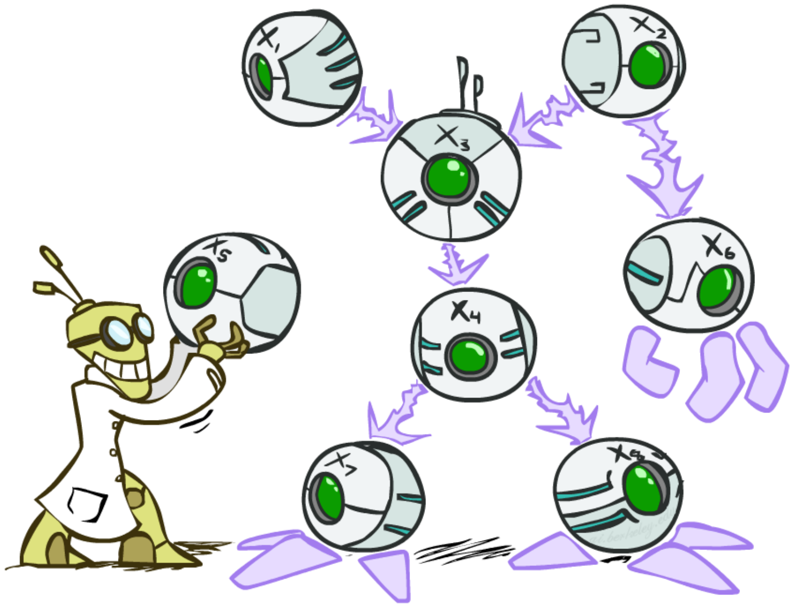
Байесовские сети



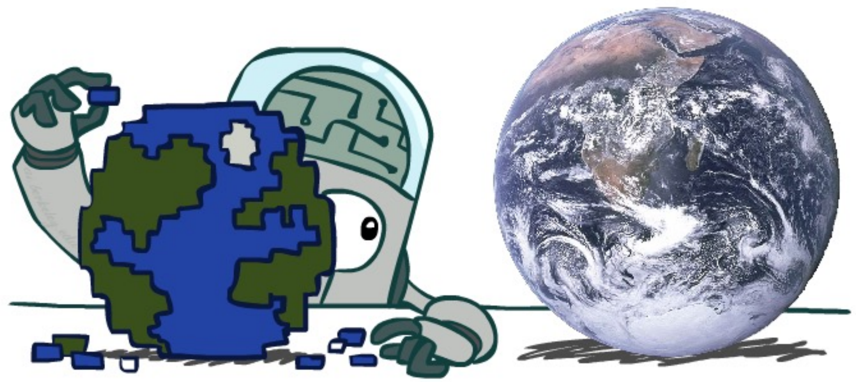
Владимир Анатольевич Судаков

2023

на основе [Dan Klein and Pieter Abbeel for CS188 Intro to AI at UC Berkeley]

Вероятностные модели

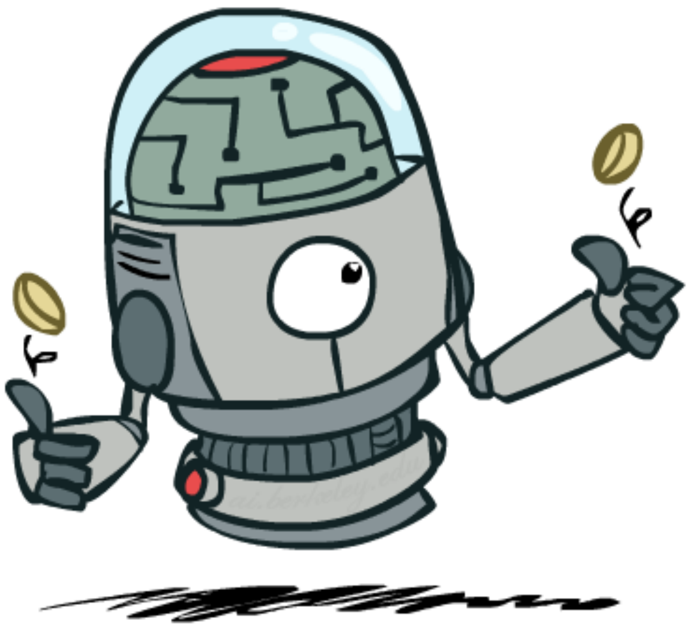
- Модели описывают как мир (или его часть) работает



- Модель это всегда упрощение
  - Может не учитывать каждую переменную
  - Может не учитывать все взаимодействия между переменными
  - «Все модели ошибочны; но некоторые из них полезны». - Джордж Э. П. Бокс

- Что можно делать с вероятностными моделями?
  - Нам (или нашим агентам) нужно сделать выводы о значениях неизвестных переменных, учитывая наблюдения
  - Пример: объяснение (диагностическое рассуждение)
  - Пример: предсказание (причинное рассуждение)
  - Пример: ценность информации

Независимость



Независимость

- Две переменные независимы если:

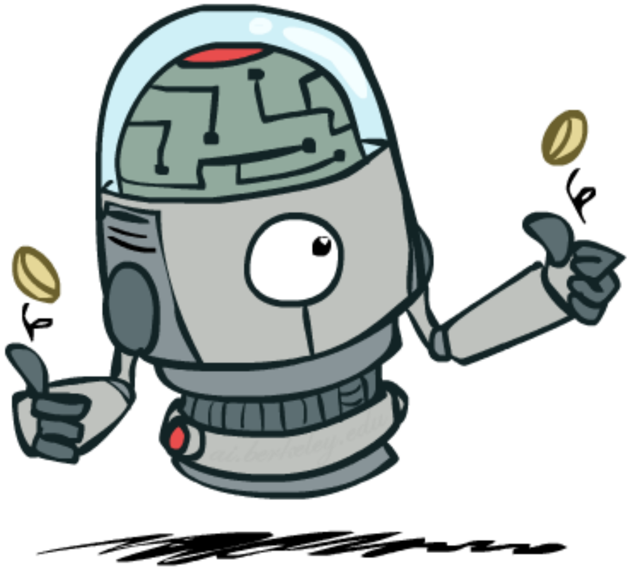
$$\forall x, y : P(x, y) = P(x)P(y)$$

  - Это говорит о том, что их совместное распределение приводит к произведению двух более простых распределений.
  - Другая форма:

$$\forall x, y : P(x|y) = P(x)$$

  - Обозначается: $X \perp\!\!\!\perp Y$

- Независимость - это упрощающее предположение моделирования
  - Эмпирические совместные распределения: в лучшем случае «близкие» к независимым
  - Что мы могли предположить для {Weather, Traffic, Cavity, Toothache}?



Пример: Независимы ли?

