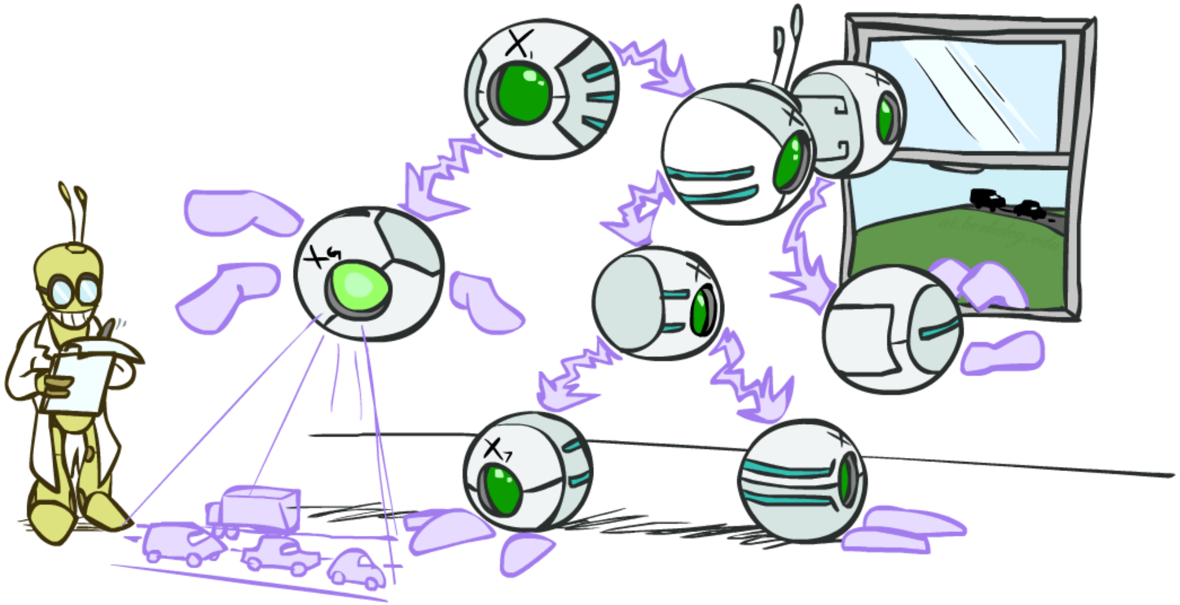
Байесовские сети: вывод



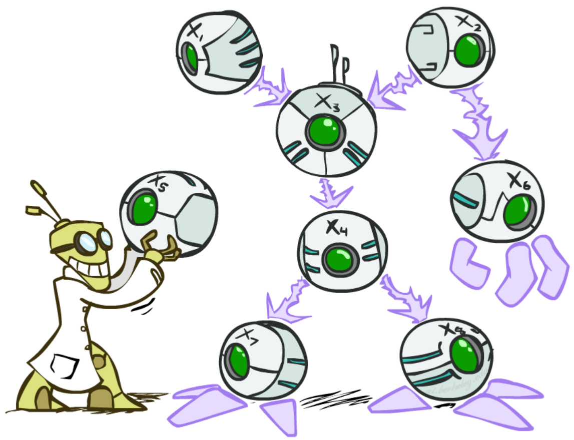
Владимир Судаков

[на основе материалов Dan Klein, Pieter Abbeel, Anca Dragan. http://ai.berkeley.edu.]

Представление сетей Байеса

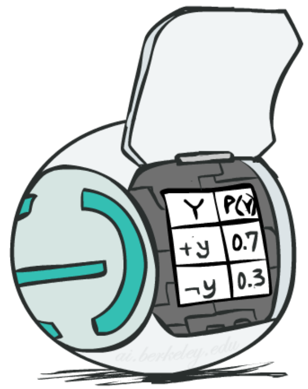
- Ориентированный ациклический граф, по одному узлу на случайную величину
- Таблица условной вероятности (CPT) для каждого узла
  - Набор распределений по X, по одному для каждой комбинации родительских значений

$$P(X|a_1 \ldots a_n)$$



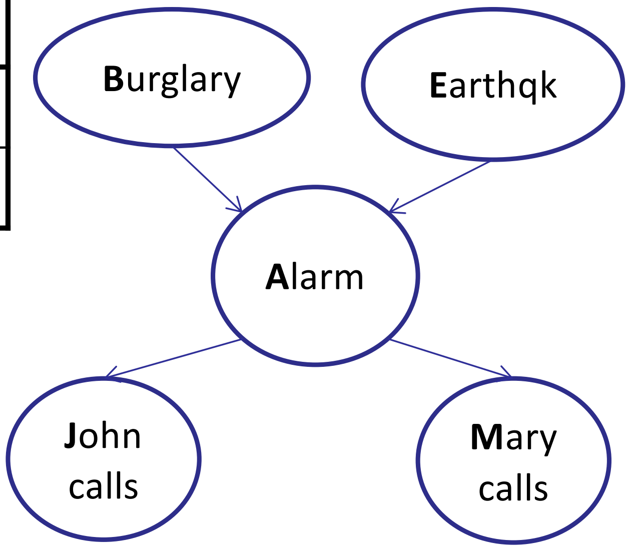
- Сети Байеса неявно кодируют совместные распределения
  - Как произведение локальных условных распределений
  - Чтобы увидеть, какую вероятность сеть дает для полного распределения, перемножьте все соответствующие условные вероятности:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$

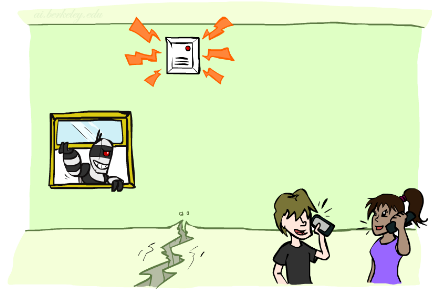


Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



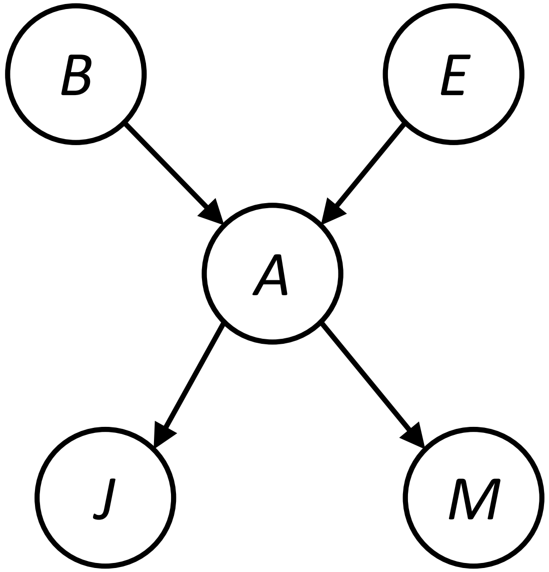
A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

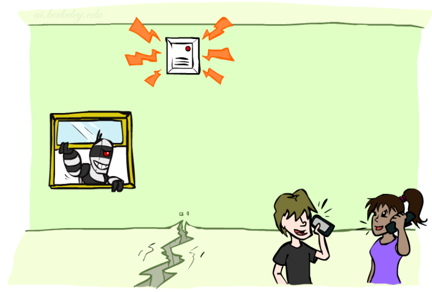
B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

