Теория вероятностей

Математическая статистика

Владимир Анатольевич Судаков

Вероятность против статистики

- Вероятность занимается прогнозированием вероятности будущих событий, а статистика анализирует частоту прошлых событий.
- Вероятность — это теоретическая часть математики, посвященная следствиям определений, а статистика — это прикладная математика, пытающаяся осмыслить наблюдения из реального мира.

Литература

- Вентцель Е.С. Теория вероятностей
- Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика
- Triola M.F. Elementary statistics
- Дауни А. Байесовские модели. Байесовская статистика на языке Python

https://github.com/sudakov/lab_it/blob/master/stat.pdf

Математическая статистика

- Разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляет предмет специальной науки — математической статистики.

- Задачи математической статистики касаются вопросов обработки наблюдений над массовыми случайными явлениями, но в зависимости от характера решаемого практического вопроса и от объема имеющегося экспериментального материала эти задачи могут принимать ту или иную форму.

Типичные задачи статистики

- Определить закон распределения случайной величины (системы случайных величин)
- Проверить правдоподобие гипотез
- Найти неизвестные параметры распределения

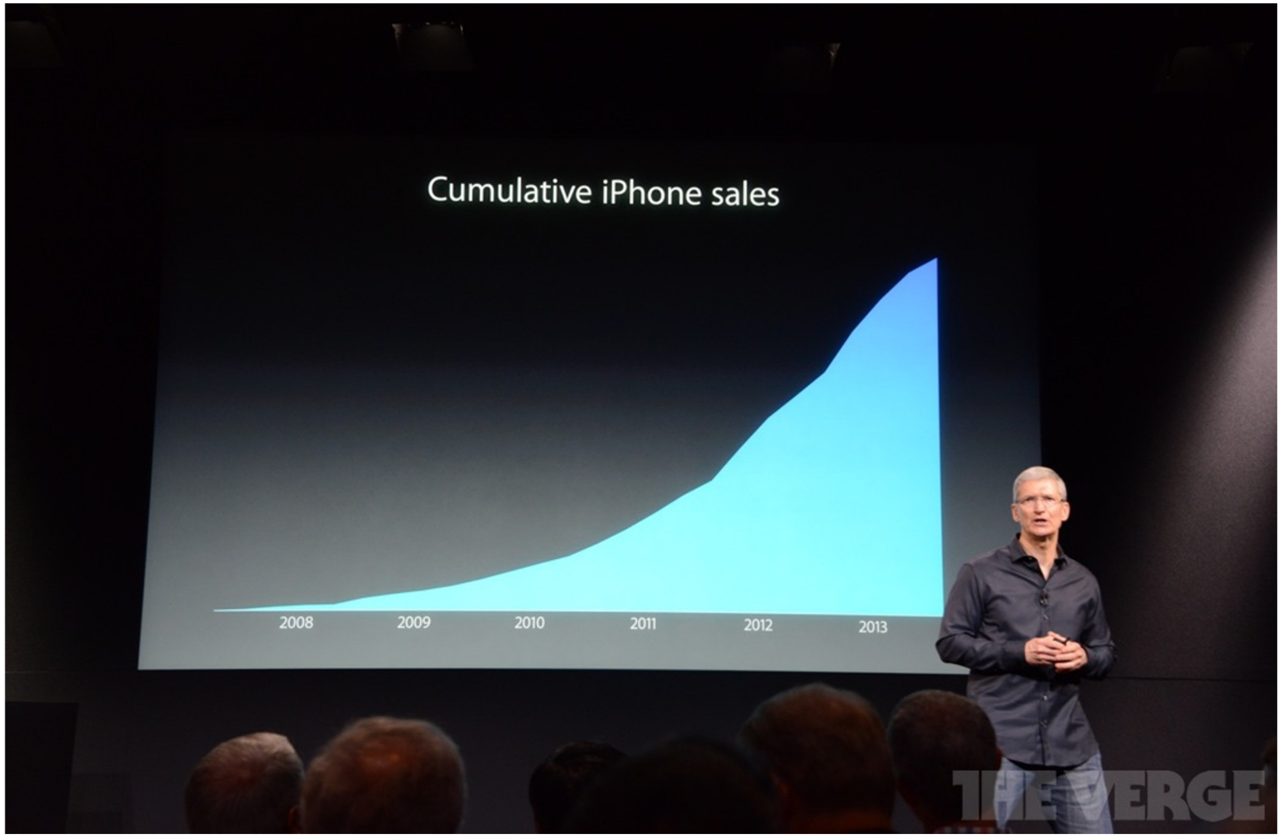
Простая статистическая совокупность

- Дана случайная величина X
- Совокупность наблюдаемых значений X - простой статистический ряд (простая статистическая совокупность)
- Статистическая функция распределения X:

$$F^*(x) = P^*(X < x)$$

Визуализация распределений

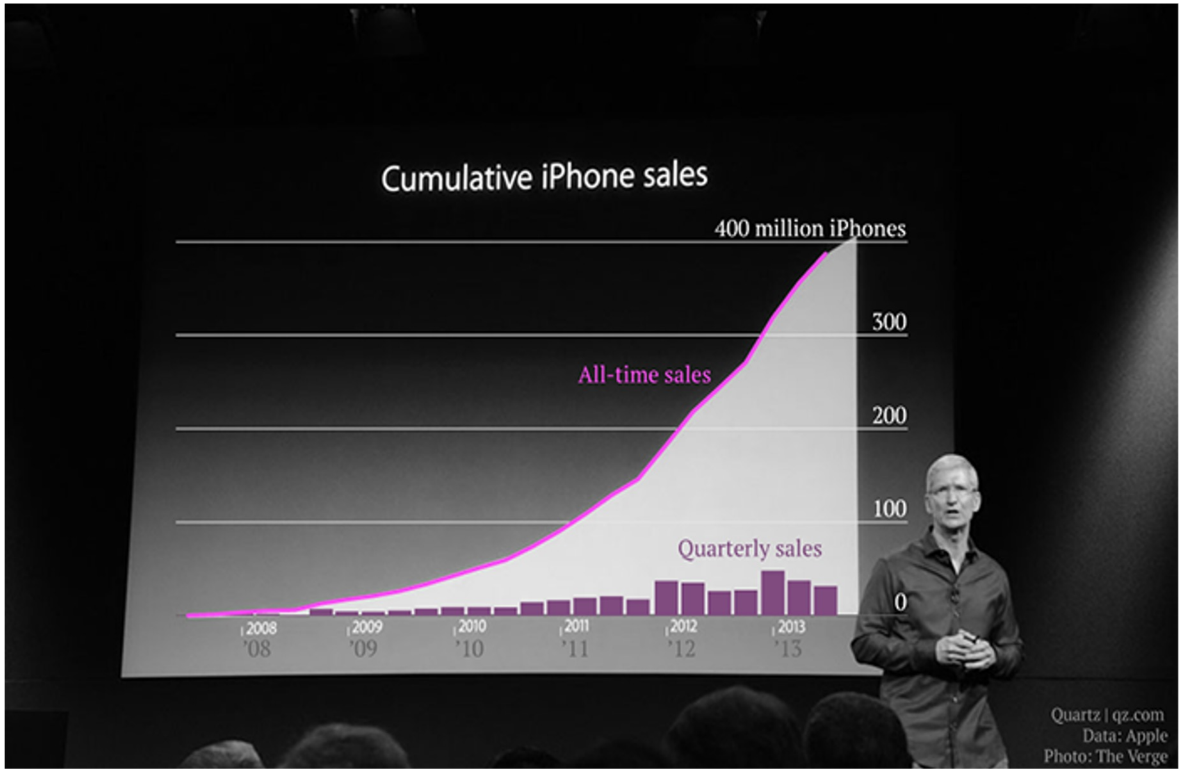
Продажи Apple iPhone стремительно растут, не так ли?



Насколько взрывным является этот рост на самом деле?

Кумулятивные распределения дают ошибочное представление о темпах роста.

Постепенное изменение является производной этой функции, которую трудно визуализировать.



Тренировка

- Дан ряд углов скольжения самолета в момент сбрасывания бомбы

-20,-60,-10, 30, 60, 70, -10,

-30,-120, -100, -80, 20, 40, -60,

-10, 20, 30, -80, 60, 70

- Построить статистическую функцию распределения
- У кого хорошее решение? Какие ошибки типичны на графике

Гистограмма

- Если данных много, то простой статистический ряд не удобен
- Разделим наблюдения на разряды и посчитаем частоты попадания:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}$$

- Таблица с интервалами разрядов и p_i^* называется статистическим рядом

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$	...	$x_i;\ x_{i+1}$	...	$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_i^*	...	p_k^*

- Что делать если значение попало на границу интервалов?

Давайте посмотрим решение

https://colab.research.google.com/drive/1PnR5vCcxVSRN-VdLX86fgH0fYx-LwMJL

Построение статистической функции распределения

$$F^*(x_1) = 0$$
$$F^*(x_2) = p_1^*$$
$$F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*$$
$$\ldots$$
$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^*$$
$$F^*(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$$

Описательная статистика

Описательная статистика предоставляет способы фиксации свойств данного набора данных/выборки.

