Байесовские сети: независимость

Владимир Судаков

[на основе курса http://ai.berkeley.edu.]

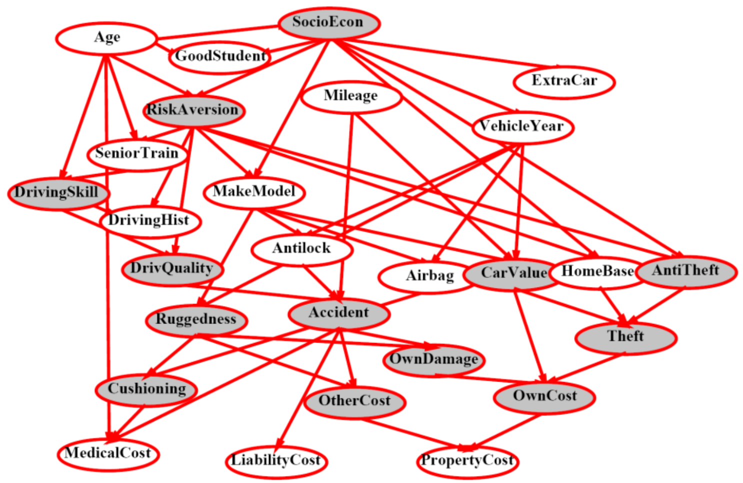
Резюме по вероятностям

- Условные вероятности $$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$
- Правило произведения $$P(x,y) = P(x|y)P(y)$$
- Цепное правило $$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \dots X_n) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)\dots \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1, \dots, X_{i-1}) \end{aligned}$$
- X, Y независимы тогда и только тогда: $$\forall x, y : P(x,y) = P(x)P(y)$$
- X и Y условно независимы при данном Z тогда и только тогда:

$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \qquad X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

Сеть Байеса

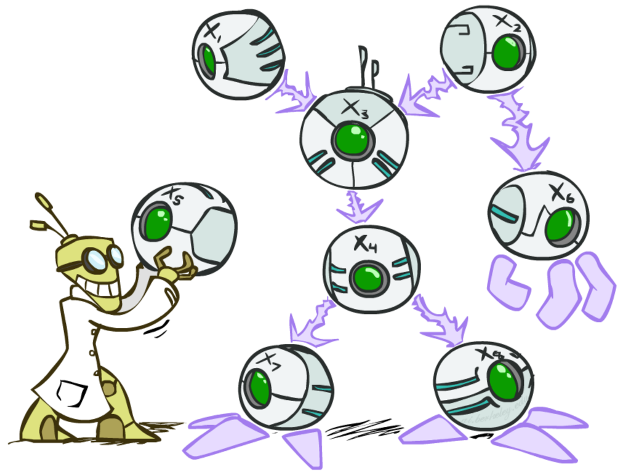
- Байесовская сеть — это эффективное кодирование вероятностной модели предметной области.



- Вопросы, которые мы можем задать:
  - Вывод: при фиксированной сети Байеса, что представляет собой P(X | e)?
  - Представление: учитывая граф сети Байеса, какие типы распределений он может кодировать?
  - Моделирование: какая сеть Байеса наиболее подходит для данной предметной области?

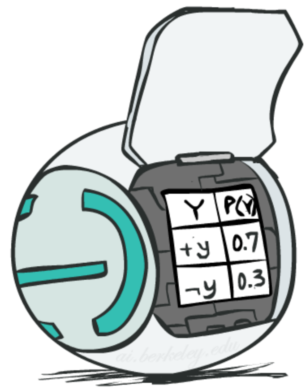
Семантика Байесовской сети

- Направленный ациклический граф, по одному узлу на случайную величину
- Таблица условной вероятности (CPT) для каждого узла
  - Набор распределений по X, по одному для каждой комбинации родительских значений: $P(X|a_1 \ldots a_n)$



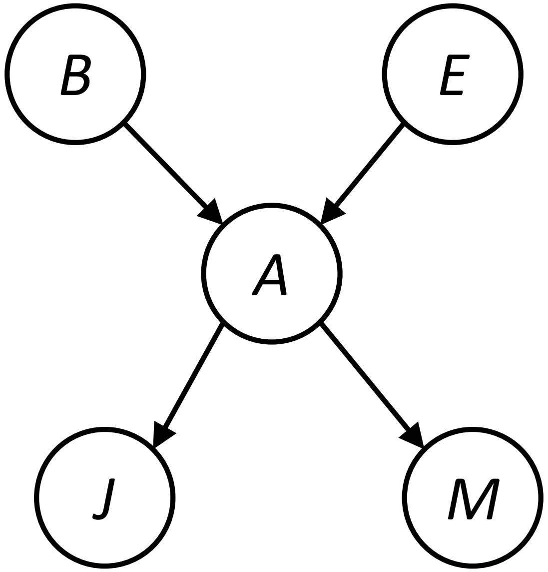
- Сети Байеса неявно кодируют совместные распределения
  - Как произведение локальных условных распределений
  - Чтобы увидеть, какую вероятность сеть дает для полного назначения, перемножьте все соответствующие условные вероятности:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|parents(X_i))$$