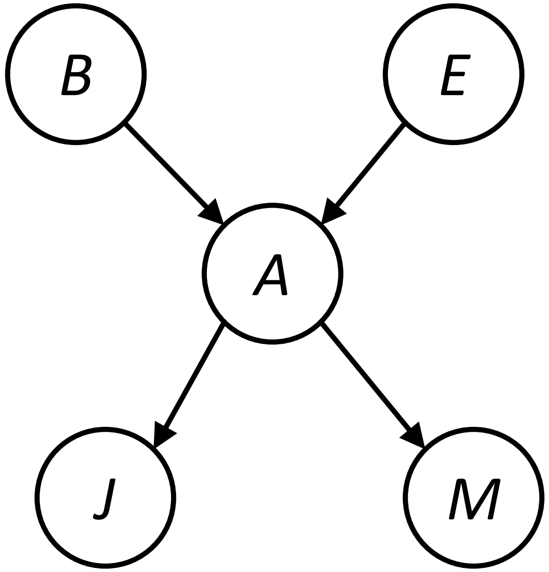
A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

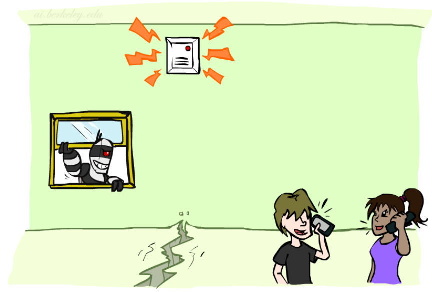
$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$

Пример: Сигнализация

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998



A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

$$P(+b, -e, +a, -j, +m) =$$
$$P(+b)P(-e)P(+a|+b, -e)P(-j|+a)P(+m|+a) =$$
$$0.001 \times 0.998 \times 0.94 \times 0.1 \times 0.7$$

Вывод (Inference)

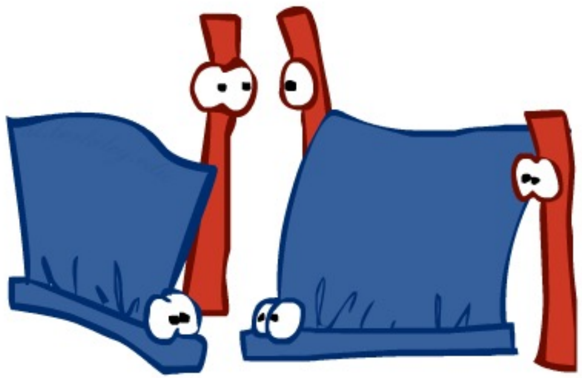
- Вывод: вычисление некоторой полезной величины из совместного распределения вероятностей

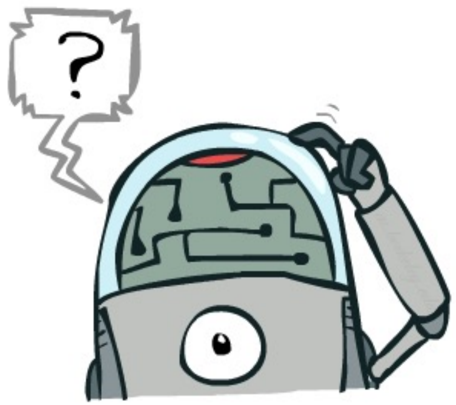
- Пример:
  - Апостериорная вероятность

$$P(Q|E_1 = e_1, \dots E_k = e_k)$$

  - Наиболее правдоподобное объяснение:

$$\text{argmax}_q \; P(Q = q|E_1 = e_1 \dots)$$





Вывод с помощью перечисления

- Общий случай:
  - Свидетельство: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - Запрос*: Q
  - Скрытые перем.: $H_1 \dots H_r$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array}\right\} X_1, X_2, \dots X_n$$

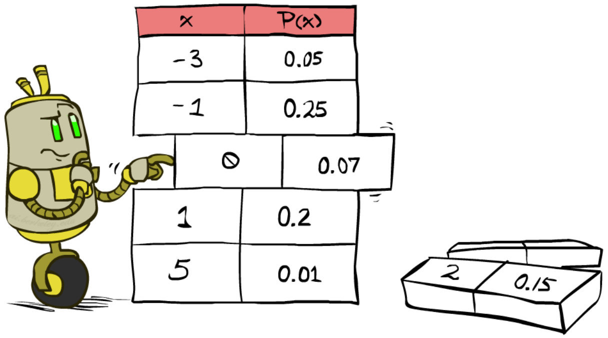
Все переменные

- Мы хотим:

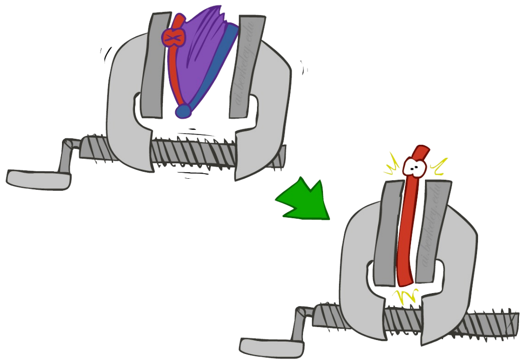
$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

** Работает и с несколькими переменными*

- Шаг 1: Выберите записи, соответствующие наблюдениям



- Шаг2: Суммируйте H, чтобы получить соединение запроса и свидетельства.



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots X_n}$$

- Шаг 3: Нормализуйте

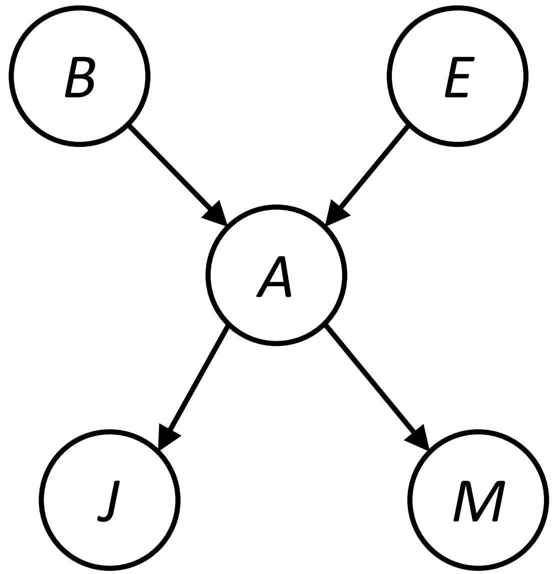
$$\times \frac{1}{Z}$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \cdots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