$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

$P_1(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$P_2(T, W)$

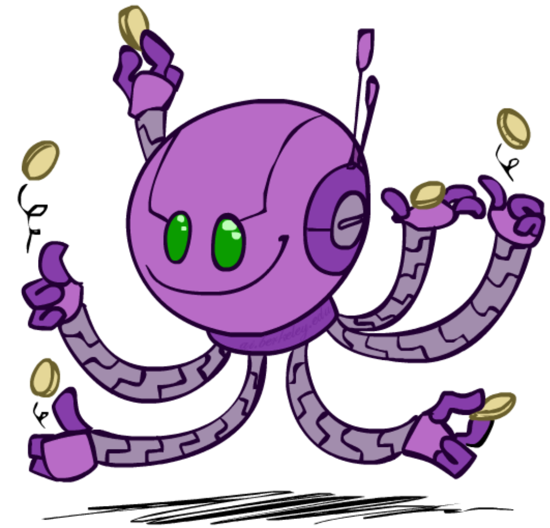
T	W	P
hot	sun	0.3
hot	rain	0.2
cold	sun	0.3
cold	rain	0.2

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.4

Пример: Независимость

- N честных, независимых подбрасываний монеты



$P(X_1)$

H	0.5
T	0.5

$P(X_2)$

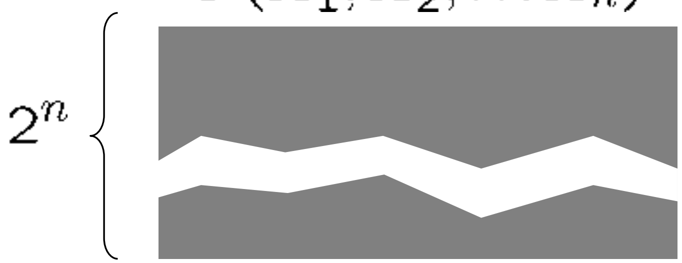
H	0.5
T	0.5

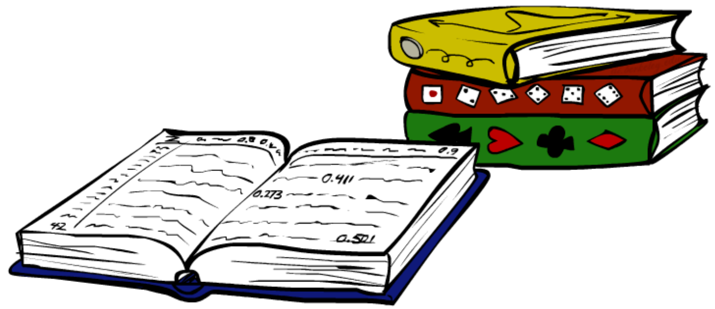
$\cdots$

$P(X_n)$

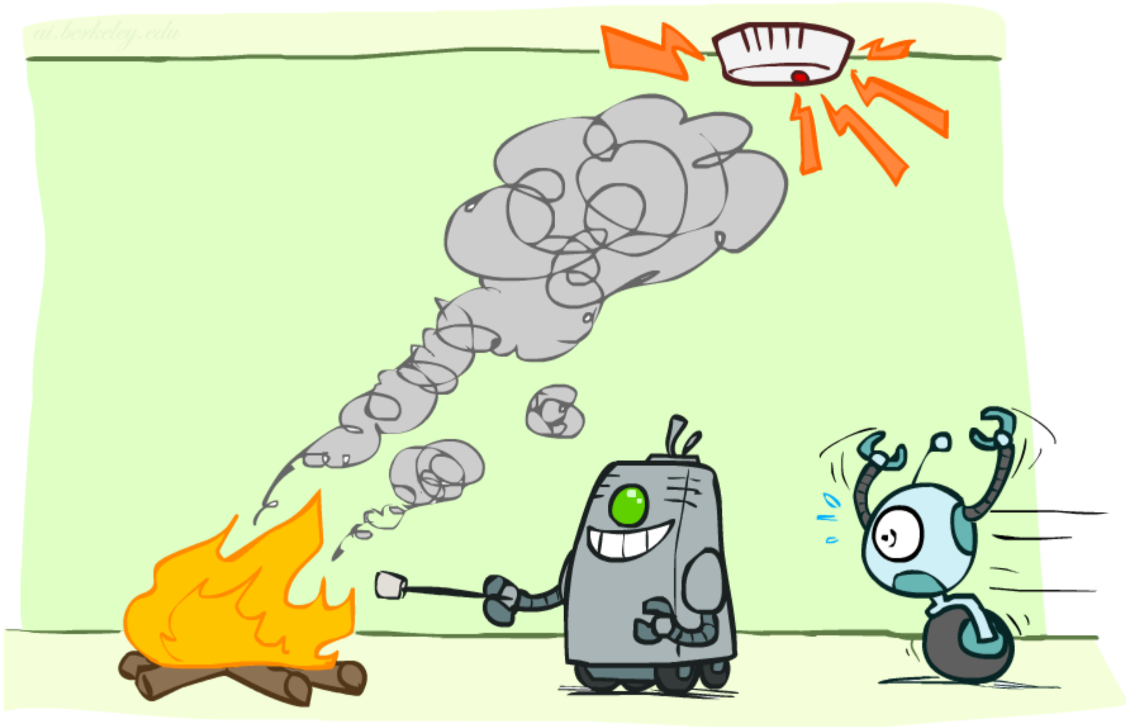
H	0.5
T	0.5

$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$





Условная независимость



Условная независимость

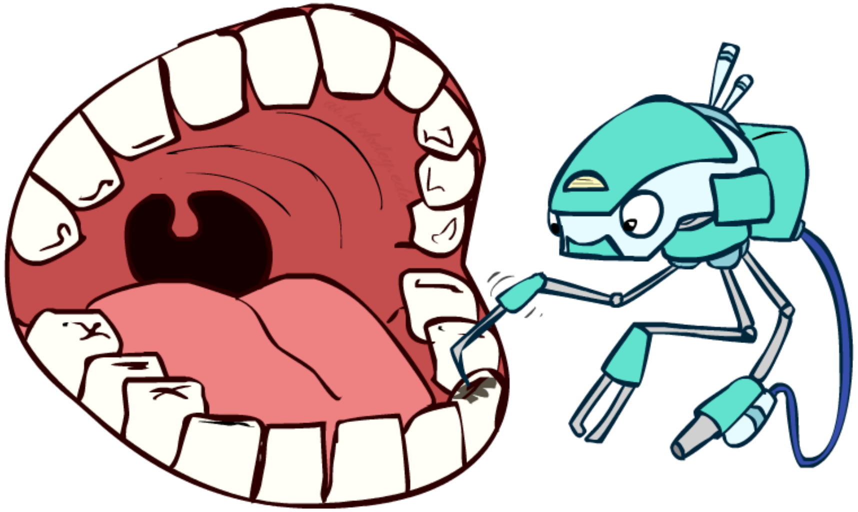
- P(Toothache, Cavity, Catch)

- Если у меня есть полость, то вероятность того, что зонд застрянет в ней, не зависит от того, болит ли у меня зуб:
  - P(+catch | +toothache, +cavity) = P(+catch | +cavity)

- Та же независимость сохраняется, если у меня нет полости:
  - P(+catch | +toothache, -cavity) = P(+catch| -cavity)

- Catch *условно* не зависит от Toothache с учетом Cavity:
  - P(Catch | Toothache, Cavity) = P(Catch | Cavity)

- Эквивалентные утверждения:
  - P(Toothache | Catch , Cavity) = P(Toothache | Cavity)
  - P(Toothache, Catch | Cavity) = P(Toothache | Cavity) P(Catch | Cavity)
  - Одно легко вывести из другого



Условная независимость

- Безусловная (абсолютная) независимость очень редка (почему?)

- *Условная независимость* — это наша самая основная и надежная форма знания о неопределенных средах.

- X условно не зависит от Y при заданном Z $X \perp\!\!\!\perp Y | Z$
  тогда и только тогда:

$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

  или эквивалентно тогда и только тогда:

$$\forall x, y, z : P(x|z, y) = P(x|z)$$

Условная независимость

- Безусловная (абсолютная) независимость очень редка (почему?)

