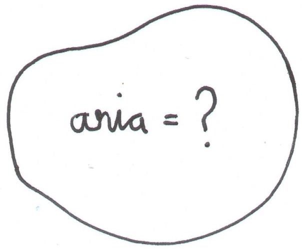
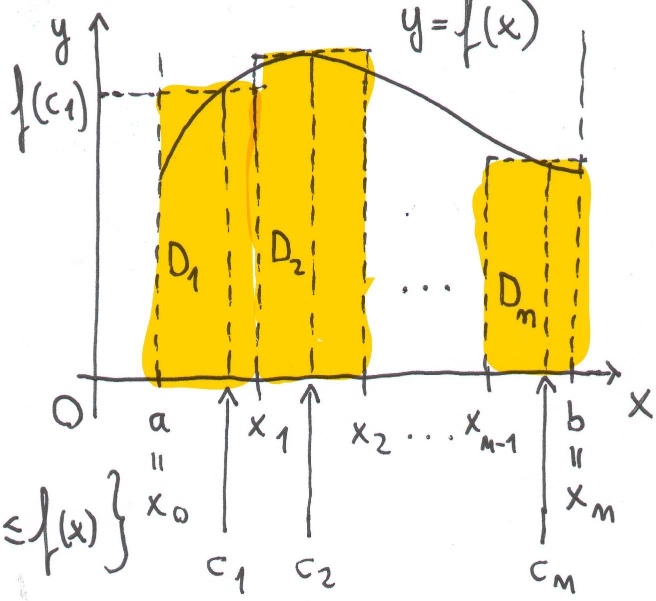
6. Integrala Riemann





$f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$

$S[a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ subgraficul funcției f.

Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\forall\, k = \overline{1,m}$, D_k - dreptunghiul de laturi $x_k - x_{k-1}$ și $f(c_k)$, $k = \overline{1,m}$

$$\text{aria } S[a,b] = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \text{aria}(D_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1}).$$

Def: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Un șir finit $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ cu proprietatea $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ se numește diviziune a intervalului $[a,b]$.

b) Numărul real $\|\Delta\| = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = \overline{1,m}\}$ se numește norma diviziunii Δ.

c) Un șir finit $\xi = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ cu proprietatea $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,m}$ se numește sistem de puncte intermediare (s.p.i.) asociat diviziunii Δ.

d) Numărul real $\sigma_f(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$ se numește **suma Riemann** a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ și s.p.i ξ.

e) Funcția f se numește **integrabilă Riemann** pe $[a,b]$ dacă $\exists\, I = \lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi) \in \mathbb{R}$, iar valoarea lui I nu depinde de alegerea s.p.i. ξ. Numărul I se numește **integrala Riemann** a funcției f pe $[a,b]$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\,dx$.

Obs: a) Șirul finit $x_k = a + (b-a)\cdot\frac{k}{n}$, $k = \overline{0,n}$ formează o diviziune a intervalului $[a,b]$ numită **diviziunea echidistantă**.

b) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (b-a)\cdot\frac{k}{n}\right)$$

Dem:

a) $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} > 0$.

b) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$

Alegem diviziunea echidistantă $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ și $c_k = x_k$, $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \frac{b-a}{n}.$$

<u>Ex:</u> a) $f(x)=\alpha$, $\forall x\in[a,b]$

Fie $\Delta=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ o diviziune și $\xi=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ s.p.i.

$$\sigma_f(\Delta,\xi)=\sum_{k=1}^{n}\alpha\cdot(x_k-x_{k-1})=\alpha\cdot(x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1})=$$

$$=\alpha(x_n-x_0)=\alpha\cdot(b-a)\Rightarrow\int_a^b\alpha\,dx=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sigma_f(\Delta,\xi)=\alpha\cdot(b-a)$$

$\Rightarrow f$ integrabilă Riemann pe $[a,b]$

b) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

Fie $\Delta=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ o diviziune oarecare a interv. $[0,1]$,

$\exists\, c_k\in[x_{k-1},x_k]\cap\mathbb{Q}$ și $c_k'\in[x_{k-1},x_k]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $k=\overline{1,n}$.

$\Rightarrow \xi=(c_1,c_2,\dots,c_n)$, $\xi'=(c_1',c_2',\dots,c_n')$ sunt două s.p.i. ale lui Δ.

$$\sigma_f(\Delta,\xi)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot(x_k-x_{k-1})=1,\quad \sigma_f(\Delta,\xi')=\sum_{k=1}^{n}0\cdot(x_k-x_{k-1})=0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\|\Delta\|\to0}\sigma_f(\Delta,\xi)$ depinde de ξ $\Rightarrow f$ nu este int. Riemann pe $[0,1]$

<u>Prop:</u> Orice funcție continuă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

<u>Ex:</u> $f(x)=x$, $\forall x\in[a,b]$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx=?$

f continuă pe $[a,b]\Rightarrow\exists\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\|\Delta\|\to0}\sigma_f(\Delta,\xi)$

Fie $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ diviziunea echidistantă,

$x_k = a + (b-a)\cdot \frac{k}{n}$, $k = \overline{0,n}$ și $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s.p.i.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(a + (b-a)\cdot\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a + (b-a)\cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left(a\cdot n + (b-a)\cdot \frac{n(n+1)}{2n} \right) = (b-a)\cdot\left(a + \frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

<u>Prop</u>: Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann pe $[a,b]$.

Au loc afirmațiile:

1°. (monotonia integralei)

Dacă $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

2°. (liniaritatea integralei)

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3° (aditivitatea integralei)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \forall c \in (a,b)$$

<u>Cons</u>: Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă pe $[a,b]$ atunci

au loc afirmațiile:

1° Dacă $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

2°. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

3°. $\inf f([a,b]) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq \sup f([a,b])$

Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție și $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.
Atunci F se numește primitiva (antiderivata) lui f.

Obs: a) Orice primitivă a funcției nule este o funcție constantă.

b) Oricare două primitive ale unei funcții date diferă printr-o constantă.

Dem: a) $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$ și $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F'(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ aplicăm teorema de medie a lui Lagrange funcției F pe intervalul $[a,x]$, $x\in(a,b]$,

$\exists\, c\in(a,x)$ a.î. $F(x)-F(a)=\underbrace{F'(c)}_{=0}\cdot(x-a) \Rightarrow F(x)=F(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ constantă pe $[a,b]$.

b) Fie $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. $F'(x)=G'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$ unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție dată.

$\Rightarrow F'(x)-G'(x)=0$, $\forall x\in[a,b] \Rightarrow F-G$ este o primitivă a funcției nule $\overset{a)}{\Rightarrow} F-G =$ constantă.

$\boxed{T}$ (teorema fundamentală a calculului integral)

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$ atunci au loc afirmațiile:

1°. Funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a,b]$ este o primitivă a lui f.

2°. Dacă $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a lui f atunci are loc formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) \stackrel{not}{=} G(x)\Big|_a^b$$

Prop (formula de integrare prin părți)

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții derivabile și derivatele lor sunt funcții continue pe $[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Prop (formula schimbării de variabilă)

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$, iar $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ este derivabilă cu derivata funcție continuă pe $[\alpha,\beta]$ și $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Dem: Dacă $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f atunci $G\circ\varphi$ este o primitivă a lui $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ deoarece

$$(G\circ\varphi)'(t) = G'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \ \forall t\in[\alpha,\beta]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) = G(\varphi(\beta))-G(\varphi(\alpha)) \text{ și}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = (G\circ\varphi)(\beta)-(G\circ\varphi)(\alpha) = G(\varphi(\beta))-G(\varphi(\alpha)).$$