Теория вероятностей

Математическая статистика

Владимир Анатольевич Судаков

Вероятность против статистики

- Вероятность занимается прогнозированием вероятности будущих событий, а статистика анализирует частоту прошлых событий.
- Вероятность — это теоретическая часть математики, посвященная следствиям определений, а статистика — это прикладная математика, пытающаяся осмыслить наблюдения из реального мира.

Литература

- Венцель Е.С. Теория вероятностей
- Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика
- Triola, Mario F. Elementary statistics

Математическая статистика

- Разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляет предмет специальной науки — математической статистики.

- Задачи математической статистики касаются вопросов обработки наблюдений над массовыми случайными явлениями, но в зависимости от характера решаемого практического вопроса и от объема имеющегося экспериментального материала эти задачи могут прини мать ту или иную форму.

Типичные задачи статистики

- Определить закон распределения случайной величины (системы случайных величин)
- Проверить правдоподобие гипотез
- Найти неизвестные параметры распределения

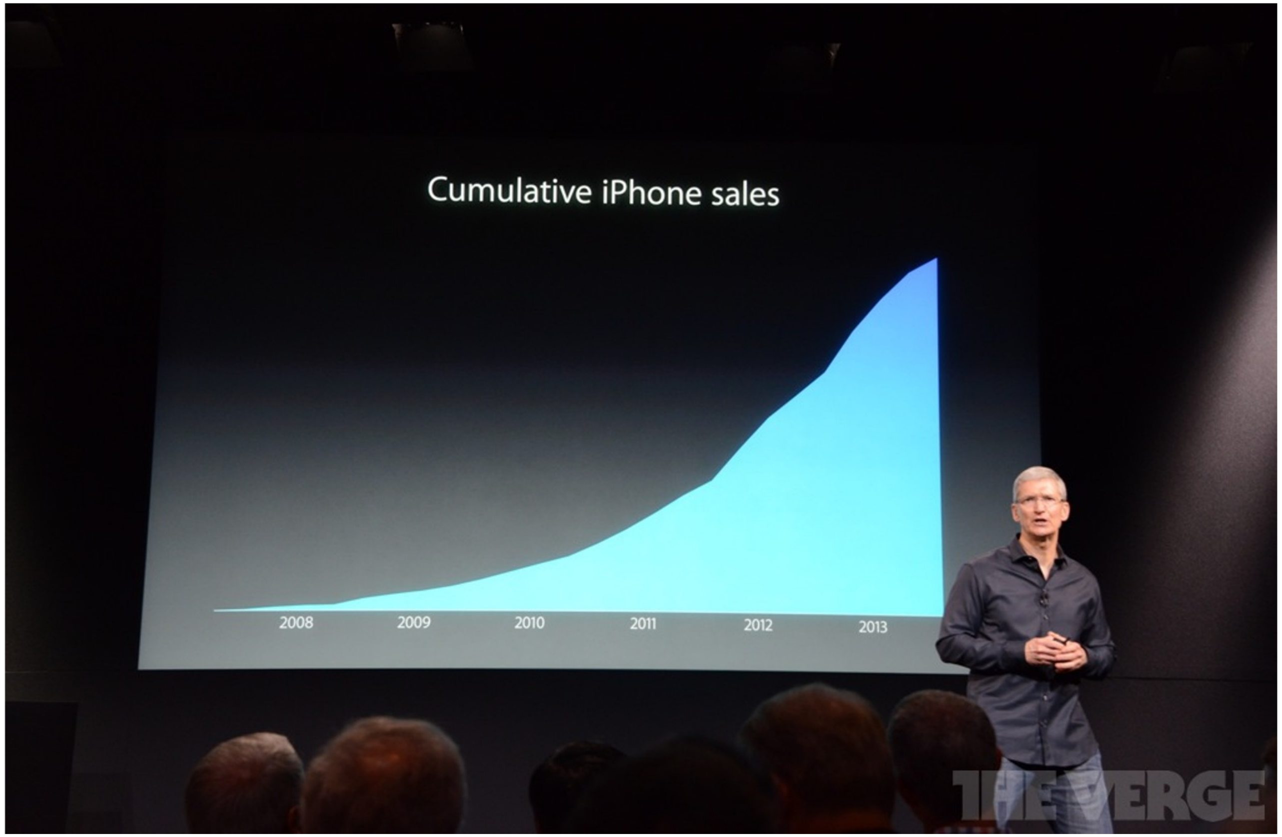
Простая статистическая совокупность

- Дана случайная величина X
- Совокупность наблюдаемых значений X - простой статистический ряд (простая статистическая совокупность)
- Статистическая функция распределения X:

$$F^*(x) = P^*(X<x)$$

Визуализация распределений

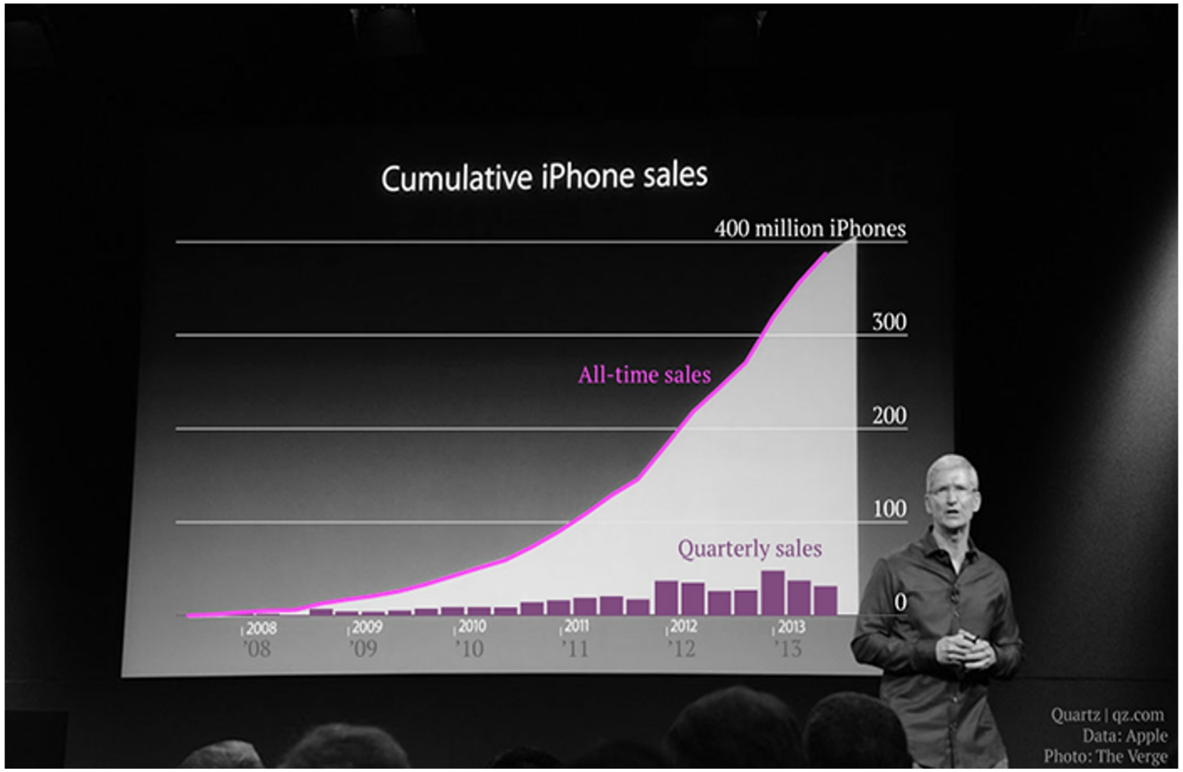
Продажи Apple iPhone стремительно растут, не так ли?



Насколько взрывным является этот рост на самом деле?

Кумулятивные распределения дают ошибочное представление о темпах роста.

Постепенное изменение является производной этой функции, которую трудно визуализировать.



Тренировка

- Дан ряд углов скольжения самолета в момент сбрасывания бомбы

-20,-60,-10, 30, 60, 70, -10,

-30,-120, -100, -80, 20, 40, -60,

-10, 20, 30, -80, 60, 70

- Построить статистическую функцию распределения
- У кого хорошее решение? Какие ошибки типичны на графике

Гистограмма

- Если данных много, то простой статистический ряд не удобен
- Разделим наблюдения на разряды и посчитаем частоты попадания:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}$$

- Таблица с интервалами разрядов и p_i^* называется статистическим рядом

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$	…	$x_i;\ x_{i+1}$	…	$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_i^*	…	p_k^*

- Что делать если значение попало на границу интервалов?