- *Условная независимость* — это наша самая основная и надежная форма знания о неопределенных средах.

- X условно не зависит от Y при заданном Z тогда и только тогда:

$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

или эквивалентно тогда и только тогда:

$$\forall x, y, z : P(x|z, y) = P(x|z)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

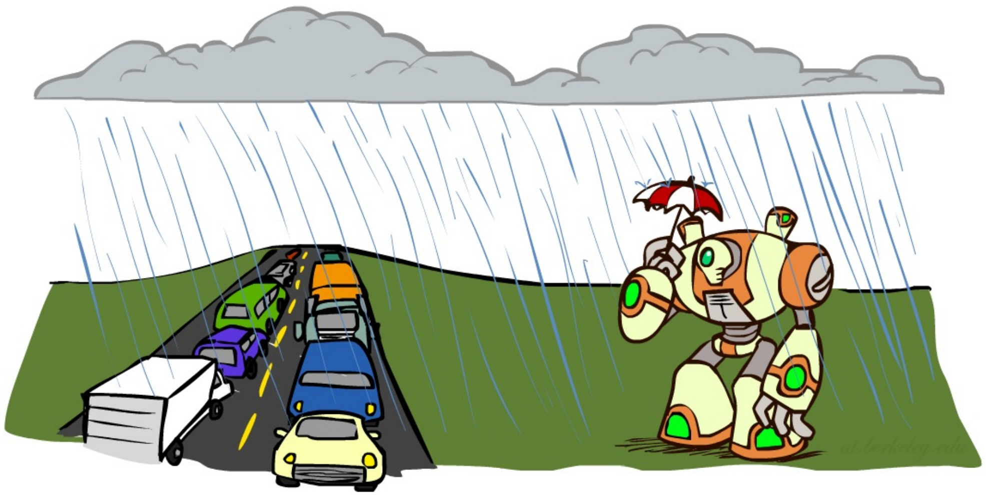
$$P(x|z,y) = \frac{P(x,z,y)}{P(z,y)}$$

$$= \frac{P(x,y|z)P(z)}{P(y|z)P(z)}$$

$$= \frac{P(x|z)P(y|z)P(z)}{P(y|z)P(z)}$$

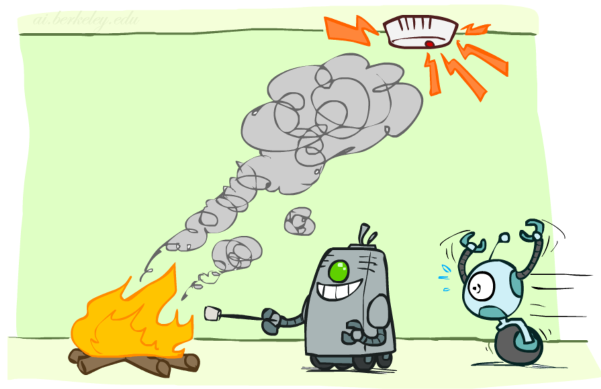
Условная независимость

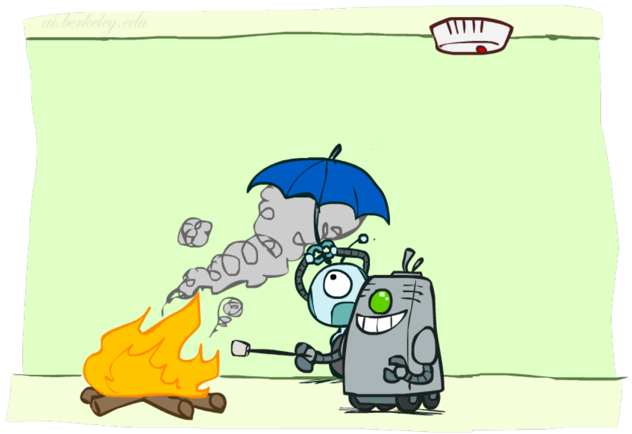
- Рассмотрим домен:
  - Трафик
  - Зонтик
  - Дождь



Условная независимость

- Рассмотрим домен:
  - Fire
  - Smoke
  - Alarm

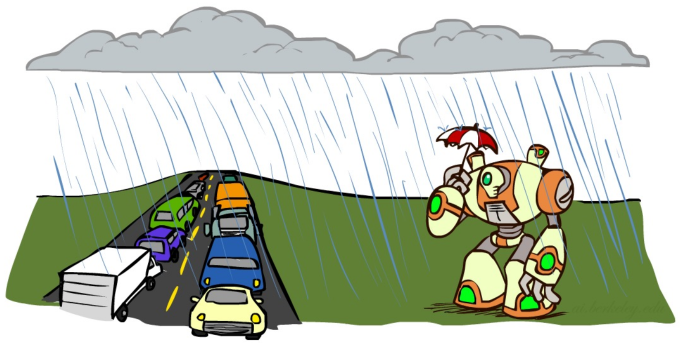




Условная независимость и цепное правило

- Цепное правило: $P(X_1, X_2, \ldots X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\ldots$

- Тривиальная декомпозиция:



$$P(\text{Traffic}, \text{Rain}, \text{Umbrella}) =$$
$$P(\text{Rain})P(\text{Traffic}|\text{Rain})P(\text{Umbrella}|\text{Rain}, \text{Traffic})$$

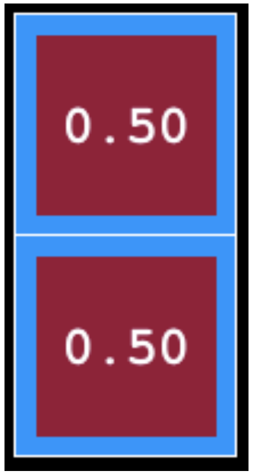
- При предположении об условной независимости:

$$P(\text{Traffic}, \text{Rain}, \text{Umbrella}) =$$
$$P(\text{Rain})P(\text{Traffic}|\text{Rain})P(\text{Umbrella}|\text{Rain})$$

- Байесовские сети/графовые модели помогают нам выразить предположения об условной независимости

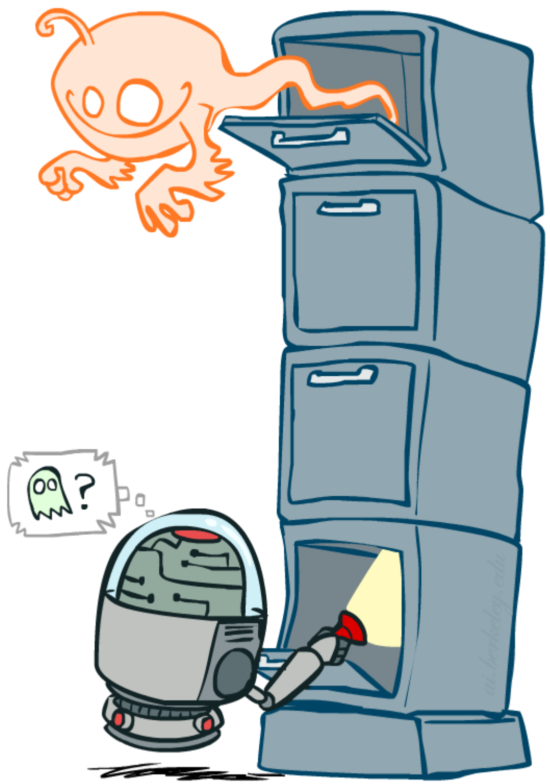
Цепное правило охотников за привидениями

