

FUNCTII REALE DE VARIABILA REALA

1. LIMITE SI CONTINUITATE

$A \subseteq \mathbb{R}$ multime, $x \in A \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Def: Spunem că elementul $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ este

a) punct de acumulare al mulțimii A dacă $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

În acest caz scriem $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

Notatie: $\overset{\circ}{A}$ - multimea punctelor de acumulare ale lui A .

b) punct izolat al mulțimii A dacă $x_0 \in A \setminus \overset{\circ}{A}$.

Ex: 1) $A = (a, b)$



$a \in \overset{\circ}{A}$ deoarece sirul $x_n = a + \frac{b-a}{2^n} \in A$, $\forall n \geq 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Analog $b \in \overset{\circ}{A}$, deci $\overset{\circ}{A} = [a, b]$

2) $A = \mathbb{N}$



$x_n = n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$, n -punct izolat al mulțimii $\mathbb{N} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \{+\infty\}$

Def: (limita unei funcții într-un punct)

Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $l \in \bar{\mathbb{R}}$ și $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Spunem că l este limita funcției f în punctul x_0 dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sir de numere din $A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

(2)

Notatie: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Ex: Fie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$

Așătău că $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\nexists \lim_{x \rightarrow p} [x]$

$$x_0 = p, x_m = p + \frac{1}{m},$$

$$y_m = p - \frac{1}{m}, \forall m \geq 2 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = p \text{ și}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [x_m] = \lim_{m \rightarrow \infty} p = p \neq p-1 = \lim_{m \rightarrow \infty} (p-1) = \lim_{m \rightarrow \infty} [y_m]$$

Def: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A \cap \bar{A}$. Se spune că

a) f este continuă în punctul x_0 dacă $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Puteam astfel scrie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$.

b) f este continuă pe multimea A dacă f continuă în $\forall x \in A$

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ și discontinuă pe \mathbb{Z} .

Def: Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A \text{ a.i.}$

$f(x) = y\}$ imagini funcției. Se spune că

a) f este mărginită inferior, mărginită superior, respectiv mărginită dacă multimea $f(A)$ are această proprietate.

b) f își atinge extretele pe A dacă $\exists x_1, x_2 \in A$ a.i.

$$f(x_1) = \inf f(A) \text{ și } f(x_2) = \sup f(A).$$

În acest caz putem scrie

$f(x_1) = \min f(A)$ și $f(x_2) = \max f(A)$ numite extremele funcției.

I (Weierstrass) Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ atunci avem așa următoarele:

1. f este mărginită
2. f își atinge extremele pe $[a, b]$

2. Derivabilitate

Def: Fie funcția $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$. Spunem că

a) f are derivată în punctul x_0 dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{nat } f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

numită derivata lui f în x_0 .

b) f este derivabilă în punctul x_0 dacă f are derivată în punctul x_0 și $f'(x_0) \in \mathbb{R}$

c) f este derivabilă pe (a, b) dacă f este derivabilă în $\forall x \in (a, b)$

Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty, \quad f'(0) \notin \mathbb{R}$$

Obs (interpretarea geometrică a derivatei)

Derivata unei funcții într-un punct reprezintă panta tangentei la graficul funcției în acel punct.

- ecuație dreptei prin (x_0, y_0) :

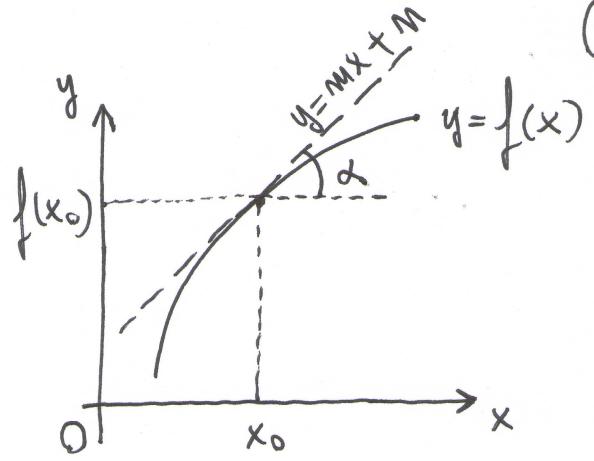
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$m = \text{tg} f$ panta dreptei

- ecuație tangentei la grafic

în punctul $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad m = f'(x_0)$$



Prop: Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproco nu este adevărată.

Dem: Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funcție derivabilă în $x_0 \in (a, b)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

$$\cdot (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0.$$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ multime nevidă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in A$.