Давайте посмотрим решение

https://colab.research.google.com/drive/1PnR5vCcxVSRN-VdLX86fgH0fYx-LwMJL

Построение статистической функции распределения

$$F^*(x_1) = 0;$$

$$F^*(x_2) = p_1^*;$$

$$F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^*;$$

$$F^*(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Описательная статистика

Описательная статистика предоставляет способы фиксации свойств данного набора данных/выборки.

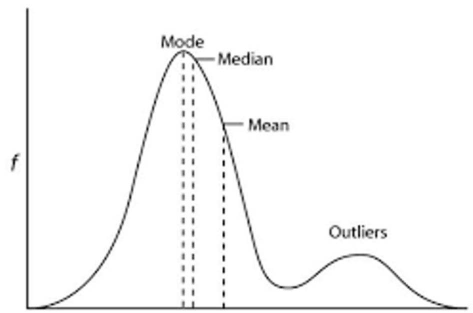
- Меры центральной тенденции описывают центр распределения данных.
- Меры вариации или изменчивости описывают разброс данных, т.е. насколько далеко измерения лежат от центра.

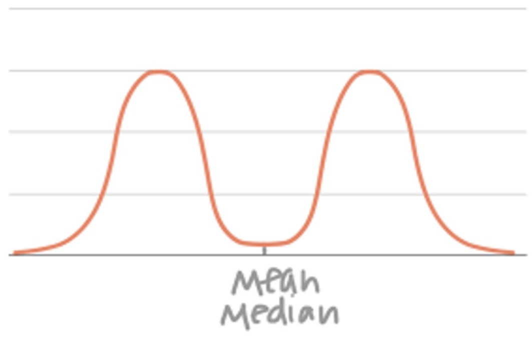
Мера центральности: среднее значение

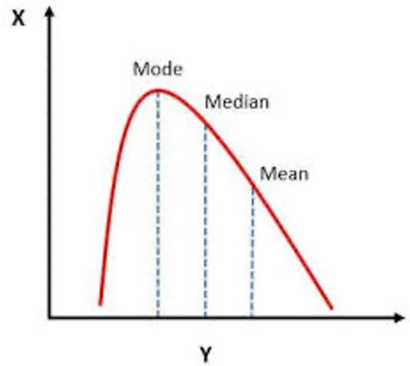
Чтобы вычислить среднее значение, просуммируйте значения и разделите их на количество наблюдений:

$$\mu_X = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i$$

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов.







Другие меры центральности

Медиана представляет собой «серединное» значение.

Среднее геометрическое — это корень n-й степени из произведения n значений:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Среднее геометрическое всегда <= среднее арифметическое и более чувствительно к значениям, близким к нулю.

Геометрические средние имеют смысл с соотношениями:

1/2 и 2/1 должны в среднем давать 1.

Какая мера лучше всего?

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов: например. рост и вес.

Медиана лучше подходит для асимметричных распределений или данных с выбросами: например, богатство и доход.

Билл Гейтс добавляет 250 долларов к среднему доходу на душу населения, но ничего не добавляет к медиане.

Показатель отклонения: стандартное отклонение

Дисперсия представляет собой квадрат сигмы стандартного отклонения.

Мы делим на n или n-1?

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

СКО генеральной совокупности делится на n, СКО выборки на n-1 (почему – узнаем позже), но для больших n n ~ (n-1), так что это не имеет особого значения.

Интерпретация дисперсии (фондовый рынок)

Отношение «сигнал/шум» измерить сложно, поскольку многое из того, что вы видите, — это всего лишь дисперсия.

Рассмотрите возможность измерения относительного «навыка» различных инвесторов фондового рынка.

Ежегодные колебания эффективности фондов таковы, что результаты деятельности инвесторов случайны, а это означает, что реальная разница в навыках незначительна.

Интерпретация дисперсии (много моделей)

Обычно для каждой задачи мы разрабатываем несколько моделей, от очень простых до сложных.

