1. a) Definiți și dați câte un exemplu de

funcție injectivă $\qquad\qquad$ funcție surj.

b) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{pt. } x\le 1\\ x-1 & \text{pt. } x>1\end{cases}$

Să se studieze

surj. $\qquad\qquad$ inj.

c) Există $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. $g\circ f$ este inj. dar g nu este inj. (resp. $f\circ g$ este surj. dar g nu este surj.)?

2. Definiți și dați un exemplu de

rel. de ordine $\qquad\qquad$ rel. de echivalență

b) Să se arate că

$$U=\{z\in\mathbb{C}^* \mid z^5=1\}$$

este un subgrup în $\mathbb{C}^*$ $\quad(\mathbb{C}^*,\cdot)$

c) Să se arate că dacă $x\in G$ și G este finit atunci $\exists\, k\in\mathbb{N}^*$ a.î. $x^k=1$

3a) Definiți și dați un exemplu de divizor al lui zero nenul într-un inel.

b) Să se arate că $f:\mathbb{C}\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\quad f(x+iy)=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ este un morf. inj. de inele

c) Să se arate că $(\mathbb{R},+,\cdot)\not\cong(\mathbb{C},+,\cdot)$

4a) Definiți și dați un exemplu de bază a unui sp. vectorial.

b) Să se arate că $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)^t$ unde

$b_1=(1,2,-1,2)$, $b_2=(1,2,1,4)$, $b_3=(2,3,0,-1)$, $b_4=(1,3,-1,0)$

este o bază pt. $\mathbb{R}^4$ și să se det. $[v]_b$ unde $v=(2,3,2,10)$.

c) Se consideră $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+2x_2,\ x_1-x_2+x_3,\ x_2+2x_3)$

Să se arate că f este liniară și să se det. câte o bază în fiecare din sp. $\operatorname{Im} f$ și $\operatorname{Ker} f$.

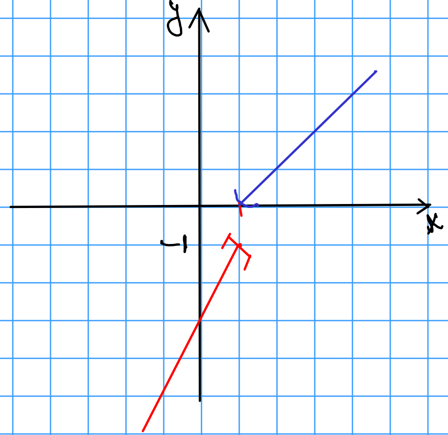
Sol.

1. (b). Metoda I: Se consideră ec. $f(x)=y$, $y\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2x-3=y,\ x\le 1\\ \text{sau}\\ x-1=y,\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{y+3}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\le 1\\ \text{sau}\\ x=y+1,\ y+1>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}x=\dfrac{y+3}{2},\ y\le -1 \\ y\in(-\infty,-1] \\ \text{sau} \\ x=y+1,\ y>0 \\ y\in(0,\infty)\end{matrix}$$

(sol. unică)

(sol. unică)



În concluzie: pt $y \in (-1, 0]$ ec. $f(x) = y$ nu are sol.
f nu e surj.

$(-\infty, -1] \cap (0, \infty) = \emptyset$ + sol. unică de unde $\Rightarrow f$ este inj.

Metoda II (surj) Pt. $y = 0$ avem

- dacă $x \leq 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 3 \leq 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$
- dacă $x > 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 > 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Downarrow$
f nu e surj.

Metoda II. (inj) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$

- dacă $x_1, x_2 \leq 1 \Rightarrow 2x_1 - \cancel{3} = 2x_2 - \cancel{3} \ \Big|_{+3} \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Big|_{:2} \Rightarrow x_1 = x_2$.
- dacă $x_1, x_2 > 1 \Rightarrow x_1 - \cancel{1} = x_2 - \cancel{1} \ \Big|_{+1} \Rightarrow x_1 = x_2$
- dacă $x_1 \leq 1, \ x_2 > 1$ avem $f(x_1) = 2x_1 - 3 \leq 2 \cdot 1 - 3 = -1$
  $f(x_2) = x_2 - 1 > 1 - 1 = 0$
  $f(x_1) = f(x_2)$
  imposibil.