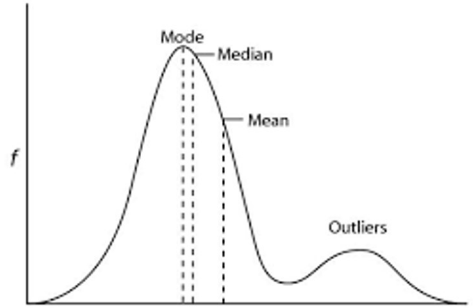
- Меры центральной тенденции описывают центр распределения данных.
- Меры вариации или изменчивости описывают разброс данных, т.е. насколько далеко измерения лежат от центра.

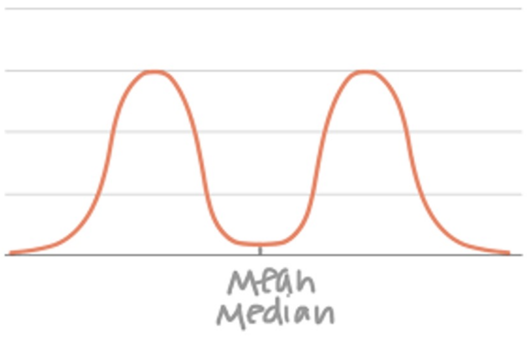
Мера центральности: среднее значение

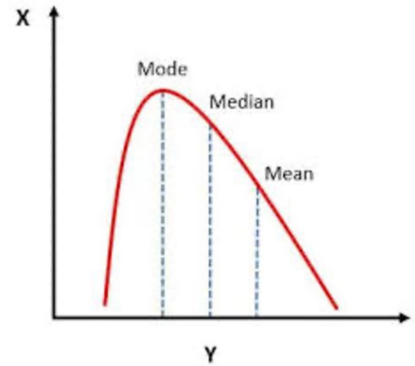
Чтобы вычислить среднее значение, просуммируйте значения и разделите их на количество наблюдений:

$$\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов.







Другие меры центральности

Медиана представляет собой «серединное» значение.

Среднее геометрическое — это корень n-й степени из произведения n значений:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Среднее геометрическое всегда <= среднее арифметическое и более чувствительно к значениям, близким к нулю.

Геометрические средние имеют смысл с соотношениями:

1/2 и 2/1 должны в среднем давать 1.

Какая мера лучше всего?

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов: например. рост и вес.

Медиана лучше подходит для асимметричных распределений или данных с выбросами: например, богатство и доход.

Билл Гейтс добавляет 250 долларов к среднему доходу на душу населения, но ничего не добавляет к медиане.

Показатель отклонения: стандартное отклонение

Дисперсия представляет собой квадрат сигмы стандартного отклонения.

Мы делим на n или n-1?

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

СКО генеральной совокупности делится на n, СКО выборки на n-1 (почему – узнаем позже), но для больших n: n ~ (n-1), так что это не имеет особого значения.

Интерпретация дисперсии (фондовый рынок)

Отношение «сигнал/шум» измерить сложно, поскольку многое из того, что вы видите, — это всего лишь дисперсия.

Рассмотрите возможность измерения относительного «навыка» различных инвесторов фондового рынка.

Ежегодные колебания эффективности фондов таковы, что результаты деятельности инвесторов случайны, а это означает, что реальная разница в навыках незначительна.

Интерпретация дисперсии (много моделей)

Обычно для каждой задачи мы разрабатываем несколько моделей, от очень простых до сложных.

Некоторая разница в производительности будет объяснена простой дисперсией: какие пары обучения/оценки были выбраны, насколько хорошо были оптимизированы параметры и т. д.

Небольшой выигрыш в производительности сложных моделей является аргументом в пользу более простых моделей.

Методы уменьшения дисперсии

Хотя идти на занятия пешком медленнее, чем ехать на автобусе, разница во времени прибытия меньше.

Повторение эксперимента несколько раз уменьшает дисперсию (перекрестная проверка в k-кратном размере).

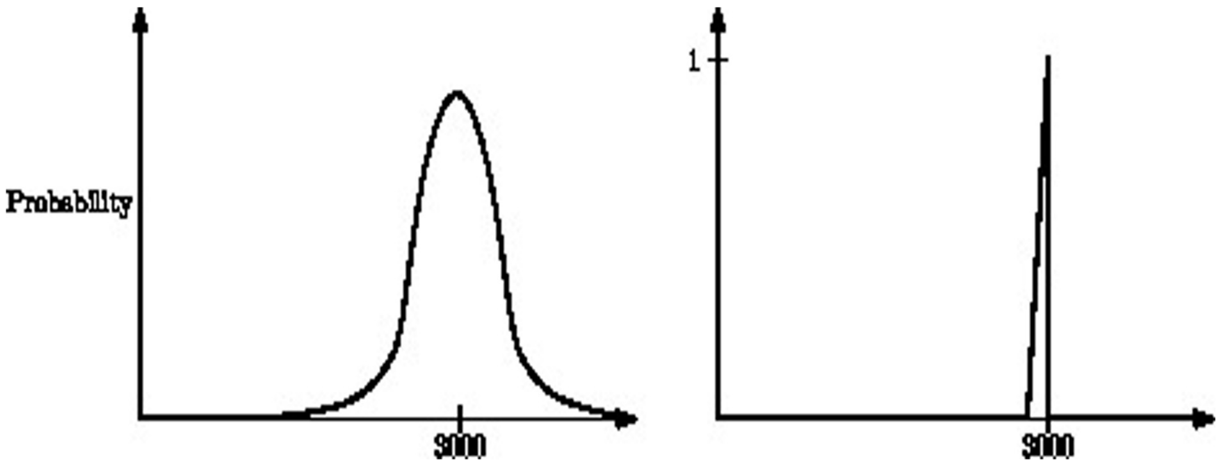
То же самое относится и к правильной случайной и детерминированной выборке.

Устранение выбросов (если это оправдано) уменьшает дисперсию.

Распределение срока службы картриджей принтера

Распределения с одинаковым средним значением могут выглядеть очень по-разному.

Но вместе среднее и стандартное отклонение довольно хорошо характеризуют любое распределение.



Приближенные вычисления

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^*$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^*$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^s p_i^*$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^s p_i^*$$

Выравнивание статистических рядов

- Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем. что число наблюдений ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты.
- Только при очень большом числе наблюдений эти элементы случайности сглаживаются, и случайное явление обнаруживает в полной мере присущую ему закономерность.
- На практике мы почти никогда не имеем дела с таким большим числом наблюдений и вынуждены считаться с тем, что любому статистическому распределению свойственны в большей или меньшей, мере черты случайности.
- Поэтому при обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Такая задача называется задачей ***выравнивания*** (сглаживания) ***статистических рядов.***
- Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую плавную кривую распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение.

Как выравнивать?

- Как правило, принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров; задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

Например,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \text{при } \alpha \le x \le \beta \\ 0, \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta \end{cases} \qquad (2)$$

Что это за законы? Что будем подбирать?

Требуемые ограничения

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Метод моментов

- Согласно методу моментов, параметры ***a, b,*** . . . выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам.
- Например, если теоретическая кривая ***f(x)*** зависит только от двух параметров ***a*** и ***b,*** эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание и дисперсия теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками.
- Если кривая ***f(x)*** зависит от трех параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т. д.
- При выравнивании статистических рядов может оказаться полезной специально разработанная система ***кривых Пирсона,*** каждая из которых зависит в общем случае от четырех параметров. При выравнивании эти параметры выбираются с тем расчетом, чтобы сохранить первые четыре момента статистического распределения (математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый моменты).

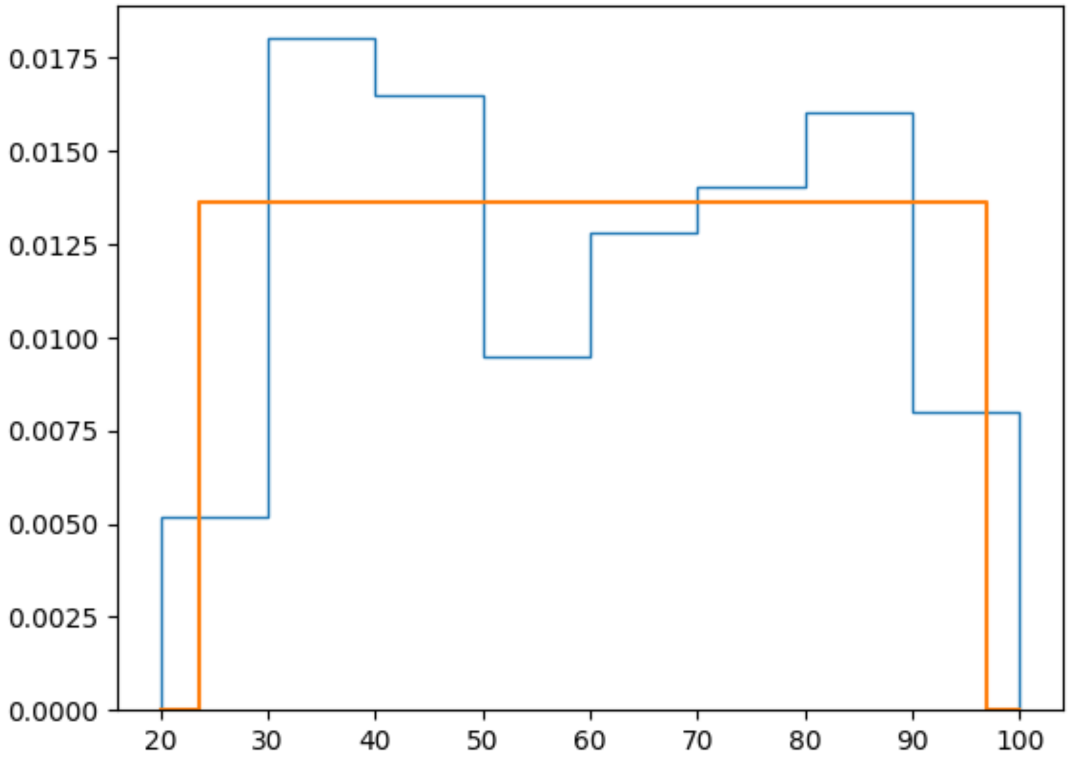
Пример

- С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты опытов представлены в виде статистического ряда:

