SUBIECT 2019

1. Det. seria Taylor asociată funcției f în pct $x_0 = 0$ (aduceți expresia la forma cea mai simplă).

$$f:(-2,2) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \ln \frac{x+2}{2-x} = \ln(x+2) - \ln(2-x)$$

I calculăm derivata de ordin n

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$$

* ca să nu calculăm de 2 ori considerăm $g = (x+c)^{-1}$ și facem deriv. lui g

$$g'(x) = -1(x+c)^{-2}$$

$$g''(x) = 2(x+c)^{-3} \quad \Rightarrow \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \, (x+c)^{-(n+1)} \quad P_n$$

$$g'''(x) = -2 \cdot 3 \, (x+c)^{-4}$$

inducție: I verificare : $n = 0 \Rightarrow g^{0}(x) = 1 \cdot 1! \cdot (x+c)^{-1}$ „A"

II demonstrație $P_n \to P_{n+1}$

$$P_{n+1} : (-1)^{n+1} (n+1)! \, (x+c)^{-(n+2)} = g^{(n+1)}(x)$$

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = (-1)^n \cdot n! \cdot (-1) \cdot (n+1) \cdot (x+c)^{-(n+1)-1} =$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1)! \cdot (x+c)^{-(n+2)} \text{ „A"} \Rightarrow P_n \text{ „A"}$$

$$\Rightarrow \left(\ln(x+2) - \ln(2-x)\right)^{(n)} = \begin{cases} \ln(x+2) - \ln(2-x) & n = 0 \\ \left[\left(\ln(x+2) - \ln(2-x)\right)'\right]^{(n-1)} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \, (x+2)^{-n} - (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \, (x-2)^{-n}$$

I n-par $\Rightarrow$ derivata este $= 0$

II n-impar $\Rightarrow$ derivata $= 2(n-1)! \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1}(n-1)!$

II scriem seria Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \rightarrow \text{la noi va fi suma poz. impare}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-2n}(2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n-2}(2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n-2}}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$$

2. Determinați valorile lui $\alpha > 0$ pt. care integrala e convergentă apoi calculați $I(3)$.

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x-1}{x^\alpha - 1} dx$$

① convergența se face cu criterii cu p și λ

$a=0 \quad b=1$ nedefinită în $b=1 \Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot \frac{x-1}{x^\alpha - 1} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$

$$= \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p \cdot \frac{\cancel{x-1}}{\underbrace{\left(\frac{x^\alpha - 1}{x-1}\right)}_{\to \alpha} \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^p$$

alegem $p = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x \nearrow 1} (1-x)^0 = \frac{1}{\alpha} < \infty \Rightarrow p < 1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int$ convergentă $\forall \alpha > 0$

② $I(3) = \int_0^1 \frac{x-1}{x^3-1} dx = \int_0^1 \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x^2-x+1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} dx = \lim_{v \nearrow 1} \int_{-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 - \frac{3}{4}} dt = \lim_{v \nearrow 1} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \Big|_{\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} =$$

not $t = x - \frac{1}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$x = v \Rightarrow t = \frac{1}{2} + v$

$dt = dx$

$$= \lim_{v \nearrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2v+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Se dă $f: \overline{B}(0_2, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

a) f - continuă în $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\in[0,1]} + y \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\in[0,1]} = 0 \Rightarrow f\text{-cont. în } (0,0)$$

b) det. valorile extreme. Atinge funcția aceste valori?

T. Fermat: $\left.\begin{array}{l} x_0 \in \text{int} A \\ f\text{-deriv în } x_0 \\ x_0 \text{ - pct. de extrem} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0$ - pct. critic

I $(x,y) \in \text{int} A \setminus (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left[3x(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3)\right] = 0 \\ y\left[3y(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3)\right] = 0 \end{cases}$$

I $x = 0 \Rightarrow y = 0$ $\quad (0,0) \notin \text{int} A \setminus (0,0)$

II $y = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (0,0) \notin \text{int} A \setminus (0,0)$

III $\begin{cases} 3x(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3) = 0 \\ 3y(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3) = 0 \end{cases} \quad (-) \Rightarrow 3(x^2+y^2)(x-y) = 0 \; / : (x^2+y^2) \Rightarrow \boxed{x = y}$

$\Rightarrow 3x^2(x^2+x^2) - 2x(2x^3) = 0 \Rightarrow 6x^4 - 4x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \notin \text{int} A \setminus (0,0)$

$\Rightarrow \nexists$ pct. critice în int $A \setminus (0,0)$

II $(x,y) \in \text{fr} A \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = x^3+y^3$

(avem pct. de extrem condiționat) unde restricția este $F(x,y) = x^2+y^2-1$

$L(x,y,\alpha) = f(x,y) + \alpha F(x,y) = x^3+y^3+\alpha(x^2+y^2-1)$

punctele de extrem sunt printre punctele critice!

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\alpha) = 3x^2+\alpha\cdot 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\alpha) = 3y^2+\alpha\cdot 2y \qquad \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+\alpha 2x = 0 \\ 3y^2+\alpha 2y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3x+2\alpha) = 0 \\ y(3y+2\alpha) = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}(x,y,\alpha) = x^2+y^2-1$$

I $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad \Rightarrow (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

II $3x+2\alpha = 0$ și $3y+2\alpha = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\alpha}{3} \\ y = -\frac{2\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow x = y = -\frac{2\alpha}{3}$

înlocuim în $x^2+y^2-1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

III $(x,y) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$

vedem care sunt max și min:

$f(0,1) = 1$

$f(1,0) = 1$

$f(-1,0) = -1$

$f(0,-1) = -1$

$f(0,0) = 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ minimul e -1 $\rightarrow$ se atinge în $(0,1)$ și $(1,0)$

maximul e 1 $\rightarrow$ se atinge în $(-1,0)$ și $(0,1)$

dacă domeniul e compact $\rightarrow$ funcția își atinge extremele

4. a) şir fundamental = şir convergent

$\forall \varepsilon > 0, p \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

b) şir fundamental nemonoton:

$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ nu e monoton, dar e convergent $\Rightarrow$ e fundamental