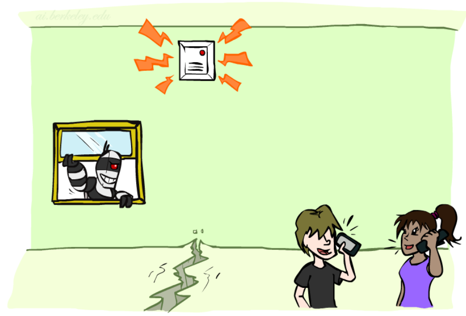


Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

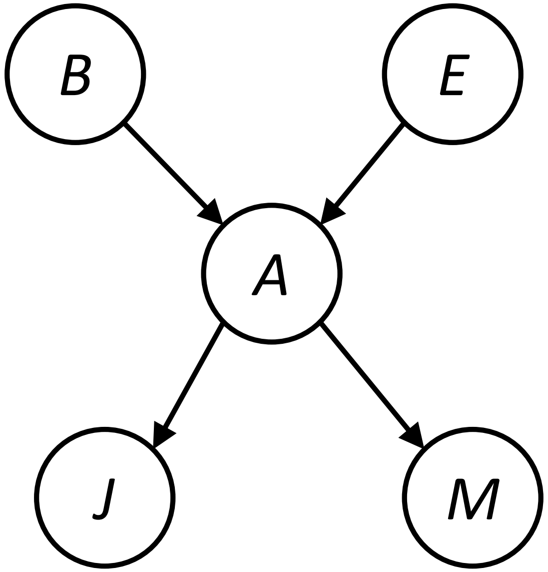
A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

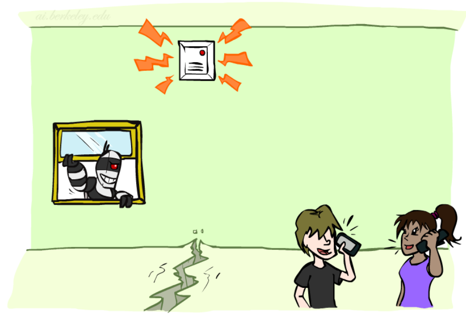
$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$
$$P(+b)P(-e)P(+a|+b, -e)P(-j|+a)P(+m|+a) =$$
$$0.001 \times 0.998 \times 0.94 \times 0.1 \times 0.7$$

Размер байесовской сети

- Насколько велико совместное распределение по N булевым переменным?

  2^N

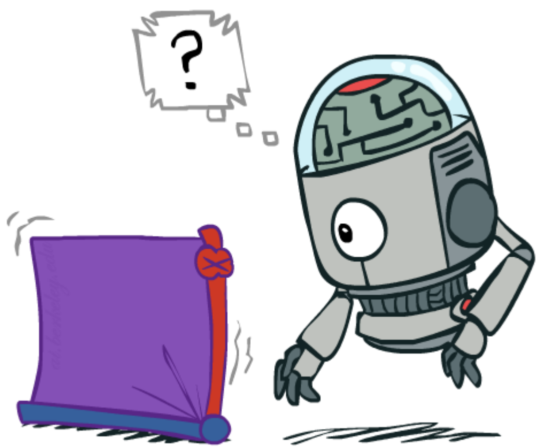
- Насколько велика сеть из N узлов, если узлы имеют до k родителей?

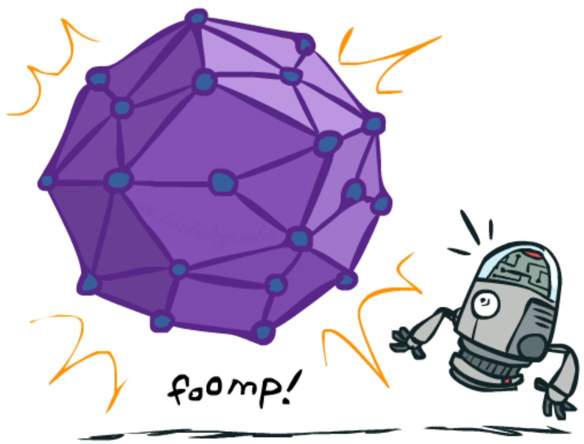
  $O(N * 2^{k+1})$

- Оба дают вам возможность вычислить

$$P(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

- Сеть Баейса: Огромная экономия пространства!
- Также легче выявить местные CPT
- Также быстрее отвечать на вопросы (прошлая лекция!)





Байесовская сеть

- ✔ Представление
- ✔ Вероятностный вывод
  - Условная независимость
  - Сэмплирование
  - Обучение Байесовской сети на данных

Условная независимость

- X и Y независимы если

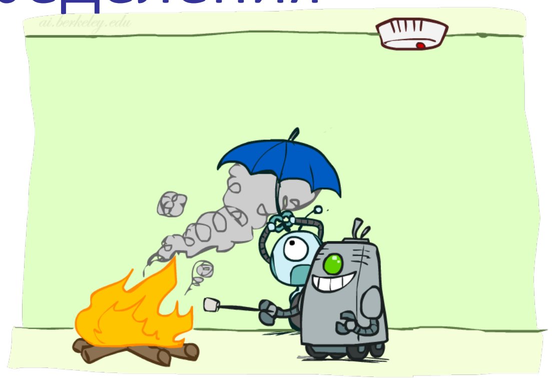
$$\forall x, y \;\; P(x, y) = P(x)P(y) \dashrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

- X и Y условно независимы при данном Z

$$\forall x, y, z \;\; P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \dashrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