I_i (*м*)	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

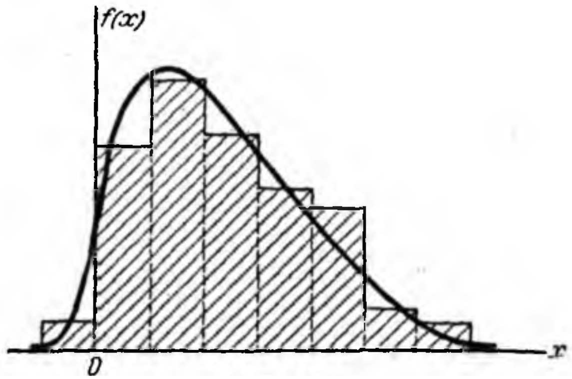
Решение

https://colab.research.google.com/drive/1Ce0rPKw1jdU7mRzOkgNRiKIln68XDzR0



Критерии согласия

- Допустим, что данное статистическое распределение выравнено с помощью некоторой теоретической кривой



- Как бы хорошо, ни была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения.
- Вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная нами кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение?
- Для ответа служат «критерии согласия».

Идея метода

- Гипотеза ***H***: случайная величина ***X*** подчиняется некоторому определенному закону распределения. Этот закон может быть задан в той или иной форме: например, в виде функции распределения ***F (x***) или в виде плотности распределения ***f (x) ,*** или же в виде совокупности вероятностей p_i**,** где p_i — вероятность того, что величина ***X*** попадет в пределы ***i***-го разряда.
- рассмотрим величину ***U ,*** характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений.
- Величина ***U*** может быть выбрана различными способами; например, в качестве ***U*** можно взять сумму квадратов отклонений теоретических вероятностей p_i от соответствующих частот p_i^* или же сумму тех же квадратов с некоторыми коэффициентами («весами»), или же максимальное отклонение статистической функции распределения ***F*(x)*** от теоретической ***F(x)*** и т. д. Допустим, что величина ***U*** выбрана тем или иным способом. Очевидно, это есть некоторая ***случайная величина.***

Идея метода (2)

- Закон распределения случайной величины ***U*** зависит от закона распределения случайной величины ***X*** ***,*** над которой производились опыты, и от числа опытов ***n.*** Если гипотеза ***H*** верна, то закон распределения величины ***U*** определяется законом распределения величины X (функцией F(x)) и числом ***n.***
- Допустим, что этот закон распределения нам известен. В результате данной серии опытов обнаружено, что выбранная нами мера расхождения ***U*** приняла некоторое значение ***u***.
- Можно ли объяснить это случайными причинами или же это расхождение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями и, следовательно, на непригодность гипотезы ***H***?

Идея метода (3)

- Предположим, что гипотеза ***H*** верна, и вычислим в этом предположении вероятность того, что за счет случайных причин, связанных с недостаточным объемом опытного материала, мера расхождения ***u*** окажется не меньше, чем наблюденное нами в опыте значение. Вычислим вероятность события:

$$U \geq u$$

- Если эта вероятность весьма мала, то гипотезу следует *отвергнуть* как мало правдоподобную
- Если же эта вероятность значительна, следует признать, что *экспериментальные данные не противоречат гипотезе **H**.*

Как следует выбирать $\boldsymbol{U}$?

- При некоторых способах ее выбора закон распределения величины $\boldsymbol{U}$ обладает весьма простыми свойствами.
- При достаточно большом $\boldsymbol{n}$ он практически не зависит от функции $\boldsymbol{F(x)}$.

Критерий Хи-квадрат Пирсона

- Произведено ***n*** независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ***X*** приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в *k* разрядов и оформлены в виде статистического ряда:

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$	...	$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

- Зная теоретический закон распределения, можно найти теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из разрядов:

$$p_1, p_2, \dots p_k$$

- В качестве меры возьмем

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i (p_i^* - p_i)^2$$

Критерий Хи-квадрат Пирсона (2)

- Коэффициенты c_i («веса» разрядов) вводятся потому, что в общем случае отклонения, относящиеся к различным разрядам, нельзя считать равноправными по значимости.
- Одно и то же по абсолютной величине отклонение $p_i^* - p_i$ может быть мало значительным, если сама вероятность p_i велика, и очень заметным, если она мала. Поэтому естественно «веса» c_i взять обратно пропорциональными вероятностям разрядов p_i.
- ***Если положить***

$$c_i = \frac{n}{p_i}$$

то при больших n закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами:

он практически не зависит от функции распределения $F(x)$ и от числа опытов n, а зависит только от числа разрядов k,

Этот закон при увеличении n приближается к «распределению χ^2»

Мера расхождения

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \qquad U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - p_i)^2}{np_i}$$

χ^2 с *r* степенями свободы – это распределение суммы квадратов *r* независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормальному закону с мат.ожиданием = *0* и дисперсией = 1.

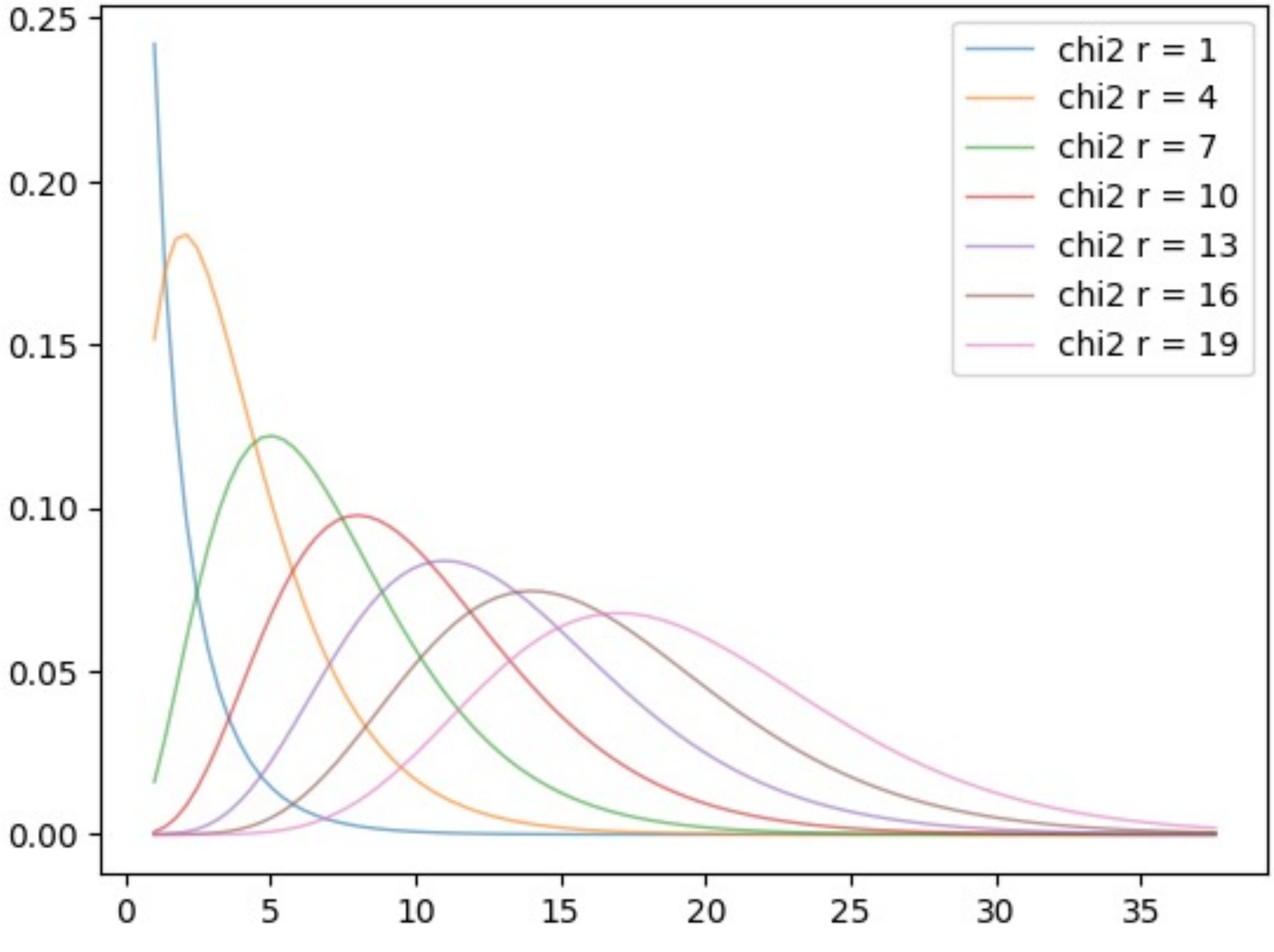
Плотность распределения:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \text{ при } u > 0 \\ 0 \text{ при } u \leq 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – гамма функция.