Вывод с помощью перечисления в сети Байеса

- При неограниченном времени, вывод в сети Байеса прост



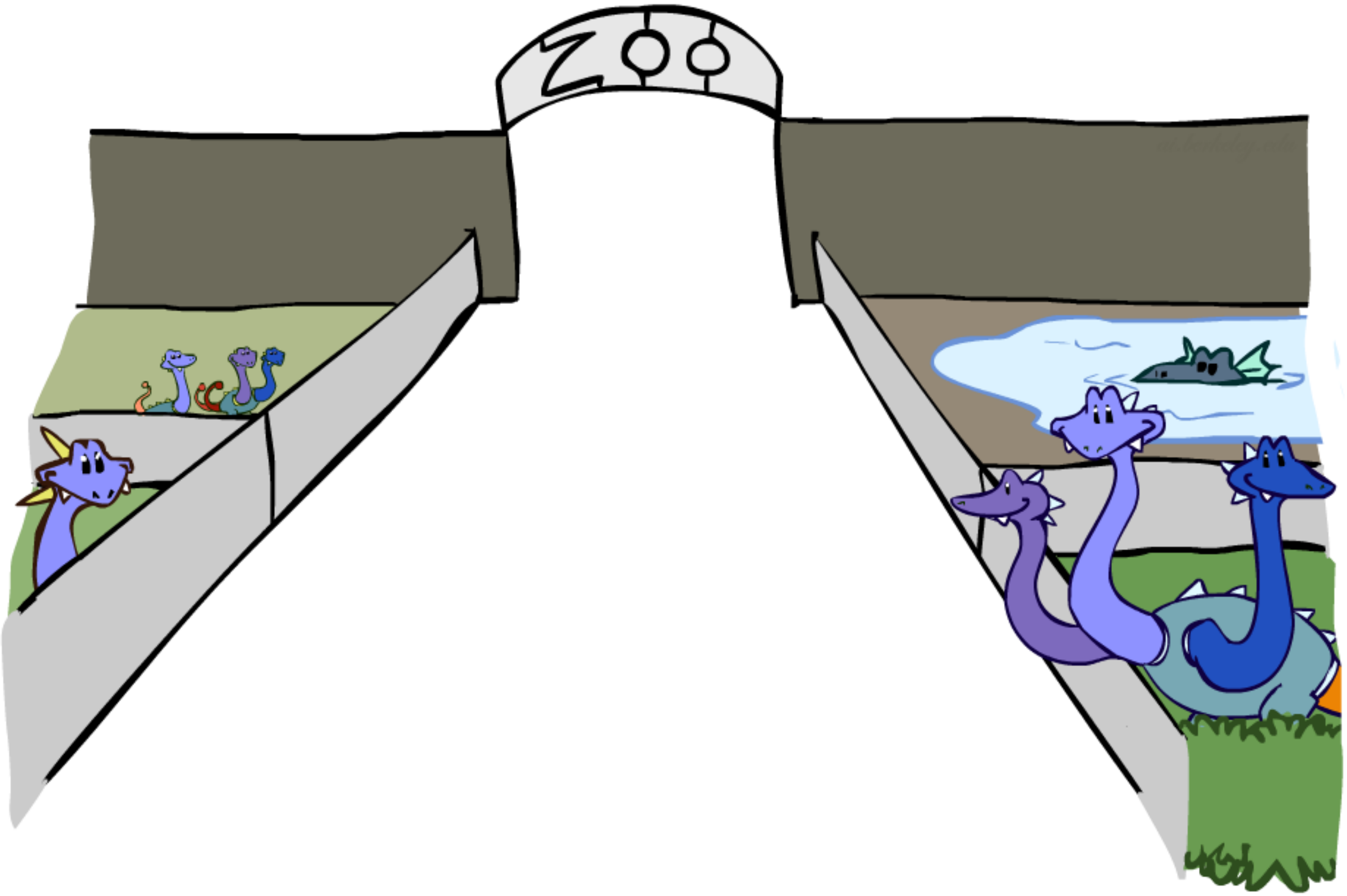
$$P(B \mid +j, +m) \propto_B P(B, +j, +m)$$

$$= \sum_{e,a} P(B, e, a, +j, +m)$$

$$= \sum_{e,a} P(B)P(e)P(a|B,e)P(+j|a)P(+m|a)$$

$$=P(B)P(+e)P(+a|B,+e)P(+j|+a)P(+m|+a) + P(B)P(+e)P(-a|B,+e)P(+j|-a)P(+m|-a)$$
$$P(B)P(-e)P(+a|B,-e)P(+j|+a)P(+m|+a) + P(B)P(-e)P(-a|B,-e)P(+j|-a)P(+m|-a)$$

Фактор Зоопарк



Фактор Зоопарк I

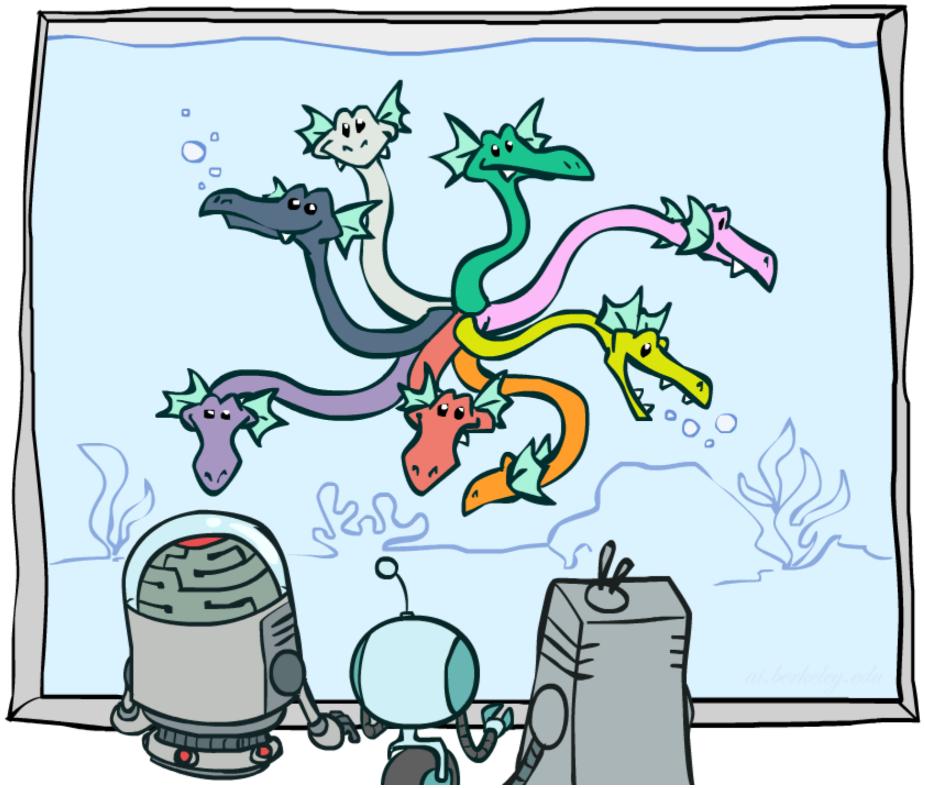
- Совместное распределение: P(X,Y)
  - Элементы P(x,y) для всех x, y
  - Сумма равна 1
- Выбранное совместное: P(x,Y)
  - Срез совместного
  - Элементы P(x,y) для фиксированного x, всех y
  - Сумма равна P(x)
- Количество заглавных букв = размерность таблицы

$$P(T,W)$$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

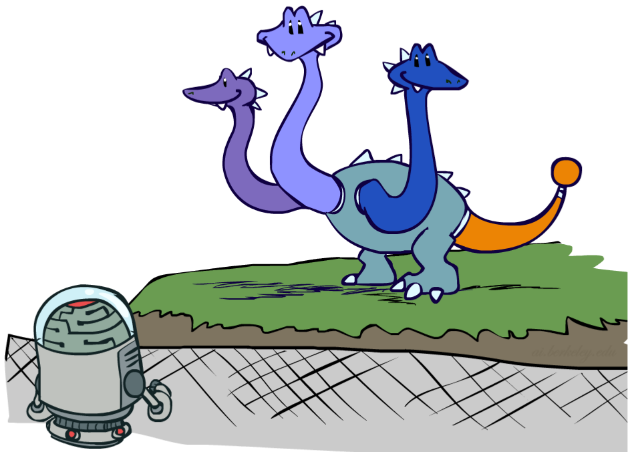
$$P(cold,W)$$

T	W	P
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3



Фактор Зоопарк II

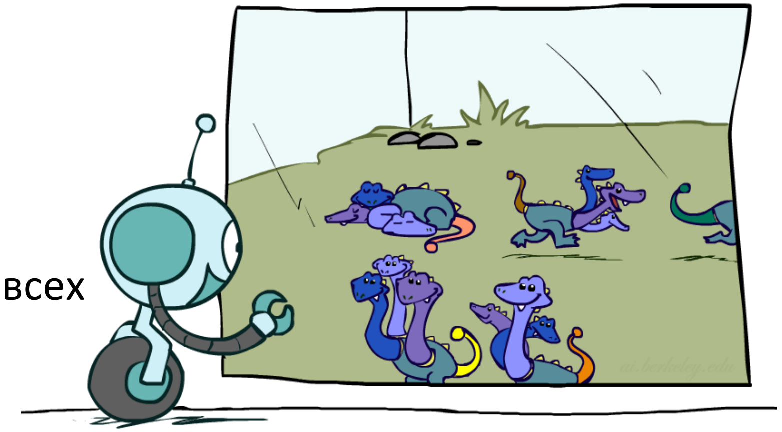
- Единственное условное: P(Y | x)
  - Элементы P(y | x) для фиксированного x, и всех y
  - Сумма равна 1