- (Условная) независимость это свойство распределения

- Пример: $Alarm \perp\!\!\!\perp Fire | Smoke$

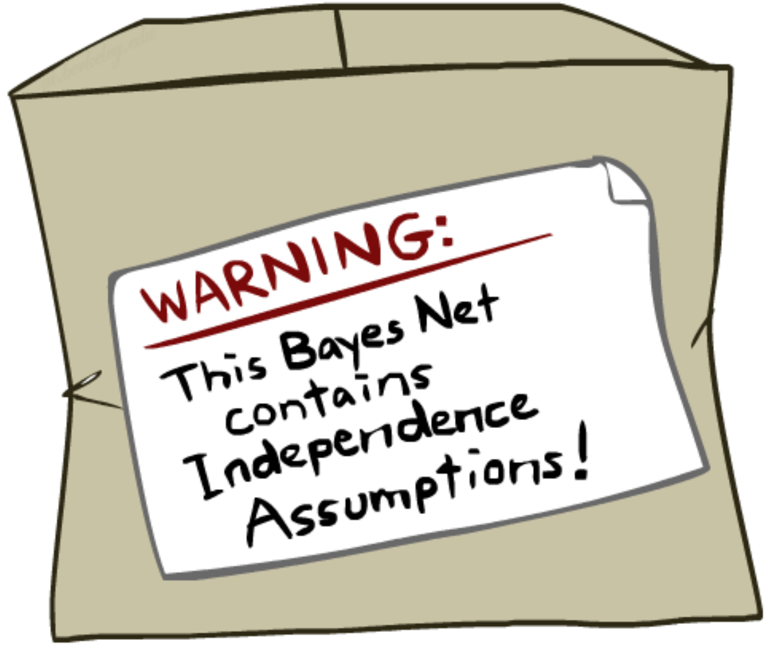


Сеть Байеса: Предположение

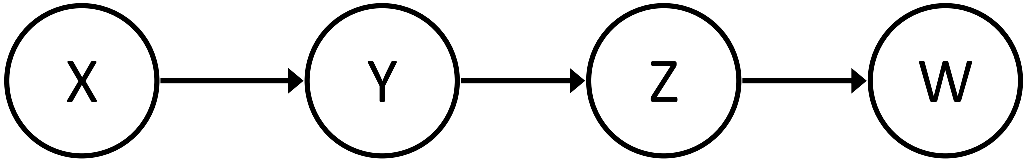
- Предположения, которые мы должны сделать, чтобы определить байесовскую сеть при заданном графе:

$$P(x_i|x_1 \cdots x_{i-1}) = P(x_i|parents(X_i))$$

- Помимо приведенных выше предположений условной независимости «цепное правило → байесовская сеть»
  - Часто дополнительные дополнительные условные независимости
  - Их можно увидеть на графе
- Важно для моделирования: понимать предположения, сделанные при выборе графа байесовской сети.



Пример



- Предположения условной независимости непосредственно из упрощений в цепном правиле:

$$P(x, y, z, w) = P(x)P(y|x)P(z|x, y)P(w|x, y, z)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Z | Y$$

$$P(x, y, z, w) = P(x)P(y|x)P(z|y)P(w|z)$$

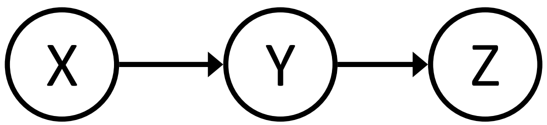
$$W \perp\!\!\!\perp \{X, Y\} | Z$$

- Дополнительные подразумеваемые предположения об условной независимости?

$$W \perp\!\!\!\perp X | Y$$

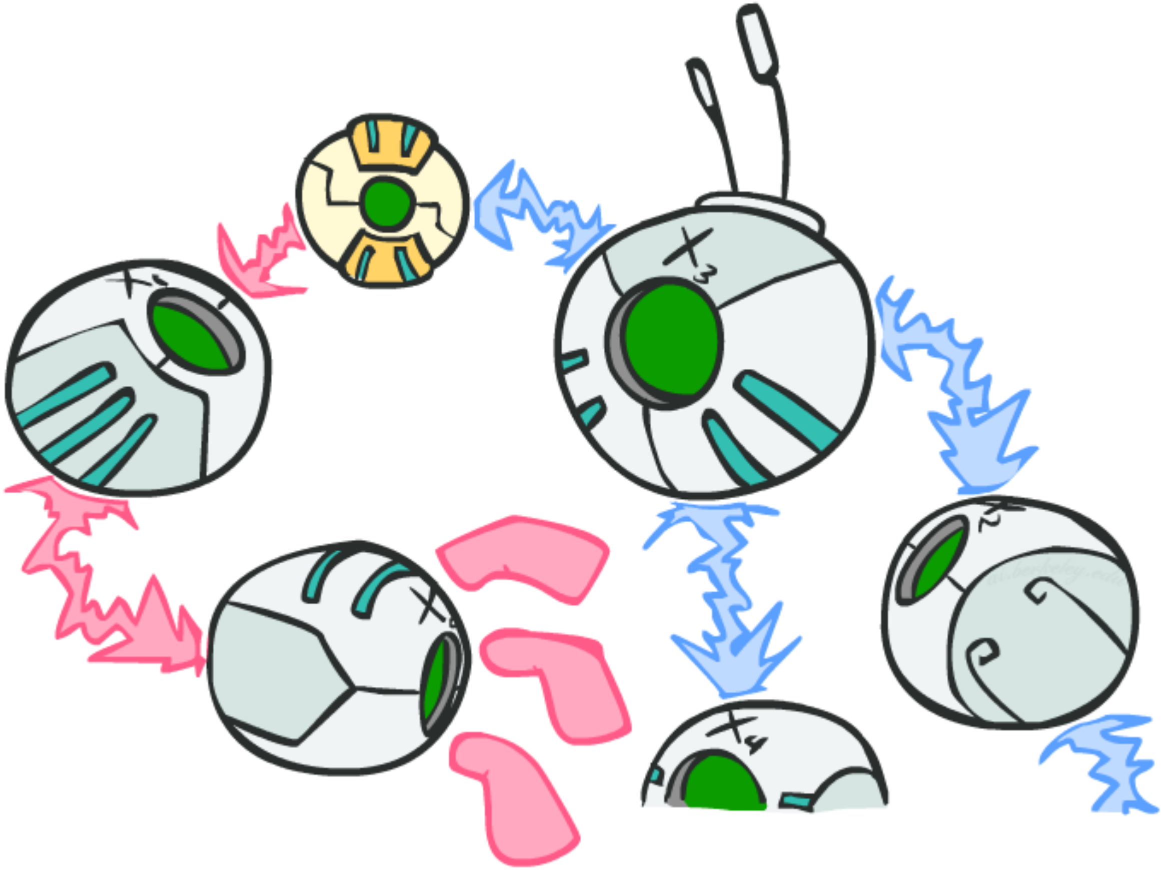
Независимость в сети Байеса

- Важный вопрос о сети Байеса:
  - Являются ли два узла независимыми при наличии определенных доказательств?
  - Если да, то следует доказать с помощью алгебры (утомительно в общем)
  - Если нет, следует доказать контрпримером
  - Пример:



  - Вопрос: обязательно ли X и Z независимы?
    - Ответ: нет. Пример: низкое давление вызывает дождь, который вызывает пробки.
    - X может влиять на Z, Z может влиять на X (через Y)
    - Приложение: они могут быть независимыми: как?

