Arătăm că (x_n) nu este fundamental

$\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m, l \geq n$ a.î. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$|x_{2n} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$ se numește serie de numere reale asociată șirului (x_n) și se notează cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n \geq 0} x_n$.

b) Șirul $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numește șirul sumelor parțiale ale seriei.

c) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă șirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ se numește suma seriei și scriem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește divergentă.

serie divergentă $\begin{cases} \nearrow \text{cu suma infinită} \\ \searrow \text{fără sumă (serie oscilantă)} \end{cases}$

<u>Ex:</u> Natura <u>seriei geometrice</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

Avem $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \begin{cases} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad , \quad a \neq 1 \\ n+1 \quad , \quad a = 1 \end{cases}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} \quad , \quad a \in (-1, 1) \\ +\infty \quad , \quad a \geq 1 \\ \nexists \quad , \quad a \leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ este convergentă $\iff a \in (-1, 1)$

<u>Prop:</u> Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 0$.

Reciproca nu este adevărată.

Dem: Fie $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$S_n - S_{n-1} = x_n \quad (n \to \infty) \Rightarrow S - S = \lim_{n \to \infty} x_n$.

<u>Negația:</u> Dacă $\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

<u>Ex:</u> Natura <u>seriei armonice</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty \quad (n \to \infty) \Rightarrow$ seria este divergentă.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\boxed{T}$ (criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î.

$\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}: |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$.

Dem: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă $\Leftrightarrow (s_n)$ șir convergent, $s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$

$\Leftrightarrow (s_n)$ șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$,

$\forall p \in \mathbb{N}: |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$,

$|s_{n+p} - s_n| = |x_0 + x_1 + \ldots + x_{n+p} - x_0 - x_1 - \ldots - x_n| = |x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}|$.

Def: Spunem despre două serii că au aceeași natură ($\sim$) dacă ambele sunt fie convergente, fie divergente.

Ex: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_0-1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot x_n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $s_n' = \alpha x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha x_n = \alpha \cdot s_n$

4. Serii cu termeni pozitivi (s.t.p.)

Def: Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește cu termeni pozitivi dacă $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Prop: O serie cu termeni pozitivi este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul sumelor parțiale este mărginit.

Dem: Fie $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S_n)$ șir crescător

I) Dacă (S_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ convergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ conv.

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ div.

<u>Obs:</u> Orice serie cu termeni pozitivi are sumă (finită sau $+\infty$)

$\boxed{T}$ (criteriul condensării al lui Cauchy)

Fie (x_n) un șir descrescător de numere pozitive. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots$ au aceeași natură.

Dem: Fie $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $T_n = x_1 + 2x_2 + \dots + 2^n \cdot x_{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat $\exists!\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$.

$$S_n = x_1 + \dots + x_n \leq x_1 + \dots + x_{2^{k+1}-1} = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \dots + (x_{2^k} + \dots + x_{2^{k+1}-1}) \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots + 2^k \cdot x_{2^k} = T_k,$$ apoi

$$S_n = x_1 + \dots + x_n \geq x_1 + \dots + x_{2^k} = x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots + (x_{2^{k-1}+1} + \dots + x_{2^k}) \geq x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \dots + 2^{k-1} \cdot x_{2^k} =$$

$$= \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots + 2^k \cdot x_{2^k}\right) = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot T_k \geq \frac{1}{2} \cdot T_k$$

Deci $0 \leq \frac{1}{2} T_k \leq S_n \leq T_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$

(S_n) mărginit $\Leftrightarrow (T_k)$ mărginit,

de unde rezultă concluzia.

Ex: Natura seriei armonice generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$

Caz particular $p=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

I) Dacă $p \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 1, & p=0 \\ +\infty, & p<0 \end{cases} \Rightarrow$ serie divergentă

II) Dacă $p>0$, fie $x_n = \frac{1}{n^p}$

(x_n) descrescător cu termeni pozitivi $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-p})^n$ convergentă $\Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$.

Concluzie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergentă $\Leftrightarrow p > 1$.

$\boxed{T}$ (criteriul comparației)

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două s.t.p. Au loc afirmațiile:

1° Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$, $\forall n \geq n_0$ atunci

i) Dacă $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $\sum x_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ este divergentă

2° (criteriul comparației sub formă de limită)

Dacă $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$ atunci

i) Dacă $l < +\infty$ și $\sum y_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ convergentă

ii) Dacă $l > 0$ și $\sum y_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum x_n$ divergentă

Dem:

1°. Fie $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, $T_n = y_0 + y_1 + \ldots + y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Din $x_n \le y_n$, $\forall n \ge n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} x_k \le \sum_{k=n_0}^{n} y_k \Rightarrow S_n - S_{n_0-1} \le T_n - T_{n_0-1}$

I) Dacă (T_n) mărginit superior $\Rightarrow (S_n)$ mărginit superior (i)

II) Dacă (S_n) nemărginit superior $\Rightarrow (T_n)$ nemărginit superior (ii)

2°. i) $l < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \ge n_0$: $\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon \Rightarrow x_n < (l+\varepsilon) \cdot y_n$, $\forall n \ge n_0$.

Din $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (l+\varepsilon) \cdot y_n$ convergentă $\overset{1°)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă.

ii) $l > 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{l} < +\infty$.

Presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă $\overset{2°i)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, contradicție cu ipoteza $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

<u>Obs:</u> Cu notațiile din teorema anterioară, dacă

$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, +\infty)$ atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$

au aceeași natură.

Serii de comparație: seria geometrică, seria armonică generalizată

Ex: Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\in(0,+\infty) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ care este convergentă

$\boxed{T}$ (criteriul lui Kummer)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni strict pozitivi având următoarele proprietăți:

1°. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ este divergentă

2°. $\exists \lim_{n\to\infty}\left(u_n\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}} - u_{n+1}\right) = K \in \overline{\mathbb{R}}$

Au loc afirmațiile:

i) Dacă $K>0 \Rightarrow \sum x_n$ este convergentă

ii) Dacă $K<0 \Rightarrow \sum x_n$ este divergentă.

Dem: