

Теория вероятностей

Математическая
статистика

Владимир Анатольевич Судаков

Вероятность против статистики

- Вероятность занимается прогнозированием вероятности будущих событий, а статистика анализирует частоту прошлых событий.
- Вероятность — это теоретическая часть математики, посвященная следствиям определений, а статистика — это прикладная математика, пытающаяся осмыслить наблюдения из реального мира.

Литература

- Вентцель Е.С. Теория вероятностей
- Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика
- Triola, Mario F. Elementary statistics

Математическая статистика

- Разработка методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляет предмет специальной науки — математической статистики.
- Задачи математической статистики касаются вопросов обработки наблюдений над массовыми случайными явлениями, но в зависимости от характера решаемого практического вопроса и от объема имеющегося экспериментального материала эти задачи могут принимать ту или иную форму.

Типичные задачи статистики

- Определить закон распределения случайной величины (системы случайных величин)
- Проверить правдоподобие гипотез
- Найти неизвестные параметры распределения

Простая статистическая совокупность

- Дана случайная величина X
- Совокупность наблюдаемых значений X -простой статистический ряд (простая статистическая совокупность)
- Статистическая функция распределения X :

$$F^*(x) = P^*(X < x)$$

Визуализация распределений

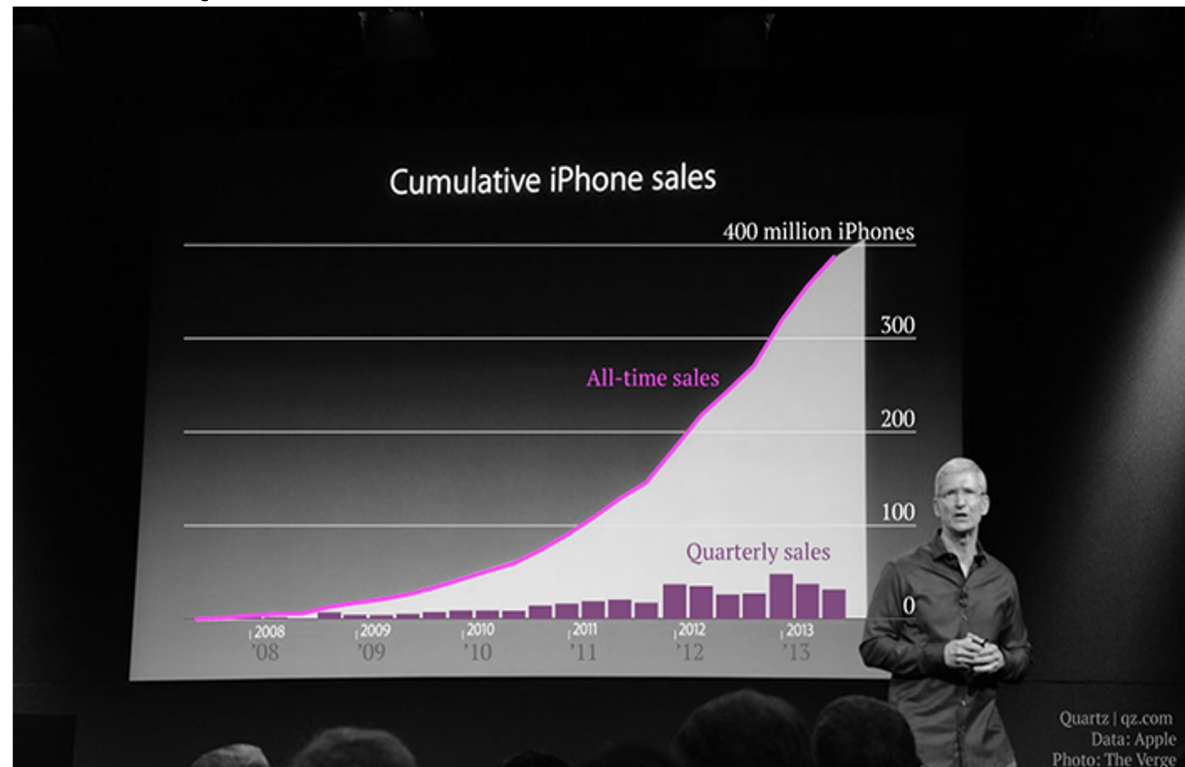
Продажи Apple iPhone стремительно растут, не так ли?



Насколько взрывным является этот рост на самом деле?

Кумулятивные распределения дают ошибочное представление о темпах роста.

Постепенное изменение является производной этой функции, которую трудно визуализировать.



Тренировка

- Дан ряд углов скольжения самолета в момент сбрасывания бомбы

-20, -60, -10, 30, 60, 70, -10,

-30, -120, -100, -80, 20, 40, -60,

-10, 20, 30, -80, 60, 70

- Построить статистическую функцию распределения
- У кого хорошее решение? Какие ошибки типичны на графике

Гистограмма

- Если данных много, то простой статистический ряд не удобен
- Разделим наблюдения на разряды и посчитаем частоты попадания:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n}$$

- Таблица с интервалами разрядов и p_i^* называется статистическим рядом

| | | | | | | |
|---------|------------|------------|---------|----------------|---------|----------------|
| I_1 | $x_1; x_2$ | $x_2; x_3$ | \dots | $x_i; x_{i+1}$ | \dots | $x_k; x_{k+1}$ |
| p_1^* | p_1^* | p_2^* | \dots | p_i^* | \dots | p_k^* |

- Что делать если значение попало на границу интервалов?

Давайте посмотрим решение

<https://colab.research.google.com/drive/1PnR5vCcxVSRN-VdLX86fgH0fYx-LwMJL>

Построение статистической функции распределения

$$F^*(x_1) = 0$$

$$F^*(x_2) = p_1^*$$

$$F^*(x_3) = p_1^* + p_2^*$$

...

$$F^*(x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i^*$$

$$F^*(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^k p_i^* = 1$$

Описательная статистика

Описательная статистика предоставляет способы фиксации свойств данного набора данных/выборки.

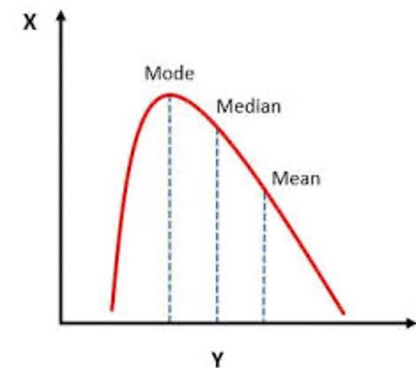
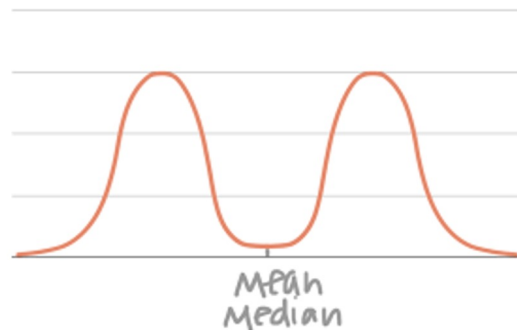
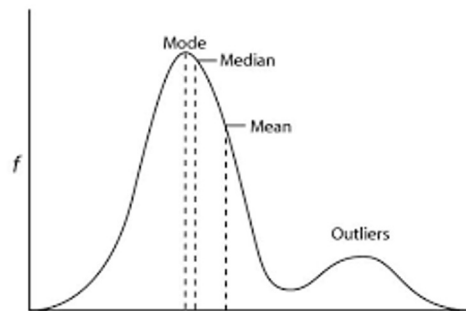
- Меры центральной тенденции описывают центр распределения данных.
- Меры вариации или изменчивости описывают разброс данных, т.е. насколько далеко измерения лежат от центра.

Мера центральности: среднее значение

Чтобы вычислить среднее значение, просуммируйте значения и разделите их на количество наблюдений:

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов.



Другие меры центральности

Медиана представляет собой «серединное» значение.

Среднее геометрическое — это корень n -й степени из произведения n значений:

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Среднее геометрическое всегда \leq среднее арифметическое и более чувствительно к значениям, близким к нулю.

Геометрические средние имеют смысл с соотношениями:

$1/2$ и $2/1$ должны в среднем давать 1.

Какая мера лучше всего?

Среднее значение имеет смысл для симметричных распределений без выбросов: например, рост и вес.

Медиана лучше подходит для асимметричных распределений или данных с выбросами: например, богатство и доход.

Билл Гейтс добавляет 250 долларов к среднему доходу на душу населения, но ничего не добавляет к медиане.

Показатель отклонения: стандартное отклонение

Дисперсия представляет собой квадрат сигмы стандартного отклонения.

Мы делим на n или $n-1$?

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

СКО генеральной совокупности делится на n , СКО выборки на $n-1$ (почему – узнаем позже), но для больших n $n \sim (n-1)$, так что это не имеет особого значения.

Интерпретация дисперсии (фондовый рынок)

Отношение «сигнал/шум» измерить сложно, поскольку многое из того, что вы видите, — это всего лишь дисперсия.

Рассмотрите возможность измерения относительного «навыка» различных инвесторов фондового рынка.

Ежегодные колебания эффективности фондов таковы, что результаты деятельности инвесторов случайны, а это означает, что реальная разница в навыках незначительна.

Интерпретация дисперсии (много моделей)

Обычно для каждой задачи мы разрабатываем несколько моделей, от очень простых до сложных.

Некоторая разница в производительности будет объяснена простой дисперсией: какие пары обучения/оценки были выбраны, насколько хорошо были оптимизированы параметры и т. д.

Небольшой выигрыш в производительности является аргументом в пользу более простых моделей.

Методы уменьшения дисперсии



Хотя идти на занятия пешком медленнее, чем ехать на автобусе, разница во времени прибытия меньше.

Повторение эксперимента несколько раз уменьшает дисперсию (перекрестная проверка в k -кратном размере).

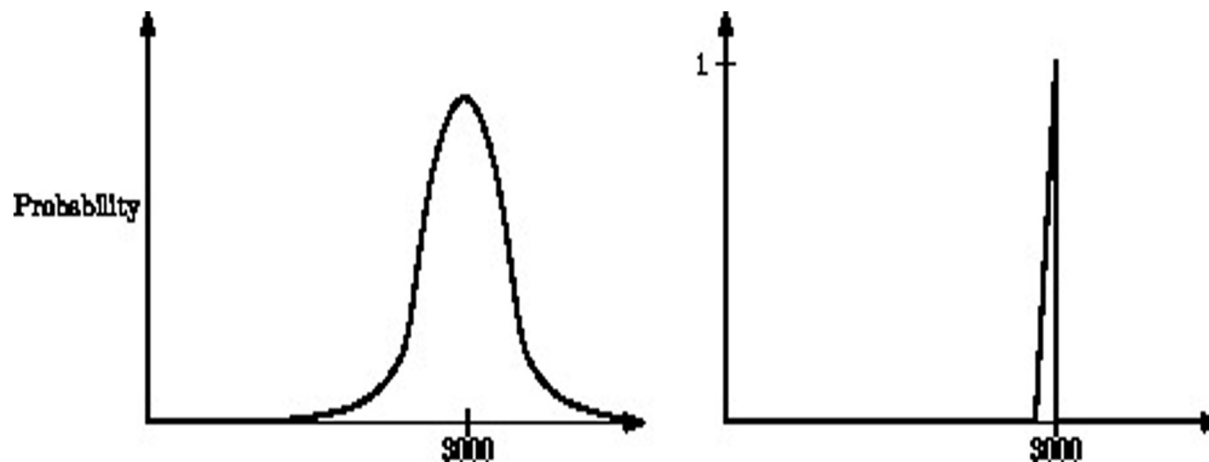
То же самое относится и к правильной случайной и детерминированной выборке.

Устранение выбросов (если это оправдано) уменьшает дисперсию.

Распределение срока службы картриджей принтера

Распределения с одинаковым средним значением могут выглядеть очень по-разному.

Но вместе среднее и стандартное отклонение довольно хорошо характеризуют любое распределение.



Приближенные вычисления

$$m_x^* = M^*[X] = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i p_i^*$$

$$D_x^* = D^*[X] = \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^*$$

$$\alpha_s^*[X] = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i^s p_i^*$$

$$\mu_s^*[X] = \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - m_x^*)^s p_i^*$$

Выравнивание статистических рядов

- Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем, что число наблюдений ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты.
- Только при очень большом числе наблюдений эти элементы случайности сглаживаются, и случайное явление обнаруживает в полной мере присущую ему закономерность.
- На практике мы почти никогда не имеем дела с таким большим числом наблюдений и вынуждены считаться с тем, что любому статистическому распределению свойственны в большей или меньшей, мере черты случайности.
- Поэтому при обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Такая задача называется задачей **выравнивания** (сглаживания) **статистических рядов**.
- Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую плавную кривую распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение.

Как выравнивать?

- Как правило, принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров; задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

Например,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{при } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta \end{cases} \quad (2)$$

Что это за законы? Что будем подбирать?

Требуемые ограничения

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Метод моментов

- Согласно методу моментов, параметры a, b, \dots выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам.
- Например, если теоретическая кривая $f(x)$ зависит только от двух параметров a и b , эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание и дисперсия теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками.
- Если кривая $f(x)$ зависит от трех параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т. д.
- При выравнивании статистических рядов может оказаться полезной специально разработанная система **кривых Пирсона**, каждая из которых зависит в общем случае от четырех параметров. При выравнивании эти параметры выбираются с тем расчетом, чтобы сохранить первые четыре момента статистического распределения (математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый моменты).