D-разделимость: План



D-разделимость: План

- Изучение свойств независимости для троек
  - Почему тройки?
- Анализ сложных случаев с точки зрения троек элементов
- D-разделение: условие/алгоритм ответа на такие запросы

Причинные цепочки

- Эта конфигурация представляет собой «причинно-следственную цепочку»

$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

- Гарантированная независимость X от Z ?
- *Нет!*
  - Одного примера набора CPT, для которых X не является независимым от Z, достаточно, чтобы показать, что эта независимость не гарантируется.
  - Пример:
    - Низкое давление вызывает дождь, вызывает пробки, высокое давление не вызывает дождя не вызывает трафик
    - В числах:

      P(+y | +x) = 1, P(-y | - x) = 1,
      P(+z | +y) = 1, P(-z | -y) = 1

Причинные цепочки

- Это конфигурация «причинной цепочки»

X: Низкое давление Y: Дождь Z: Traffic

$$P(x,y,z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

- Гарантирована независимость X от Z при заданном Y?

$$P(z|x,y) = \frac{P(x,y,z)}{P(x,y)}$$

$$= \frac{P(x)P(y|x)P(z|y)}{P(x)P(y|x)}$$

$$= P(z|y)$$

Да!

- Свидетельство в цепи “блокирует” влияние

Общие причины

- Эта конфигурация “общей причины”

Y: Срок проекта заканчивается

X: Форумы заняты

Z: Лаборатория заполнена

$$P(x,y,z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

- Гарантировано что X независимо от Z ?
- *Нет!*
  - Одного примера CPT, для которых X не является независимым от Z, достаточно, чтобы показать, что эта независимость не гарантируется.
  - Пример:
    - Из-за срока выполнения проекта форумы заняты и лаборатория полная
    - В числах:

P(+x | +y) = 1, P(-x | -y) = 1,
P(+z | +y) = 1, P(-z | -y) = 1

Общая причина

- Эта конфигурация “общей причины”

Y: Срок проекта заканчивается

X: Форумы заняты

Z: Лаборатория заполнена

$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

- Гарантируется ли что X и Z независимы при заданном Y?

$$P(z|x, y) = \frac{P(x, y, z)}{P(x, y)}$$

$$= \frac{P(y)P(x|y)P(z|y)}{P(y)P(x|y)}$$

$$= P(z|y)$$

Да!

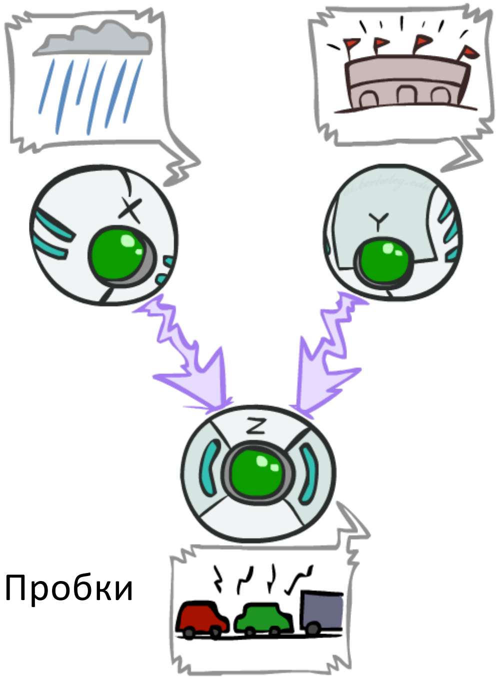
- Наблюдение за причиной блокирует влияние между следствиями.

Общий эффект

- Последняя конфигурация: две причины одного следствия (v-структуры)

X: Дождь

Y: Футбол



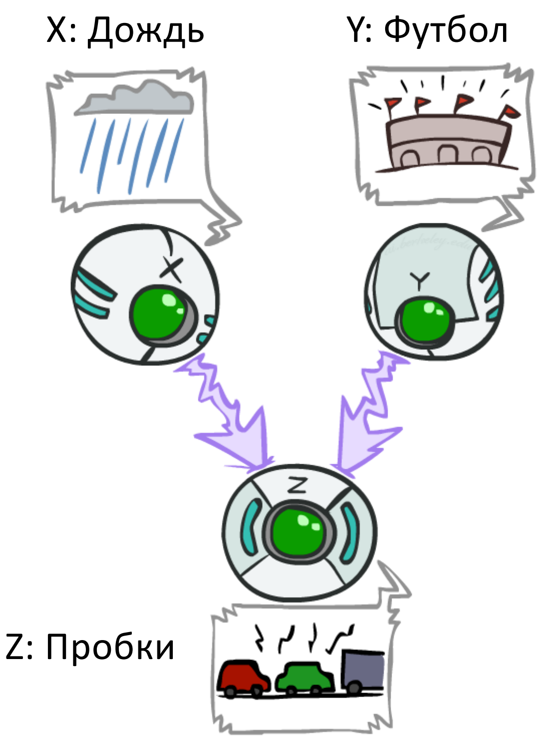
Z: Пробки

- X и Y независимы?
  - *Да*: футбол и дождь вызывают пробки, но они не коррелированы
- Доказательство:

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= \sum_z P(x, y, z) \\
&= \sum_z P(x)P(y)P(z|x, y) \\
&= P(x)P(y)\sum_z P(z|x, y) \\
&= P(x)P(y)
\end{aligned}
$$

Общий эффект

- Последняя конфигурация: две причины одного следствия (v-структуры)



- X и Y независимы?
  - *Да*: футбол и дождь вызывают пробки, но они не коррелированы
  - (Доказано выше)
- X и Y независимы при заданном Z?
  - *Нет*: наблюдая пробки, дождь и футбол соревнуются в качестве объяснения.
- Это обратное поведение от других случаев
  - Наблюдение за следствием активирует влияние между возможными причинами.