- Каждый датчик зависит только от того, где находится призрак
- Это означает, что два датчика условно независимы, учитывая положение призрака
- T: Верхний квадрат красный
  B: Нижний квадрат красный
  G: Призрак вверху
- Дано:
  $P(+g) = 0.5$
  $P(-g) = 0.5$
  $P(+t \mid +g) = 0.8$
  $P(+t \mid -g) = 0.4$
  $P(+b \mid +g) = 0.4$
  $P(+b \mid -g) = 0.8$

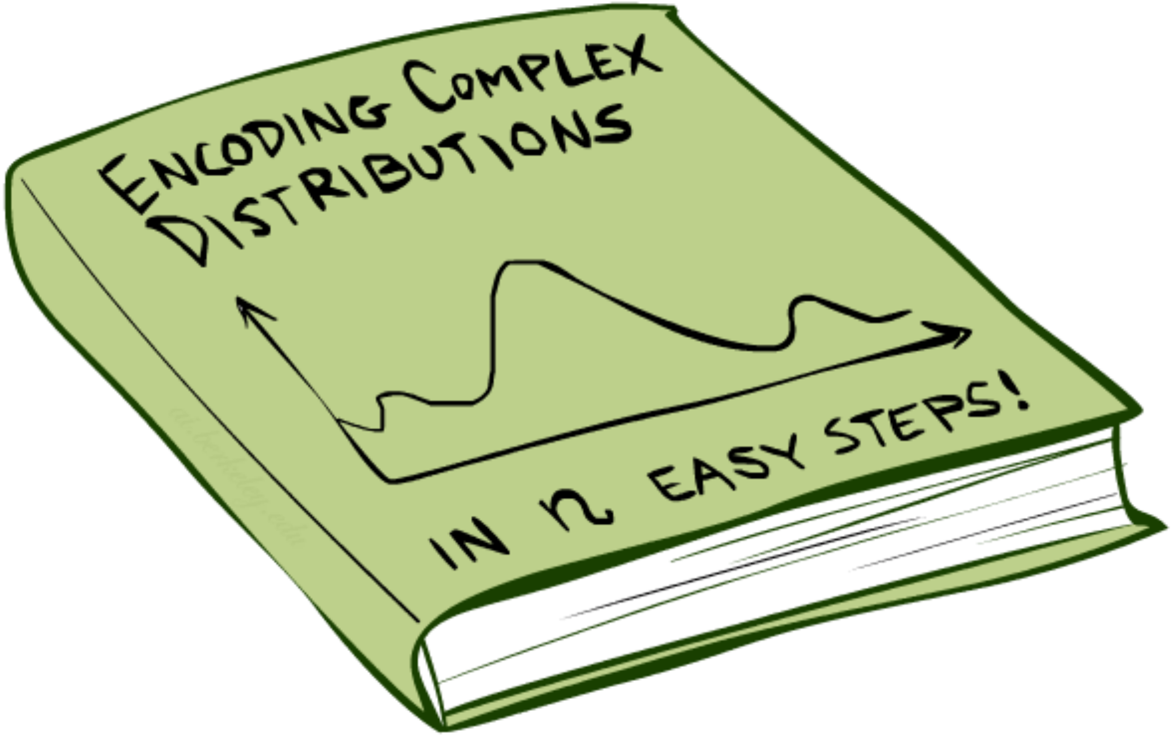


$$P(T,B,G) = P(G)\,P(T|G)\,P(B|G)$$

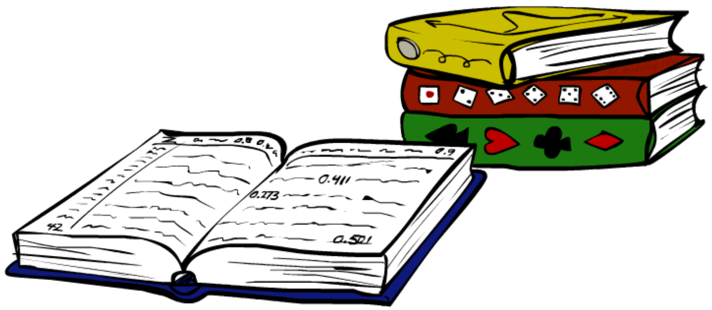
T	B	G	P(T,B,G)
+t	+b	+g	0.16
+t	+b	-g	0.16
+t	-b	+g	0.24
+t	-b	-g	0.04
-t	+b	+g	0.04
-t	+b	-g	0.24
-t	-b	+g	0.06
-t	-b	-g	0.06