$$P(W|cold)$$

T	W	P
cold	sun	0.4
cold	rain	0.6

- Семейство условных распределений: P(X | Y)
  - Много условий
  - Элементы P(x | y) для всех x, y
  - Сумма равна |Y|



$$P(W|T)$$

T	W	P
hot	sun	0.8
hot	rain	0.2
cold	sun	0.4
cold	rain	0.6

$$P(W|hot)$$

$$P(W|cold)$$

Фактор Зоопарк III

- Указанное семейство: P(y | X)
  - Элементы P(y | x) для фиксированного y,

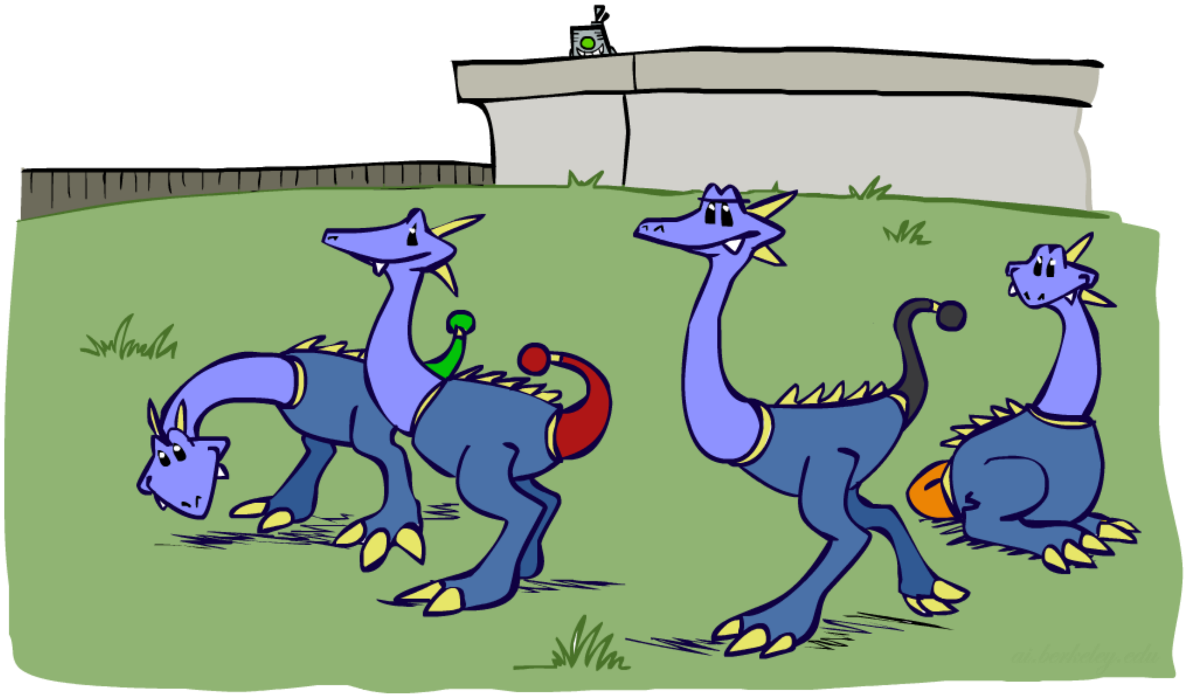
    но для всех x
  - Сумма равна … ?????

$$P(rain|T)$$

T	W	P
hot	rain	0.2
cold	rain	0.6

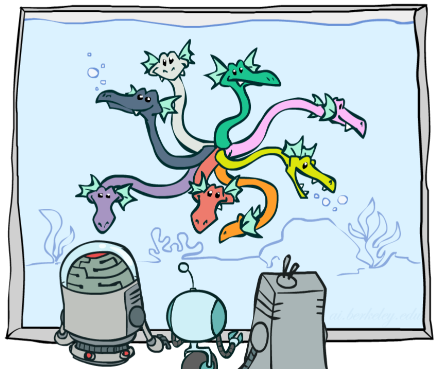
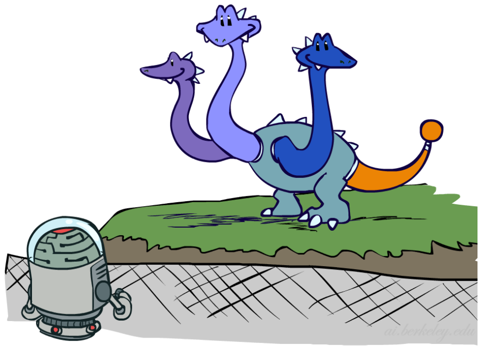
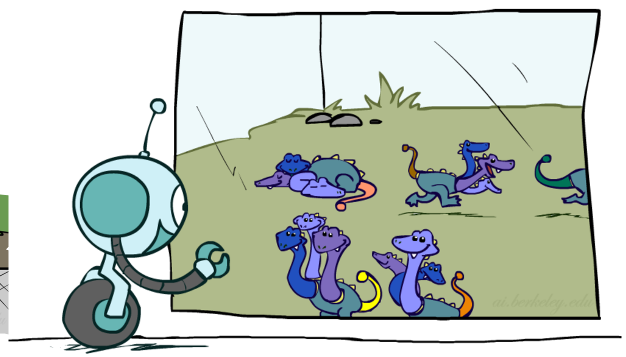
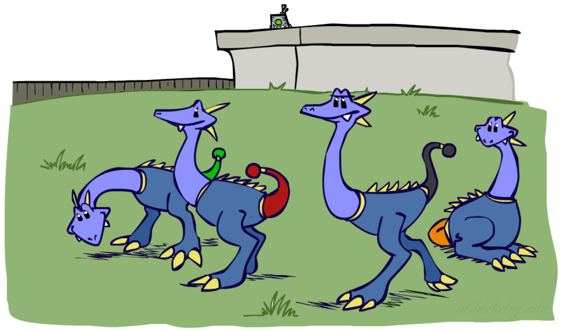
$P(rain|hot)$

$P(rain|cold)$



Резюме: Фактор Зоопарк

- В общем виде, когда записываем $P(Y_1 \dots Y_N \mid X_1 \dots X_M)$
  - Это “factor,” многомерный массив
  - Его значения $P(y_1 \dots y_N \mid x_1 \dots x_M)$
  - Любые присваивания (=нижний регистр) X или Y - это выбранное изменение из массива

Вывод с помощью перечисления

- Общий случай:
  - Свидетельство: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - Запрос*: Q
  - Скрытые перем.: $H_1 \dots H_r$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array}\right\} X_1, X_2, \dots X_n$$

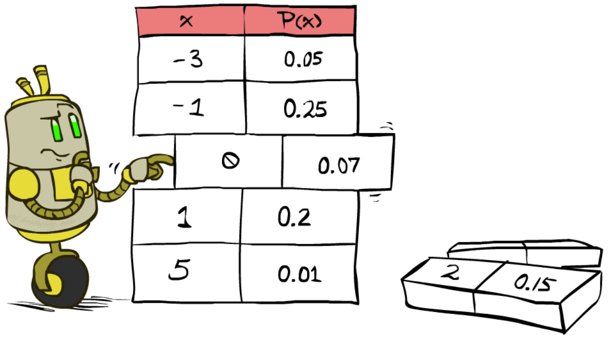
Все переменные

- Мы хотим:

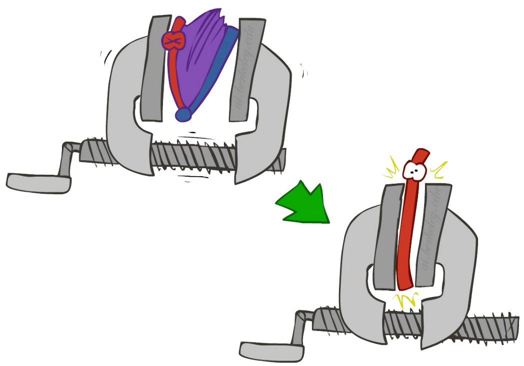
** Работает и с несколькими переменными*

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

- Шаг 1: Выберите записи, соответствующие наблюдениям



- Шаг2: Суммируйте H, чтобы получить соединение запроса и свидетельства.