мат.ожидание $\mathrm{M}[U] = r$ и дисперсия $D[U] = 2r.$

Функция плотности распределения χ^2



Как определить число степеней свободы

- Распределение χ^2 зависит от параметра ***r,*** называемого числом «степеней свободы» распределения. Число «степеней свободы» *r* равно числу разрядов *k* минус число независимых условий («связей»), наложенных на частоты $\boldsymbol{p_i}$**.**
- ***Примеры условий:***

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^* = m_x$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^* = D_x$$

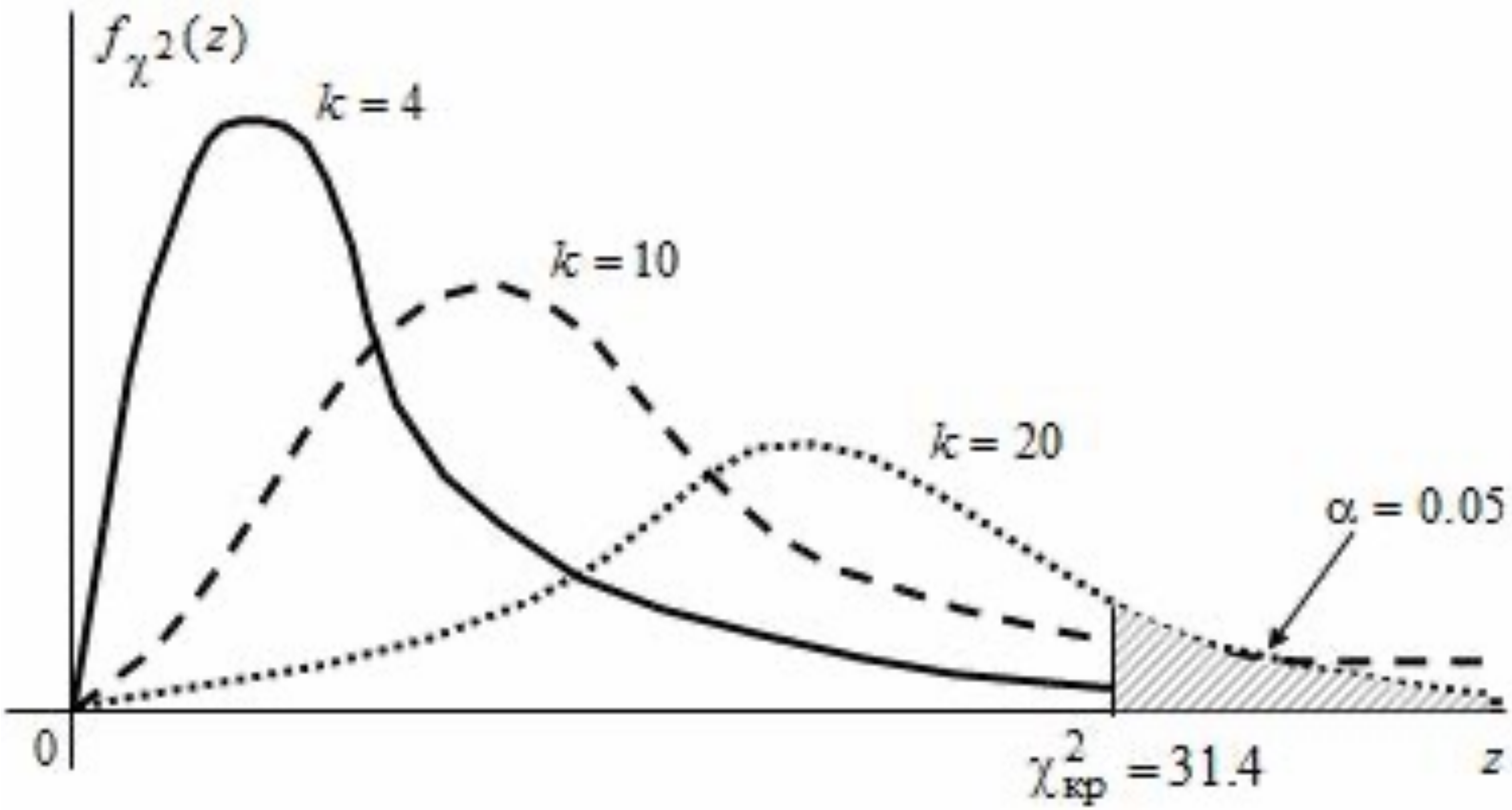
Как посчитать критерий

https://colab.research.google.com/drive/1EuF6rmUqZtt8EQEThsVeiSbNZ8G7TKcx

Смысл p-value

- Распределение χ^2 дает возможность оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений,
- Будем исходить из того, что величина ***X*** действительно распределена по закону ***F (x).***
- Тогда вероятность ***p (p-value)***, есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений будет не меньше, чем фактически наблюденное в данной серии опытов значение χ^2.
- Если эта вероятность***, p*** весьма мала (настолько мала, что событие с такой вероятностью можно считать практически невозможным), то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе ***H*** о том, что закон распределения величины ***X*** есть ***F (x) .***
- Эту гипотезу следует отбросить как неправдоподобную. Напротив, если вероятность ***p*** сравнительно велика, можно признать расхождения между теоретическим и статистическим распределениями несущественными и отнести их за счет случайных причин. Гипотезу ***H*** о том, что величина ***X*** распределена по закону ***F*** (x), можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным.

Смысл p-value



На сколько должно быть мало p-value?

- Вопрос неопределенный; он не может быть решен из математических соображений, так же как и вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события для того, чтобы считать его практически невозможным.
- На практике, если ***p*** оказывается меньшим чем 0,1, рекомендуется проверить эксперимент, если возможно — повторить его и в случае, если заметные расхождения снова появятся, пытаться искать более подходящий для описания статистических данных закон распределения.
- С помощью критерия χ^2 (или любого другого критерия согласия) можно только в некоторых случаях ***опровергнуть*** выбранную гипотезу ***H*** и отбросить ее как явно несогласную с опытными данными.
- Если же вероятность ***p*** велика, то этот факт сам по себе ни в коем случае не может считаться доказательством справедливости гипотезы ***H,*** а указывает только на то, что гипотеза не противоречит опытным данным.

Критерий Колмогорова

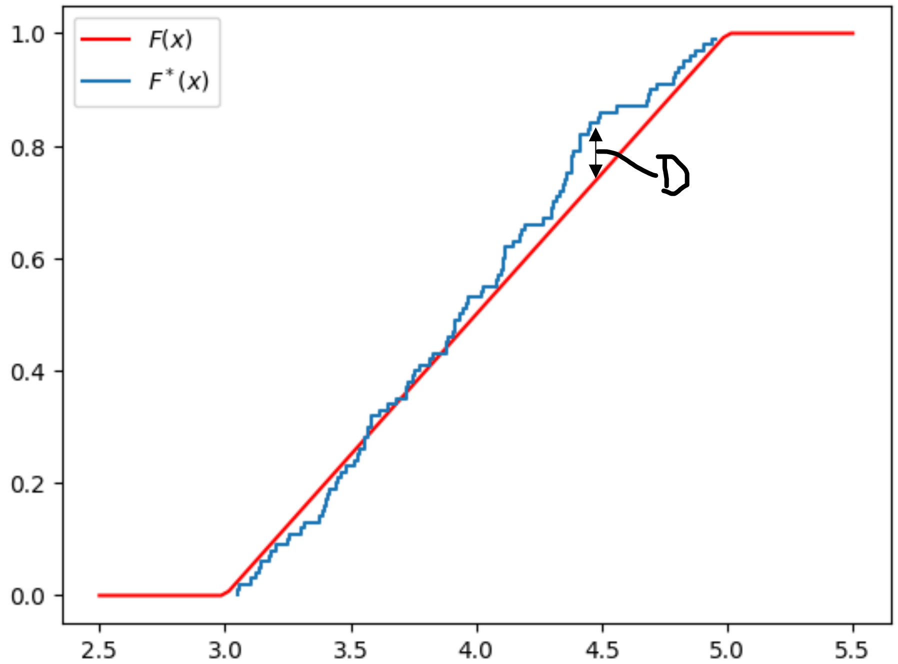
$$D = \max|F^*(x) - F(x)|$$

- Какова бы ни была функция распределения F(***x***) непрерывной случайной величины ***X***, при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений ***n*** вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

- стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$



Как посчитать критерий Колмогорова

https://colab.research.google.com/drive/1g9aS5RpoBYB-xcwreZ0TCns0RBBL-mdv

Критерий Колмогорова. Когда применим?

- Можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение ***F(x)*** полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т. е. когда известен не только вид функции распределения ***F(x),*** но и все входящие в нее параметры.
- Такой случай сравнительно редко встречается на практике. Обычно из теоретических соображений известен только общий вид функции ***F(x)****, а* входящие в нее числовые параметры определяются по данному статистическому материалу.
- При применении критерия χ^2 это обстоятельство учитывается соответствующим уменьшением числа степеней свободы распределения χ^2**.** Критерий А. Н. Колмогорова такого согласования не предусматривает. Если все же применять этот критерий в тех случаях, когда параметры теоретического распределения выбираются по статистическим данным, критерий дает заведомо завышенные значения вероятности P(X); поэтому мы в ряде случаев рискуем принять как правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными данными.

Оценка параметров

- Для поиска закона распределения нужно много наблюдений
- А что делать если их мало?
- На основе ограниченного числа наблюдений можно приблизительно найти параметры законов – мат. ожидание, дисперсия …
- Любая оценка на основе опытов – случайная величина
- Будем заниматься поиском «оценок параметров»
- Желательно найти оценку с минимальной ошибкой

Общая задача оценки параметров

Дано:

Наблюдения сл.величины X: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Закон распределения наблюдений одинаков

Пусть $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – оценка

$\tilde{a}$ - это функция

$\tilde{a}$ - это случайная величина

Закон распределения $\tilde{a}$ зависит от:

1) закона распределения X

2) числа наблюдений n

Требуется найти $\tilde{a}$ удовлетворяющую требованиям на следующем слайде

Требования к оценке $\tilde{a}$

- Состоятельность: при увеличении n оценка $\tilde{a}$ должна сходиться по вероятности к параметру a.
- Несмещенность: $\mathrm{M}[\tilde{a}] = a$
- Эффективность: $\mathrm{D}[\tilde{a}] \to \min$

Оценка $\tilde{a}$ должна быть получена за приемлемое время, поэтому требования могут немного нарушаться.

Оценка мат.ожидания

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Состоятельность: следует из закона больших чисел

Несмещенность: $M[\tilde{m}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} m}{n} = m$

Эффективность?

$$\mathrm{D}[\tilde{m}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} D}{n^2} = \frac{1}{n} D$$

Для нормального закона – эффективна, для других может быть не так.

Оценка дисперсии

Предположим: $D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^2}{n}$

Состоятельность:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - \widetilde{m}^2$$

$$\alpha_2[X] - m^2 = D \ \blacksquare$$

Несмещенность?

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n^2} - 2\frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2} = \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n^2}$$
$$- 2\frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2}$$

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M[{X_i}^2] - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} M[X_i X_j]$$

Несмещенность дисперсии

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} M[{X_i}^2] - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} M[X_i X_j]$$

Пусть начало координат будет в точке m. Тогда

$$M[{X_i}^2] = M[{\dot{X}_i}^2] = D; \quad \sum_{i=1}^{n} M[{X_i}^2] = nD$$

$M\left[X_i X_j\right] = M\left[\dot{X}_i \dot{X}_j\right] = K_{ij} = 0$, так как опыты независимы

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n} D$$

Несмещенная оценка дисперсии

$$\widetilde{D} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widetilde{m})^2}{n-1}$$

Если $n \to \infty$, то $\frac{n}{n-1} \to 1$, поэтому если D^* состоятельна, то $\widetilde{D}$ состоятельна.

Иногда удобней вычислить:

$$\widetilde{D} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2}{n} - \widetilde{m}^2\right] \frac{n}{n-1}$$

Доверительный интервал

К каким ошибкам может привести замена a на $\tilde{a}$?

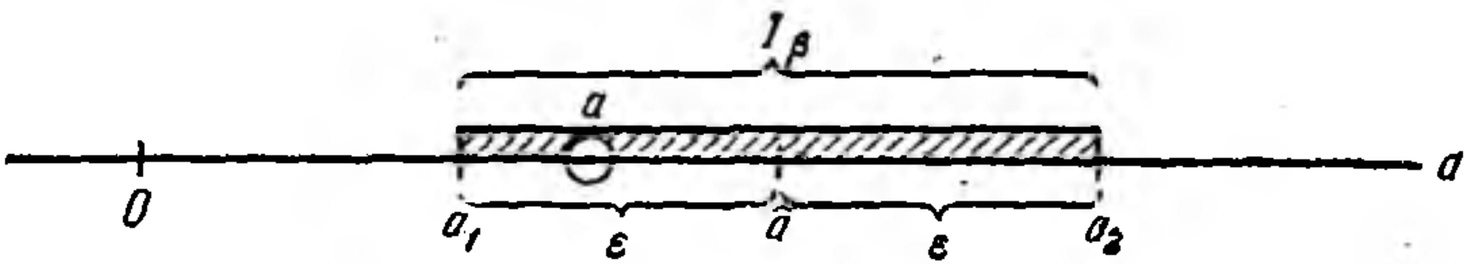
Найти ε для β=0.9, 0.95, 0.99, чтобы

$$P(|a - \tilde{a}| < \varepsilon) = \beta$$

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta$$

$$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon;\ \tilde{a} + \varepsilon) - \text{доверительный интервал}$$

Что тут случайно? a или I_β?



β- доверительная вероятность

Нахождение доверительного интервала для мат.ожидания

$$\widetilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}; \quad \widetilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \widetilde{m})^2}{n-1}$$

При большом n (на практике даже для n 10-20) закон распределения $\widetilde{m}$ приближенно можно считать нормальным. Параметры m и $\frac{D}{n}$.

$$P\left(|m - \widetilde{m}| < \varepsilon_\beta\right) = \beta$$

$$P\left(|m - \widetilde{m}| < \varepsilon_\beta\right) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\widetilde{m}}}\right) - 1,$$

$$\sigma_{\widetilde{m}} = \sqrt{D/_n}$$

$$2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\widetilde{m}}}\right) - 1 = \beta, \qquad \varepsilon_\beta = \sigma_{\widetilde{m}}\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Приближенно $\sigma_{\widetilde{m}} = \sqrt{\widetilde{D}/_n}$

$$t_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

$$I_\beta = \left(\widetilde{m} - \sigma_{\widetilde{m}} t_\beta; \widetilde{m} + \sigma_{\widetilde{m}} t_\beta\right)$$

Пример нахождения доверительного интервала для мат.ожидания

https://colab.research.google.com/drive/16VGMdfp8xvsBNBhMttWlzsJHuLKXPc6D

Доверительный интервал для дисперсии

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{m})^2}{n-1}; \; \tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$\frac{(X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$ - величины не являются независимыми, они зависят от $\tilde{m}$ куда входят все. Но при $n \approx 20—30$ его можно считать нормальным.

$$M[\tilde{D}] = D$$

$$D[\tilde{D}] = \frac{1}{n}\mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2$$

$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{m})^4}{n}$ даст невысокую точность

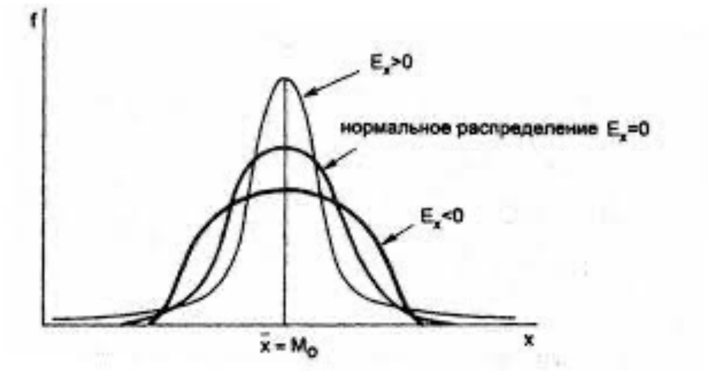
Доверительный интервал для дисперсии (2)

Для нормального закона: $\mu_4 = 3D^2$

$$D[\widetilde{D}] = \frac{3}{n} D^2 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2$$

$$D[\widetilde{D}] = \frac{2}{n-1} D^2.\ D[\widetilde{D}] = \frac{2}{n-1} \widetilde{D}^2. \sigma_{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, \widetilde{D}$$

Для равномерного закона:



$$\mu_4 = \frac{(\beta-\alpha)^4}{80}; \quad D = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

$$\mu_4 = 1.8D^2$$

$$D[\widetilde{D}] = \frac{0.8n+1.2}{n(n-1)} D^2. \sigma_{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{0.8n+1.2}{n(n-1)}}\, \widetilde{D}$$

Когда закон не известен и нет оснований считать что он сильно отличается от нормального (не обладает заметным эксцессом), то рекомендуется считать $\sigma_{\widetilde{D}}$ по формуле для нормального закона.

$$I_\beta = (\widetilde{D} - \sigma_{\widetilde{D}} t_\beta; \widetilde{D} + \sigma_{\widetilde{D}} t_\beta)$$

Пример нахождения доверительного интервала для дисперсии

https://colab.research.google.com/drive/16VGMdfp8xvsBNBhMttWlzsJHuLKXPc6D

Точные методы построения доверительных интервалов

- Для точного нахождения доверительных интервалов нужно знать закон распределения X
- Параметры этого закона иногда можно и не знать. Задача решается путем перехода к другой случайной величине.

