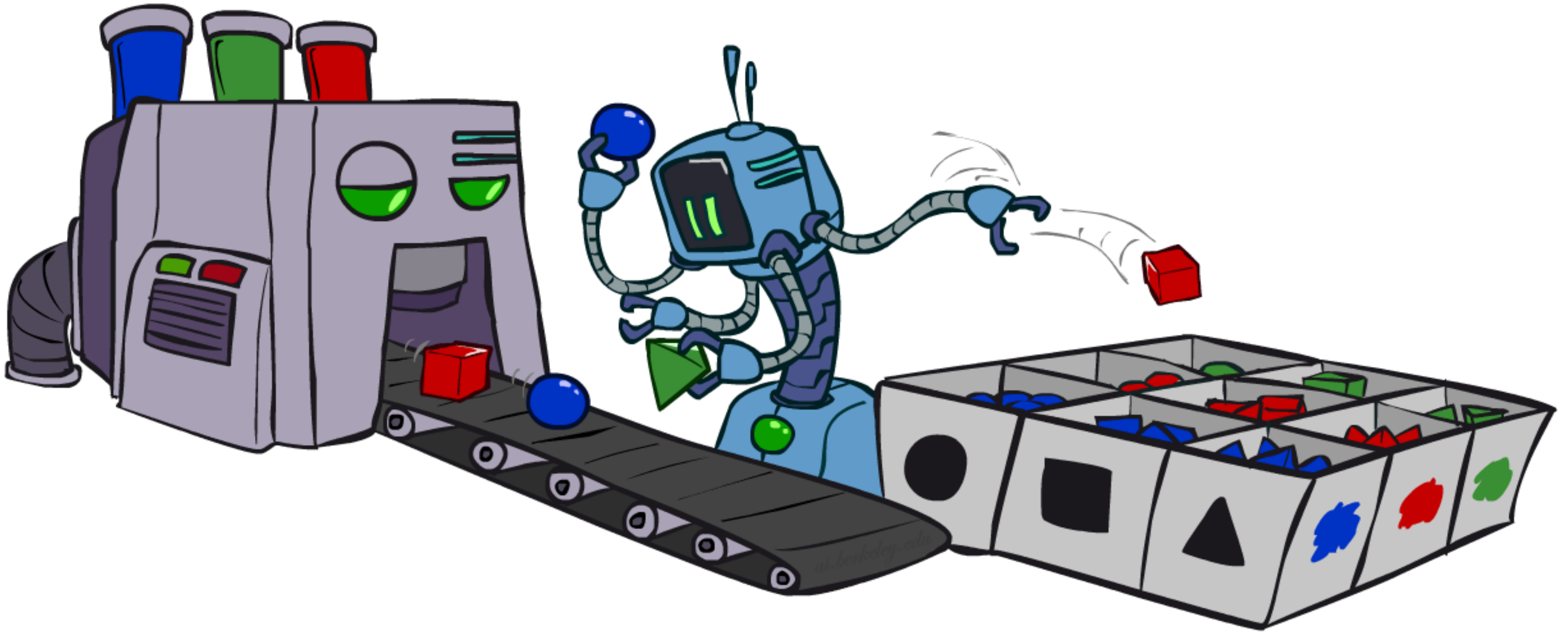
Байесовские сети: Сэмплирование

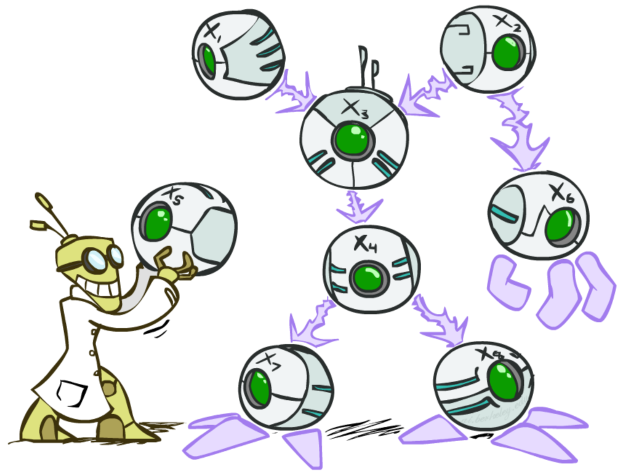


Владимир Судаков

[на основе http://ai.berkeley.edu.]

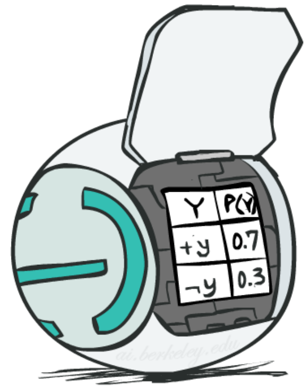
Представление Байесовской сети

- Направленный ациклический граф, по одному узлу на случайную величину
- Таблица условной вероятности (CPT) для каждого узла
  - Набор распределений по X, по одному для каждой комбинации родительских значений: $P(X|a_1 \ldots a_n)$

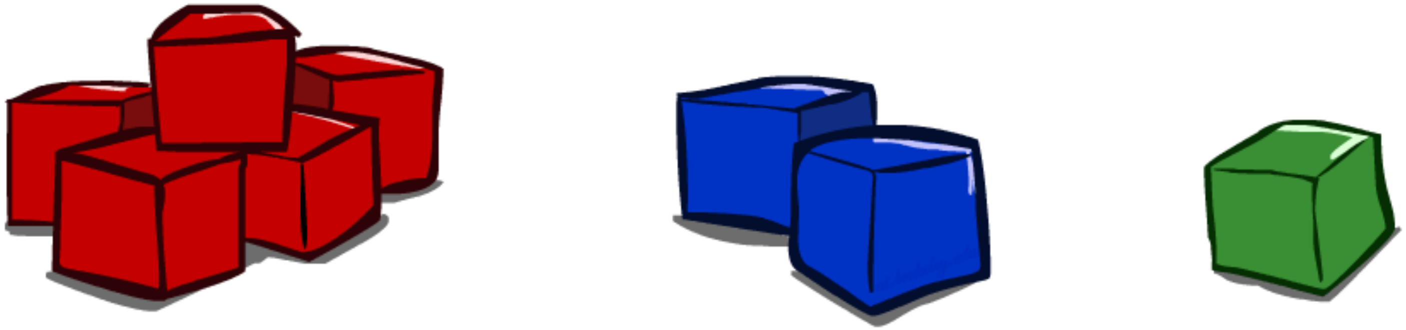


- Сети Байеса неявно кодируют совместные распределения
  - Как произведение локальных условных распределений
  - Чтобы увидеть, какую вероятность сеть дает для полного назначения, перемножьте все соответствующие условные вероятности:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$