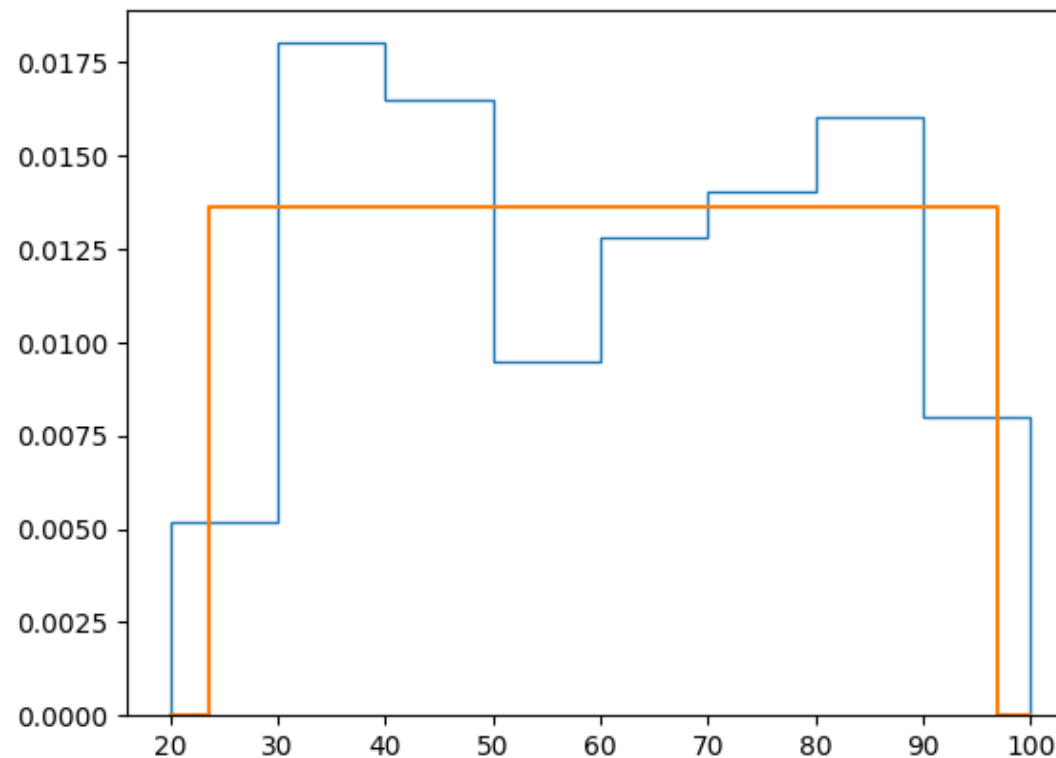
Пример

- С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты опытов представлены в виде статистического ряда:

| I_i (м) | 20; 30 | 30; 40 | 40; 50 | 50; 60 | 60; 70 | 70; 80 | 80; 90 | 90; 100 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| m_i | 21 | 72 | 66 | 38 | 51 | 56 | 64 | 32 |
| p_i^* | 0,052 | 0,180 | 0,165 | 0,095 | 0,128 | 0,140 | 0,160 | 0,080 |

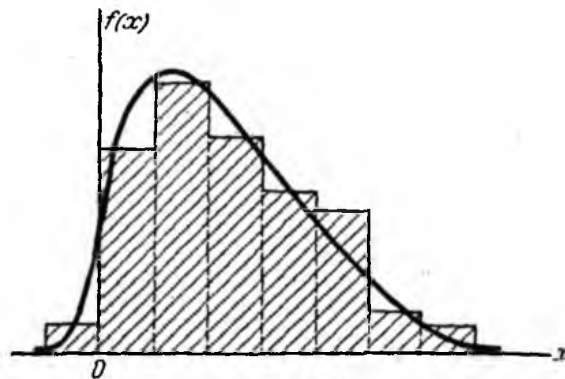
Решение

<https://colab.research.google.com/drive/1Ce0rPKw1jdU7mRzOkgNRiKIlIn68XDzR0>



Критерии согласия

- Допустим, что данное статистическое распределение выравнено с помощью некоторой теоретической кривой



- Как бы хорошо, ни была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения.
- Вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная нами кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение?
- Для ответа служат «критерии согласия».

Идея метода

- Гипотеза ***H***: случайная величина ***X*** подчиняется некоторому определенному закону распределения. Этот закон может быть задан в той или иной форме: например, в виде функции распределения ***F(x)*** или в виде плотности распределения ***f(x)***, или же в виде совокупности вероятностей ***p_i***, где ***p_i*** — вероятность того, что величина ***X*** попадет в пределы ***i***-го разряда.
- рассмотрим величину ***U***, характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений.
- Величина ***U*** может быть выбрана различными способами; например, в качестве ***U*** можно взять сумму квадратов отклонений теоретических вероятностей ***p_i*** от соответствующих частот ***p_i^{*}*** или же сумму тех же квадратов с некоторыми коэффициентами («весами»), или же максимальное отклонение статистической функции распределения ***F^{*}(x)*** от теоретической ***F(x)*** и т. д. Допустим, что величина ***U*** выбрана тем или иным способом. Очевидно, это есть некоторая ***случайная величина***.

Идея метода (2)

- Закон распределения случайной величины U зависит от закона распределения случайной величины X , над которой производились опыты, и от числа опытов n . Если гипотеза H верна, то закон распределения величины U определяется законом распределения величины X (функцией $F(x)$) и числом n .
- Допустим, что этот закон распределения нам известен. В результате данной серии опытов обнаружено, что выбранная нами мера расхождения U приняла некоторое значение u .
- Можно ли объяснить это случайными причинами или же это расхождение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями и, следовательно, на непригодность гипотезы H ?

Идея метода (3)

- Предположим, что гипотеза ***H*** верна, и вычислим в этом предположении вероятность того, что за счет случайных причин, связанных с недостаточным объемом опытного материала, мера расхождения ***u*** окажется не меньше, чем наблюденное нами в опыте значение. Вычислим вероятность события:

$$U \geq u$$

- Если эта вероятность весьма мала, то гипотезу следует *отвергнуть* как мало правдоподобную
- Если же эта вероятность значительна, следует признать, что *экспериментальные данные не противоречат гипотезе ***H****.

Как следует выбирать U ?

- При некоторых способах ее выбора закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами при достаточно большом n практически не зависит от функции $F(x)$.

Критерий Хи-квадрат Пирсона

- Произведено n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в k разрядов и оформлены в виде статистического ряда:

| | | | | |
|---------|------------|------------|---------|----------------|
| I_l | $x_1; x_2$ | $x_2; x_3$ | \dots | $x_k; x_{k+1}$ |
| p_l^* | p_1^* | p_2^* | \dots | p_k^* |

- Зная теоретический закон распределения, можно найти теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из разрядов:

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

- В качестве меры возьмем

$$U = \sum_{i=1}^k c_i (p_i^* - p_i)^2$$

Критерий Хи-квадрат Пирсона (2)

- Коэффициенты c_i («веса» разрядов) вводятся потому, что в общем случае отклонения, относящиеся к различным разрядам, нельзя считать равноправными по значимости.
- Одно и то же по абсолютной величине отклонение $p_i^* - p_i$ может быть мало значительным, если сама вероятность p_i велика, и очень заметным, если она мала. Поэтому естественно «веса» c_i взять обратно пропорциональными вероятностям разрядов p_i .

- **Если положить**

$$c_i = \frac{n}{p_i}$$

то при больших n закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами:

он практически не зависит от функции распределения $F(x)$ и от числа опытов n , а зависит только от числа разрядов k ,

Этот закон при увеличении n приближается к «распределению χ^2 »

Мера расхождения

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}$$

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

χ^2 с r степенями свободы – это распределение суммы квадратов r независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормальному закону с мат.ожиданием = 0 и дисперсией = 1.