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots X_n}$$

- Шаг 3: Нормализуйте

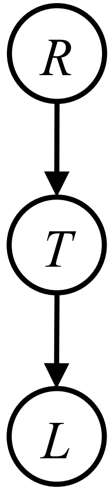
$$\times \frac{1}{Z}$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \cdots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

Пример: Пробки

- Случайные переменные
  - R: Дождь
  - T: Пробки
  - L: Опоздание на пару!



$$P(L) = ?$$

$$= \sum_{r,t} P(r, t, L)$$

$$= \sum_{r,t} P(r)P(t|r)P(L|t)$$

$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

Вывод с помощью перечисления: Процедурная схема

- Отслеживать объекты называемые факторами
- Начальные факторы – это локальные таблицы CPT (одна на узел)

$P(R)$

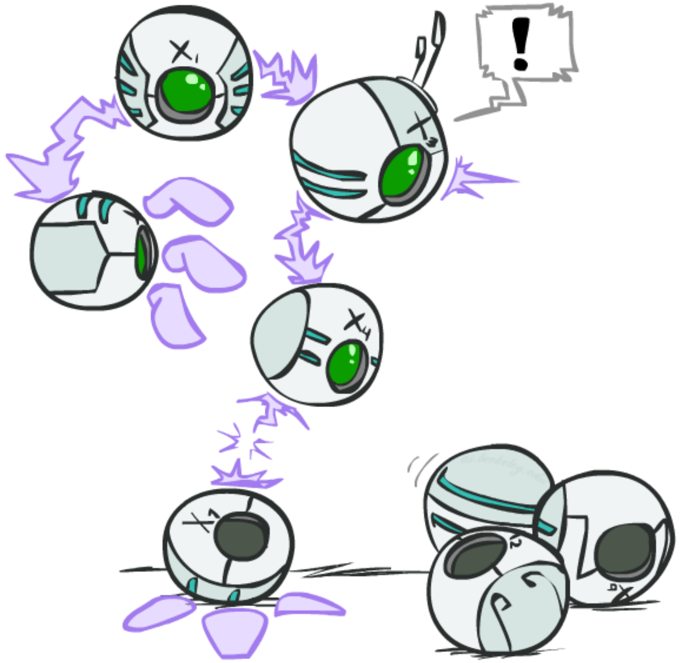
+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9



- Любое известное значение выбирается
  - Например, если мы знаем $L = +\ell$, то начальные факторы

$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

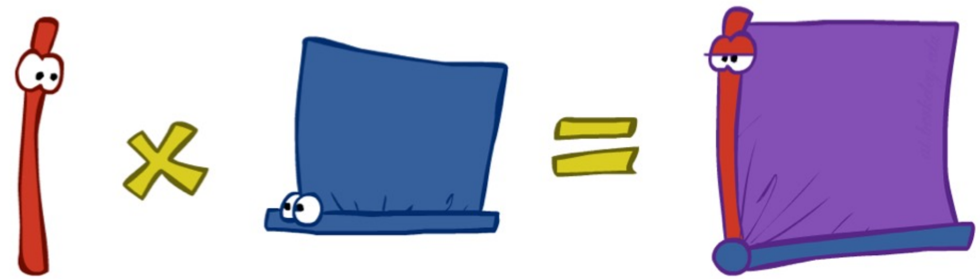
$P(+\ell|T)$

+t	+l	0.3
-t	+l	0.1

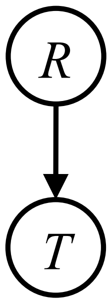
- Процедура: Объединить все факторы, затем сложить скрытые переменные

Операция 1: Объединение факторов

- Первая базовая операция: объединение
- Комбинирование факторов:
  - Как объединение в базе данных
  - Получить все факторы по переменной соединения
  - Создайте новый фактор по объединению задействованных переменных



- Пример: Объединение по R



$$P(R) \times P(T|R) \longrightarrow P(R,T)$$

$P(R)$

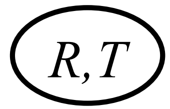
+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(R,T)$

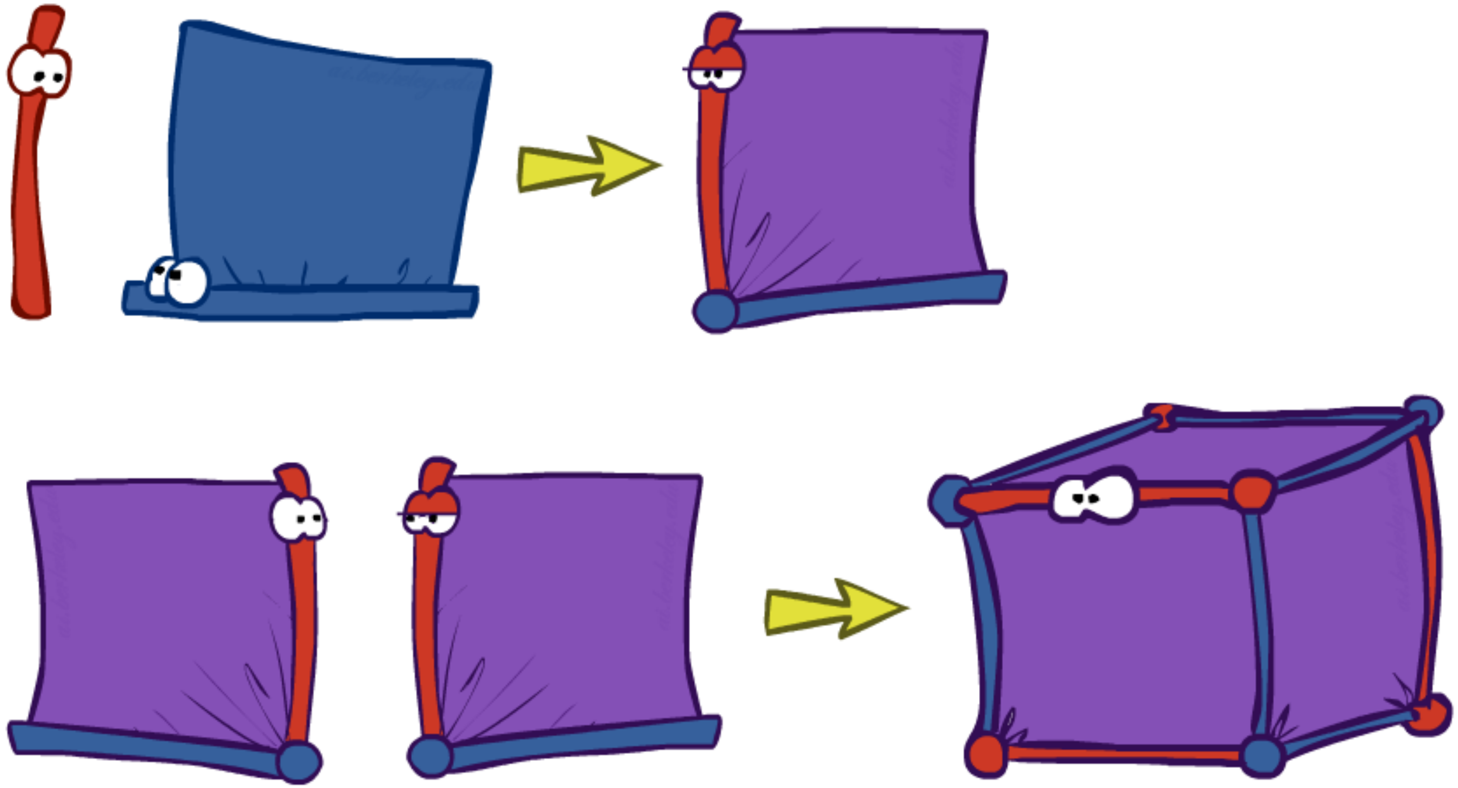
+r	+t	0.08
+r	-t	0.02
-r	+t	0.09
-r	-t	0.81