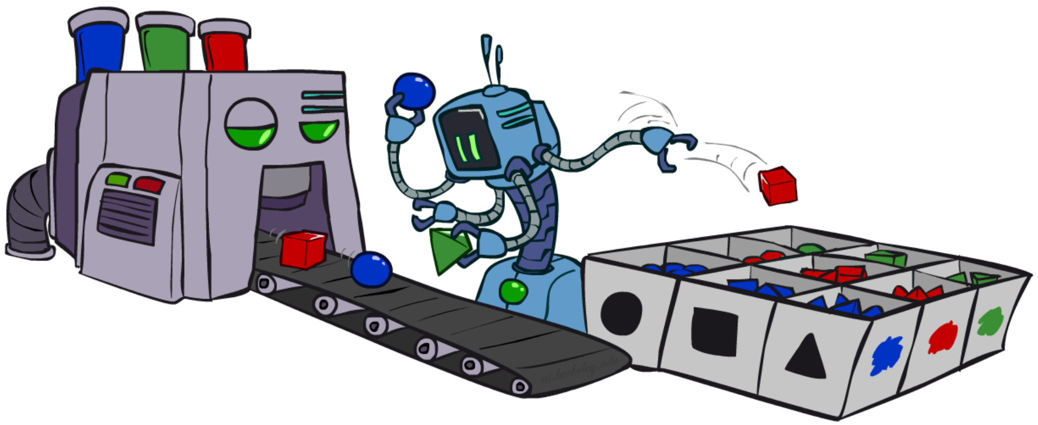


Приблизительный вывод: Сэмплирование



Сэмплирование

- Сэмплирование очень похоже на повторную симуляцию
  - Предсказание погоды, баскетбольные матчи, …
- Основная идея
  - Взять N примеров из сэмплируемого распределения S
  - Вычислить приблизительную апостериорную вероятность
  - Покажите, что это сходится к истинной вероятности P
- Почему сэмплирование?
  - Обучение: получите выборку из неизвестного вам распределения
  - Вывод: получение выборки быстрее, чем вычисление правильного ответа (например, с исключением переменной)



Сэмплирование

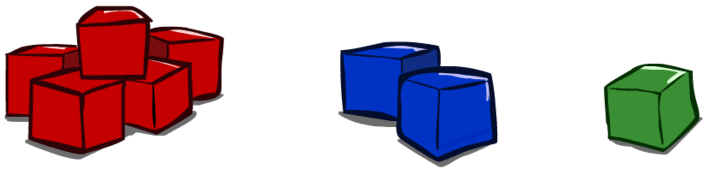
- Сэмплирование для заданного распределения
  - Шаг 1: Получить образец *u* из равномерного распределения [0, 1)
    - Например, random() в python
  - Шаг 2: Преобразовать пример *u* в выход заданного распределения путем связывания каждого целевого результата с подинтервалом [0,1) с размером подинтервала, равным вероятности результата

- Пример

C	P(C)
red	0.6
green	0.1
blue	0.3

$$0 \leq u < 0.6, \rightarrow C = red$$
$$0.6 \leq u < 0.7, \rightarrow C = green$$
$$0.7 \leq u < 1, \rightarrow C = blue$$

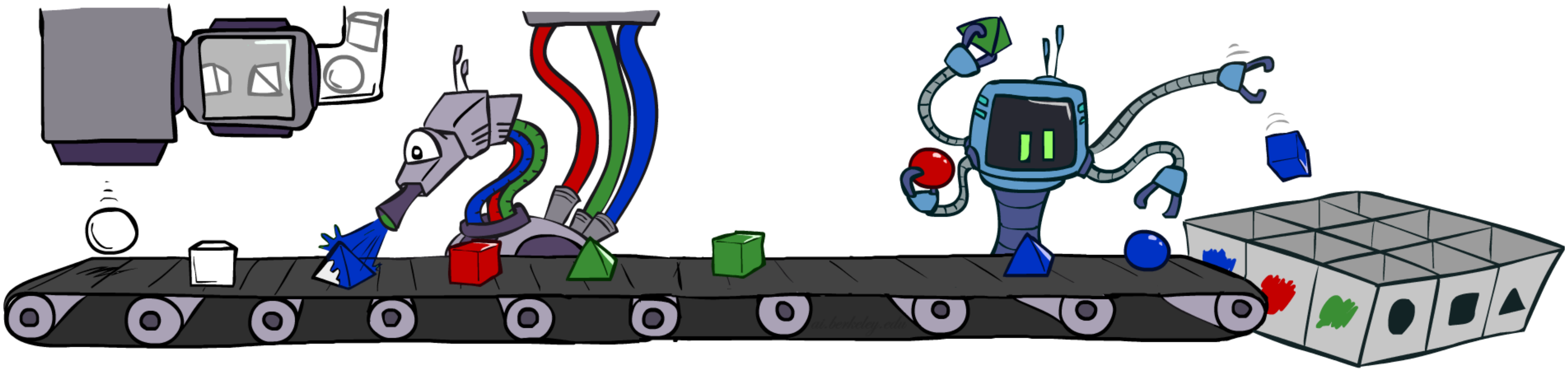
- Если random() возвращает $u = 0.83$, то наш пример
  C = blue
- Например, после сэмплирования 8 раз:



Сэмплирвание в байесовских сетях

- Непосредственная выборка
- Выборка отбраковки
- Взвешивание по правдоподобию
- Выборка Гиббса

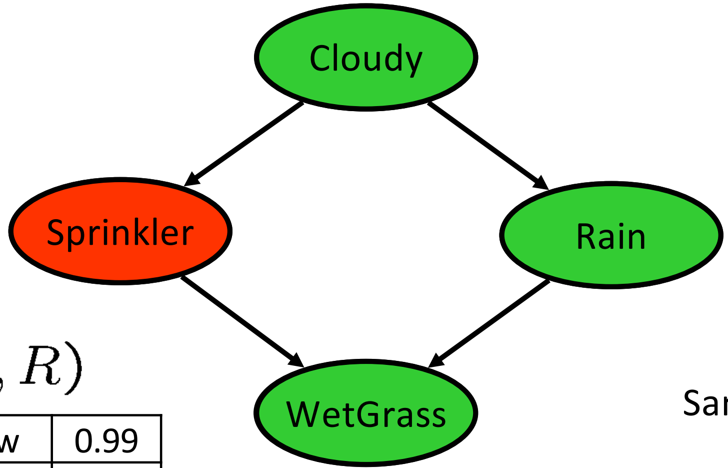
Непосредственная выборка



Непосредственная выборка

$P(C)$

+c	0.5
-c	0.5



$P(S|C)$

+c	+s	0.1
	-s	0.9
-c	+s	0.5
	-s	0.5

$P(R|C)$

+c	+r	0.8
	-r	0.2
-c	+r	0.2
	-r	0.8

$P(W|S, R)$

+s	+r	+w	0.99
		-w	0.01
	-r	+w	0.90
		-w	0.10
-s	+r	+w	0.90
		-w	0.10
	-r	+w	0.01
		-w	0.99