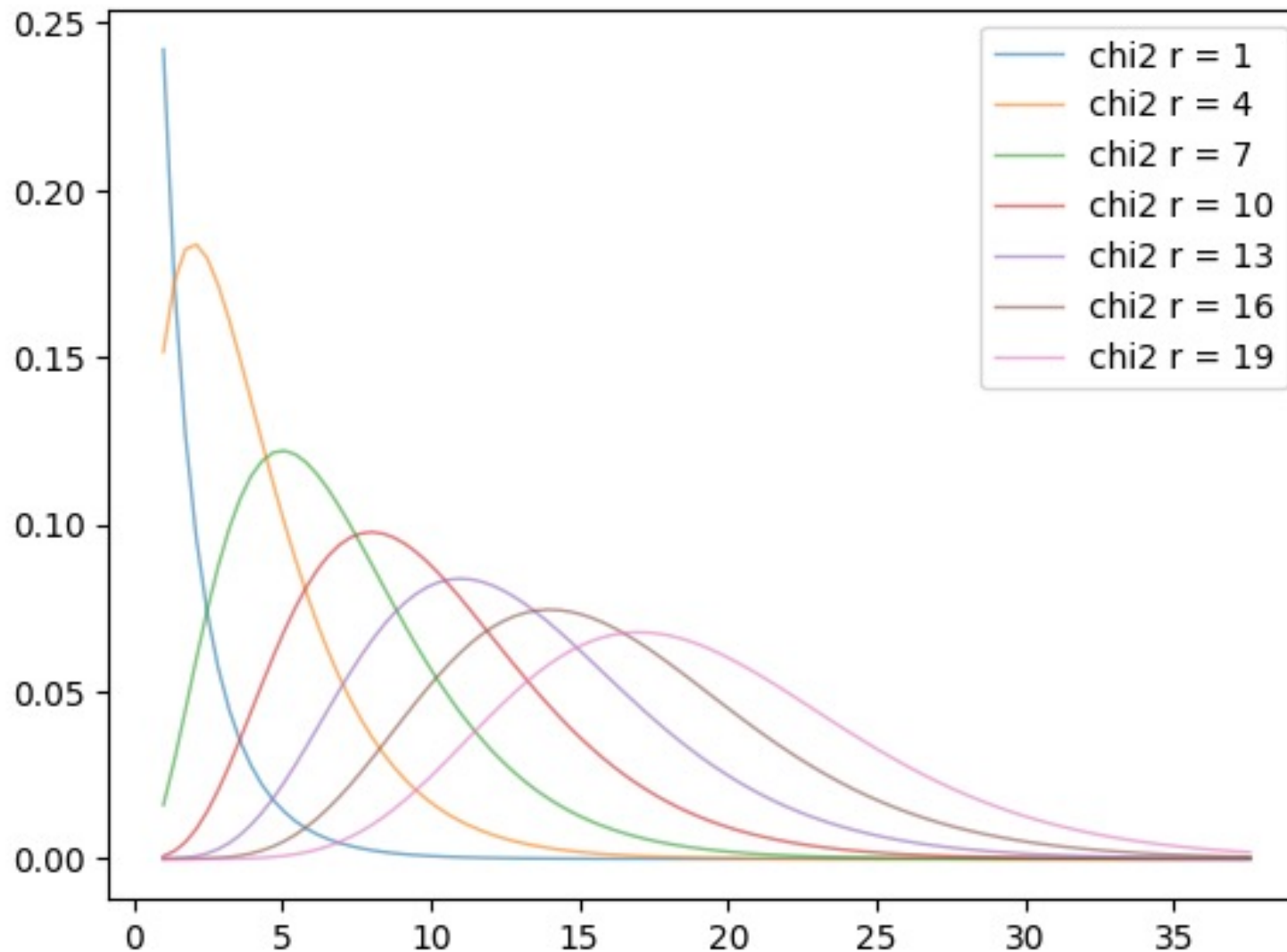
Плотность распределения:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & \text{при } u > 0 \\ 0 & \text{при } u \leq 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – гамма функция.

мат.ожидание $M[U] = r$ и дисперсия $D[U] = 2r$.

Функция плотности распределения χ^2



Как определить число степеней свободы

- Распределение χ^2 зависит от параметра r , называемого числом «степеней свободы» распределения. Число «степеней свободы» r равно числу разрядов k минус число независимых условий («связей»), наложенных на частоты p_i .
- **Примеры условий:**

$$\sum_{i=1}^k p_i^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^k \tilde{x}_i p_i^* = m_x$$

