

$$g(a) = g(b) = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ a.s. } g'(x_0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Obs (interpretarea geometrică a teoremei de medie)

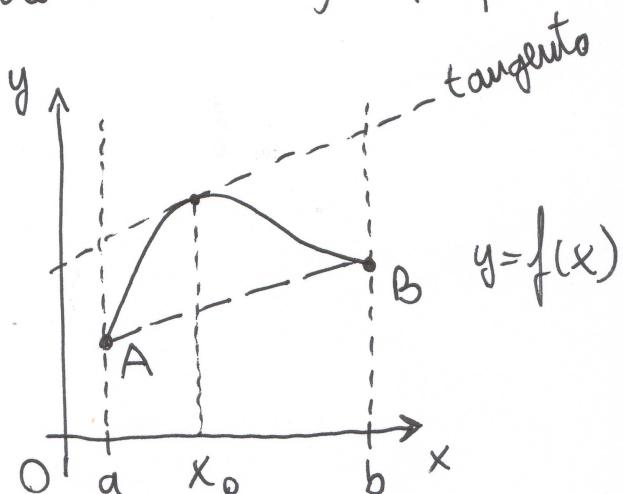
Există cel puțin o tangentă la graficul funcției paralelă cu segmentul de dreaptă determinat de extremitățile graficului.

- ecuația tangentei:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- ecuația dreptei AB:

$$A(a, f(a)), B(b, f(b))$$



$$\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$$

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Def: Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in (a, b)$.

1) Dacă $\exists \delta > 0$ a.s. f este derivabilă pe $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, iar funcția $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0 , atunci spunem că f este de două ori

Derivabilitate în punctul x_0 . Notăm $(f')'(x_0) = f''(x_0)$ numită derivata de ordinul 2 în punctul x_0 .

2) Succesiv putem construi derivata de ordinul n a funcției f în punctul x_0 , notată $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$.
Prin convenție $f^{(0)} = f$.

3) Spunem că f este în definit derivabilă în x_0 dacă există $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Spunem că f este în definit derivabilă pe (a, b) dacă f este în definit derivabilă în $\forall x \in (a, b)$.

Prop (formula lui Leibnitz)

Dacă $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții în definit derivabile pe (a, b) atunci are loc formula de derivare:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Def: Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție în definit derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$. Polinomul

$$T_m(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{m!} \cdot (x - x_0)^m,$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}$

se numește polinomul lui Taylor de grad m asociat funcției f în punctul x_0 .

Obs: Derivatele de ordin superior (până la ordinul n) ale polinomului T_n și ale funcției f în punctul x_0 coacăd.

Adică

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad \forall k = \overline{0, n}$$

Dem: Evident $T_n(x_0) = f(x_0)$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_n'(x_0) = f'(x_0), \text{ c.a.m.d.}$$

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x, x_0 = 0, n \in \mathbb{N}$.

$$f^{(k)}(0) = 1, \quad \forall k = \overline{0, n}, \quad T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ce legătură există între polinom și funcție când $n \rightarrow \infty$?

4. Serii Taylor și serii de puteri

Def: Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție în definit derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$.

a) Seria de numere

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul x_0 .

b) Spunem că f este dezvoltabilă în serie Taylor în punctul x_0 pe multimea $I \subseteq (a, b)$ dacă seria (1) este convergentă și are suma $f(x)$, $\forall x \in I$

Obs: Cu notatiile din definiția anterioră, f este dezvoltabilă în serie Taylor pe multimea $I \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - T_n(x)) = 0, \forall x \in I$$

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

Serie Taylor asociată este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Este adevărat că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \right) = 0$, $x \in \mathbb{R}$?

Obs: Funcțiile elementare sunt dezvoltabile în serie Taylor, dacă pe întreg domeniul lor de definiție, ci doar pentru acele valori ale lui x pentru care seria Taylor asociată este convergentă.

Ex: Studiem convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

Considerăm s.t.p. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ și aplicăm criteriul raportului

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{|x|} = +\infty > 1 \Rightarrow$$

serie inițială este absolut convergentă, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vom scrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Caz particular: } x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Studiul convergenței seriilor Taylor poate fi făcut într-un cadru mai general.

Def: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de numere reale și $x_0, x \in \mathbb{R}$.

a) Serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot (x - x_0)^m = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots \quad (2)$$

se numește série de puteri centrată în x_0 (de variabilă x).

b) Multimea $I = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{seria (2) este convergentă}\}$ se numește multimea de convergență a seriei de puteri.