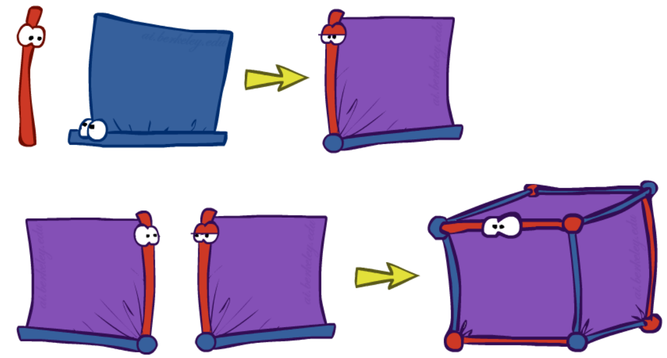
  - Вычисление для каждой сущности: попарные произведения

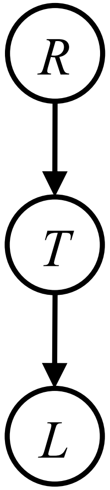
$$\forall r, t: \quad P(r,t) = P(r) \cdot P(t|r)$$

Пример: Множественное объединение



Пример: Множественное объединение





$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

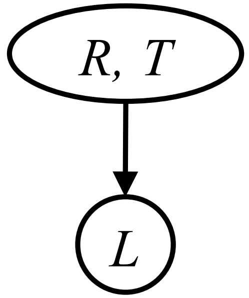
Join R

$P(R,T)$

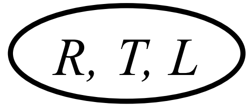
+r	+t	0.08
+r	-t	0.02
-r	+t	0.09
-r	-t	0.81

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9



Join T



$P(R,T,L)$

+r	+t	+l	0.024
+r	+t	-l	0.056
+r	-t	+l	0.002
+r	-t	-l	0.018
-r	+t	+l	0.027
-r	+t	-l	0.063
-r	-t	+l	0.081
-r	-t	-l	0.729

Операция 2: Исключение

- Вторая базовая операция: маргинализация
- Взять фактор и сложить по переменной
  - Ужать фактор до меньшего
  - Операция проекции
- Пример:

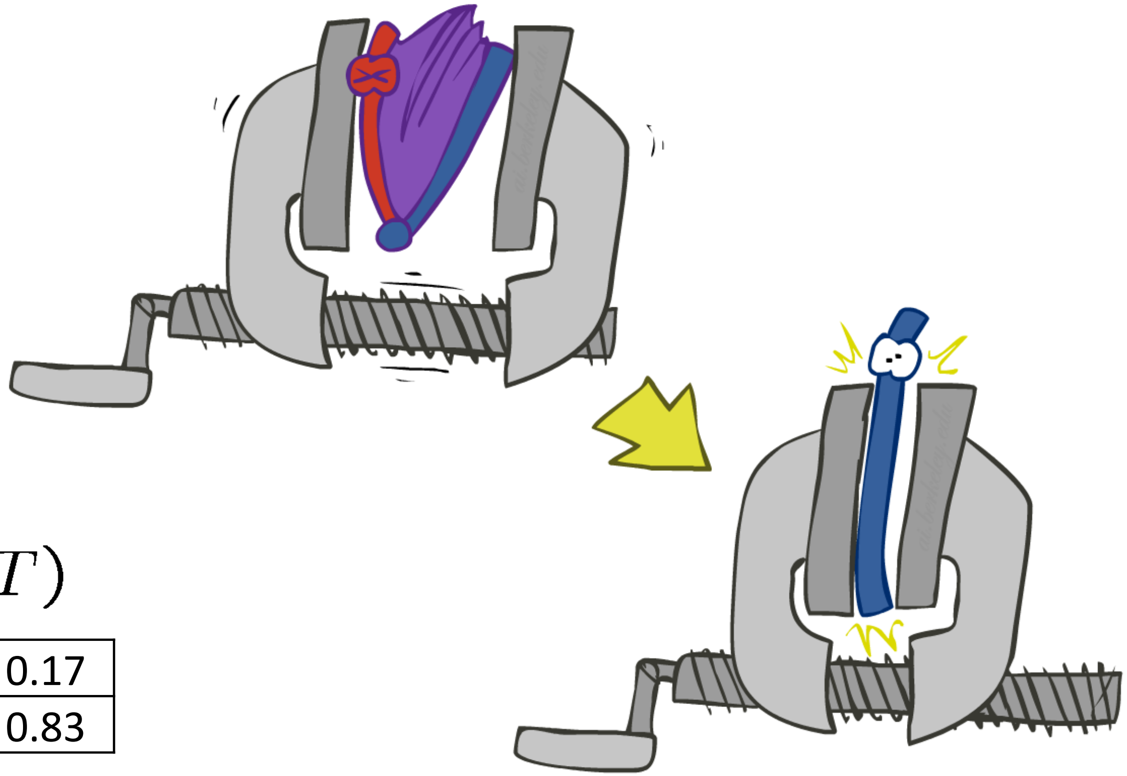
$P(R,T)$

+r	+t	0.08
+r	-t	0.02
-r	+t	0.09
-r	-t	0.81

sum R →

$P(T)$

+t	0.17
-t	0.83



Множественное исключение

R, T, L $\quad$ T, L $\quad$ L

$P(R,T,L)$

+r	+t	+l	0.024
+r	+t	-l	0.056
+r	-t	+l	0.002
+r	-t	-l	0.018
-r	+t	+l	0.027
-r	+t	-l	0.063
-r	-t	+l	0.081
-r	-t	-l	0.729

