^n - x_p|$

Avem $\lim_{n\to\infty}|x_i^n - x_i| = 0, \forall i=\overline{1,p} \underset{(+)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\left(|x_1^n - x_1| + \dots + |x_p^n - x_p|\right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|x^n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = x$.

<u>Prop</u> (caracterizarea cu șiruri a punctelor de acumulare)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțime nevidă și $x \in \mathbb{R}^p$. Are loc

$x \in A' \iff \exists (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de puncte din $A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$.

Dem: „$\Rightarrow$" $x \in A' \Rightarrow \forall r > 0 : B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ alegem $r = \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow B(x,\frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x^n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\}) \Rightarrow (x^n)$ este șir de puncte

din $A \setminus \{x\}$ cu $\|x^n - x\| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$.

„$\Leftarrow$" Fie $r > 0$ și $(x^n) \subseteq A \setminus \{x\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 : \|x^n - x\| < r$

$\Rightarrow x^n \in B(x,r), \forall n \geq n_0 \Rightarrow B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$.

3. Limită și continuitate pentru funcții reale de variabilă vectorială

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$

și $x^0 \in A'$. Spunem că <u>l este limita funcției f în punctul x^0</u>

dacă $\forall (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de puncte din $A \setminus \{x^0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x^0$,

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = l$.

În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = l$ sau

$$\lim_{(x_1,\dots,x_m)\to(x_1^0,\dots,x_m^0)} f(x_1,\dots,x_m) = l.$$

Ex: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}, \ \forall (x_1, x_2) \in A \text{ și } x^0 = (0,0).$$

$x^0 \in A'$. Fie (a^n), (b^n) șiruri din $A \setminus \{x^0\}$

$$a^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0) \ ; \ b^n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0), \quad n \to \infty.$$

$$\left.\begin{aligned} f(a^n) &= \frac{1/n^4}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad , n \to \infty \\ f(b^n) &= \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0 \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2).$$

Obs: Cu notațiile din definiția anterioară și în ipoteza $l \in \mathbb{R}$ avem echivalența

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x^0} |f(x) - l| = 0$$

Ex: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^2 \cdot (x_2)^2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}, \ \forall (x_1, x_2) \in A \text{ și } x^0 = (0,0).$$

$$|f(x_1, x_2) - 0| = (x_1)^2 \cdot \underbrace{\frac{(x_2)^2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}}_{\leq 1} \leq (x_1)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} |f(x_1, x_2) - 0| \leq \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (x_1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = 0.$$

Considerăm în continuare cazul particular al funcțiilor reale de două variabile $f(x_1, x_2)$.

<u>Def</u>: Fie $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in A'$ cu următoarele proprietăți:

1°. $\exists \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \ \forall x_2 \in A_2$

2°. $\exists \lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}, \ \forall x_1 \in A_1$.

Atunci limitele $\lim\limits_{x_1 \to x_1^0} \lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$ și $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$ se numesc <u>limitele iterate</u> ale funcției f în punctul x^0.

<u>Prop</u>: În ipotezele definiției anterioare are loc afirmația:

Dacă $\exists \lim\limits_{(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2) = l.$$

Reciproca afirmației nu este adevărată.

<u>Ex</u>: a) $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}$, $x^0 = (0, 0)$

Limitele iterate sunt egale și totuși $\nexists \lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$

b) $f(x_1, x_2) = \dfrac{(x_1)^4 - (x_2)^2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}$, $x^0 = (0, 0)$

Limitele iterate sunt diferite $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$.

Revenim la cazul general al funcțiilor reale de variabilă vectorială.

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă și $x^0 \in A \cap A'$. Spunem că funcția $f: A \to \mathbb{R}$ este

a) <u>continuă în punctul x^0</u> dacă $\exists \lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$.

b) <u>continuă pe mulțimea A</u> dacă f este continuă în $\forall x \in A$.

<u>Ex</u>: Funcția $f(x) = \|x\|$ este continuă pe $\mathbb{R}^m$.

<u>Def</u>: Spunem că o mulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este:

a) <u>mărginită</u> dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $A \subseteq B(0_m, r)$

b) <u>compactă</u> dacă A este mărginită și închisă.

<u>Def</u>: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime nevidă, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in A \text{ a.î. } f(x) = y \}$ imaginea funcției.

Spunem că:

a) f este <u>mărginită</u> dacă $f(A)$ este mărginită.

b) f <u>își atinge extremele pe A</u> dacă $\exists\, x, y \in A$ a.î.

$f(x) = \inf f(A)$ și $f(y) = \sup f(A)$ numite <u>extremele</u> funcției.

$f(x) = \min f(A)$ și $f(y) = \max f(A)$

$\boxed{T}$ (Weierstrass)

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime compactă și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A. Au loc afirmațiile:

1°. f este mărginită

2°. f își atinge extremele pe A.

Ex: În legătură cu pb. E.27085 din G.M. 6-7-8/2015

Care sunt valorile extreme ale expresiei

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2},$$

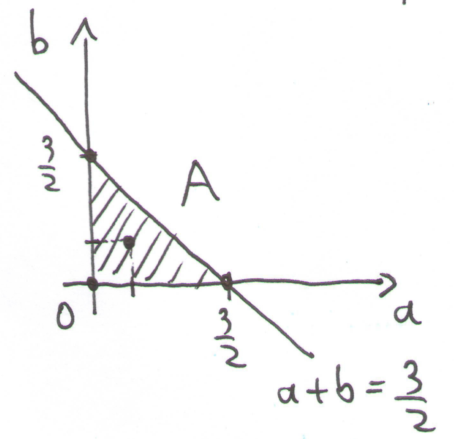
unde $a,b,c\geq 0$ cu $a+b+c=\frac{3}{2}$?

$c=\frac{3}{2}-a-b\geq 0 \Rightarrow a+b\leq\frac{3}{2}$

Problema revine la determinarea valorilor extreme ale funcției

$$f(a,b)=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+\left(\frac{3}{2}-a-b\right)^2}+\frac{\frac{3}{2}-a-b}{1+a^2}$$

pe mulțimea $A=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, a\geq 0,\ b\geq 0,\ a+b\leq\frac{3}{2}\right\}$



A mulțime compactă

f continuă pe A.

$\overset{T.W.}{\Longrightarrow} \exists\, m, M\in\mathbb{R}$ a.î.

$m\leq f(a,b)\leq M,\quad \forall (a,b)\in A$

și aceste valori extreme se ating.

Cu programul MATHEMATICA:

$$\frac{6}{5}\leq f(a,b)\leq\frac{3}{2},\quad \forall (a,b)\in A.$$

Prima egalitate se atinge în punctul $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, iar a doua egalitate în ref.