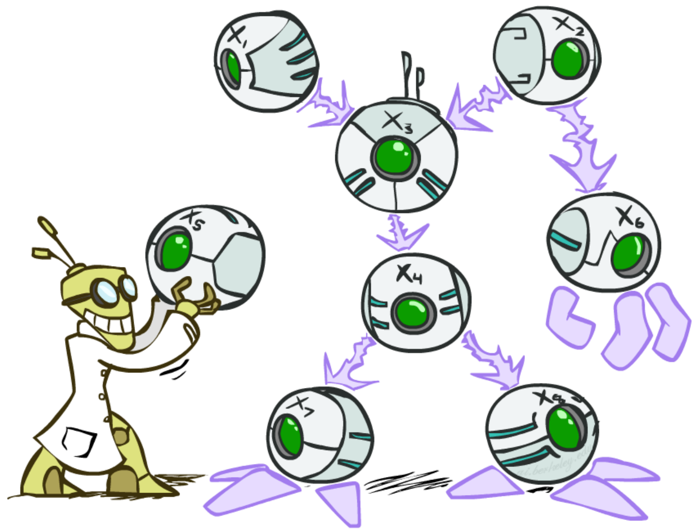
Байесовские сети: общая картина



Байесовские сети: общая картина

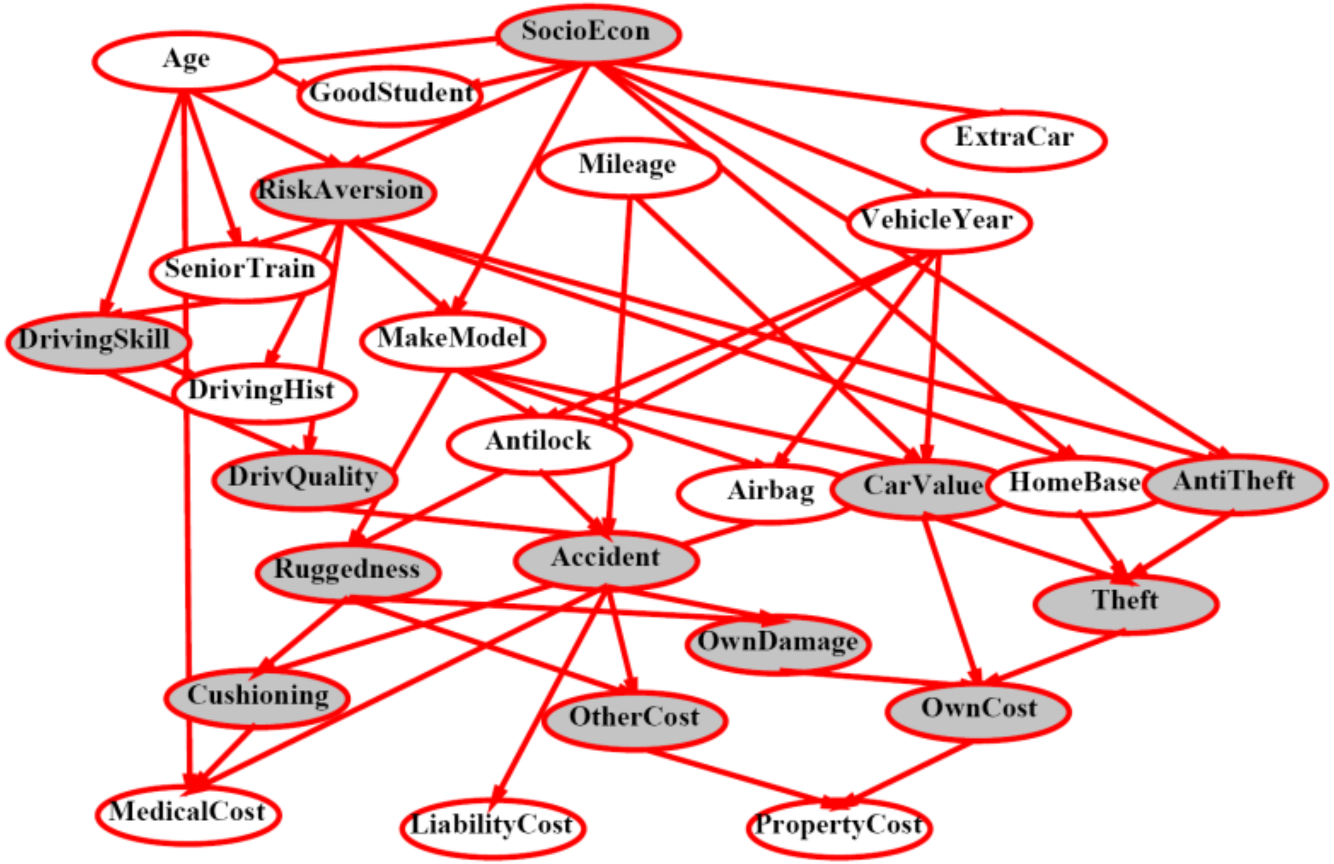


- Есть две проблемы с использованием полных совместных таблиц распределения в качестве наших вероятностных моделей:
  - Даже если есть только несколько переменных, совместное распределение слишком велико, чтобы представлять его явно.
  - Трудно узнать (оценить) что-либо эмпирически о более чем нескольких переменных одновременно.

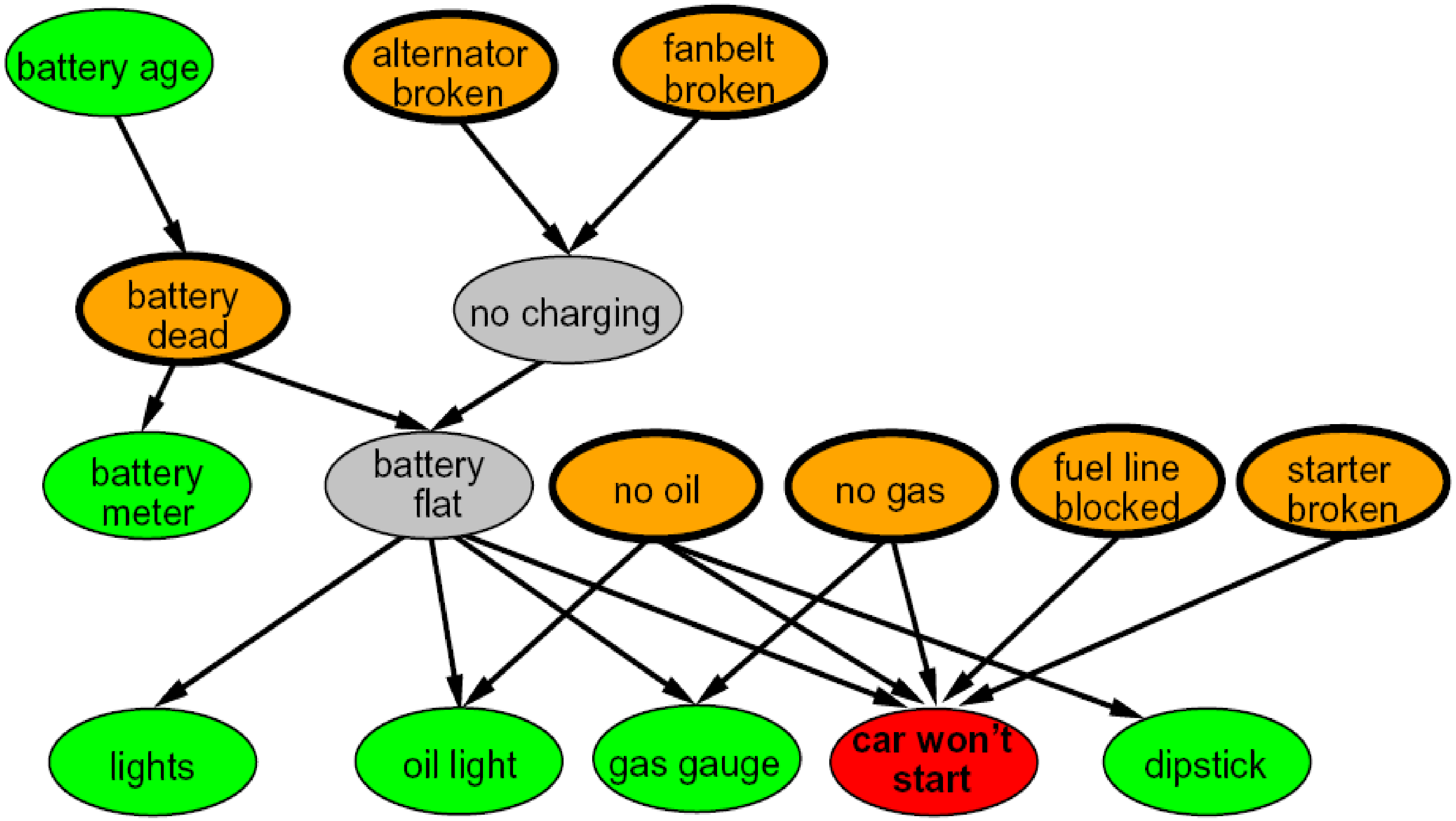


- Байесовские сети: метод описания сложных совместных распределений (моделей) с использованием простых локальных распределений (условных вероятностей).
  - Более правильно называть их графовыми моделями
  - Они описывают, как переменные локально взаимодействуют
  - Локальные взаимодействия объединяются в глобальные косвенные взаимодействия.