Общий случай

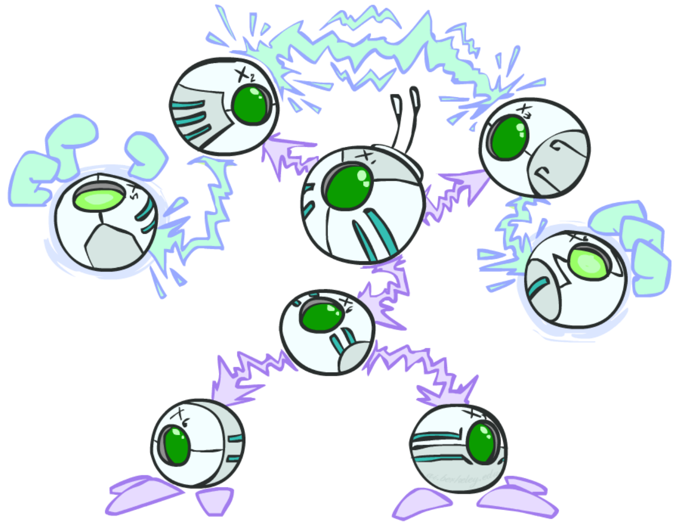
Общий случай

- Общий вопрос: в данной сети две переменные независимы (при наличии наблюдений)?

- Решение: анализ графа

- Любой сложный пример можно разбить

на повторения трех канонических случаев

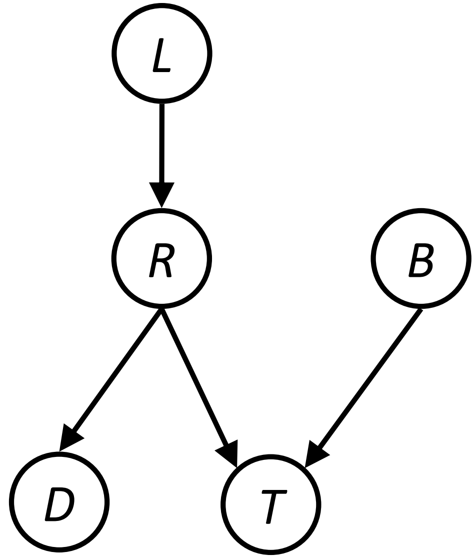


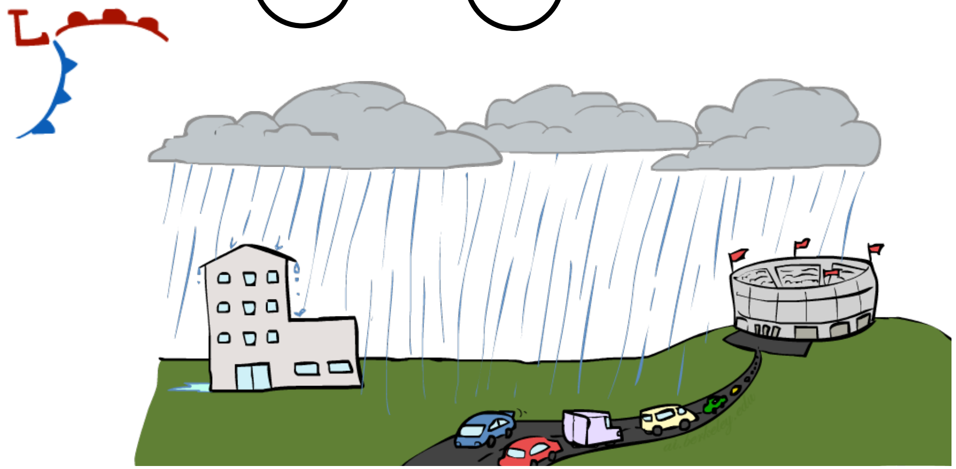
Достижимость

- Рецепт: заштриховывать узлы свидетельств, искать пути в полученном графе

- Попытка 1: если два узла не соединены никаким ненаправленным путем, не заблокированным заштрихованным узлом, они условно независимы

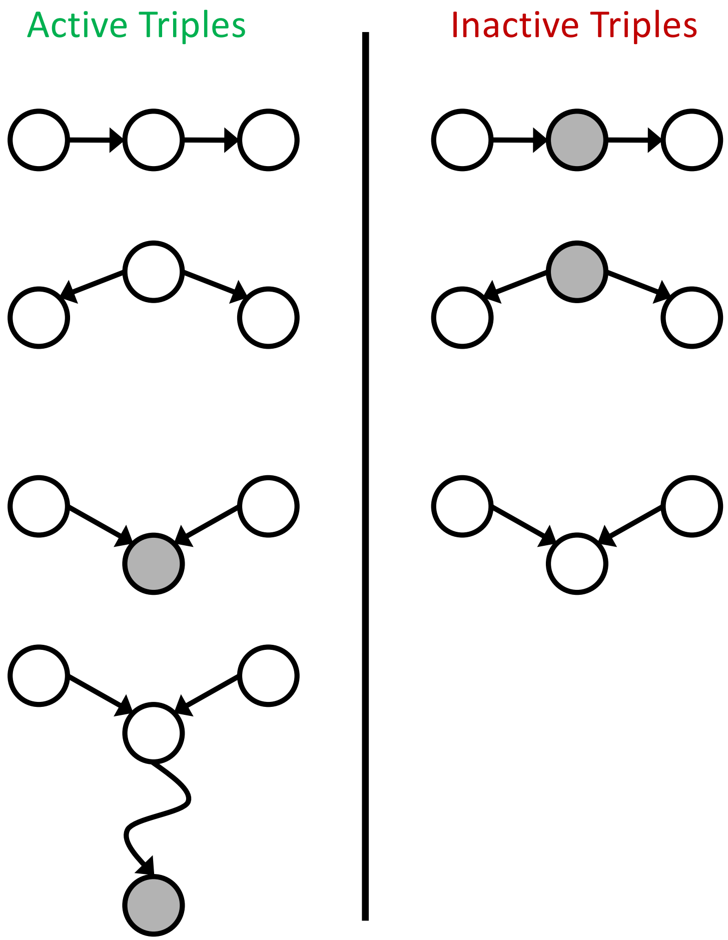
- Почти работает, но не совсем
  - Где он ломается?
  - Ответ: v-структура в T не считается ссылкой в пути, если только она не «активна».