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^* = D_x$$

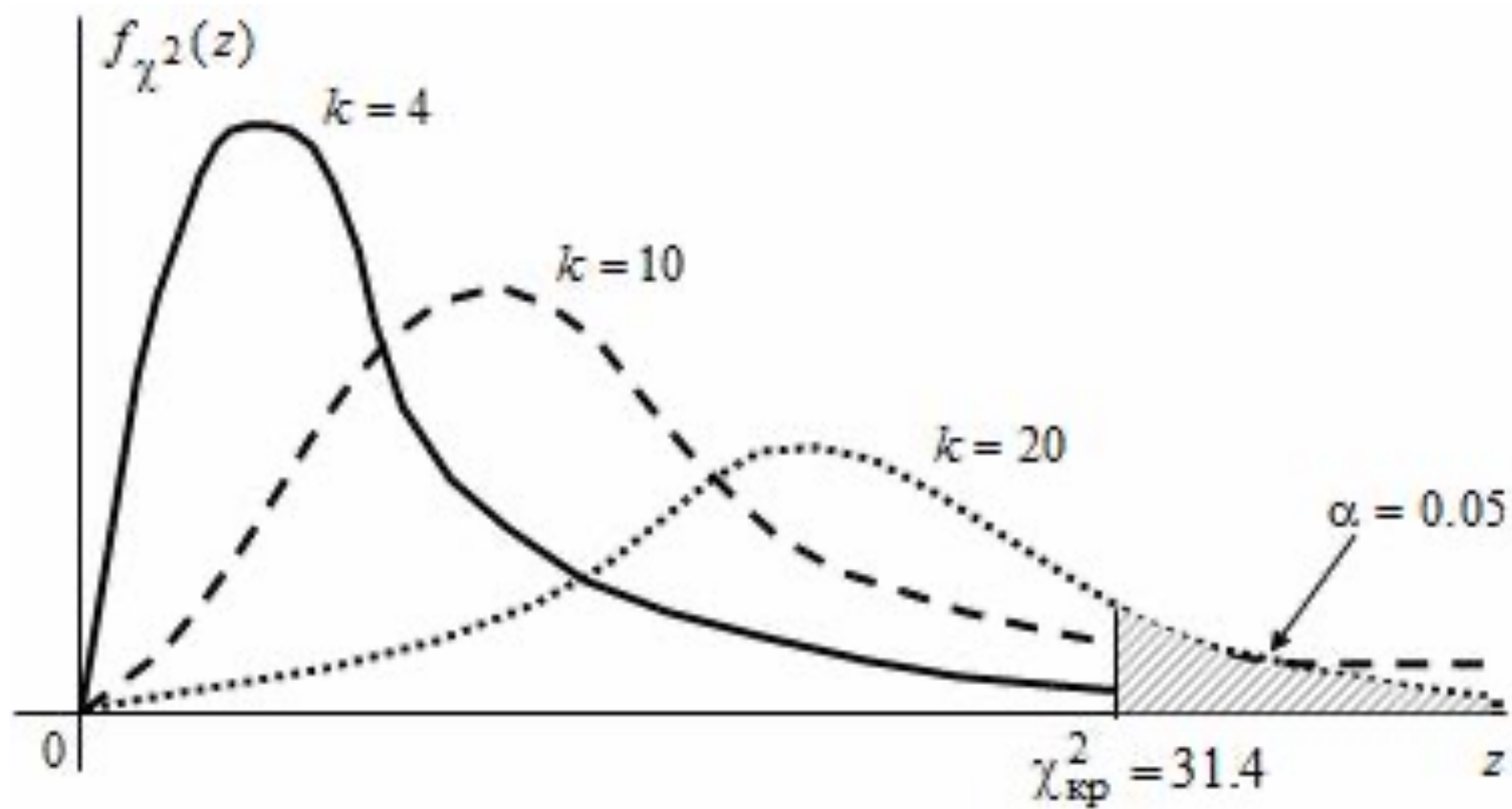
Как посчитать критерий

<https://colab.research.google.com/drive/1EuF6rmUqZt8EQEThsVeiSbNZ8G7TKcx>

Смысл p-value

- Распределение χ^2 дает возможность оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений,
- Будем исходить из того, что величина X действительно распределена по закону $F(x)$.
- Тогда вероятность p (*p-value*), есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений будет не меньше, чем фактически наблюдаемое в данной серии опытов значение χ^2 .
- Если эта вероятность, p весьма мала (настолько мала, что событие с такой вероятностью можно считать практически невозможным), то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе H о том, что закон распределения величины X есть $F(x)$.
- Эту гипотезу следует отбросить как неправдоподобную. Напротив, если вероятность p сравнительно велика, можно признать расхождения между теоретическим и статистическим распределениями несущественными и отнести их за счет случайных причин. Гипотезу H о том, что величина X распределена по закону $F(x)$, можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытными данным.

Смысл p-value



На сколько должно быть мало p -value?

- Вопрос неопределенный; он не может быть решен из математических соображений, так же как и вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события для того, чтобы считать его практически невозможным.
- На практике, если p оказывается меньшим чем 0,1, рекомендуется проверить эксперимент, если возможно — повторить его и в случае, если заметные расхождения снова появятся, пытаться искать более подходящий для описания статистических данных закон распределения.
- С помощью критерия χ^2 (или любого другого критерия согласия) можно только в некоторых случаях **опровергнуть** выбранную гипотезу H и отбросить ее как явно несогласную с опытными данными.
- Если же вероятность p велика, то этот факт сам по себе ни в коем случае не может считаться доказательством справедливости гипотезы H , а указывает только на то, что гипотеза не противоречит опытными данным.

Критерий Колмогорова

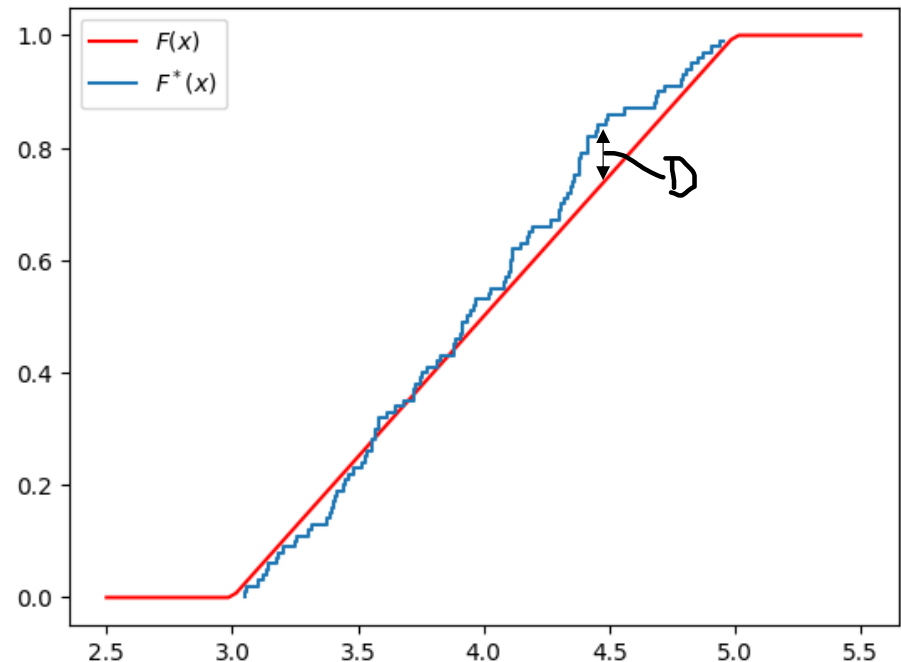
$$D = \max |F^*(x) - F(x)|$$

- Какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X , при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений n вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

- стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}$$



Как посчитать критерий Колмогорова

<https://colab.research.google.com/drive/1g9aS5RpoBYB-xcwreZ0TCns0RBBL-mdv>

Критерий Колмогорова. Когда применим?

- можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение $F(x)$ полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т. е. когда известен не только вид функции распределения $F(x)$, но и все входящие в нее параметры.
- Такой случай сравнительно редко встречается на практике. Обычно из теоретических соображений известен только общий вид функции $F(x)$, а входящие в нее числовые параметры определяются по данному статистическому материалу.
- При применении критерия χ^2 это обстоятельство учитывается соответствующим уменьшением числа степеней свободы распределения χ^2 . Критерий А. Н. Колмогорова такого согласования не предусматривает. Если все же применять этот критерий в тех случаях, когда параметры теоретического распределения выбираются по статистическим данным, критерий дает заведомо завышенные значения вероятности $P(X)$; поэтому мы в ряде случаев рискуем принять как правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными данными.

Оценка параметров

- Для поиска закона распределения нужно много наблюдений
- А что делать если их мало?
- На основе ограниченного числа наблюдений можно приблизительно найти параметры законов – мат. ожидание, дисперсия ...
- Любая оценка на основе опытов – случайная величина
- Будем заниматься поиском «оценок параметров»
- Желательно найти оценку с минимальной ошибкой

Общая задача оценки параметров

Дано:

Наблюдения сл. величины X : X_1, X_2, \dots, X_n . Закон распределения наблюдений одинаков

Пусть $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – оценка

\tilde{a} - это функция

\tilde{a} - это случайная величина

Закон распределения \tilde{a} зависит от:

- 1) закона распределения X
- 2) числа наблюдений n

Требуется найти \tilde{a} удовлетворяющую требованиям на следующем слайде

Требования к оценке \tilde{a}

- Состоятельность: при увеличении n оценка \tilde{a} должна сходиться по вероятности к параметру a .
- Несмещенность: $M[\tilde{a}] = a$
- Эффективность: $D[\tilde{a}] \rightarrow \min$

Оценка \tilde{a} должна быть получена за приемлемое время, поэтому требования могут немного нарушаться.

