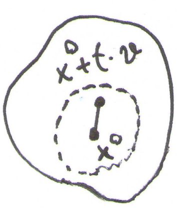
# 4. Derivate parțiale și diferențiala

În cadrul paragrafului considerăm $A \subseteq \mathbb{R}^m$ mulțime deschisă




A

$\forall x^0 \in A : \exists r > 0$ a.î. $B(x^0, r) \subseteq A$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^m : x^0 + t\cdot v \in A$ pentru $t \in \mathbb{R}$, $|t| << 1$.

<u>Def</u>: Fie $f = f(x_1, \ldots, x_m) : A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in A$ un punct și $i \in \{1, \ldots, m\}$.

a) Dacă există limita

$$(1) \quad \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{x_i - x_i^0}$$

ea se numește <u>derivata parțială</u> a lui $f$ în $x^0$ în raport cu variabila $x_i$. Se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ sau $f'_{x_i}(x^0)$.

b) Dacă limita (1) există și este număr finit atunci spunem că $f$ este <u>derivabilă parțial</u> în $x^0$ în raport cu variabila $x_i$.

c) Dacă $f$ este derivabilă parțial în punctul $x^0$ în raport cu fiecare variabilă $x_1, \ldots, x_m$ atunci spunem că $f$ este <u>derivabilă parțial</u> în $x^0$.

Notând $x_i - x_i^0 = t$ limita (1) se rescrie astfel

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t \cdot e^i) - f(x^0)}{t}, \quad \text{unde } e^i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$$

$$\Rightarrow g'(x_i^0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(x_i^0 + t) - g(x_i^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$

<u>Obs</u>: Calculul derivatei parțiale în raport cu o variabilă se poate efectua utilizând regulile de derivare obișnuite, păstrând celelalte variabile ale funcției ca parametri constanți.

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 \cdot x_2 + x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = (x_1)^2.$$

<u>Def</u>: Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $v \in \mathbb{R}^m$. Dacă există limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t \cdot v) - f(x^0)}{t}$$

ea se numește <u>derivata lui $f$ în $x^0$ după direcția vectorului $v$</u> și se notează cu $f'_v(x^0)$. Dacă limita este finită atunci spunem că $f$ este <u>derivabilă în $x^0$ după direcția vectorului $v$</u>.

Se observă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{e_i}(x^0)$, $i = \overline{1, m}$

Obs: Derivatele parțiale ale unei funcții sunt cazuri particulare ale derivatei după direcția unui vector, anume după direcția vectorilor canonici.

Def: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial într-un punct $x^0 \in A$.

a) Vectorul
$$\nabla f(x^0) \overset{def}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) \right) \in \mathbb{R}^m$$
se numește gradientul funcției $f$ în $x^0$.

b) Aplicația liniară $df(x^0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definită prin
$$df(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot u_i \quad , \forall u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$$
se numește diferențiala funcției $f$ în $x^0$ (de argument $u$)

Obs: $df(x^0)(u) = \nabla f(x^0) \cdot u \quad , \forall u \in \mathbb{R}^m$

Interpretare geometrică:
Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ și $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$(S): z = f(x, y)$ este ecuația unei suprafețe în $\mathbb{R}^3$.

$(P): z - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$ este ecuația planului tangent la suprafața $S$ în punctul $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ex: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{(x_1)^2 \cdot x_2}{(x_1)^4 + (x_2)^2}, & (x_1, x_2) \neq 0_2 \\ 0, & (x_1, x_2) = 0_2. \end{cases}$$

$f$ nu este continuă în $0_2$ deoarece $\nexists \lim\limits_{(x_1,x_2) \to (0,0)} f(x_1, x_2)$,

dar $f$ este derivabilă parțial în $0_2$, chiar derivabilă după orice direcție în acest punct. (la seminar)

Obs: Derivabilitatea parțială nu reprezintă o extindere satisfăcătoare a noțiunii de derivabilitate de pe axa reală.

Def: O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ se numește de clasă $C^1$ în punctul $x^0 \in A$ dacă

1°. $\exists\, r > 0$ a.î. $f$ este derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$.

2°. Funcțiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x^0$, $\forall\, i = \overline{1,m}$.

Prop: Dacă $f: A \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^1$ în punctul $x^0 \in A$, atunci au loc afirmațiile:

1°. $f$ este continuă în $x^0$.