Samples:

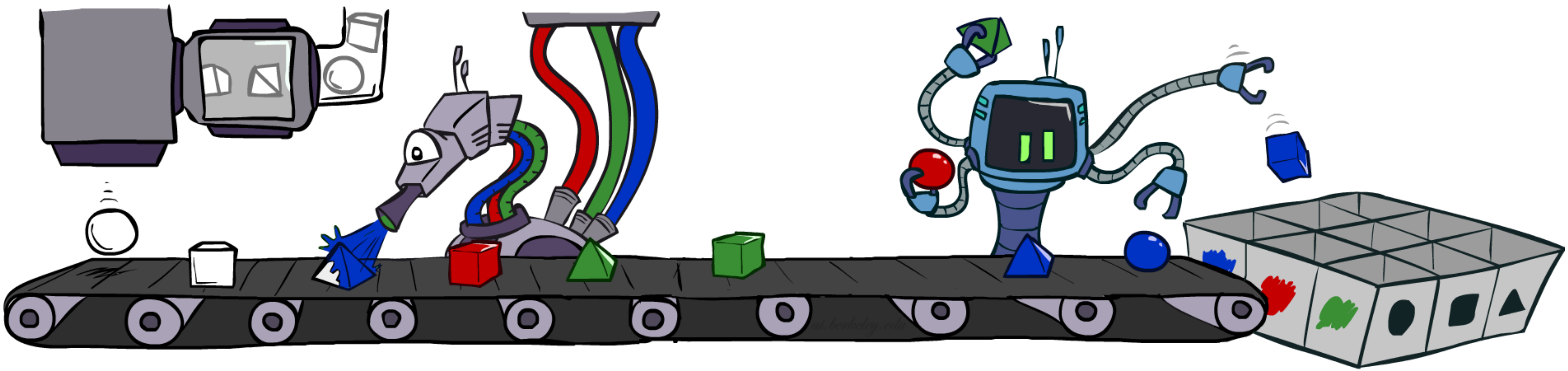
+c, -s, +r, +w

-c, +s, -r, +w

…

Непосредственная выборка

- Для $i = 1, 2, \ldots, n$ в топологическом порядке
  - Выбрать x_i используя $P(X_i \mid Parents(X_i))$
- Вернуть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$



Непосредственная выборка

- Этот процесс генерирует выборки с вероятностью:

$$S_{PS}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathsf{Parents}(X_i)) = P(x_1 \ldots x_n)$$

…т.е. совместная вероятность сети

- Пусть количество выборок события равно $N_{PS}(x_1 \ldots x_n)$
- Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \hat{P}(x_1,\ldots,x_n) &= \lim_{N\to\infty} N_{PS}(x_1,\ldots,x_n)/N \\ &= S_{PS}(x_1,\ldots,x_n) \\ &= P(x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

- Т.е. процедура выборок является согласованной

Пример

- Получим кучу сэмплов из сети:

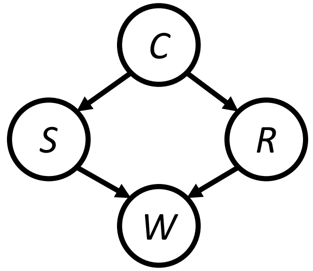
  +c, -s, +r, +w

  +c, +s, +r, +w

  -c, +s, +r, -w

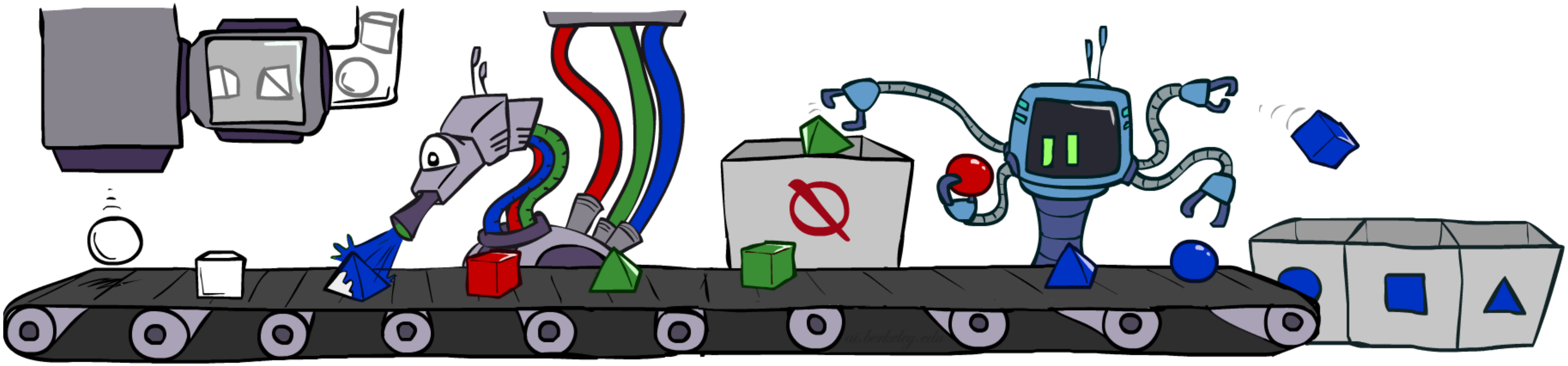
  +c, -s, +r, +w

  -c, -s, -r, +w



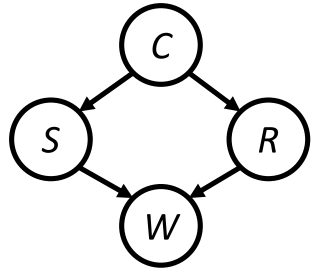
- Если мы хотим узнать P(W)
  - Мы должны посчитать <+w:4, -w:1>
  - Нормализуйте чтобы получить P(W) = <+w:0.8, -w:0.2>
  - Это приблизит к истинному распределению при большом количестве выборок.
  - Можно оценить и что-нибудь еще
    - P(C | +w)?   P(C | +r, +w)?
    - Также можно использовать это для оценки ожидаемого значения f (X) - оценка Монте-Карло.
  - А каким будет P(C | -r, -w)?