Deci f inj.

c) Căutăm $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $g \circ f$ este inj. $\Rightarrow f$ inj.

Cum f este inj. $f: \underset{\neq \emptyset}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$

(g este inversa la stânga a lui f).

De ex. $g(y) = \begin{cases} \frac{y+3}{2} & y \in (-\infty, -1] \\ 0 & y \in (-1, 0] \\ y + 1 & y \in (0, \infty) \end{cases}$

g nu e inj. dar $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ inj (și surj.).

Pt. R.F. Căutăm $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $f \circ g$ surj. $\Rightarrow f$ surj fals.
$\nexists\, g$ cu propr. cerute.

2. b) • $1^5 = 1 \Rightarrow 1 \in U_5$

$z_1, z_2 \in U_5 \Rightarrow z_1^5 = 1 = z_2^5$

- $(z_1 \cdot z_5)^5 = z_1^5 \cdot z_2^5 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in U_5$
- $(z_1^{-1})^5 = (z^5)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow z_1^{-1} \in U_5$

$$U_5 \leq \mathbb{C}^*.$$

(2). $(G, \cdot)$ grup finit $x \in G \Rightarrow x, x^1, x^2, \ldots \in G$ pt. că G parte stab.

$$\left.\begin{array}{l} \{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq G \\ G \text{ finit} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N} \quad m \neq n \Rightarrow x^m = x^n \,/\cdot x^{-n} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x^{m-n} = 1 \Rightarrow x^{|m-n|} = 1 \\ m \neq n \Rightarrow \underbrace{|m-n|}_{k} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* : x^k = 1.$$

3. $f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$

$z = x+iy$, $z' = x'+iy' \in \mathbb{C}$

$f(z_1+z_2) = f((x+x') + i(y+y')) = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ -(y+y') & x+x' \end{pmatrix}$ $=$

$f(z_1)+f(z_2) = f(x+iy) + f(x'+iy') = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ -y-y' & x+x' \end{pmatrix}$

$f(z_1 \cdot z_2) = f((xx'-yy') + i(xy'+x'y)) = \begin{pmatrix} xx'-yy' & xy'+x'y \\ -(xy'+x'y) & xx'-yy' \end{pmatrix}$

$\parallel$

$f(z_1) \cdot f(z_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx'-yy' & xy'+yx' \\ -yx'-xy' & -yy'+xx' \end{pmatrix}$

f morf. de inele.

$f(z) = f(z') \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow z = z' \Rightarrow f$ inj.

c) $(\mathbb{R}, +, \cdot) \not\cong (\mathbb{C}, +, \cdot)$

Presupun că $\exists\, f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ un izomorfism.

$f(1) = 1$ pt. că 1 este elem neutru pt. $\cdot$

$f(-1) = -f(1) = -1$

$i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$

Not $a = f(i) \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} a = f(i) \in \mathbb{R} \\ a^2 = f(i)\cdot f(i) = f(i\cdot i) = f(i^2) = f(-1) = -1 \end{array}\right\} \text{imposibil.}$$

4. b) b bază $\Leftrightarrow$ $\det[b]_e \neq 0$

$$[b]_e = \begin{pmatrix} [b_1]_e \\ [b_2]_e \\ [b_3]_e \\ [b_4]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det[b]_e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & \cancel{2} & \cancel{-5} \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{(-1)(-1)^{2+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 4 = -18 \neq 0 \Rightarrow b \text{ bază}$$

$[v] \overset{\text{not}}{=} (x_1, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow$

$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + x_4 b_4$

$$(2\ 3\ 2\ 10) = \underset{1}{x_1}(1\ 2\ -1\ 2) + \underset{2}{x_2}(1\ 2\ 1\ 4) + \underset{0}{x_3}(2\ 3\ 0\ -1) + \underset{-1}{x_4}(1\ 3\ -1\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 10 \end{cases} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ -7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ :(-9) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$