Оценка мат.ожидания

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Состоятельность: следует из закона больших чисел

Несмещенность: $M[\tilde{m}] = \frac{\sum_{i=1}^n m}{n} = m$

Эффективность?

$$D[\tilde{m}] = \frac{\sum_{i=1}^n D}{n^2} = \frac{1}{n} D$$

Для нормального закона – эффективна, для других может быть не так.

Оценка дисперсии

Предположим: $D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n}$

Состоятельность:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \tilde{m}^2$$
$$\alpha_2[X] - m^2 = D \blacksquare$$

Несмещенность?

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2} - 2 \frac{\sum_{i < j} X_i X_j}{n^2} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2} - 2 \frac{\sum_{i < j} X_i X_j}{n^2}$$

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n^2} \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} M[X_i X_j]$$

Несмещенность дисперсии

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n^2} \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} M[X_i X_j]$$

Пусть начало координат будет в точке m . Тогда

$$M[X_i^2] = M[\dot{X}_i^2] = D; \quad \sum_{i=1}^n M[X_i^2] = nD$$

$M[X_i X_j] = M[\dot{X}_i \dot{X}_j] = K_{ij} = 0$, так как опыты
независимы

$$M[D^*] = \frac{(n-1)}{n} D$$

Несмещенная оценка дисперсии

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, поэтому если D^* состоятельна, то \tilde{D} состоятельна.

Иногда удобнее вычислить:

$$\tilde{D} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \tilde{m}^2 \right] \frac{n}{n-1}$$

Доверительный интервал

К каким ошибкам может привести замена a на \tilde{a} ?

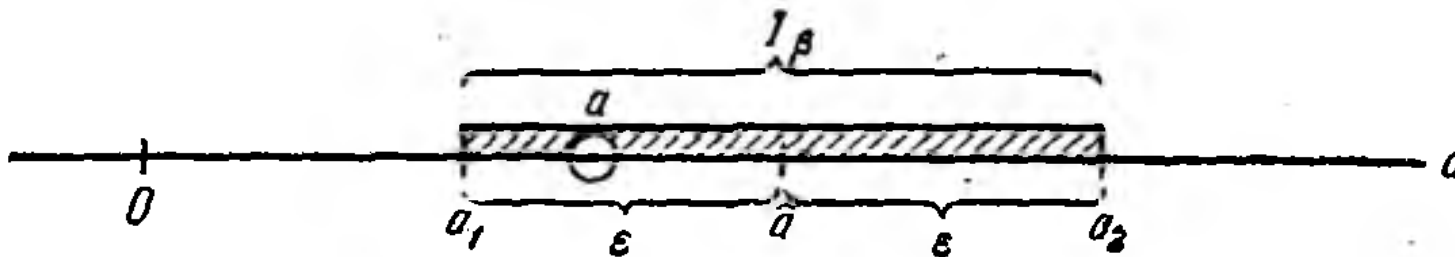
Найти ε для $\beta=0.9, 0.95, 0.99$, чтобы

$$P(|a - \tilde{a}| < \varepsilon) = \beta$$

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta$$

$I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon; \tilde{a} + \varepsilon)$ – доверительный интервал

Что тут случайно? a или I_β ?



β - доверительная вероятность

Нахождение доверительного интервала для мат.ожидания

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}; \quad \tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$$

При большом n (на практике даже для n 10-20) закон распределения \tilde{m} приближенно можно считать нормальным. Параметры m и $\frac{D}{n}$.

$$P(|m - \tilde{m}| < \varepsilon_\beta) = \beta$$

$$P(|m - \tilde{m}| < \varepsilon_\beta) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right) - 1,$$

$$\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{D/n}$$

$$2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right) - 1 = \beta, \quad \varepsilon_\beta = \sigma_{\tilde{m}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

Приближенно $\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\tilde{D}/n}$

$$t_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

$$I_\beta = (\tilde{m} - \sigma_{\tilde{m}} t_\beta; \tilde{m} + \sigma_{\tilde{m}} t_\beta)$$

Пример нахождения доверительного интервала для мат.ожидания

<https://colab.research.google.com/drive/16VGMdfp8xvsBNBhMttWlzsJHuLKXPc6D>

Доверительный интервал для дисперсии

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}; \quad \tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$\frac{(X_i - \tilde{m})^2}{n-1}$ - величины не являются независимыми, они зависят от \tilde{m} куда входят все. Но при $n \approx 20-30$ его можно считать нормальным.

$$M[\tilde{D}] = D$$
$$D[\tilde{D}] = \frac{1}{n} \mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2$$

$$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^4}{n} \text{ даст невысокую точность}$$

Доверительный интервал для дисперсии (2)

Для нормального закона: $\mu_4 = 3D^2$

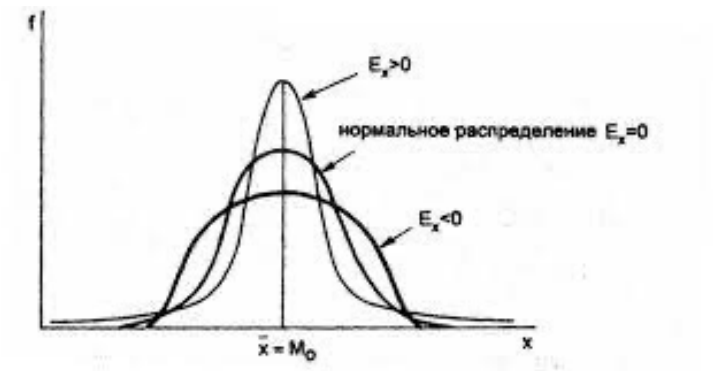
$$D[\tilde{D}] = \frac{3}{n} D^2 - \frac{n-3}{n(n-1)} D^2$$

$$D[\tilde{D}] = \frac{2}{n-1} D^2. \quad D[\tilde{D}] = \frac{2}{n-1} \tilde{D}^2. \quad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tilde{D}$$

Для равномерного закона:

$$\mu_4 = \frac{(\beta - \alpha)^4}{80}; \quad D = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$
$$\mu_4 = 1.8D^2$$

$$D[\tilde{D}] = \frac{0.8n + 1.2}{n(n-1)} D^2. \quad \sigma_{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{0.8n + 1.2}{n(n-1)}} \tilde{D}$$



Когда закон не известен и нет оснований считать что он сильно отличается от нормального (не обладает заметным эксцессом), то рекомендуется считать $\sigma_{\tilde{D}}$ по формуле для нормального закона.

$$I_{\beta} = (\tilde{D} - \sigma_{\tilde{D}} t_{\beta}; \tilde{m} + \sigma_{\tilde{D}} t_{\beta})$$

Пример нахождения доверительного интервала для дисперсии

<https://colab.research.google.com/drive/16VGMdfp8xvsBNBhMttWlzsJHuLKXPc6D>

Точные методы построения доверительных интервалов

- Для точного нахождения доверительных интервалов нужно знать закон распределения X
- Параметры этого закона иногда можно и не знать. Задача решается путем перехода к другой случайной величине.