Выборка отбраковки



Выборка отбраковки

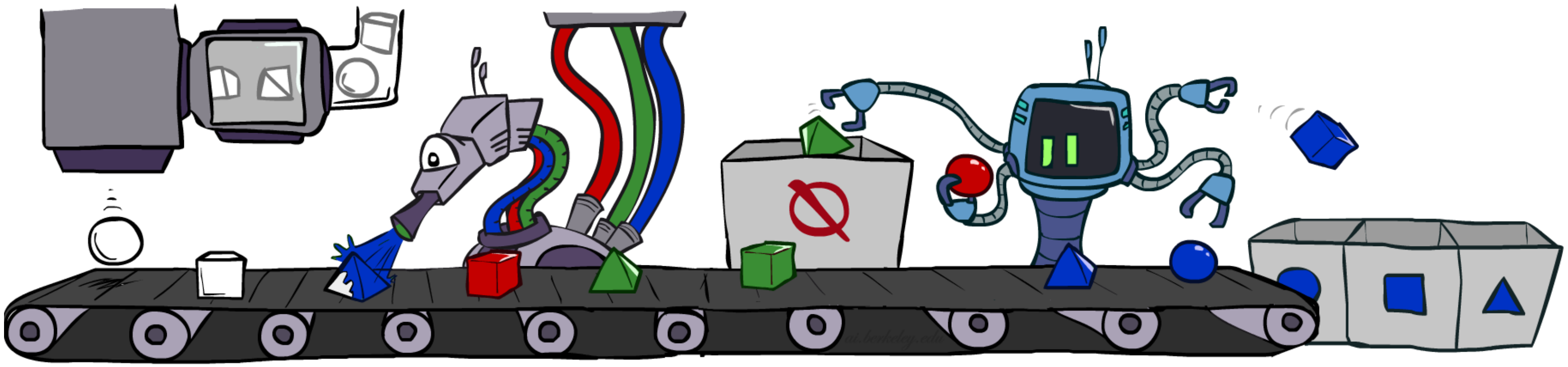
- Путь необходимо узнать P(C)
  - Просто подсчитайте количество C, когда мы идем
- Допустим, необходимо узнать P(C | +s)
  - То же самое: подсчитывайте результаты C, но игнорируйте (отбрасывайте) выборки, в которых нет S=+s.
  - Это называется выборкой отбраковки.
  - Мы можем выбросить образцы раньше
  - Он также согласован для условных вероятностей (т. Е. Правилен в пределе).



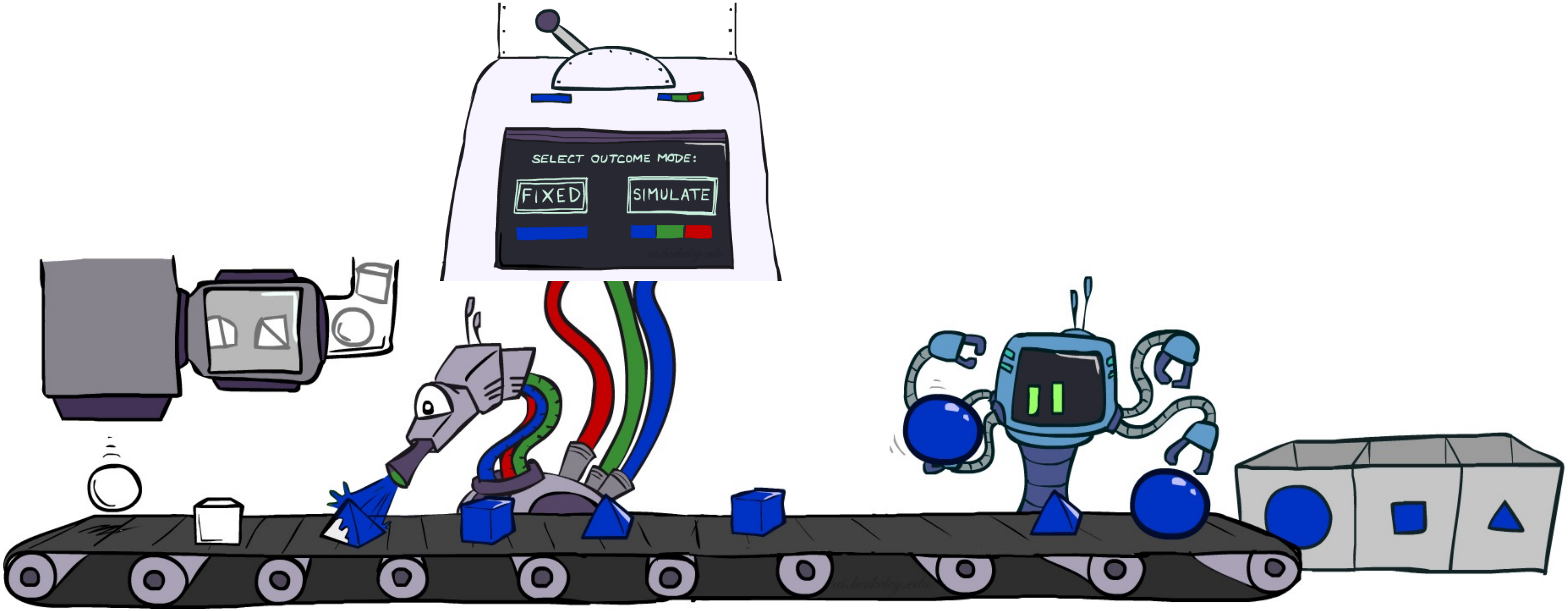
+c, -s, +r, +w
+c, +s, +r, +w
-c, +s, +r, -w
+c, -s, +r, +w
-c, -s, -r, +w

Выборка отбраковки

- Вход: заданные свидетельства
- Для i = 1, 2, …, n в топологическом порядке
  - Наблюдать x_i согласно $P(X_i \mid Parents(X_i))$
  - Если x_i несовместимо с наблюдением
    - Отбраковка: выход – не генерируется наблюдение
- Возврат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