Sum out R

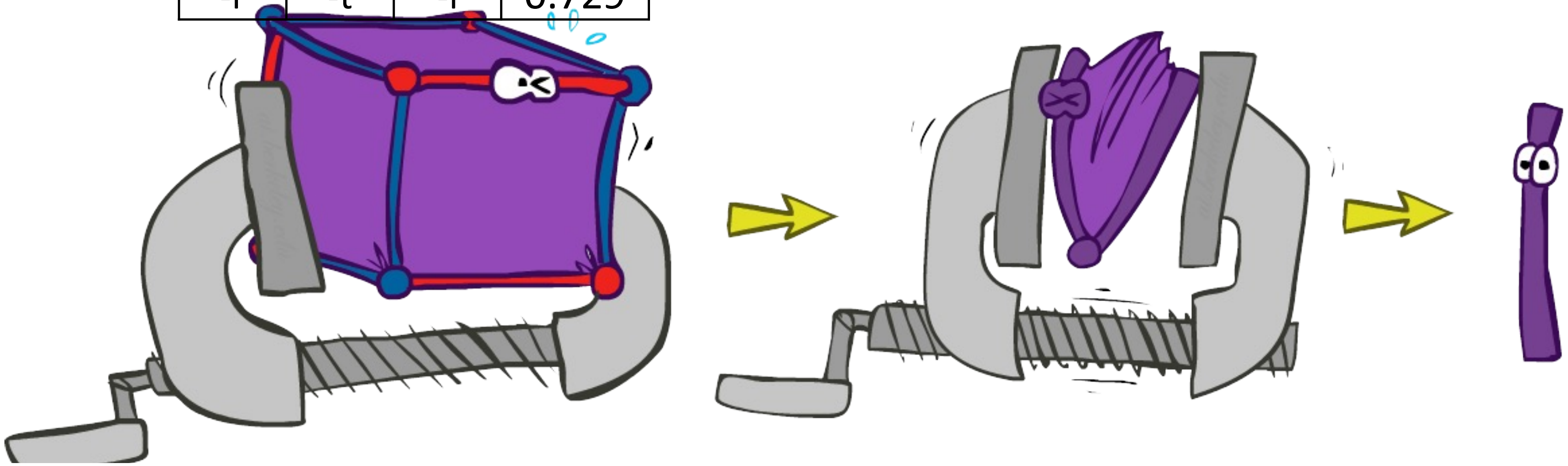
$P(T,L)$

+t	+l	0.051
+t	-l	0.119
-t	+l	0.083
-t	-l	0.747

Sum out T

$P(L)$

+l	0.134
-l	0.866



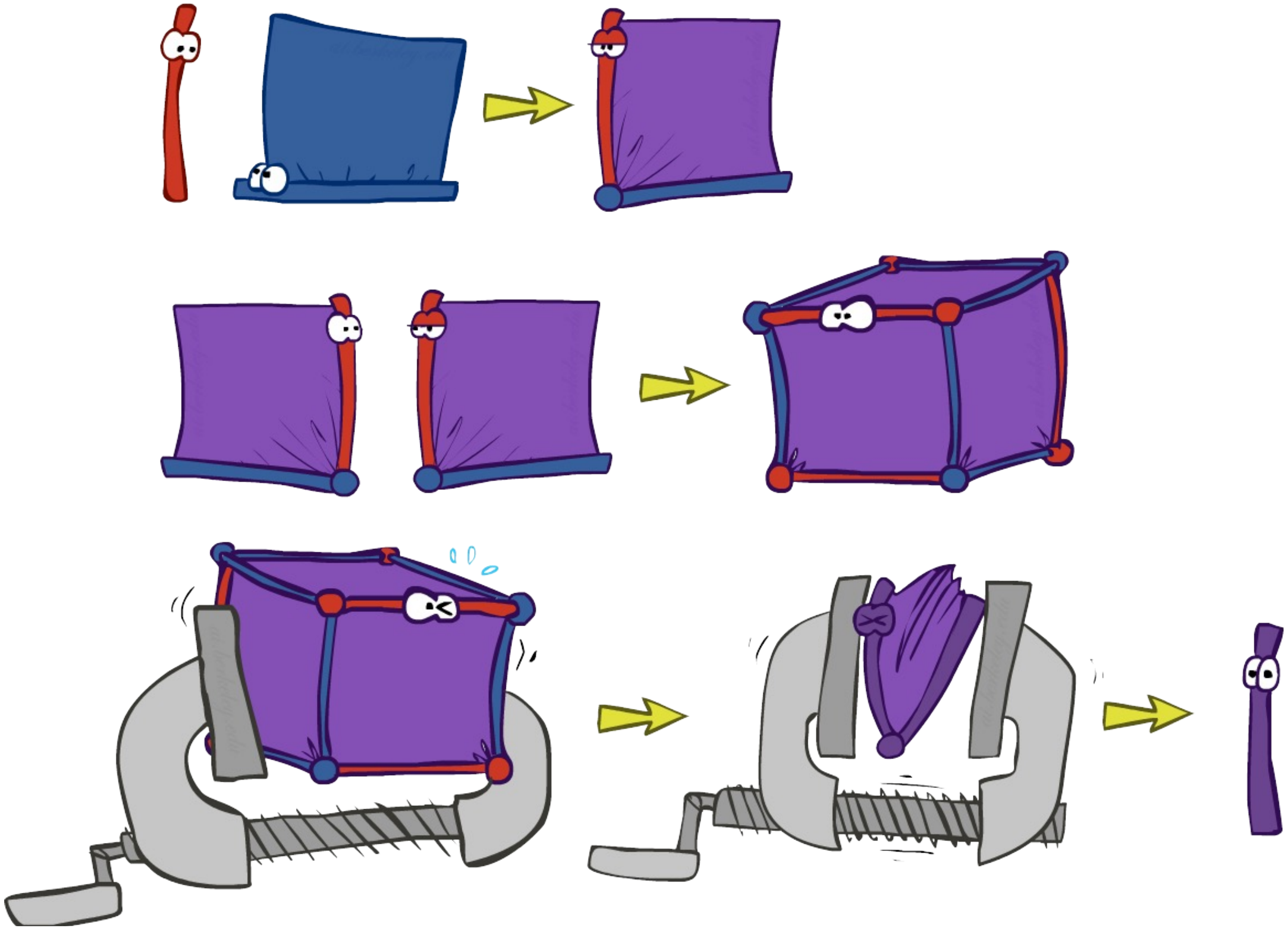
До сих пор: множественное соединение, множественное исключение (= вывод по перечислению)

$P(R)$

$P(T|R) \Rightarrow P(R,T,L) \Rightarrow P(L)$

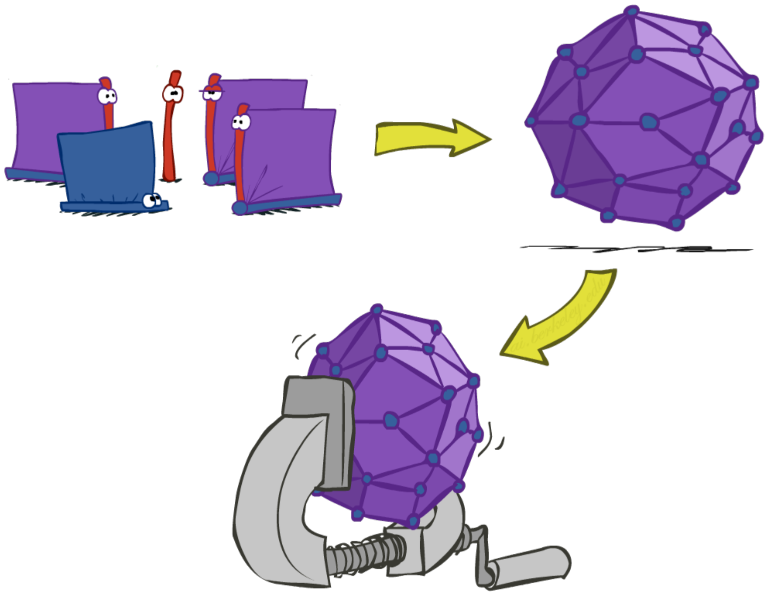
$P(L|T)$

До сих пор: множественное соединение, множественное исключение (= вывод по перечислению)