Доверительные интервалы для нормального закона

$$T = \sqrt{n}\frac{\widetilde{m} - m}{\sqrt{\widetilde{D}}}$$

Подчиняется закону распределения Стьюдента с n-1 степенью свободы:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

где $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du.$$

Доверительные интервалы для нормального закона

$$V = \frac{(n-1)\widetilde{D}}{D}$$

имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы.

$$k_{n-1}(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} \text{ при } v > 0 \\ 0 \text{ при } v \le 0 \end{cases},$$

Переход к величине T

$$P\left(|m-\tilde{m}|<\varepsilon_\beta\right)=\beta \qquad T=\sqrt{n}\frac{\tilde{m}-m}{\sqrt{\tilde{D}}}$$

$$P\left(\sqrt{n}\frac{|\tilde{m}-m|}{\sqrt{\tilde{D}}}<\frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}}\right)=\beta \quad P\left(|T|<\frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}}\right)=\beta$$

$$P\left(|T|<t_\beta\right)=\beta \quad P\left(|T|<t_\beta\right)=\int_{-t_\beta}^{t_\beta}S_{n-1}(t)dt$$

Так $S_{n-1}(t)$ четная функция: $2\int_0^{t_\beta}S_{n-1}(t)dt=\beta$ по таблице можно найти t_β по заданному β.

$$\varepsilon_\beta=t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}. \qquad I_\beta=\left(\tilde{m}-t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}};\tilde{m}+t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}\right)$$

Пример расчетов интервала мат.ожидания Т-критерием

https://colab.research.google.com/drive/1H2oZnJRXir3GrjzHHZtqcmNkr89OfL9y

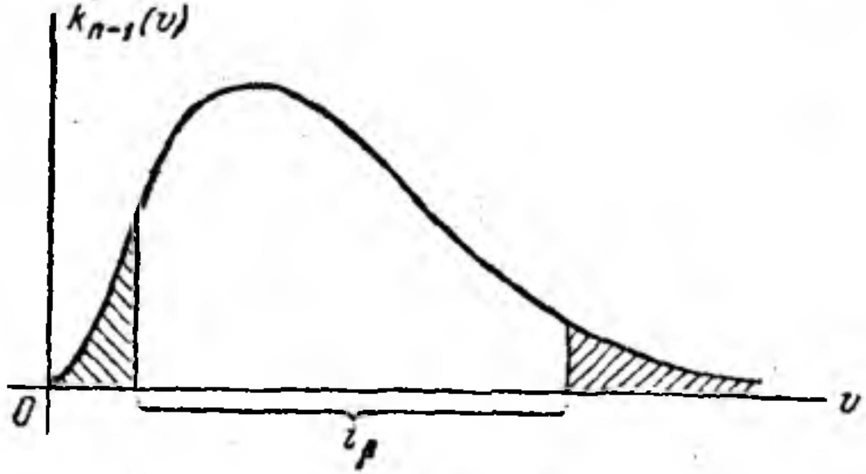
Точный интервал для дисперсии

$$V = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D} \qquad \tilde{D} = V\frac{D}{(n-1)}$$

Закон не симметричен

Условимся выбирать интервал так чтобы слева и справа была одинаковая площадь:

$$p = \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2} \qquad P(V > \chi^2) = p$$



Точный интервал для дисперсии (2)

$$P(D_1 < D < D_2) = \beta$$

$$I_\beta = \left(\frac{\widetilde{D}(n-1)}{\chi_1^2}; \frac{\widetilde{D}(n-1)}{\chi_2^2}\right)$$

$$\frac{\widetilde{D}(n-1)}{\chi_1^2} < D; \frac{\widetilde{D}(n-1)}{\chi_2^2} > D$$

Равносильно

$$\mathrm{V} < \chi_1^2; V > \chi_2^2$$

Пример расчетов интервала дисперсии V-критерием

https://colab.research.google.com/drive/1H2oZnJRXir3GrjzHHZtqcmNkr89OfL9y

Оценка вероятности по частоте

Оценка вероятности p – это среднее сл. величины X, в каждом опыте она принимает значение 1, если событие произошло и 0, если не произошло.

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$M[X] = p, q = 1 - p, D[X] = pq$$

Несмещенность: $M[p^*] = p$

$D[p^*] = \frac{pq}{n}$ - это минимально возможная дисперсия, т.е. оценка эффективна.

Доверительный интервал для вероятности

Если число опытов велико и p не слишком мала и не слишком велика, то распределение частоты p^* близко нормальному. Достаточно чтобы $p^* n$ и $(1 - p^*)n$ были больше 4-х.

$$m_{p^*} = p; \ \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$P\left(|p^* - p| < \varepsilon_\beta\right) = \beta$$

$$P\left(|p^* - p| < \varepsilon_\beta\right) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{p^*}}\right) - 1,$$

$$t_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right), \varepsilon_\beta = t_\beta \sigma_{p^*}$$

$$|p^* - p| < t_\beta \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$(p^* - p)^2 < \frac{t_\beta^2}{n} p(1-p)$$

Доверительный интервал для вероятности (2)

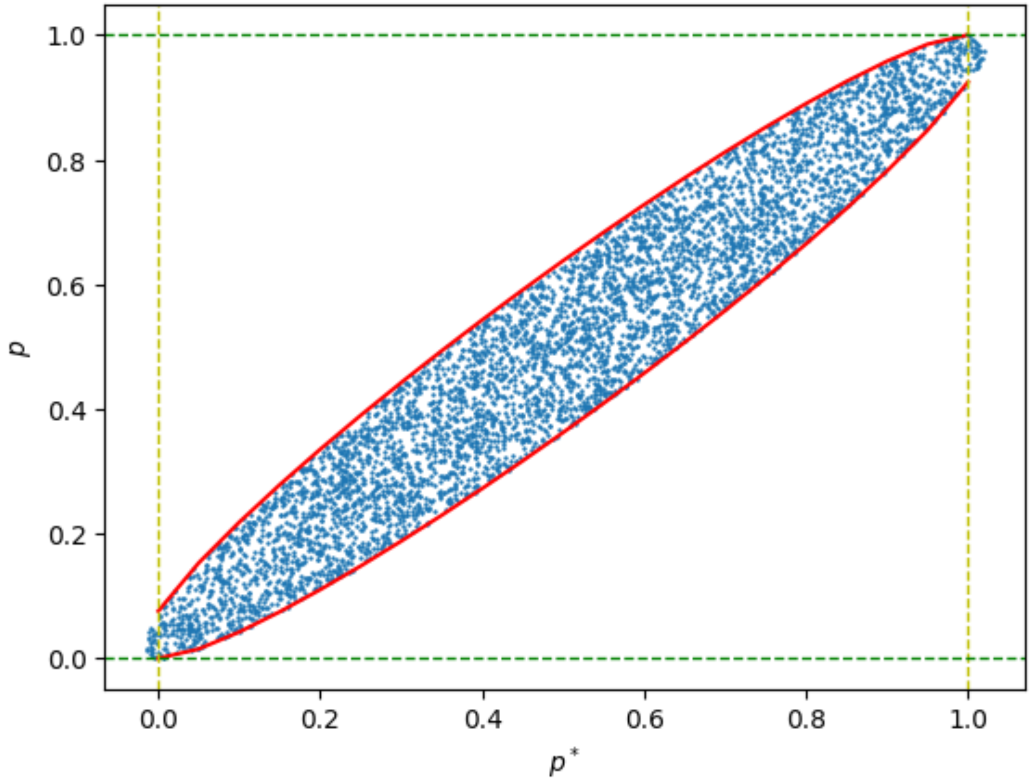
$$(p^* - p)^2 < \frac{t_\beta^2}{n} p(1-p)$$

Заменяя неравенство на равенство получим 2 корня:

$$p_1 = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{n} - t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}$$

$$p_2 = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{n} + t_\beta\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}$$

$$I_\beta = (p_1, p_2)$$



Пример расчета дов.интервала для вероятности

https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah-

Доверительный интервал p для малого числа опытов

Число наблюдений события (m) в n опытах распределено по биномиальному закону:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Распределение не симметрично.

Так как $P_{m,n}$ прерывистая, то интервала в точности соответствующего доверительной вероятности β может не существовать.

В качестве p_1, p_2 возьмем наименьший интервал, вероятность попасть левее или правее которого будет больше ${}^{\alpha}/_{2}$. $\alpha = 1 - \beta$.