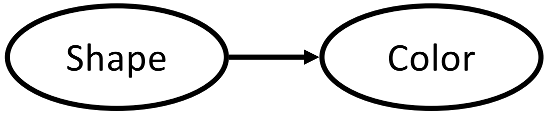


Взвешивание по правдоподобию

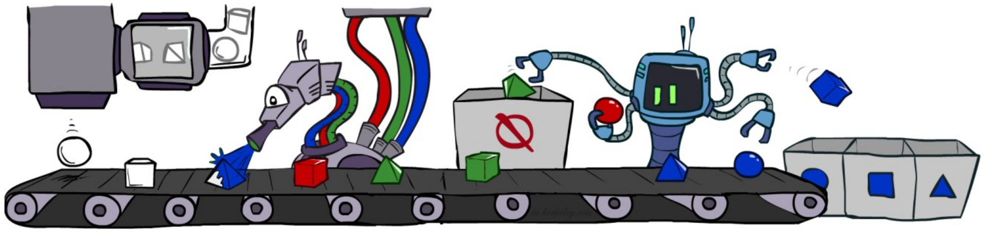


Взвешивание по правдоподобию

- Проблема с отбраковкой:
  - Если доказательство маловероятно, отбраковывается множество наблюдений
  - Пусть P(Shape | blue)

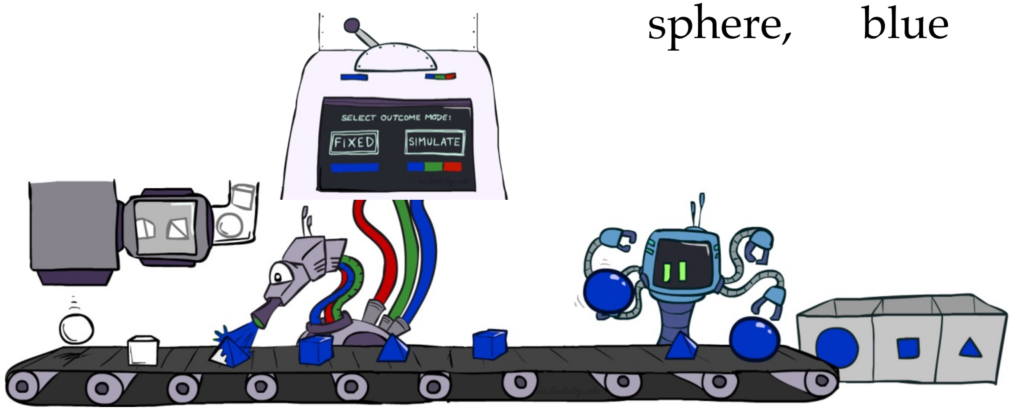


~~pyramid, green~~
~~pyramid, red~~
sphere, blue
~~cube, red~~
~~sphere, green~~



- Идея: зафиксировать переменные наблюдения и отобрать остальные
  - Проблема: распределение выборки несовместимо!
  - Решение: взвешивание по вероятности свидетельства, предоставленного родителями

pyramid, blue
pyramid, blue
sphere, blue
cube, blue
sphere, blue



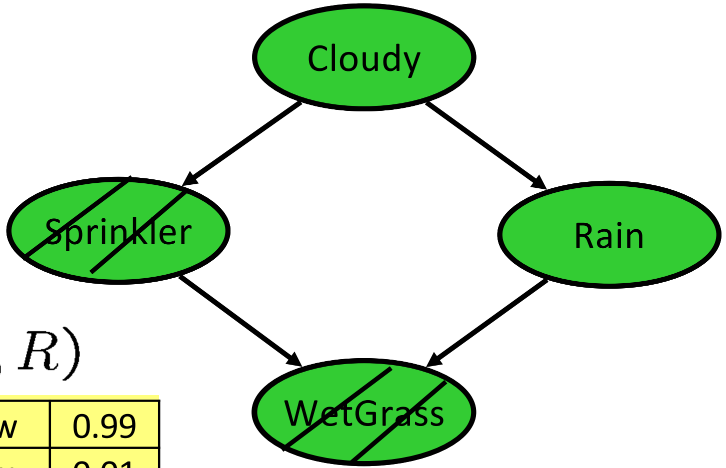
Взвешивание по правдоподобию

$P(C)$

+c	0.5
-c	0.5

$P(S|C)$

+c	+s	0.1
	-s	0.9
-c	+s	0.5
	-s	0.5



$P(R|C)$

+c	+r	0.8
	-r	0.2
-c	+r	0.2
	-r	0.8

$P(W|S,R)$

+s	+r	+w	0.99
		-w	0.01
	-r	+w	0.90
		-w	0.10
-s	+r	+w	0.90
		-w	0.10
	-r	+w	0.01
		-w	0.99

Samples:

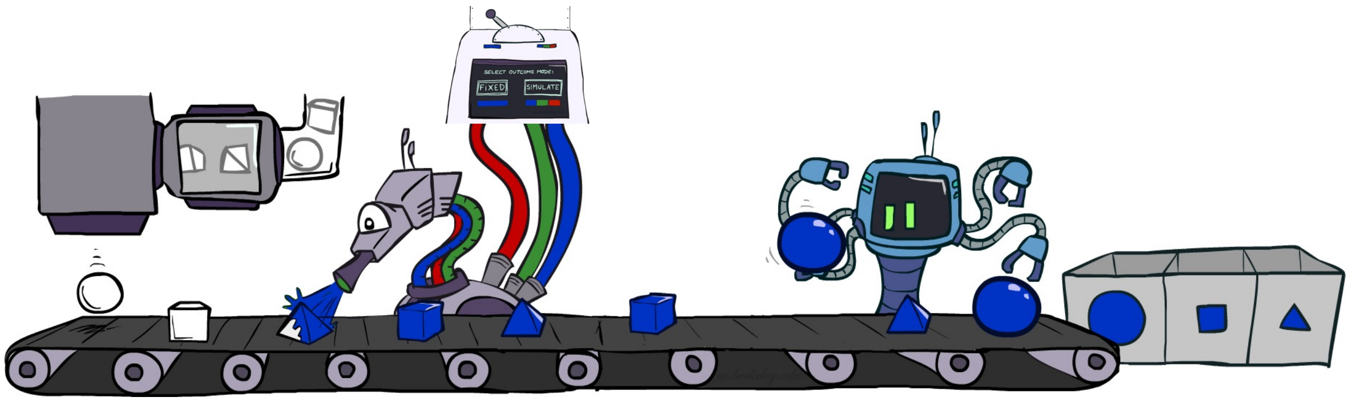
+c, +s, +r, +w w = 1.0

-c, +s, -r, +w w = 1.0 x 0.5 x 0.90

…

Взвешивание по правдоподобию

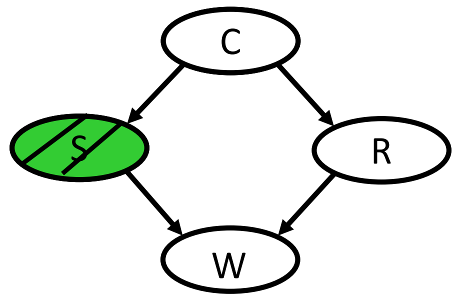
- Вход: заданные свидетельства
- w = 1.0
- Для i = 1, 2, …, n в топологическом порядке
  - Если X_i – это свидетельство
    - X_i = наблюдение x_i для X_i
    - Задать $w = w * P(x_i \mid Parents(X_i))$
  - Иначе
    - Случайно выбрать x_i по $P(X_i \mid Parents(X_i))$
- вернуть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, w