Некоторая разница в производительности будет объяснена простой дисперсией: какие пары обучения/оценки были выбраны, насколько хорошо были оптимизированы параметры и т. д.

Небольшой выигрыш в производительности является аргументом в пользу более простых моделей.

Методы уменьшения дисперсии

Хотя идти на занятия пешком медленнее, чем ехать на автобусе, разница во времени прибытия меньше.

Повторение эксперимента несколько раз уменьшает дисперсию (перекрестная проверка в k-кратном размере).

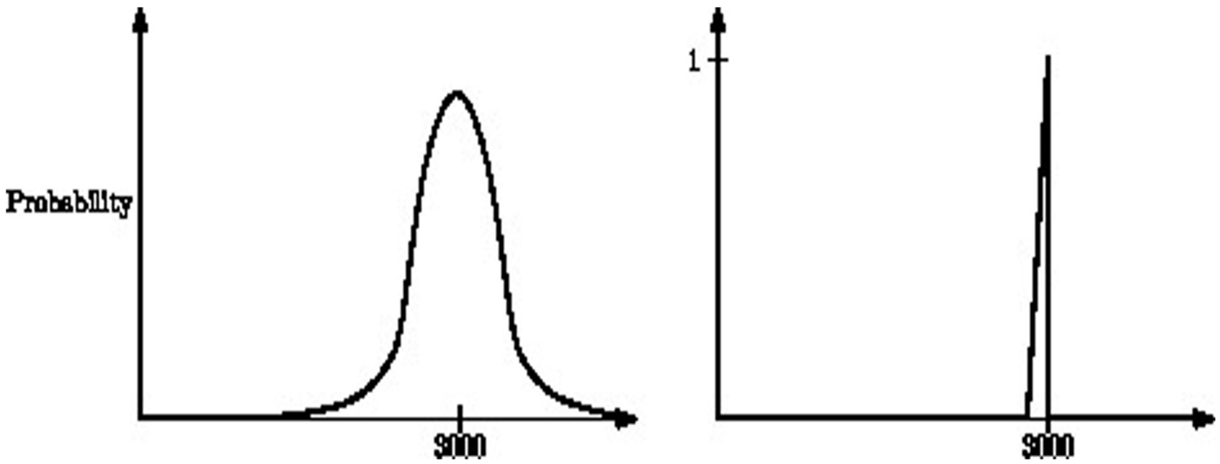
То же самое относится и к правильной случайной и детерминированной выборке.

Устранение выбросов (если это оправдано) уменьшает дисперсию.

Распределение срока службы картриджей принтера

Распределения с одинаковым средним значением могут выглядеть очень по-разному.

Но вместе среднее и стандартное отклонение довольно хорошо характеризуют любое распределение.



Приближенные вычисления

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^*,$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^*,$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^*,$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^s p_i^*.$$

Выравнивание статистических рядов

- Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем. что число наблюдений ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты.
- Только при очень большом числе наблюдений эти элементы случайности сглаживаются, и случайное явление обнаруживает в полной мере присущую ему закономерность.
- На практике мы почти никогда не имеем дела с таким большим числом наблюдений и вынуждены считаться с тем, что любому статистическому распределению свойственны в большей или меньшей, мере черты случайности.
- Поэтому при обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объемом эксперимен тальных данных. Такая задача называется задачей ***выравнивания*** (сглаживания) ***статистических рядов.***
- Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоре тическую плавную кривую распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение.

Как выравнивать?

- Как правило, принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров; задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора те х значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{при} \quad \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при} \quad x < \alpha \quad \text{или} \quad x > \beta, \end{cases}$$

- Что это за законы? Что будем подбирать?

Требуемые ограничения

$$f(x) \geqslant 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Метод моментов

- Согласно методу моментов, параметры ***a, b,*** . . . выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам.
- Например, если теоретическая кривая ***f(x)*** зависит только от двух параметров ***a*** и ***b,*** эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание и дисперсия теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками.
- Если кривая ***f(x)*** зависит от трех параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т. д.
- При выравнивании статистических рядов может оказаться полезной специально разработанная система ***кривых Пирсона,*** каждая из которых зависит в общем случае от четырех параметров. При выравнивании эти параметры выбираются с тем расчетом, чтобы сохранить первые четыре момента статистического распределения (математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый моменты).