Scriem că:

a) x_0 este punct de minim (local) al lui f dacă $\exists \delta > 0$ a.s. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A : f(x_0) \leq f(x)$

b) x_0 este punct de maxim (local) al lui f dacă $\exists \delta > 0$ a.s. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A : f(x_0) \geq f(x)$

c) x_0 este punct de extrem (local) al lui f dacă
 x_0 este punct de minim sau maxim (local).

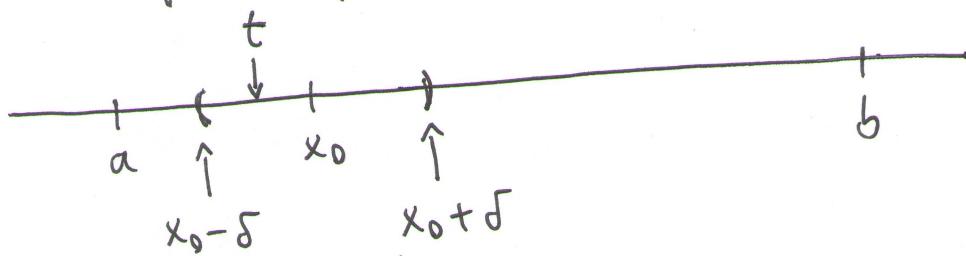
I (Fermat). Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

- i) $x_0 \in (a, b)$
 - ii) f are derivată în x_0
 - iii) x_0 este punct de extrem
- atunci $f'(x_0) = 0$.

Dem: Considerăm x_0 punct de minim local.

$$x_0 \in (a, b) \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ a.s.t. } a < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < b$$

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



$$\forall t \in (x_0 - \delta, x_0) : \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{t \nearrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq 0$$

$$\forall t \in (x_0, x_0 + \delta) : \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{t \searrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

I (Rolle). Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

- i) f continuă pe $[a, b]$
- ii) f derivabilă pe (a, b)
- iii) $f(a) = f(b)$

atunci $\exists x_0 \in (a, b)$ a.s.t. $f'(x_0) = 0$.

Dem: f continuă pe $[a, b] \Rightarrow f$ își atinge extretele pe $[a, b]$
 $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a, b]$ a.s.t. $f(x_1) = \min f([a, b])$ și $f(x_2) = \max f([a, b])$.
 x_1, x_2 sunt puncte de extrem (global).

Distingem cazurile:

I. $x_1 \in (a, b) \Rightarrow f'(x_1) = 0$ și alegem $x_0 = x_1$.

II. $x_2 \in (a, b) \Rightarrow f'(x_2) = 0$ și alegem $x_0 = x_2$.

III. $x_1, x_2 \notin (a, b) \Rightarrow x_1, x_2 \in \{a, b\} \quad \left. \begin{array}{l} f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este constantă pe $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x_0 \in (a, b)$

T (teorema de medie a lui Lagrange)

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Dacă

i) f continuă pe $[a, b]$

ii) f derivabilă pe (a, b)

atunci $\exists x_0 \in (a, b)$ a.s.t. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dem: Arătăm că funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x, \forall x \in [a, b]$ satisfac ipotezele

teoremei lui Ralle.

g este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) ,

(7)

$$g(a) = g(b) = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) \text{ a.s. } g'(x_0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Obs (interpretarea geometrică a teoremei de medie)

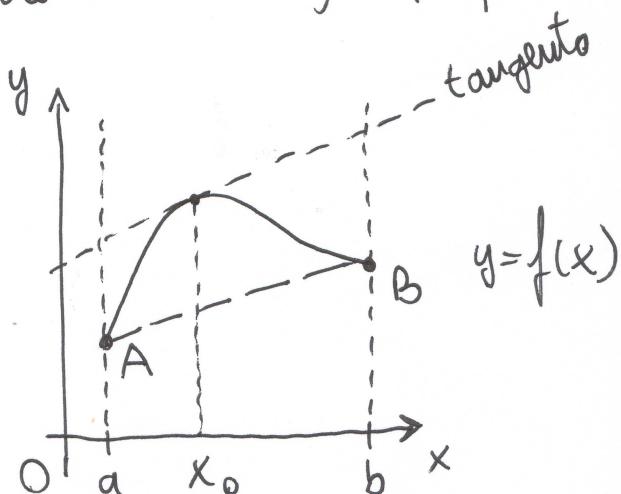
Există cel puțin o tangentă la graficul funcției paralelă cu segmentul de dreaptă determinat de extremitățile graficului.

- ecuația tangentei:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- ecuația dreptei AB:

$$A(a, f(a)), B(b, f(b))$$



$$\left| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}$$

3. Derivate de ordin superior

Considerăm $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Def: Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in (a, b)$.

1) Dacă $\exists \delta > 0$ a.s. f este derivabilă pe $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$, iar funcția $f': (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ este la rândul ei derivabilă în x_0 , atunci spunem că f este de două ori