2°. $f$ este derivabilă după orice direcție în $x^0$ și are loc

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^m, \quad f'_v(x^0) = df(x^0)(v).$$

$\boxed{T}$ (derivarea parțială a funcțiilor compuse)

Fie $m, p \in \mathbb{N}^*$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulțimi deschise, $x^0 \in A$, $f = (f_1, \dots, f_p) : A \to \mathbb{R}^p$ o funcție vectorială având proprietățile $f(A) \subseteq B$ și $f_1, \dots, f_p$ sunt funcții de clasă $C^1$ în punctul $x^0$, iar $g : B \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^1$ în punctul $u^0 = f(x^0)$. Atunci funcția compusă $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ este de clasă $C^1$ în $x^0$ și are loc formula

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x^0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial u_k}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0), \quad i = \overline{1,m}$$

unde $f = f(x_1, \dots, x_m)$ și $g = g(u_1, \dots, u_p)$.

<u>Def</u>: Cu notațiile din teorema anterioară, matricea

$$J(f)(x^0) \overset{not}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

se numește <u>matricea Jacobi</u> a funcției $f$ în punctul $x^0$.

<u>Obs</u>: Formula $(*)$ se rescrie matricial astfel

$$\nabla(g \circ f)(x^0) = \nabla g(f(x^0)) \cdot J(f)(x^0)$$

Caz particular $m = p = 1$ : $(g \circ f)'(x^0) = g'(f(x^0)) \cdot f'(x^0)$

**Def**: Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție, $x^0 \in A$ și $i, j \in \{1, \dots, m\}$

a) Dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $f$ este derivabilă parțial în raport cu variabila $x_i$ în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcția $\frac{\partial f}{\partial x_i} : B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă parțial în raport cu variabila $x_j$ în punctul $x^0$, atunci spunem că <u>$f$ este de două ori derivabilă parțial</u> în raport cu variabilele $(x_i, x_j)$ în punctul $x^0$ și notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0) \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = f''_{x_i x_j}(x^0).$$

b) Spunem că $f$ este de două ori derivabilă parțial în punctul $x^0$ dacă toate cele $m^2$ derivate parțiale de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = \overline{1, m}$, există și sunt finite în $x^0$.

c) Spunem că $f$ este de clasă $C^2$ în punctul $x^0$ dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $f$ este de două ori derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcțiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x^0$, $\forall\, i, j = \overline{1, m}$.

Notații: $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$ – derivata parțială <u>mixtă</u> în $x^0$

$$i = j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^0) \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0) = f''_{x_i^2}(x^0).$$

<u>Ex:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2)=(x_1)^2\cdot x_2+x_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)=2x_1x_2+1,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)=(x_1)^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)=\left(2x_1x_2+1\right)'_{x_1}=2x_2,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)=\left((x_1)^2\right)'_{x_2}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)=\left((x_1)^2\right)'_{x_1}=2x_1,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2)=\left(2x_1x_2+1\right)'_{x_2}=2x_1$$

$\boxed{T}$ (**criteriul lui Schwarz**)

Dacă $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^2$ în punctul $x^0\in A$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^0),\quad \forall i,j=\overline{1,n},\ i\neq j$$

<u>Def:</u> Fie $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă parțial într-un punct $x^0\in A$.

a) Funcția $d^2f(x^0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definită prin

$$d^2f(x^0)(u)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^0)\cdot u_i\cdot u_j,\quad \forall u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$$

se numește **diferențiala de ordinul doi** a funcției $f$ în $x^0$.

b) Matricea pătratică

$$H(f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x^0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x^0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x^0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x^0) \end{pmatrix}$$

se numește **matricea hessiană** a funcției $f$ în punctul $x^0$.

Obs: În ipotezele criteriului lui Schwarz avem că matricea $H(f)(x^0)$ este simetrică și diferențiala de ordinul doi devine

$$d^2 f(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^0) \cdot u_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) \cdot u_i \cdot u_j$$

Cazuri particulare:

$f = f(x,y)$, $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$d^2 f(x,y)(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot u_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot u_1 \cdot u_2$$

$f = f(x,y,z)$, $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$d^2 f(x,y,z)(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \cdot u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \cdot u_2^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \cdot u_3^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) \cdot u_1 \cdot u_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \cdot u_1 \cdot u_3 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \cdot u_2 \cdot u_3$$