Активные / Неактивные Пути

- Вопрос: Являются ли X и Y условно независимыми при заданных переменных свидетельства {Z}?
  - Да, если X и Y «d-разделены» Z
  - Рассмотрим все (ненаправленные) пути из X в Y
  - Нет активных путей = независимость!
- Путь активен, если активна каждая тройка:
  - Причинно-следственная цепочка A -> B -> C, где B не наблюдается (в любом направлении)
  - Общая причина A <- B -> C, где B не наблюдается
  - Общий эффект (он же v-структура)
    A -> B <- C, где наблюдается B или один из его *потомков*
- Все, что нужно, чтобы заблокировать путь, — это один неактивный сегмент.



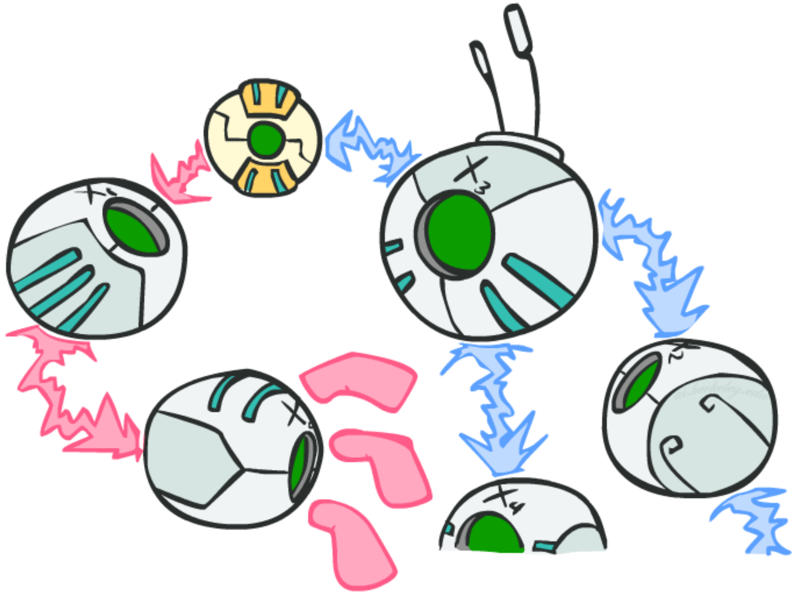
D-Разделимость

- Запрос: $X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, ..., X_{k_n}\}$?
- Проверить все (неориентированные!) пути между X_i и X_j
  - Если один или несколько активно, то независимость не гарантируется

$$X_i \not\perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, ..., X_{k_n}\}$$

  - В противном случае (т.е. если все пути неактивны), тогда независимость гарантирована