Пример байесовской сети: Страхование

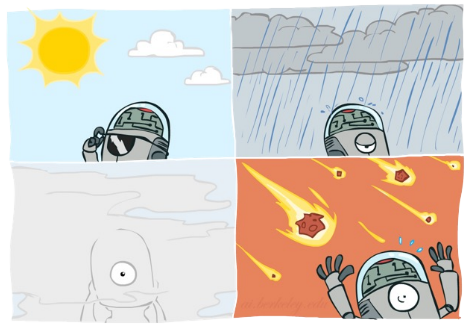


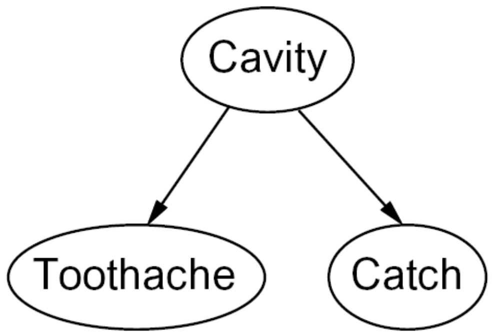
Пример байесовской сети: Автомобиль

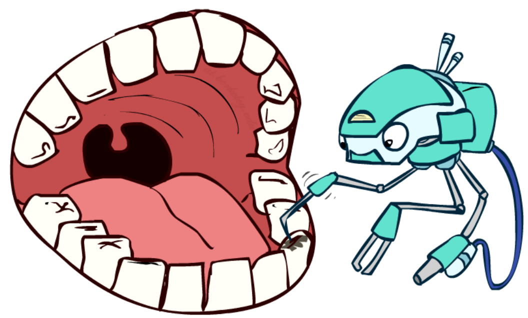


Нотация графовой модели

- Вершины: переменные (с доменами)
  - Может быть назначенными (наблюдаемыми) или неназначенными (ненаблюдаемыми)
- Дуги: взаимодействия
  - Указывают «прямое влияние» между переменными
  - Формально: определяют условную независимость (подробнее позже)
- А пока: представьте, что стрелки означают прямую причинно-следственную связь (хотя в общем случае нет!)

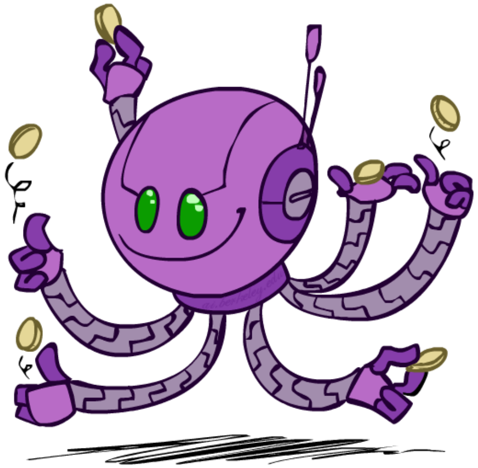






Пример: подбрасывание монет

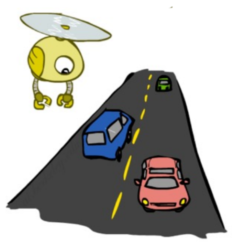
- N независимых подбрасываний монет

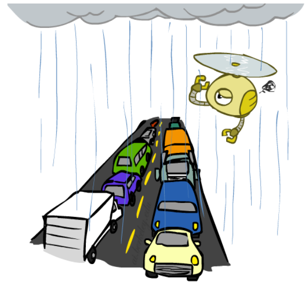


$$X_1 \qquad X_2 \qquad \cdots \qquad X_n$$

- Отсутствие взаимодействий между переменными: полная независимость

Пример: Пробки

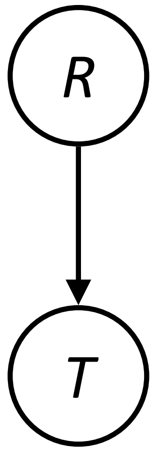




- Переменные:
  - R: дождь
  - T: пробки

- Модель 1: независимость

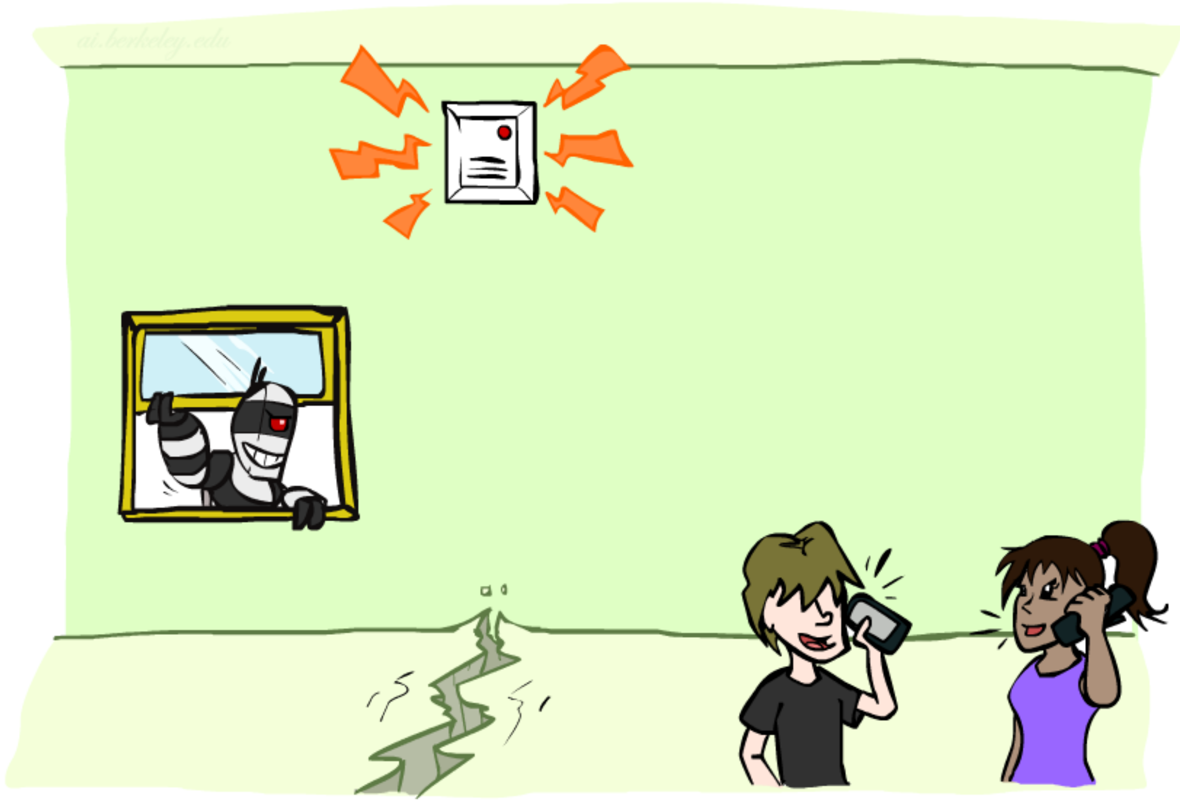
- Модель 2: дождь приводит к пробкам



- Почему агент, использующий модель 2, лучше?

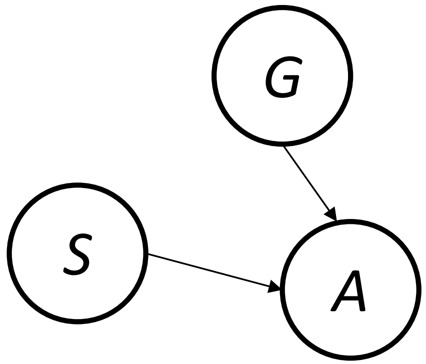
Пример: Сеть сигнализации

- Переменные
  - B: Взлом
  - A: Сигнализация
  - M: Мэри звонит
  - J: Джон звонит
  - E: Землетрясение!