Пример

- С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты опытов представлены в виде статистического ряда:

I_i (*м*)	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

Решение

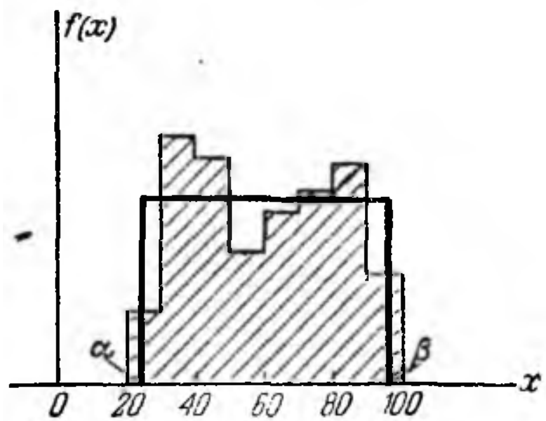
Равномерный закон
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{при } \alpha<x<\beta;\\ 0 & \text{при } x<\alpha \text{ или } x>\beta\end{cases}$$

Моменты через параметры:
$$m_x=\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$D_x=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Решим систему уравнений
$$\frac{\alpha+\beta}{2}=60{,}26;\qquad \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}=447{,}7.$$

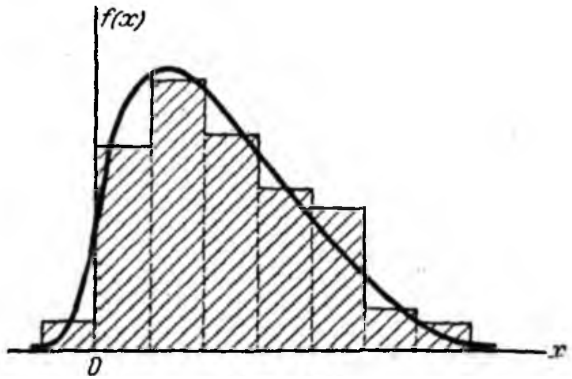
$$\alpha\approx 23{,}6;\quad \beta\approx 96{,}9,$$

$$\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{73{,}3}\approx 0{,}0136.$$



Критерии согласия

- Допустим, что данное статистическое распределение выравнено с помощью некоторой теоретической кривой f (x).



- Как бы хорошо, ни была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они я в л я ю т с я существенными и связаны с тем, что подобранная нами кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение. Для ответа на такой вопрос служат так называемые «критерии согласия».

Идея метода

- Гипотеза ***H***: случайная величина ***X*** подчиняется некоторому определенному закону распределения. Этот закон может быть задан в той или иной форме: например, в виде функции распределения ***F*** (***x***) или в виде плотности распределения ***f (x) ,*** или же в виде совокупности вероятностей p_i **,** где p_i — вероятность того, что величина ***X*** попадет в пределы ***i***-го разряда.
- рассмотрим величину ***U ,*** характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений.
- Величина ***U*** может быть выбрана различными способами; например, в качестве ***U*** можно взять сумму квадратов отклонений теоретических вероятностей p_i от соответствующих частот p_i^* или же сумму тех же квад-ратов с некоторыми коэффициентами («весами»), или же максимальное отклонение статистической функции распределения ***F*(x)*** от теоретической ***F (x)*** и т. д. Допустим, что величина ***U*** выбрана тем или иным способом. Очевидно, это есть некоторая ***случайная величина.***

Идея метода (2)

- Закон распределения случайной величины ***U*** зависит от закона распределения случайной величины ***X*** **,** над которой производились опыты, и от числа опытов ***n.*** Если гипотеза ***H*** верна, то закон распределения величины ***U*** определяется законом распределения величины X (функцией F(x)) и числом ***n.***
- Допустим, что этот закон распределения нам известен. В результате данной серии опытов обнаружено, что выбранная нами мера расхождения ***U*** приняла некоторое значение ***u***.
- Можно ли объяснить это случайными причинами или же это расхождение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями и, следовательно, на непригодность гипотезы ***H***?