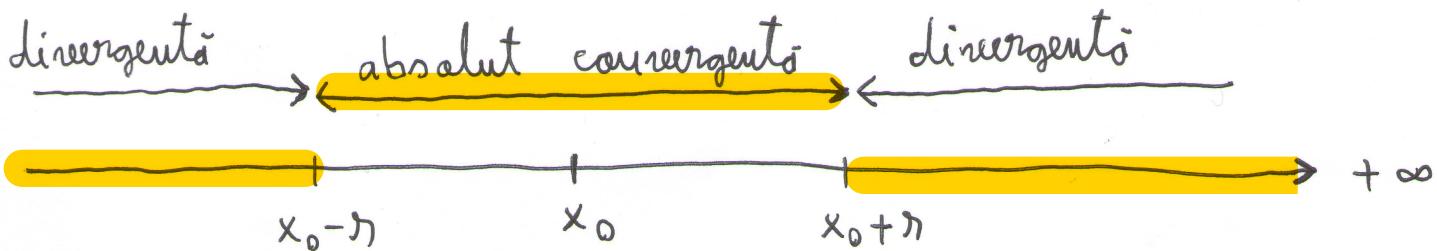
Obs: 1) Orice serie Taylor este o serie de puteri.
 2) Multimea de convergență a unei serii de puteri este mereu \emptyset ($x_0 \in I$).

Ex: Serie de puteri $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot x^m$ are $I = \mathbb{R}$.

T (caracterizarea multimiui de convergență a unei serii de puteri)

Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este multimea de convergență a unei serii de puteri centrată în x_0 atunci $\exists! r \in [0, +\infty]$ astfel încât serie este absolut convergentă $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ și serie este divergentă $\forall x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$. În acest caz putem scrie

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I \subseteq [x_0 - r, x_0 + r]$$



Obs: 1) Teorema nu precizează natura seriei în punctele

$$x = x_0 - r \text{ și } x = x_0 + r$$

2) Dacă $r = +\infty$ atunci seria este absolut convergentă pe \mathbb{R} ,

$$I = \mathbb{R}$$

Def: Numărul $r \in [0, +\infty]$ din teorema anterioră se numește raza de convergență a seriei de puteri.

Prop (calculul razei de convergență)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ o serie de puteri având rază de convergență $r \in [0, +\infty]$. Atunci

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

în ipoteza că limite există.

Denum: Studiem convergența s.t.p. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n = |a_n \cdot (x - x_0)^n|$.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{l}{|x - x_0|}, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

serie convergentă dacă $D > 1 \Leftrightarrow l > |x - x_0| \Leftrightarrow x \in (x_0 - l, x_0 + l)$
 serie divergentă dacă $D < 1 \Leftrightarrow l < |x - x_0| \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - l, x_0 + l]$.

$$\Rightarrow r = l.$$

Ex: Multimes de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x_0 = 0, a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow (-1, 1) \subseteq I \subseteq [-1, 1].$$

$$\text{Deoarece } -1, 1 \notin I \rightarrow I = (-1, 1).$$

5. Operări cu serii de puteri

Pentru simplitate vom considera doar cazul serilor de puteri centrate în origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

Prop (substituție într-o serie de puteri)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$ și suma $S(x)$, iar $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea $f([\alpha, \beta]) \subseteq (-R, R)$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(t))^n$ este convergentă și are suma $S(f(t))$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

$$\text{Ex: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\text{a) } x = -t : \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n = \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in (-1, 1)$$

$$\text{b) } x = -t^2 : \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \forall t \in (-1, 1)$$

Prop (derivarea și integrarea seriilor de puteri)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$ și suma $S(x)$. Atunci

1º. Seria poate fi derivată termen cu termen și are loc

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R)$$

2º. Seria poate fi integrată termen cu termen și are loc

$$\int_0^t S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot t^{n+1}, \quad \forall t \in (-R, R)$$

Mai mult, seriile obținute au aceeași raza de convergență R , dar nu neapărat aceeași multime de convergență.

$$\text{Ex: a) } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n \cdot x^n dx$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot t^n, \quad \forall t \in (-1, 1]$$

deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă.

$$\Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (\text{suma seriei armonice alternate})$$

b) $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}, \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n \cdot x^{2n} dx$$

$$\Leftrightarrow \arctg t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot t^{2n+1}, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ este convergentă

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

este o serie de puteri, având

$$a_n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n=2k+1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$