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, ..., X_{k_n}\}$$

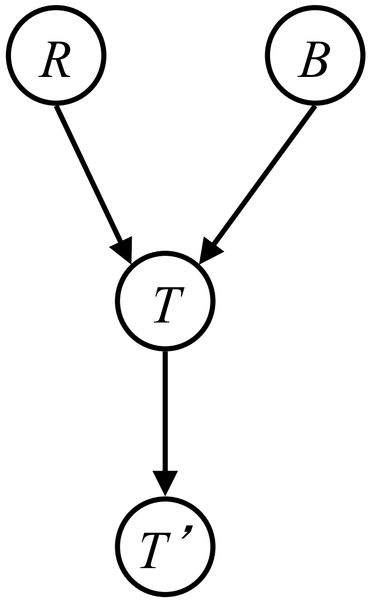


Пример

$R \perp\!\!\!\perp B$ Да

$R \perp\!\!\!\perp B | T$

$R \perp\!\!\!\perp B | T'$



Пример

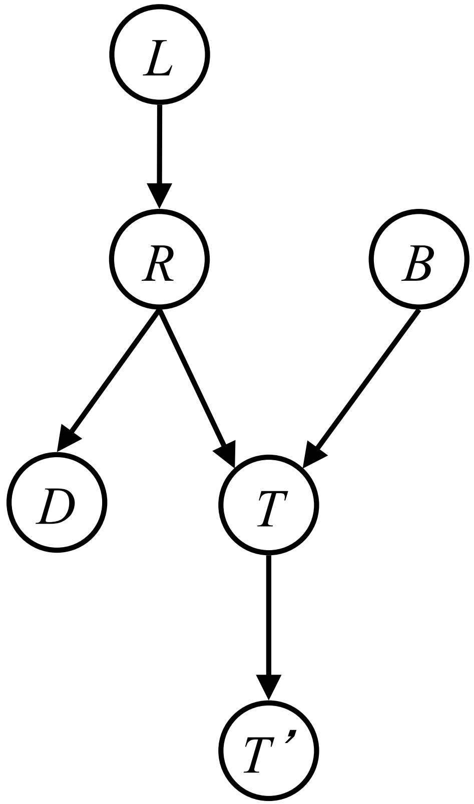
$L \perp\!\!\!\perp T' | T$ Да

$L \perp\!\!\!\perp B$ Да

$L \perp\!\!\!\perp B | T$

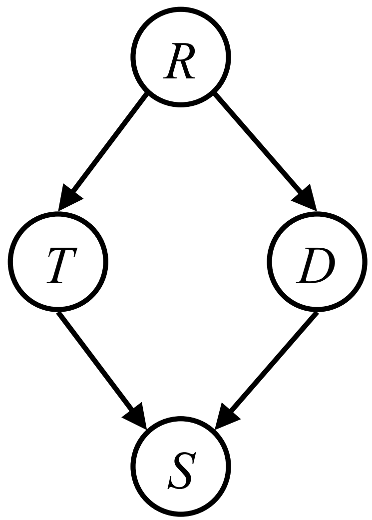
$L \perp\!\!\!\perp B | T'$

$L \perp\!\!\!\perp B | T, R$ Да



Пример

- Переменные:
  - R: Дождь
  - T: Пробки
  - D: Капли с крыши
  - S: Мне грустно
- Запросы:



$$T \perp\!\!\!\perp D$$

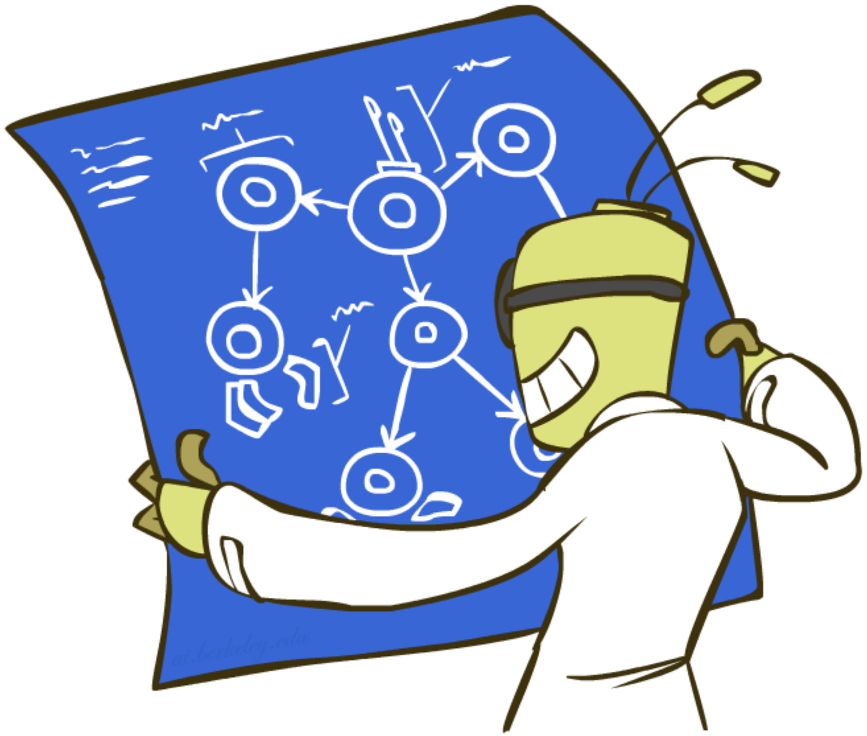
$$T \perp\!\!\!\perp D | R$$ Да

$$T \perp\!\!\!\perp D | R, S$$

Значение структуры

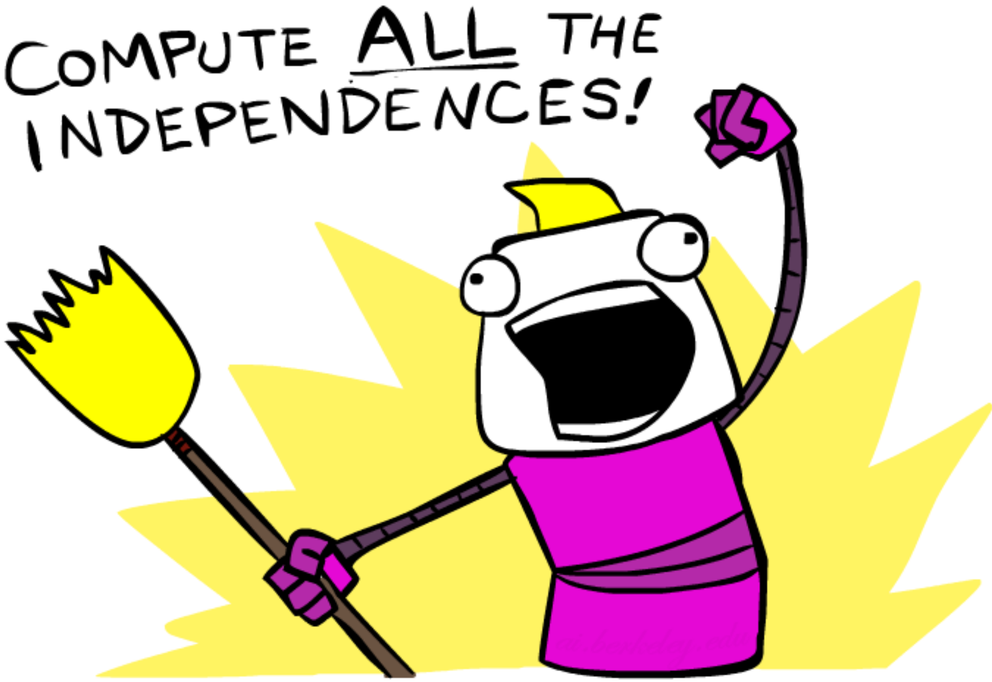
- Учитывая структуру байесовской сети, можно запустить алгоритм d-разделения, чтобы построить полный список условных зависимостей, которые обязательно верны для формы