Идея метода (3)

- Предположим, что гипотеза ***H*** верна, и вычислим в этом предположении вероятность того, что за счет случайных причин, связанных с недостаточным объемом опытного материала, мера расхождения ***u*** окажется не меньше, чем наблюденное нами в опыте значение и, т, е. вычислим вероятность события:

$$U \geq u$$

- Если эта вероятность весьма мала, то гипотезу следует *отвергнуть* как мало правдоподобную;
- Если же эта вероятность значительна, следует признать, что *экспериментальные данные не противоречат гипотезе **H**.*

Как следует выбирать U?

- При некоторых способах ее выбора закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами при достаточно большом ***n*** практически не зависит от функции ***F(x)***.

Критерий Хи-квадрат Пирсона

- Произведено ***n*** независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ***X*** приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в *k* разрядов и оформлены в виде статистического ряда:

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$	$\ldots$	$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_k^*

- Зная теоретический закон распределения, можно найти теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из разрядов:

$$p_1, p_2, \ldots p_k$$

- В качестве меры возьмем

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i (p_i^* - p_i)^2.$$

Критерий Хи-квадрат Пирсона (2)

- Коэффициенты c_i («веса» разрядов) вводятся потому, что в общем случае отклонения, относящиеся к различным разрядам, нельзя считать равноправными по значимости.
- Одно и то же по абсолютной величине отклонение $p_i^* - p_i$ может быть мало значительным, если сама вероятность p_i велика, и очень заметным, если она мала. Поэтому естественно «веса» c_i взять обратно пропорциональными вероятностям разрядов p_i.
- ***Если положить***

$$c_i = \frac{n}{p_i}$$

то при больших n закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами: он практически не зависит от функции распределения $F(x)$ и от числа опытов n, а зависит только от числа разрядов k,

Этот закон при увеличении n приближается к так называемому «распределению χ^2»

Мера расхождения

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}. \qquad U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

[1]) Распределением χ^2 с r степенями свободы называется распределение суммы квадратов r независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Это распределение характеризуется плотностью

$$k_r(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & \text{при} \quad u > 0, \\ 0 & \text{при} \quad u < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ — известная гамма-функция.

Как определить число степеней свободы

- Распределение χ^2 зависит от параметра ***r***, называемого числом «степеней свободы» распределения. Число «степеней свободы» *r* равно числу разрядов *k* минус число независимых условий («связей»), наложенных на частоты $\boldsymbol{p_i}$.
- ***Примеры условий:***

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^* = m_x,$$

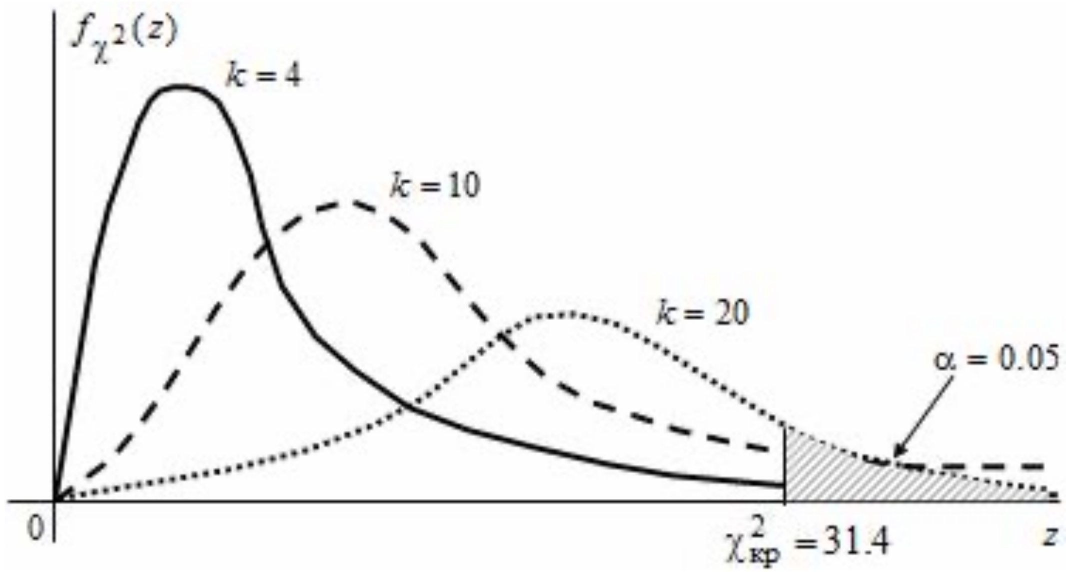
$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^* = D_x,$$