Взвешивание по правдоподобию

- Распределение выборки, если выбрано z и установлено фиксированное свидетельство

$$S_{WS}(\mathbf{z},\mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i|\text{Parents}(Z_i))$$



- Теперь у наблюдений есть вес

$$w(\mathbf{z},\mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{m} P(e_i|\text{Parents}(E_i))$$

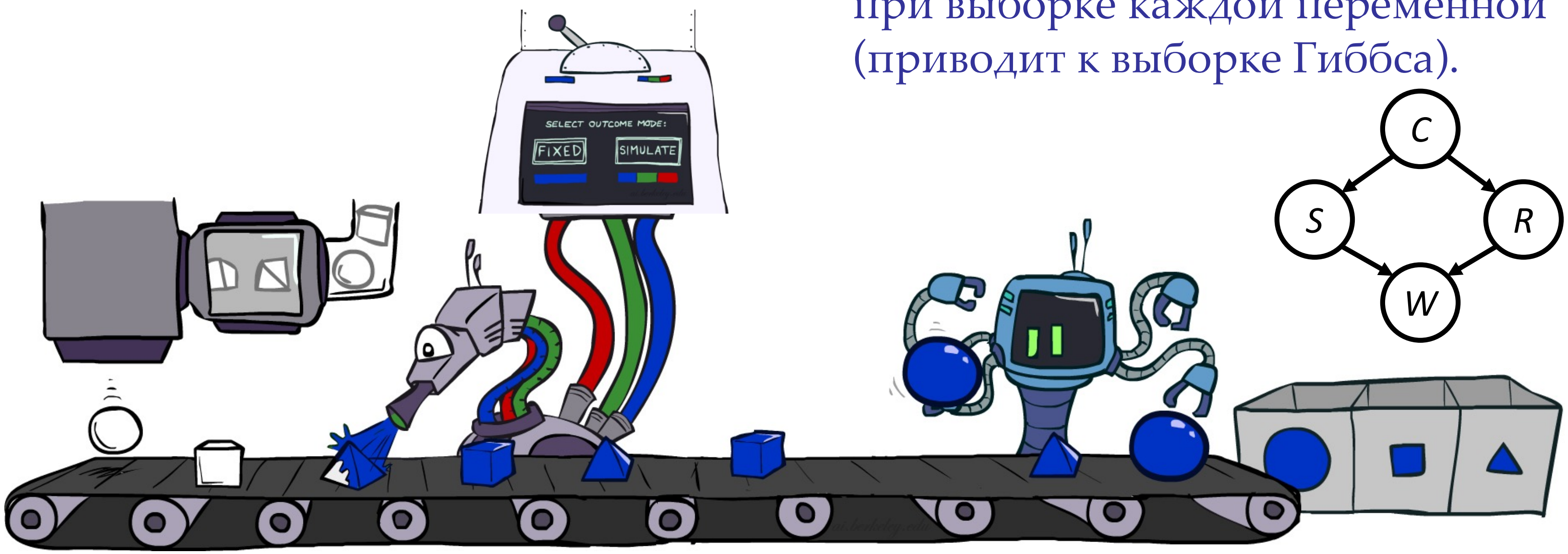
- Взвешенная оценка распределения согласована

$$S_{\text{WS}}(z,e) \cdot w(z,e) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i|\text{Parents}(z_i)) \prod_{i=1}^{m} P(e_i|\text{Parents}(e_i))$$

