SUBIECT 2018

1. Studiați convergența s.t.p. în funcție de valorile parametrului $a>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$$

* D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n+1}} = a^0 = 1 \Rightarrow \text{NU DECIDE}$$

* Raabe Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(a^{-\frac{1}{n+1}}-1\right) = \lim n\cdot \frac{a^{-\frac{1}{n+1}}-1}{-\frac{1}{n+1}}\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$\lim \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\qquad = -\ln a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = -\ln a$

$-\ln a > 1 \quad | \cdot (-1)$

$\ln a < -1$

$e^{\ln a} < e^{-1}$

$a < \frac{1}{e} \Rightarrow$ serie convergentă

$a > \frac{1}{e} \Rightarrow$ serie divergentă

$$a=\frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e}^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{e}^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n} = \frac{1}{e}^{\gamma} \text{ - finit}$$

↳ folosim criteriul comp. sub formă de limită

vedem cum e $\lim_{n\to\infty} e^{-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă

$\Rightarrow$ pt $a=\frac{1}{e}$ serie divergentă

2. Studiați convergența integralei improprii $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$ și calculați val. acesteia.

nu e definită în 0 => criteriul 3 de la p și λ ($a=0$ și $b=1$) - pentru convergență

$\lambda = \lim_{x \searrow 0} (x-0)^p (\ln x)^2$ - pp. că este convergent (alegem $p<1$)

alegem $p = \frac{1}{2}$ => $\lim_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln x)^2 = \lim_{x \searrow 0} \frac{(\ln x)^2}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\searrow 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} =$

$= \lim_{x\searrow 0} \frac{-4 \ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = -4 \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}} = -4 \cdot \lim_{x\searrow 0} (-2) \cdot \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}} = 8 \cdot \lim_{x \searrow 0} x^{\frac{1}{2}} = 0$

=> avem $p<1$ și $\lambda < \infty$ => integrala e convergentă

-> pentru valoare facem prin părți:

$\lim_{v\searrow 0} \int_v^1 (\ln x)^2 dx = \lim_{v\searrow 0} \int_v^1 1 \cdot (\ln x)^2 dx = \lim_{v \searrow 0} \int_v^1 x' \cdot (\ln x)^2 dx =$

$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$

$= \lim_{v\searrow 0} \left(x(\ln x)^2 \Big|_v^1 - \int_v^1 x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$

$= \lim_{v \searrow 0} \left(-v(\ln v)^2 - 2 \int_v^1 x' \ln x\, dx \right) =$

$= \lim_{v\searrow 0} \left(-v(\ln v)^2 - 2\left(x \cdot \ln x \Big|_v^1 - \int_v^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right)\right) =$

$= \lim_{v\searrow 0} \left(-v(\ln v)^2 + 2v\ln v + 2\cdot 1 \right) =$

$= 2 + \lim_{v\searrow 0} \left[2v\ln v - v(\ln v)^2 \right]$ = (le facem separat) = 2

- 1. $2\lim_{v\searrow 0} v \ln v = 2 \lim_{v\searrow 0} \frac{\ln v}{\frac{1}{v}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 2 \lim_{v\searrow 0} \frac{\frac{1}{v}}{-\frac{1}{v^2}} = 2 \lim_{v\searrow 0} \frac{1}{v} \cdot (-v^2) = 0$

- 2. $\lim_{v\searrow 0} v(\ln v)^2 = \lim_{v\searrow 0} \frac{(\ln v)^2}{\frac{1}{v}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{v \searrow 0} \frac{2\ln v \cdot \frac{1}{v}}{-\frac{1}{v^2}} = \lim_{v\searrow 0} 2 \ln v \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{-v^2}{1} =$

$= -2 \lim_{v\searrow 0} v \cdot \ln v = -2 \cdot 0 = 0$

3. Det. constanta $a \in \mathbb{R}$ pt. care funcția $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^y(x\sin x + ay\cos x)$

verifică relația $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (e^y x\sin x + e^y ay\cos x)'_x = e^y \cdot 1 \cdot \sin x + e^y \cdot x \cdot \cos x - e^y ay \sin x =$$

$$= e^y(\sin x + x\cos x - ay\sin x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^y \cdot \cos x + e^y \cdot 1 \cdot \cos x + e^y \cdot x \cdot (-\sin x) - e^y \cdot a \cdot y \cdot \cos x =$$

$$= e^y(2\cos x - x\sin x - ay\cos x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (e^y x\sin x + e^y ay\cos x)'_y = e^y x\sin x + e^y ay\cos x + e^y a\cos x =$$

$$= e^y(x\sin x + ay\cos x + a\cos x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y x\sin x + e^y ay\cos x + e^y \cdot a\cos x + e^y a\cos x =$$

$$= e^y(x\sin x + ay\cos x + 2 \cdot a\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y(2\cos x - \cancel{x\sin x} - \cancel{ay\cos x} + \cancel{x\sin x} + \cancel{ay\cos x} + 2a\cos x)$$

$$\Rightarrow e^y(2\cos x + 2a\cos x) = 0 \Rightarrow \cos x(2 + 2a) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

4. a) derivata într-un punct după direcția unui vector a unei funcții de var. vectorială:

$f: A \to \mathbb{R}$

$x^0 \in A$

$v \in \mathbb{R}^m$

dacă $\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t \cdot v) - f(x^0)}{t}$ s.n. derivata lui f în x^0 după direcția vectorului

v și se notează $f'_v(x^0)$

b) exemplu de funcție neconstantă $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ și deriv. ei în $(1,0,1)$ după dir. $(0,1,0)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$

$$f'_v(1,0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((1,0,1) + t(0,1,0)) - f(1,0,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1,t,1) - 2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$$

Derivatele parțiale sunt cazuri particulare ale derivatei după direcția vectorilor canonici!