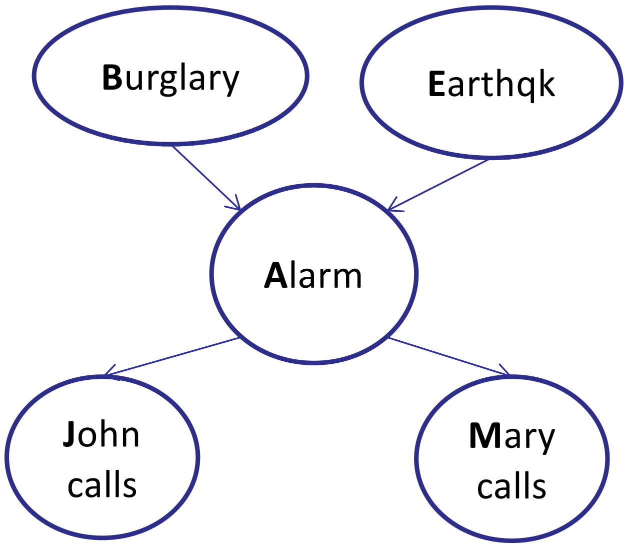
Пример: Люди

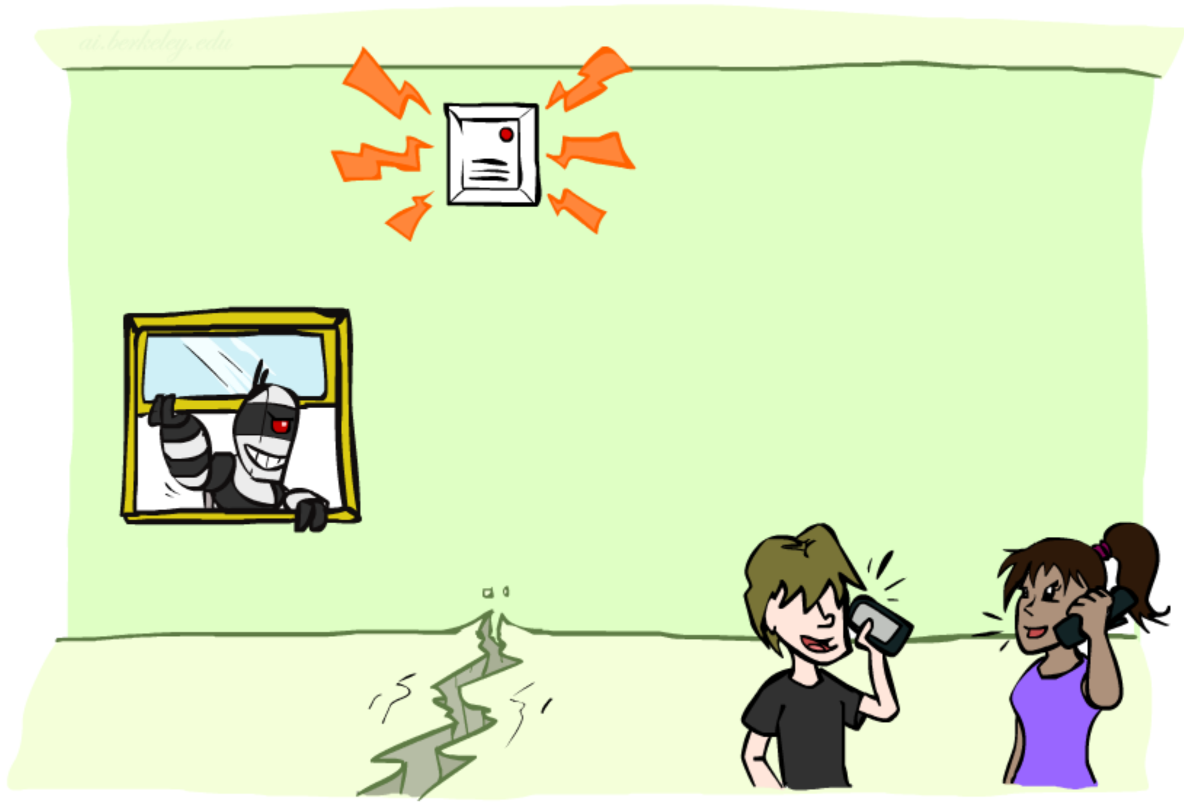
- G: цель человека / параметры вознаграждения человека
- S: состояние физического мира
- A: действие человека



Пример: Сеть сигнализации

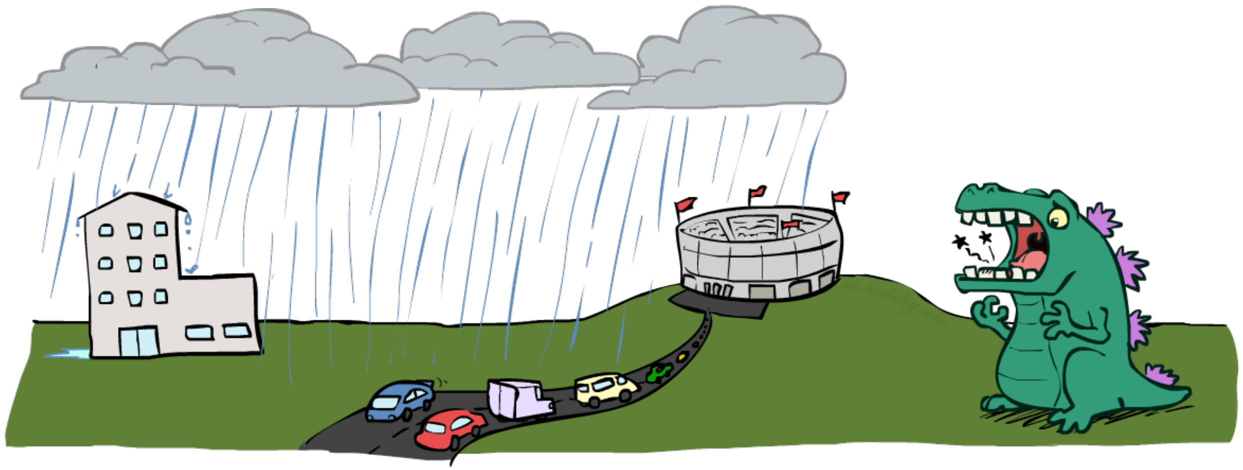
- Переменные
  - B: Взлом
  - A: Сигнализация
  - M: Мэри звонит
  - J: Джон звонит
  - E: Землетрясение!





Пример: Пробки II

- Переменные
  - T: Пробки
  - R: Дождь
  - L: Низкое давление
  - D: Капли с крыши
  - B: Игра в мяч
  - C: Полость в зубе



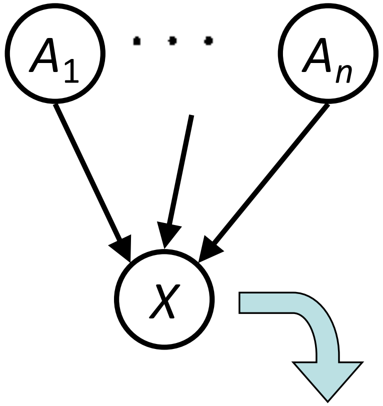
Семантика байесовской сети

Семантика байесовской сети

- Множество вершин, по одной на каждую переменную X
- Направленный, ациклический граф
- Условное распределение для каждого узла
  - Набор распределений по X, по одному для каждой комбинации родительских значений.

$$P(X|a_1 \ldots a_n)$$

  - CPT: таблица условной вероятности
  - Описание зашумленного «причинного» процесса



$$P(X|A_1 \ldots A_n)$$

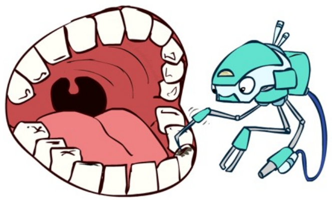
Байесовская сеть = топология (граф) + локальные условные вероятности

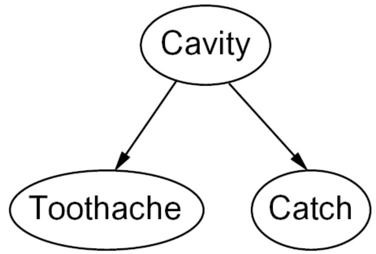
Вероятности в Байесовской сети

- Сети Байеса неявно кодируют совместные распределения
  - Как произведение локальных условных распределений
  - Чтобы увидеть, какую вероятность сеть дает для полного распределения, перемножьте все соответствующие условные операторы вместе. :

$$P(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | \mathit{parents}(X_i))$$

  - Пример:





$$P(+\mathit{cavity},\ +\mathit{catch},\ \text{-}\mathit{toothache})$$

=P(-toothache|+cavity)P(+catch|+cavity)P(+cavity)

Вероятности в Байесовской сети

- Почему мы гарантируем, что

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | \mathit{parents}(X_i))$$

приводит к правильному совместному распределению?