Как посчитать критерий

https://colab.research.google.com/drive/1EuF6rmUqZtt8EQEThsVeiSbNZ8G7TKcx?usp=sharing

Смысл p-value

- Распределение χ^2 дает возможность оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений,
- Будем исходить из того, что величина ***X*** действительно распределена по закону ***F (x).***
- Тогда вероятность ***p (p-value)***, есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений будет не меньше, чем фактически наблюденное в данной серии опытов значение χ^2. Если эта вероятность***, p*** весьма мала (настолько мала, что событие с такой вероятностью можно считать практически невозможным), то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе ***H*** о том, что закон распределения величины ***X*** есть ***F (x) .***
- Эту гипотезу следует отбросить как неправдоподобную. Напротив, если вероятность ***p*** сравнительно велика, можно признать расхождения между теоретическим и статистическим распределениями несущественными и отнести их за счет случайных причин. Гипотезу ***H*** о том, что величина ***X*** распределена по закону ***F*** (x), можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным.



На сколько должно быть мало p-value?

- вопрос неопределенный; он не может быть решен из математических соображений, так же как и вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события для того, чтобы считать его практически невозможным. На практике, если ***p*** оказывается меньшим чем 0,1, рекомендуется проверить эксперимент, если возможно — повторить его и в случае, если заметные расхождения снова появятся, пытаться искать более подходящий для описания статистических данных закон распределения.
- Следует особо отметить, что с помощью критерия χ^2 (или любого другого критерия согласия) можно только в некоторых случаях о п р о в е р г н у т ь выбранную гипотезу ***H*** и отбросить ее как явно несогласную с опытными данными; если же вероятность ***p*** велика, то этот факт сам по себе ни в коем случае не может считаться доказательством справедливости гипотезы ***H*,** а указывает только на то, что гипотеза не противоречит опытным данным.

Критерий Колмогорова

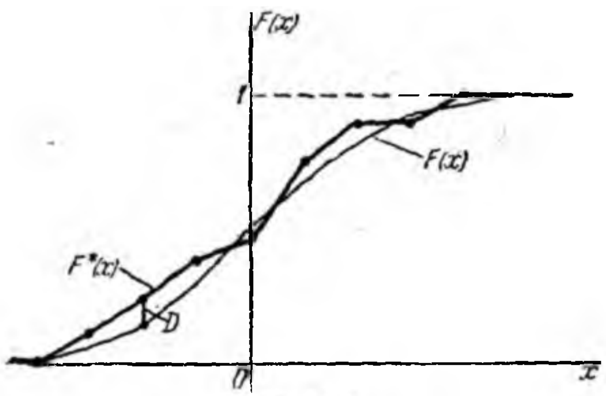
$$D = \max |F^*(x) - F(x)|.$$

- какова бы ни была функция распределения F(***x***) непрерывной случайной величины ***X***, при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений ***n*** вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geqslant \lambda$$

- стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$



Критерий Колмогорова. Когда применим?

- можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение ***F(x)*** полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т. е. когда известен не только вид функции распределения ***F (x),*** но и все входящие в нее параметры.
- Такой случай сравнительно редко встречается на практике. Обычно из теоретических соображений известен только общий вид функции ***F(x)***, *а* входящие в нее числовые параметры определяются по данному статистическому материалу.
- При применении критерия χ^2 это обстоятельство учитывается соответствующим уменьшением числа степеней свободы распределения χ^2**.** Критерий А. Н. Колмогорова такого согласования не предусматривает. Если все же применять этот критерий в тех случаях, когда параметры теоретического распределения выбираются по статистическим данным, критерий дает заведомо завышенные значения вероятности Р(Х); поэтому мы в ряде случаев рискуем принять как правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными данными.