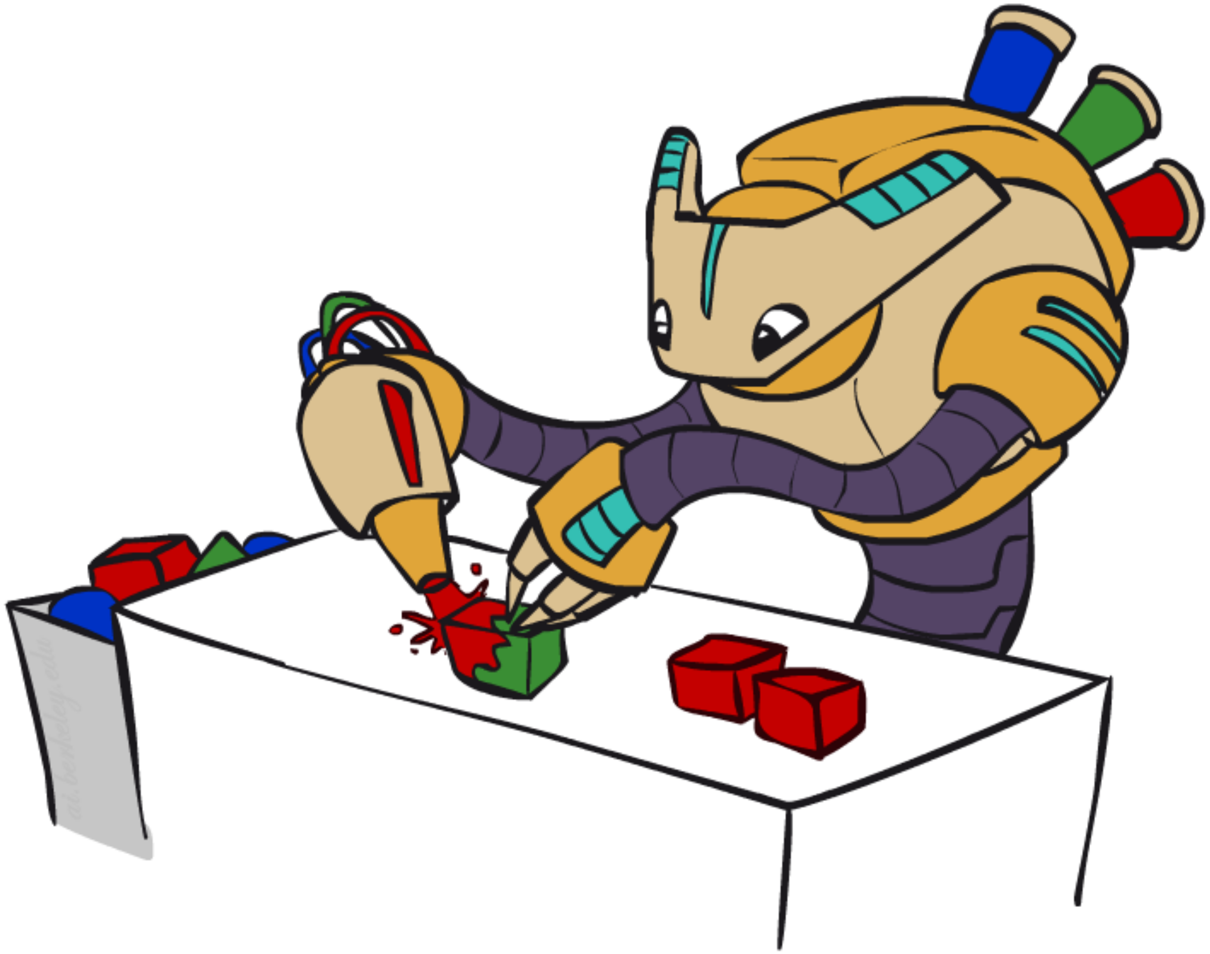
$$= P(\mathbf{z},\mathbf{e})$$

Взвешивание по правдоподобию

- Взвешивание по правдоподобию
  - Мы учли доказательства при создании выборки
  - Например. здесь значение W будет выбрано на основе значений свидетельств S, R
  - Больше наших образцов будет отражать состояние мира, предложенное свидетельствами.
- Взвешивание по правдоподобию не решает все наши проблемы
  - Свидетельства влияют на выбор нижестоящих переменных, но не вышестоящих (C вряд ли получит значение, соответствующее свидетельству).
- Мы хотели бы учитывать доказательства при выборке каждой переменной (приводит к выборке Гиббса).

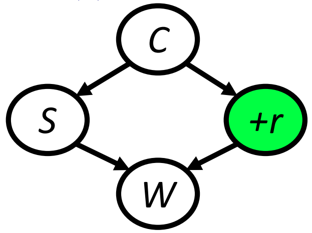


Выборка Гиббса

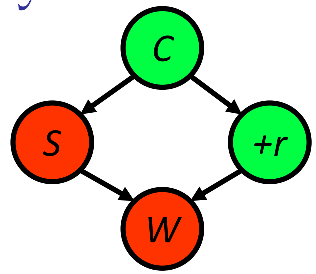


Выборка Гиббса. Пример: P(S | +r)

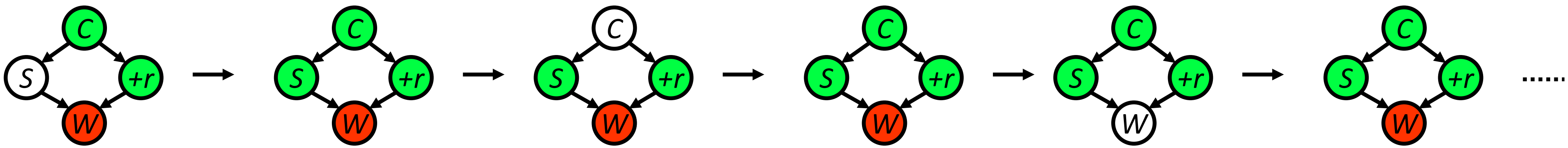
- Шаг 1: Зафиксировать свидетельство
  - R = +r



- Шаг 2: Инициализировать другие переменные
  - Случайно



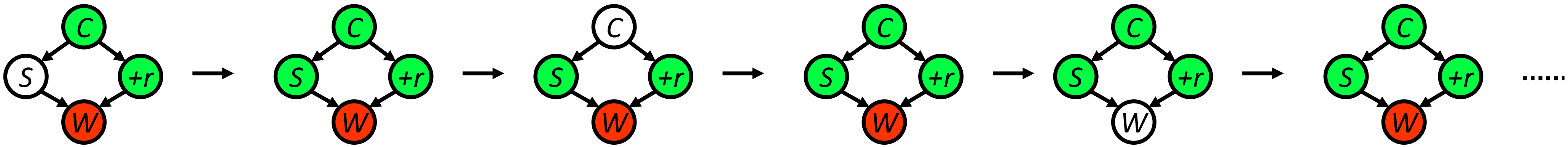
- Шаг 3: Повторить
  - Выбрать переменную не свидетельство X
  - Ресэмплинг X из P(X | all other variables)*



Sample from $P(S|+c,-w,+r)$ Sample from $P(C|+s,-w,+r)$ Sample from $P(W|+s,+c,+r)$

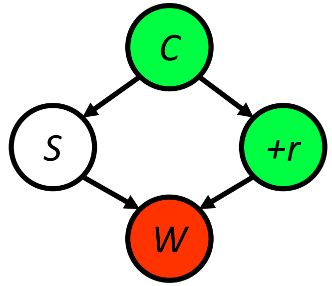
Выборка Гиббса

- ***Процедура****:* отслеживать полную реализацию $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Начните с произвольной инициализации, согласующейся со свидетельством. Делайте выборку по одной переменной за раз, обуславливая все остальные, но сохраняйте фиксированными свидетельства. Продолжайте повторять это в течение длительного времени.
- ***Свойство****:* в пределе при повторении этой процедуры бесконечно много раз результирующие выборки приходят к правильному распределению (т. е. обусловленному свидетельством).
- ***Обоснование***: как восходящие, так и нисходящие переменные зависят от свидетельств.
- В отличие от: взвешивания по правдоподобию на восходящих свидетельствах, и, следовательно, веса, полученные при взвешивании правдоподобия, иногда могут быть очень маленькими. Сумма весов по всем образцам показывает, сколько «эффективных» образцов было получено, поэтому нам нужен большой вес.