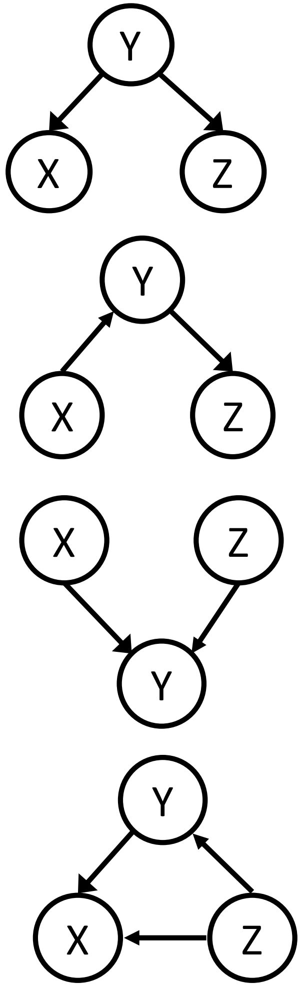
$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_{k_1}, ..., X_{k_n}\}$$



- Этот список определяет множество вероятностных распределений, которые могут быть представлены

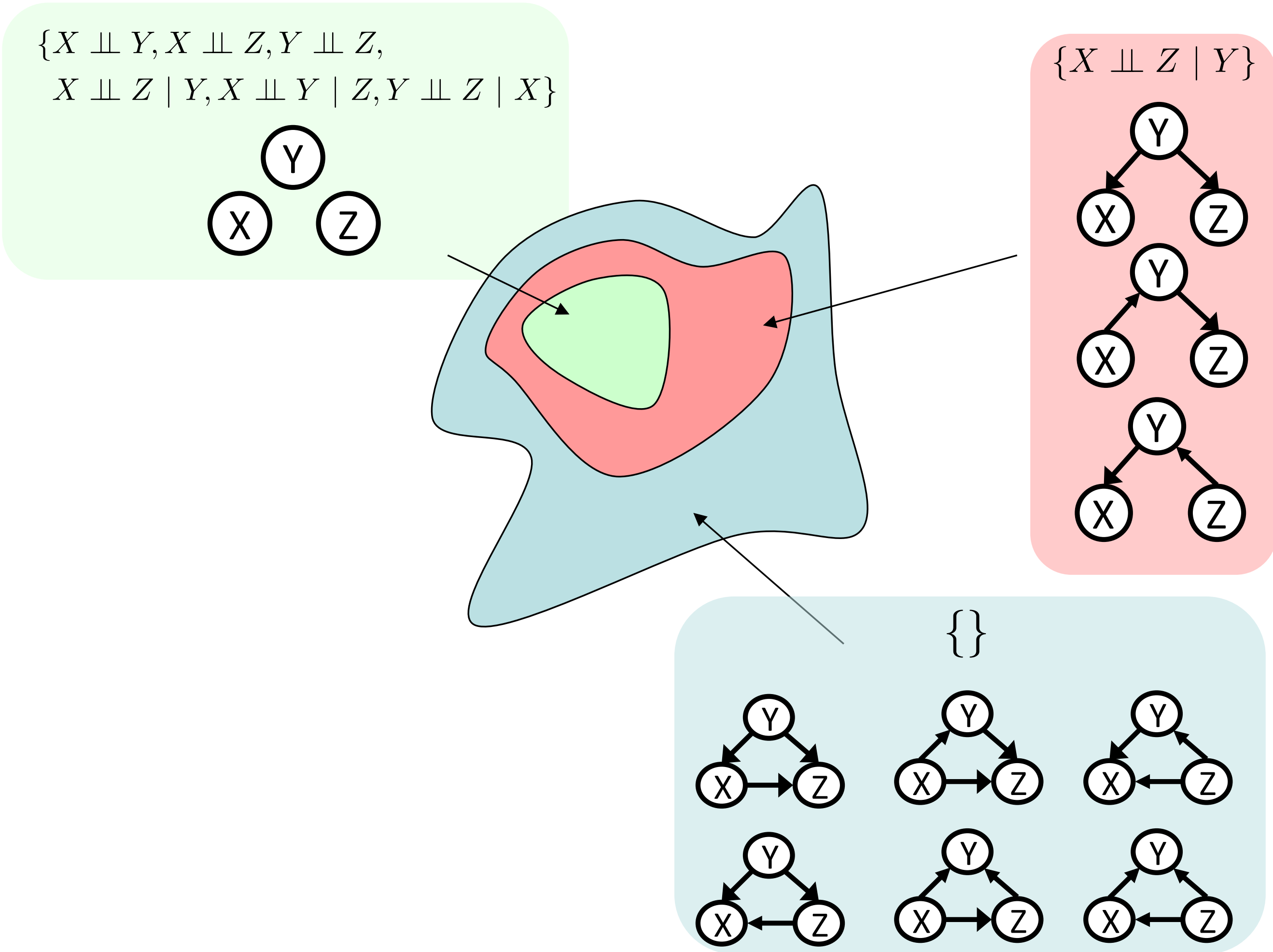
Вычисление всех независимостей





Распределения ограничений топологии

- Учитывая некоторую топологию графа G, можно закодировать только определенные совместные распределения.
- Структура графа гарантирует определенные (условные) независимости
- (Там может быть больше независимостей)
- Добавление дуг увеличивает набор распределений, но влечет затраты
- Полное обусловливание может кодировать любое распределение



Резюме по представлению байесовских сетей

- Сети Байеса компактно кодируют совместные распределения (используя условную независимость!)
- Гарантированная независимость распределений может быть выведена из структуры графа.
- D-разделение дает точные гарантии условной независимости прямо из графа.
- Совместное распределение байесовской сети может иметь дополнительную (условную) независимость, которую невозможно обнаружить, пока вы не проверите ее конкретное распределение.

Байесовские сети

- ✓ Представление
- ✓ Вероятностный вывод
  - Перечисление (точное, экспоненциальная сложность)
  - Исключение переменных (точное, наихудший случай экспоненциальная сложность, часто лучше)
  - Вероятностный вывод является NP-полным
- ✓ Условная независимость
- Сэмплирование
- Обучение на данных