Доверительный интервал *p* для малого числа опытов (2)

$$\sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}$$

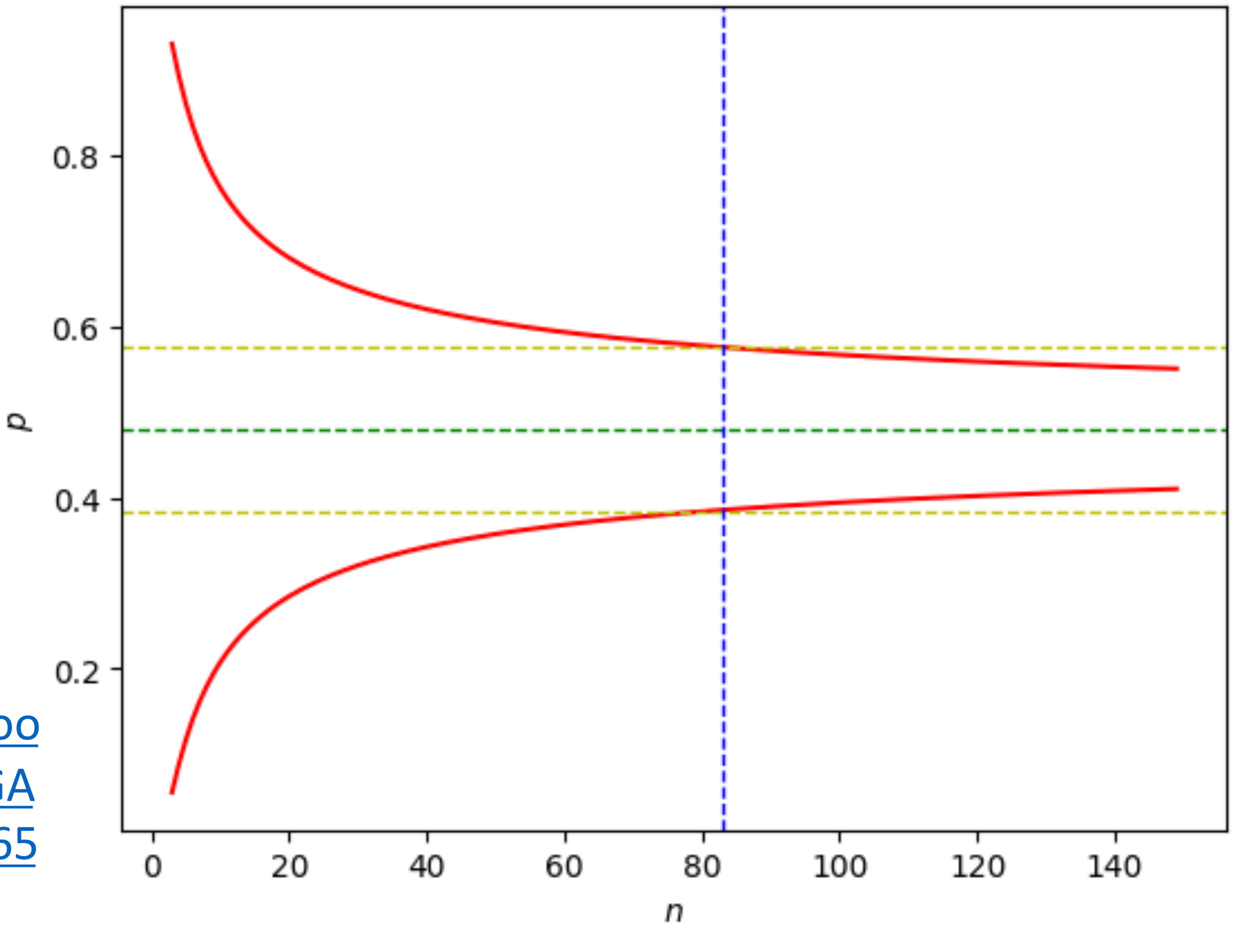
$$k = np^*$$

Пример расчета дов.интервала для p для малого числа опытов

https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah-

Расчет необходимого числа опытов

Проведено 25 опытов, в которых событие А произошло 12 раз. Найти ориентировочно число опытов n, которое понадобится для того, чтобы с вероятностью = 0.9 ошибка от замены вероятности частотой не превзошла 20%.



https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah-

Расчет необходимого числа опытов (2)

- После выполнения потребного числа опытов может понадобиться новая проверка точности определения вероятности по частоте, так как будет получено в общем случае уже другое значение частоты p*, отличное от наблюденного в ранее проведенных опытах.
- Может оказаться, что число опытов все еще недостаточно для обеспечения необходимой точности, и его придется несколько увеличить.
- Однако первое приближение, полученное описанным выше методом, может служить для ориентировочного предварительного планирования серии опытов с точки зрения требуемого на них времени, денежных затрат и т.д.

Пример расчета числа опытов для малой вероятности

Пусть $p^* = 0$.

$$p_1 =?\ p_2 =?$$

Дано событие A, его вероятность p, Обозначим B– событие A не появилось ни разу в серии n опытов.

$$P(B) = (1 - p)^n$$

$$P(B) = \alpha \qquad \alpha = 1 - \beta$$

$$(1 - p_2)^n = 1 - \beta$$

$$p_2 = 1 - \sqrt[n]{1 - \beta}$$

https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah-

Расчет числа опытов для нулевой частоты

$$(1 - p_2)^n = 1 - \beta$$

$$\log(1 - p_2)^n = \log(1 - \beta)$$

$$n \log(1 - p_2) = \log(1 - \beta)$$

$$n = \left\lceil \frac{\log(1 - \beta)}{\log(1 - p_2)} \right\rceil$$

https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah-

Оценки для числовых характеристик системы случайных величин

Рассмотрим случай двух случайных величин

Даны результаты *n* независимых опытов над системой случайных величин (*X*, *Y*):

$$(x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots (x_n, y_n).$$

Требуется найти оценки для числовых характеристик системы:

$$\widetilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \widetilde{m}_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};$$

$$\widetilde{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{m}_x)^2}{n-1}, \widetilde{D}_y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{m}_y)^2}{n-1},$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\widetilde{D}_x}, \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\widetilde{D}_y}.$$

Корреляционный момент (ковариация): $\widetilde{K}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{m}_x)(y_i - \widetilde{m}_y)}{n-1}.$

Коэффициент корреляции (Пирсона): $\tilde{r}_{xy} = {}^{\widetilde{K}_{xy}}/_{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}$

Связь между центральными и начальными статистическими моментами

$$D_x^* = \alpha_2^*[X] - \tilde{m}_x^2, D_y^* = \alpha_2^*[Y] - \tilde{m}_y^2$$

$$K_{xy}^* = \alpha_{1,1}^*[X, Y] - \tilde{m}_x \tilde{m}_y$$

$$\alpha_2^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}, \qquad \alpha_2^*[Y] = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}$$

$$\alpha_{1,1}^*[X, Y] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}$$

Связь между центральными и начальными статистическими моментами (2)

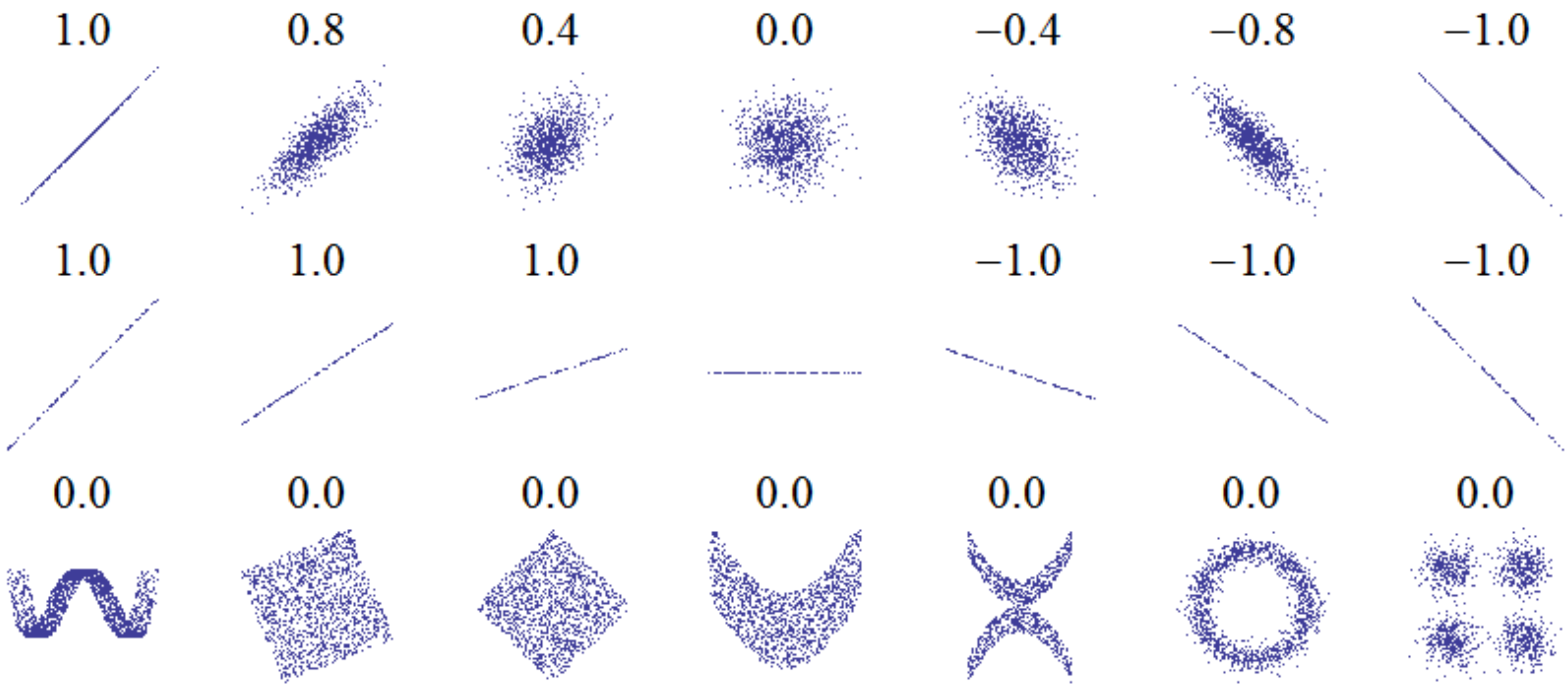
$$\widetilde{D}_x = D_x^* \frac{n}{n-1}, \widetilde{D}_y = D_y^* \frac{n}{n-1}$$

$$\widetilde{K}_{xy} = K_{xy}^* \frac{n}{n-1}$$

Пример задачи:

https://colab.research.google.com/drive/1GXNFmzsfRt92jZV-RhFI_H4ha5XCmola

Примеры корреляций



Обработка наблюдений над системой произвольного числа случайных величин

Даны результаты n независимых опытов над системой случайных m величин:

$$(X_1, X_2, \dots, X_m).$$

Требуется найти оценки для числовых характеристик системы:

$$\widetilde{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n}, \widetilde{D}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \widetilde{m}_j)^2}{n-1}, \tilde{\sigma}_j = \sqrt{\widetilde{D}_j}.$$