- Цепное правило (действительно для всех распределений): $P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | x_1 \ldots x_{i-1})$
- <u>Предположим</u> условную независимость: $P(x_i | x_1, \ldots x_{i-1}) = P(x_i | \mathit{parents}(X_i))$

→ Следствие: $$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | \mathit{parents}(X_i))$$

- Не каждая сеть Байеса может представлять каждое совместное распределение
  - Топология обеспечивает определенные условные независимости

Пример: Подбрасывание монет

X_1 X_2 $\cdots$ X_n

$P(X_1)$

h	0.5
t	0.5

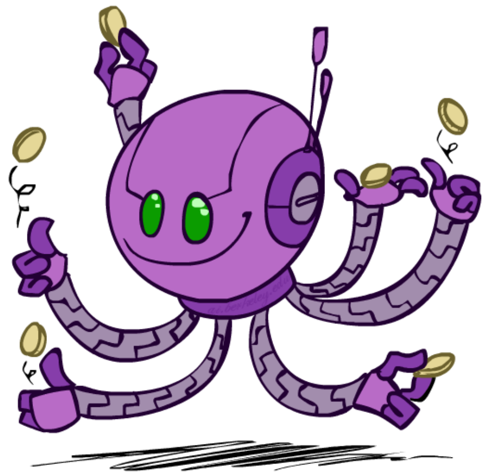
$P(X_2)$

h	0.5
t	0.5

$\cdots$

$P(X_n)$

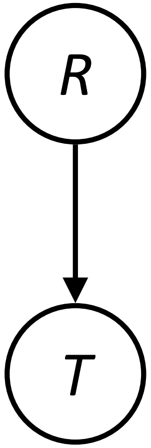
h	0.5
t	0.5



$P(h, h, t, h) =$ P(h)P(h)P(t)P(h)

Только распределения, переменные которых абсолютно независимы, могут быть представлены байесовской сетью без дуг.

Пример: Пробки



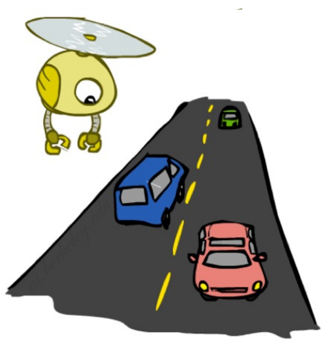
$P(R)$

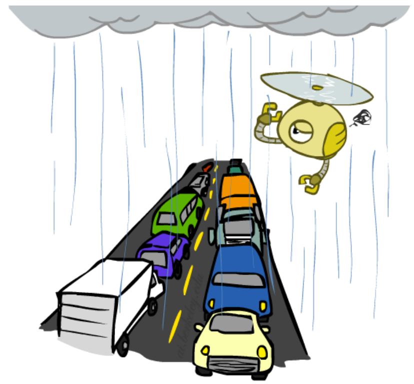
+r	1/4
-r	3/4

$P(T|R)$

+r	+t	3/4
	-t	1/4
-r	+t	1/2
	-t	1/2

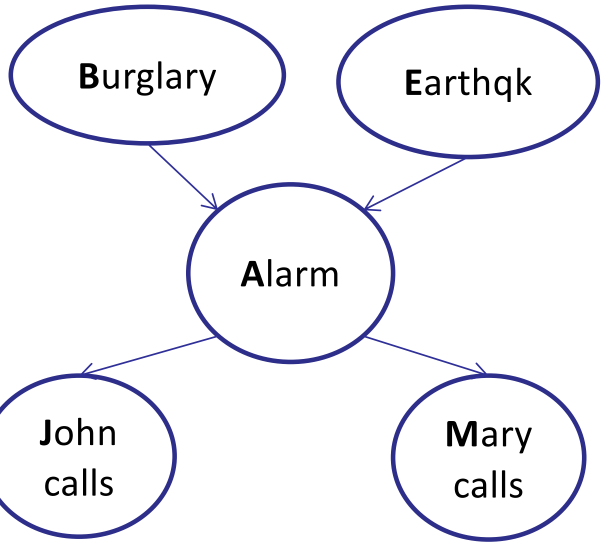
$P(+r, -t) =$ P(+r)P(-t|+r) = ¼*1/4



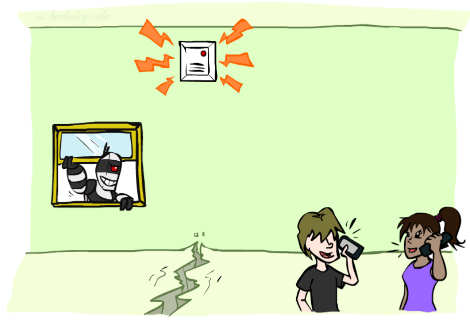


Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

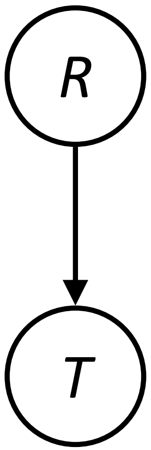
A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

P(M|A)P(J|A)
P(A|B,E)

Пример: Пробки

- Направление причинности



$P(R)$

+r	1/4
-r	3/4

$P(T|R)$

+r	+t	3/4
	-t	1/4

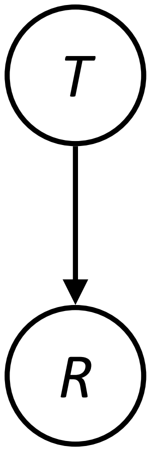
-r	+t	1/2
	-t	1/2

$P(T,R)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

Пример: Пробки наоборот

- Реверсивная причинность?



$P(T)$

+t	9/16
-t	7/16

$P(R|T)$

+t	+r	1/3
	-r	2/3
-t	+r	1/7
	-r	6/7

$P(T,R)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

Причинность?

- Когда сети Байеса отражают истинные причинно-следственные связи:
  - Часто проще (узлы имеют меньше родителей)
  - Часто легче думать о…
  - Часто легче получить суждения экспертов

- Сети Байеса не обязательно должны быть причинно-следственными
  - Иногда в домене не существует причинной сети (особенно если отсутствуют переменные).
  - Например, рассмотрим переменные Пробки и Капли
  - Возможны дуги, отражающие корреляцию, а не причинно-следственную связь

- Что же дуги действительно значат?
  - Топология может кодировать каузальную структуру
  - Топология действительно кодирует условную независимость

$$P(x_i|x_1, \ldots x_{i-1}) = P(x_i|parents(X_i))$$