Ресэмплинг одной переменной

- Получить P(S | +c, +r, -w)



$$
\begin{aligned}
P(S|+c,+r,-w) &= \frac{P(S,+c,+r,-w)}{P(+c,+r,-w)} \\
&= \frac{P(S,+c,+r,-w)}{\sum_s P(s,+c,+r,-w)} \\
&= \frac{P(+c)P(S|+c)P(+r|+c)P(-w|S,+r)}{\sum_s P(+c)P(s|+c)P(+r|+c)P(-w|s,+r)} \\
&= \frac{P(+c)P(S|+c)P(+r|+c)P(-w|S,+r)}{P(+c)P(+r|+c)\sum_s P(s|+c)P(-w|s,+r)} \\
&= \frac{P(S|+c)P(-w|S,+r)}{\sum_s P(s|+c)P(-w|s,+r)}
\end{aligned}
$$

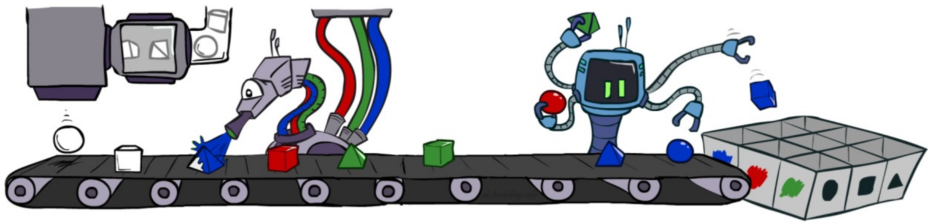
- Многое отменяется — остаются только CPT с S!
- Более обще: только CPTs у которых есть ресэплинговые переменные необходимо рассматривать, и объединять вместе

Больше подробностей о выборке Гиббса *

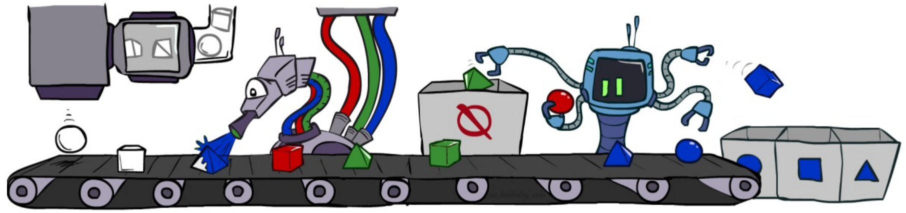
- Выборка Гиббса принадлежит к семейству методов выборки, называемых цепью Маркова Монте-Карло (MCMC)
  - В частности, это частный случай подмножества методов MCMC, называемых Metropolis-Hastings.
- Мы познакомимся с ними в курсе Обучение с подкреплением

Итоги сэмплирвания байесовских сетей

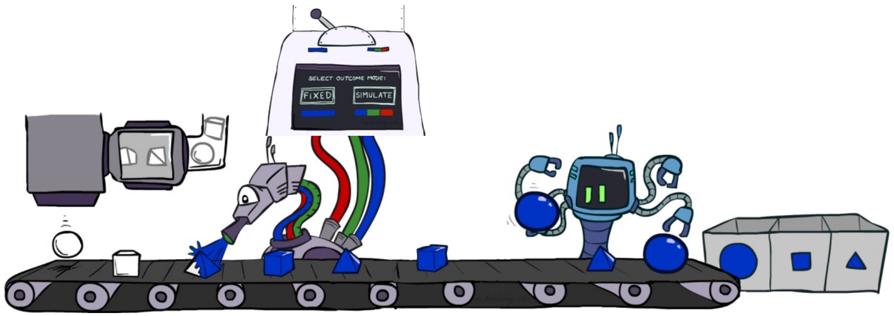
- Непосредственная выборка P(Q)



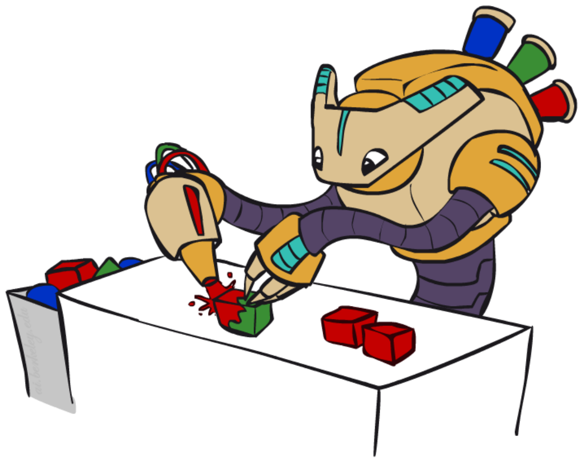
- Отбраковка P(Q | e)



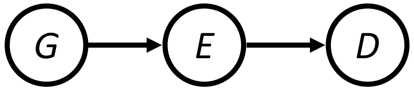
- Взвешивание по правдоподобию P(Q | e)



- Выборка Гиббса P(Q | e)



Пример: P(G, E)



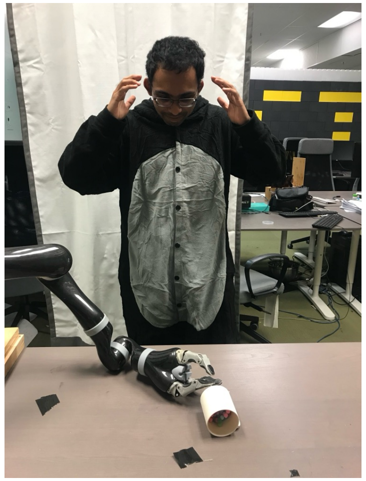
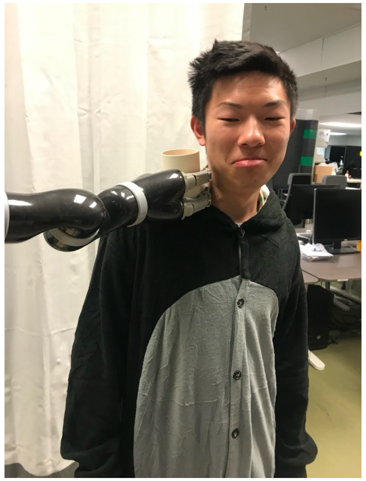
$P(G \mid +e) = ?$

G	P(G)
+g	0.01
-g	0.99

E	G	P(E | G)
+e	+g	0.8
-e	+g	0.2
+e	-g	0.01
-e	-g	0.99

Применение сэмплирования

- Отбраковочная выборка: вычисление вероятности достижения цели при соблюдении ограничений безопасности.
  - Образец из распределения политики и перехода. Завершить досрочно, если нарушено ограничение безопасности:

- Взвешивание правдоподобия: будет использоваться при частичной фильтрации

Применение сэмплирования

- Выборка Гиббса: байесовский вывод, поддающийся вычислительной обработке