Корреляционный момент (ковариация):

$$\widetilde{K}_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \widetilde{m}_j)(x_{ik} - \widetilde{m}_j)}{n-1}.$$

Коэффициент корреляции (Пирсона):

$$\tilde{r}_{jk} = \widetilde{K}_{jk} \Big/ \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_k$$

Обработка наблюдений над системой произвольного числа случайных величин

Пример:

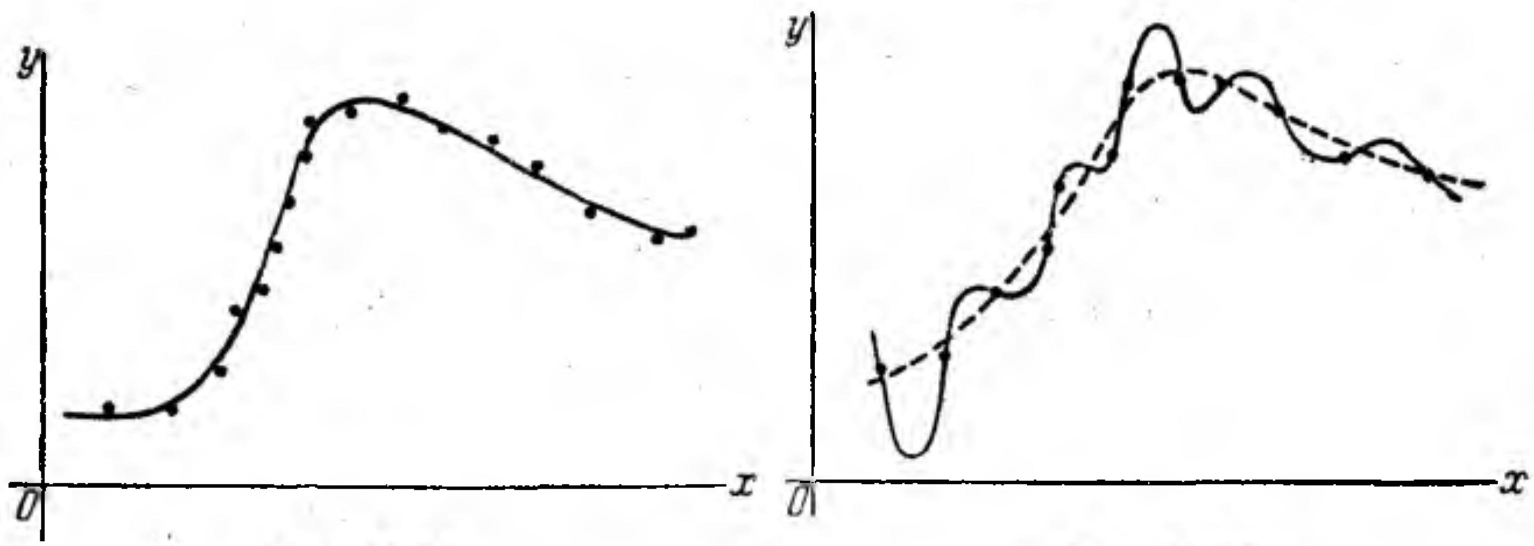
https://colab.research.google.com/drive/1GXNFmzsfRt92jZV-RhFI_H4ha5XCmola

Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов

Пусть величины x и y связаны функциональной зависимостью:

$$y = \varphi(x)$$

Вид этой зависимости и требуется определить из опыта.



Обычно экспериментальные точки на графике располагаются не совсем правильным образом — дают некоторый «разброс», т. е. обнаруживают случайные отклонения от видимой общей закономерности.

Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов (2)

Задача сглаживания экспериментальной зависимости:

> Желательно обработать экспериментальные данные так, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости у от х, но вместе с тем сгладить незакономерные, случайные уклонения, связанные с неизбежными погрешностями самого наблюдения.

Для решения подобных задач обычно применяется расчётный метод, известный под названием метода наименьших квадратов (МНК).

Пусть имеются результаты n независимых опытов, оформленные в виде простой статистической таблицы, где *i*— номер опыта; x_i — значение аргумента; y_i— соответствующее значение функции.

Метод наименьших квадратов дает возможность при заданном типе зависимости $\mathrm{y} = \varphi(x)$ так выбрать ее числовые параметры a, b, c, …. чтобы кривая $\mathrm{y} = \varphi(x)$ в известном смысле наилучшим образом отображала экспериментальные данные.

Обоснование МНК

Предположим, что истинная зависимость y от x в точности выражается формулой $y = \varphi(x)$; экспериментальные точки уклоняются от этой зависимости вследствие неизбежных ошибок измерения.

Ошибки измерения, как правило, подчиняются нормальному закону. Допустим, что это так.

Рассмотрим какое-нибудь значение аргумента x_i.

Результат опыта есть случайная величина Y_i, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $\varphi(x_i)$ и СКО σ_i, характеризующим ошибку измерения.

Предположим, что точность измерения во всех точках одинакова:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_n$$

Нормальный закон, по которому распределяется величина Y_i, можно записать в виде:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Обоснование МНК (2)

Рассмотрим событие: случайные величины $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ приняли значения $y_1, y_2, \dots y_n$.

Необходимо подобрать математические ожидания $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$, так чтобы вероятность этого события была максимальна (метод максимального правдоподобия).

Элементы вероятностей:

$$f_i(y_i)dy_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i-\varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}} dy_i$$

Найдем вероятность того, что система случайных величин $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ примет совокупность значений из интервалов $(y_i, y_i + dy_i), i = \overline{1,n}$:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i-\varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}} dy_i = K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\varphi(x_i))^2} \rightarrow \max$$

Обоснование МНК (3)

Показатель степени $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\varphi(x_i))^2}$ меньше или равен 0. Следовательно $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\varphi(x_i))^2}$ меньше или равен единице и принимает максимальное значение, когда абсолютное значение показателя минимально. Следовательно:

$$\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi(x_i)\right)^2 \to \min$$

Отбрасываем постоянный множитель:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi(x_i)\right)^2 \to \min$$

Решение для МНК в общем виде

$$\min_{a,b,c\dots} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, a, b, c \dots)\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, a, b, c \dots)\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, a, b, c \dots)\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \varphi(x_i, a, b, c \dots)\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)_i = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\dots.$$

МНК для линейной функции

$$\mathrm{y} = \varphi(x, a, b) = ax + b$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = x_i \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

МНК для линейной функции (решение)

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - b\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0\\ \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - b = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{1,1}^*[X,Y] - a\alpha_2^*[X] - b\widetilde{m}_x = 0\\ \widetilde{m}_y - a\widetilde{m}_x - b = 0\end{aligned}\right\}$$

$$b = \widetilde{m}_y - a\widetilde{m}_x$$

$$\alpha_{1,1}^*[X,Y] - a\alpha_2^*[X] + a\widetilde{m}_x^2 - \widetilde{m}_x\widetilde{m}_y = 0$$

МНК для линейной функции (решение)

$$\alpha_{1,1}^*[X,Y] - a\alpha_2^*[X] + a\widetilde{m}_x^2 - \widetilde{m}_x\widetilde{m}_y = 0$$

$$a = \frac{\alpha_{1,1}^*[X,Y] - \widetilde{m}_x\widetilde{m}_y}{\alpha_2^*[X] - \widetilde{m}_x^2} = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*}$$

$$b = \widetilde{m}_y - a\widetilde{m}_x$$

$$y = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} x + \widetilde{m}_y - \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} \widetilde{m}_x$$

$$y - \widetilde{m}_y = \frac{K_{xy}^*}{D_x^*} (x - \widetilde{m}_x)$$

МНК для функции второго порядка (решение)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_4^*[X]a + \alpha_3^*[X]b + \alpha_2^*[X]c = \alpha_{2,1}^*[X,Y] \\ \alpha_3^*[X]a + \alpha_2^*[X]b + \alpha_1^*[X]c = \alpha_{1,1}^*[X,Y] \\ \alpha_2^*[X]a + \alpha_1^*[X]b + \alpha_0^*[X]c = \alpha_{0,1}^*[X,Y] \end{array}\right\}$$

Пример задачи на МНК:

https://colab.research.google.com/drive/1eRHa0Ra31yPHmZ2f2Px5iNL9LmHqUrov

Спасибо за внимание!