Доверительные интервалы для нормального закона

$$T = \sqrt{n} \frac{\tilde{m} - m}{\sqrt{\tilde{D}}}$$

Подчиняется закону распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

где $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du.$$

Доверительные интервалы для нормального закона

$$V = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D}$$

имеет распределение хи-квадрат с $n - 1$ степенью свободы.

$$k_{n-1}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} v^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} & \text{при } v > 0 \\ 0 & \text{при } v \leq 0 \end{cases},$$

Переход к величине T

$$P(|m - \tilde{m}| < \varepsilon_\beta) = \beta \quad T = \sqrt{n} \frac{\tilde{m} - m}{\sqrt{\tilde{D}}}$$

$$P\left(\sqrt{n} \frac{|\tilde{m} - m|}{\sqrt{\tilde{D}}} < \frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\tilde{D}}}\right) = \beta \quad P\left(|T| < \frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}}\right) = \beta$$

$$P(|T| < t_\beta) = \beta \quad P(|T| < t_\beta) = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt$$

Так $S_{n-1}(t)$ четная функция: $2 \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = \beta$ по таблице можно найти t_β по заданному β .

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}. \quad I_\beta = \left(\tilde{m} - t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}; \tilde{m} + t_\beta \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} \right)$$

Пример расчетов интервала мат.ожидания Т-критерием

<https://colab.research.google.com/drive/1H2oZnJRXir3GrjzHHZtqcmNkr89OfL9y>

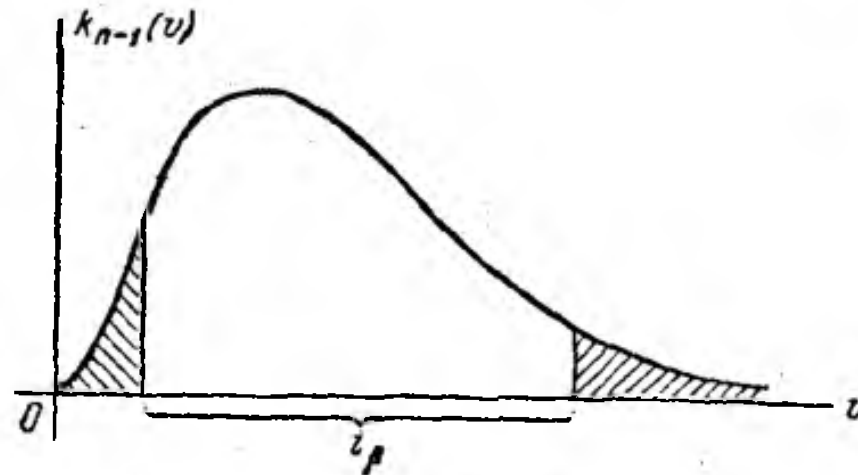
Точный интервал для дисперсии

$$V = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D} \quad \tilde{D} = V \frac{D}{(n-1)}$$

Закон не симметричен

Условимся выбирать интервал так чтобы слева и справа была одинаковая площадь:

$$p = \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \beta}{2} \quad P(V > \chi^2) = p$$



Точный интервал для дисперсии (2)

$$P(D_1 < D < D_2) = \beta$$

$$I_\beta = \left(\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2}; \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2} \right)$$

$$\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2} < D; \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2} > D$$

Равносильно

$$V < \chi_1^2; V > \chi_2^2$$

Пример расчетов интервала дисперсии V-критерием

<https://colab.research.google.com/drive/1H2oZnJRXir3GrjzHHZtqcmNkr89OfL9y>

Оценка вероятности по частоте

Оценка вероятности p – это среднее сл. величины X , в каждом опыте она принимает значение 1, если событие произошло и 0, если не произошло.

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$M[X] = p, q = 1 - p, D[X] = pq$$

Несмещенность: $M[p^*] = p$

$D[p^*] = \frac{pq}{n}$ - это минимально возможная дисперсия, т.е. оценка эффективна.

Доверительный интервал для вероятности

Если число опытов велико и p не слишком мала и не слишком велика, то распределение частоты p^* близко нормальному. Достаточно чтобы pn и qn были больше 4-х.

$$m_{p^*} = p; \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$P(|p^* - p| < \varepsilon_\beta) = \beta$$

$$P(|p^* - p| < \varepsilon_\beta) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{p^*}}\right) - 1,$$

$$t_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \beta}{2}\right), \varepsilon_\beta = t_\beta \sigma_{p^*}$$

$$|p^* - p| < t_\beta \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$(p^* - p)^2 < \frac{t_\beta^2}{n} p(1 - p)$$

Доверительный интервал для вероятности (2)

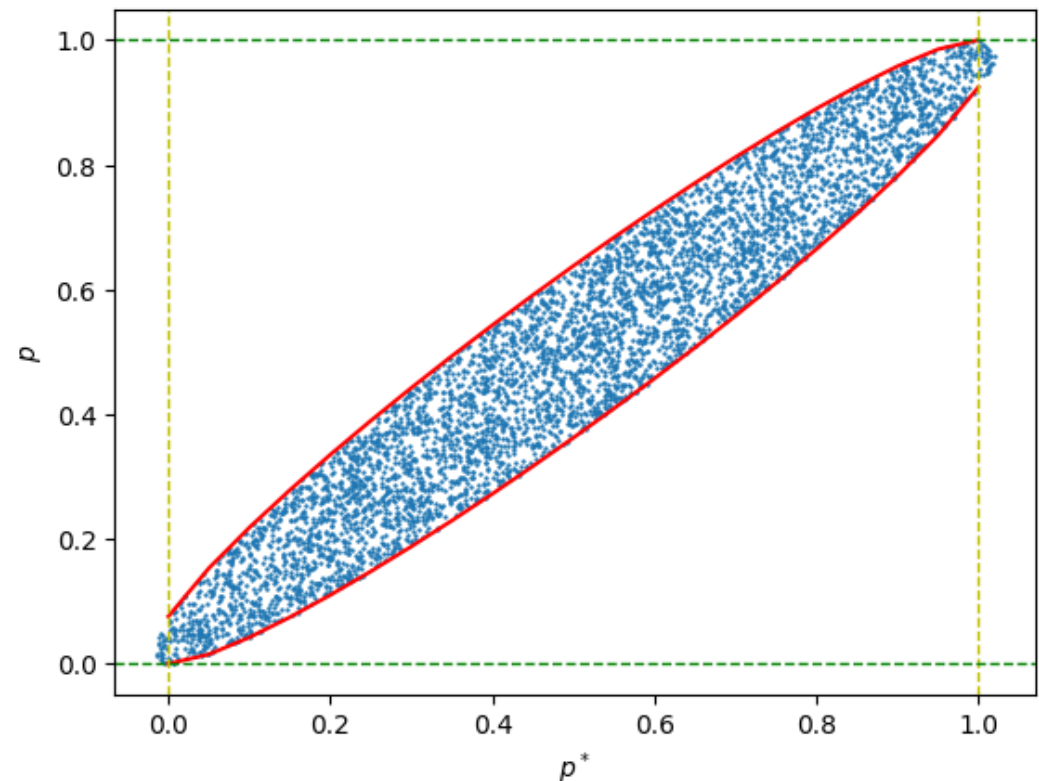
$$(p^* - p)^2 < \frac{t_\beta^2}{n} p(1 - p)$$

Заменяя неравенство на равенство получим 2 корня:

$$p_1 = \frac{p^* + \frac{1}{2} \frac{t_\beta^2}{n} - t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1 - p^*)}{n} + \frac{1}{4} \frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}$$

$$p_2 = \frac{p^* + \frac{1}{2} \frac{t_\beta^2}{n} + t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1 - p^*)}{n} + \frac{1}{4} \frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}$$

$$I_\beta = (p_1, p_2)$$



Пример расчета дов.интервала для вероятности

<https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah->

Доверительный интервал p для малого числа опытов

Число наблюдений события (m) в n опытах
распределено по биномиальному закону:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Распределение не симметрично.

Так как $P_{m,n}$ прерывистая, то интервала в точности
соответствующего доверительной вероятности β
может не существовать.

В качестве p_1, p_2 возьмем наименьший интервал,
вероятность попасть левее или правее которого
будет больше $\alpha/2$. $\alpha = 1 - \beta$.

Доверительный интервал p для малого числа опытов (2)

$$\sum_{m=k}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{m=0}^k C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2}$$

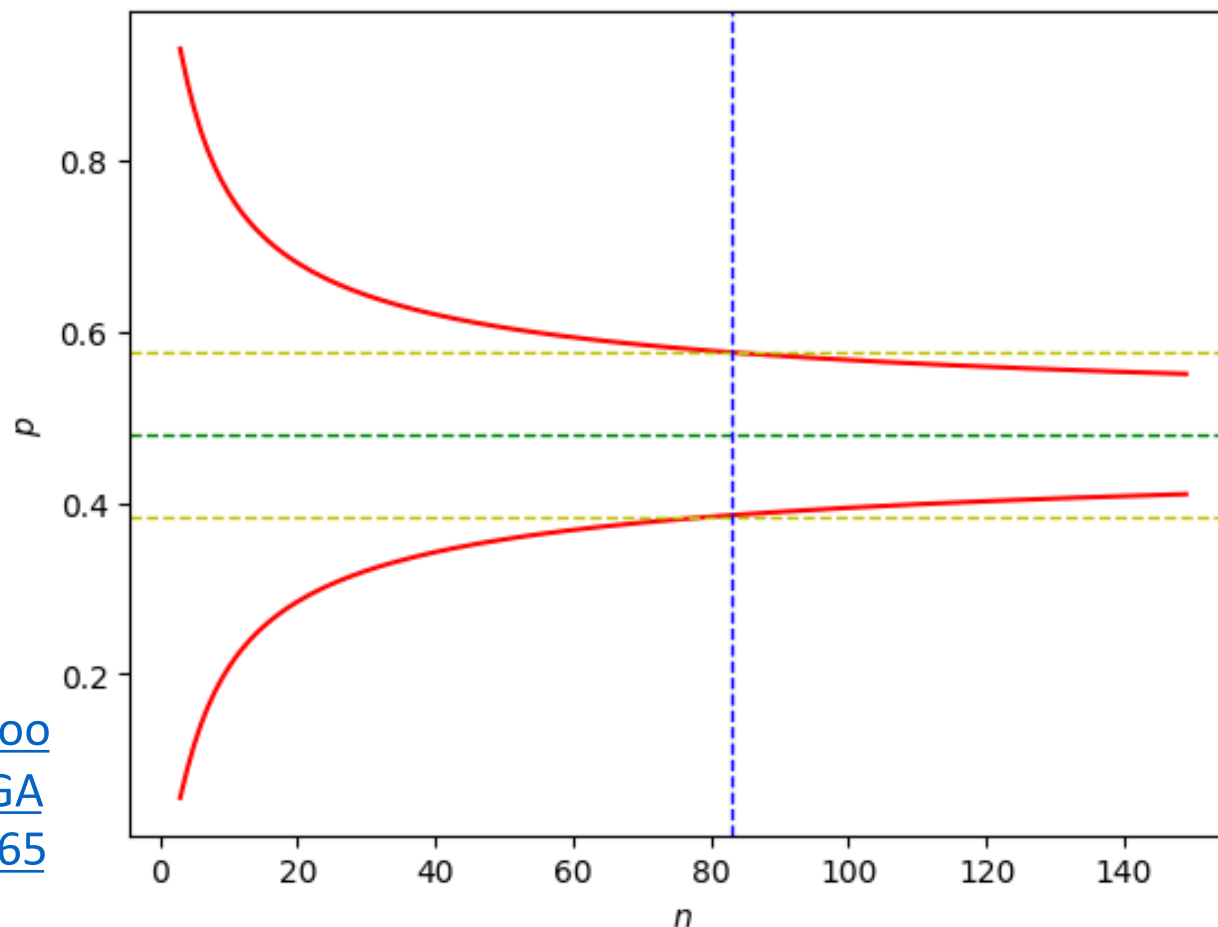
$$k = np^*$$

Пример расчета дов.интервала для p для малого числа опытов

<https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah->

Расчет необходимого числа опытов

Проведено 25 опытов, в которых событие А произошло 12 раз. Найти ориентировочно число опытов n , которое понадобится для того, чтобы с вероятностью $= 0.9$ ошибка от замены вероятности частотой не превзошла 20%.



<https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah->

Расчет необходимого числа опытов (2)

- После выполнения потребного числа опытов может понадобиться новая проверка точности определения вероятности по частоте, так как будет получено в общем случае уже другое значение частоты p^* , отличное от наблюдаемого в ранее проведенных опытах.
- Может оказаться, что число опытов все еще недостаточно для обеспечения необходимой точности, и его придется несколько увеличить.
- Однако первое приближение, полученное описанным выше методом, может служить для ориентировочного предварительного планирования серии опытов с точки зрения требуемого на них времени, денежных затрат и т.д.

Пример расчета числа опытов для малой вероятности

Пусть $p^* = 0$.

$$p_1 = ? \quad p_2 = ?$$

Дано событие A , его вероятность p , Обозначим B – событие A не появилось ни разу в серии n опытов.

$$P(B) = (1 - p)^n$$

$$P(B) = \alpha \quad \alpha = 1 - \beta$$

$$(1 - p_2)^n = 1 - \beta$$

$$p_2 = 1 - \sqrt[n]{1 - \beta}$$

<https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah->

Расчет числа опытов для нулевой частоты

$$(1 - p_2)^n = 1 - \beta$$

$$\log(1 - p_2)^n = \log(1 - \beta)$$

$$n \log(1 - p_2) = \log(1 - \beta)$$

$$n = \left\lceil \frac{\log(1 - \beta)}{\log(1 - p_2)} \right\rceil$$

<https://colab.research.google.com/drive/1ORHrjbGAdMKI5WVmlzgcvfBxwUI65ah->