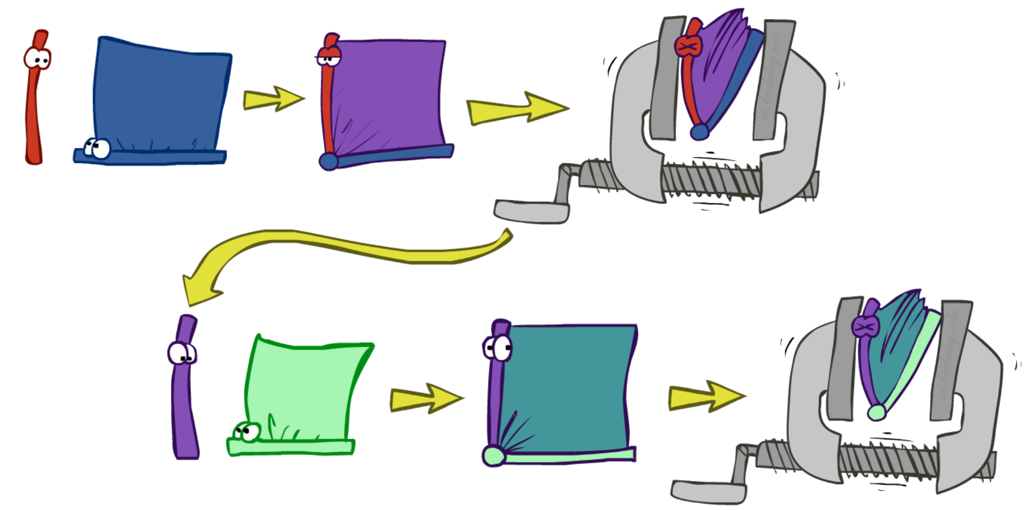


Вывод по перечислению vs. Исключение переменных

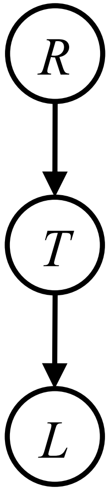
- Почему вывод по перечислению такой медленный?
  - Объединяются все совместные распределения, прежде чем суммировать скрытые переменные.



- Идея: чередовать соединение и маргинализацию!
  - Называется “Исключение переменных”
  - Все еще NP-трудно, но обычно намного быстрее, чем вывод путем перечисления



Пробки



$$P(L) = \,?$$

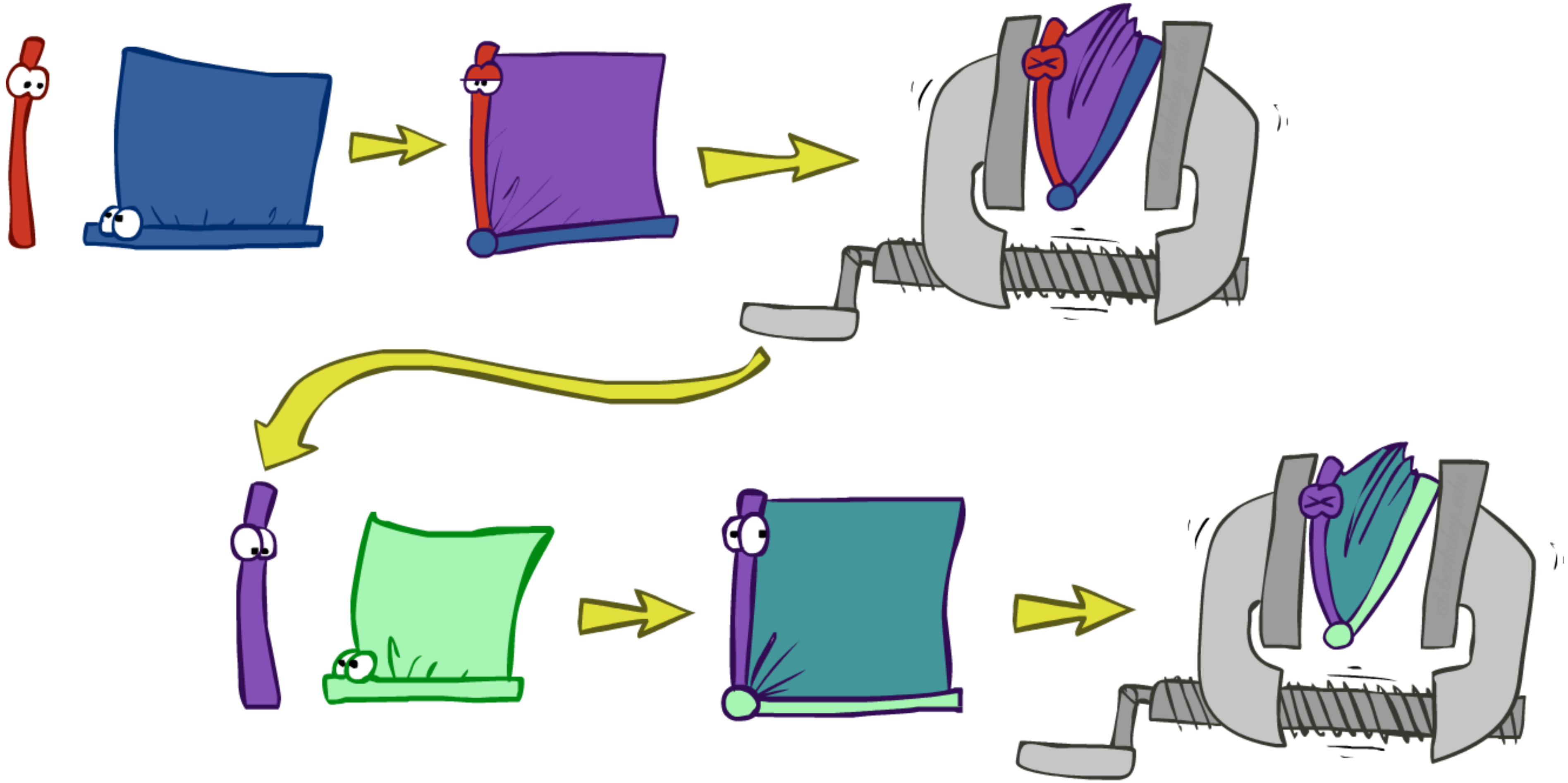
- Вывод по перечислению

$$= \underbrace{\sum_t \underbrace{\sum_r \underbrace{P(L|t)\underbrace{P(r)P(t|r)}_{\text{Join on r}}}_{\text{Join on t}}}_{\text{Eliminate r}}}_{\text{Eliminate t}}$$

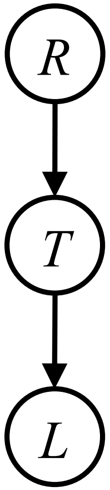
- Исключение переменных

$$= \underbrace{\sum_t \underbrace{P(L|t) \underbrace{\sum_r \underbrace{P(r)P(t|r)}_{\text{Join on r}}}_{\text{Eliminate r}}}_{\text{Join on t}}}_{\text{Eliminate t}}$$

Маргинализация раньше (= Исключение переменных)



Маргинализация раньше! (она же искл. переменных)



$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

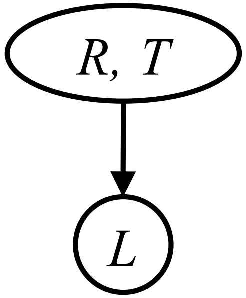
$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

Join R

$P(R,T)$

+r	+t	0.08
+r	-t	0.02
-r	+t	0.09
-r	-t	0.81



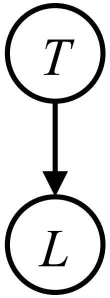
$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

Sum out R

$P(T)$

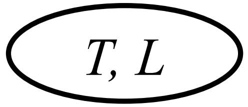
+t	0.17
-t	0.83



$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

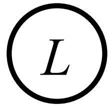
Join T



$P(T,L)$

+t	+l	0.051
+t	-l	0.119
-t	+l	0.083
-t	-l	0.747

Sum out T



$P(L)$

+l	0.134
-l	0.866

Свидетельство (наблюдение)

- Если есть свидетельство, начните с факторов, которые выбирают это доказательство
  - Нет свидетельства которые используют начальный фактор:

$P(R)$

+r	0.1
-r	0.9

$P(T|R)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2
-r	+t	0.1
-r	-t	0.9

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9

  - Вычисляя, $P(L|+r)$ исходные факторы становятся:

$P(+r)$

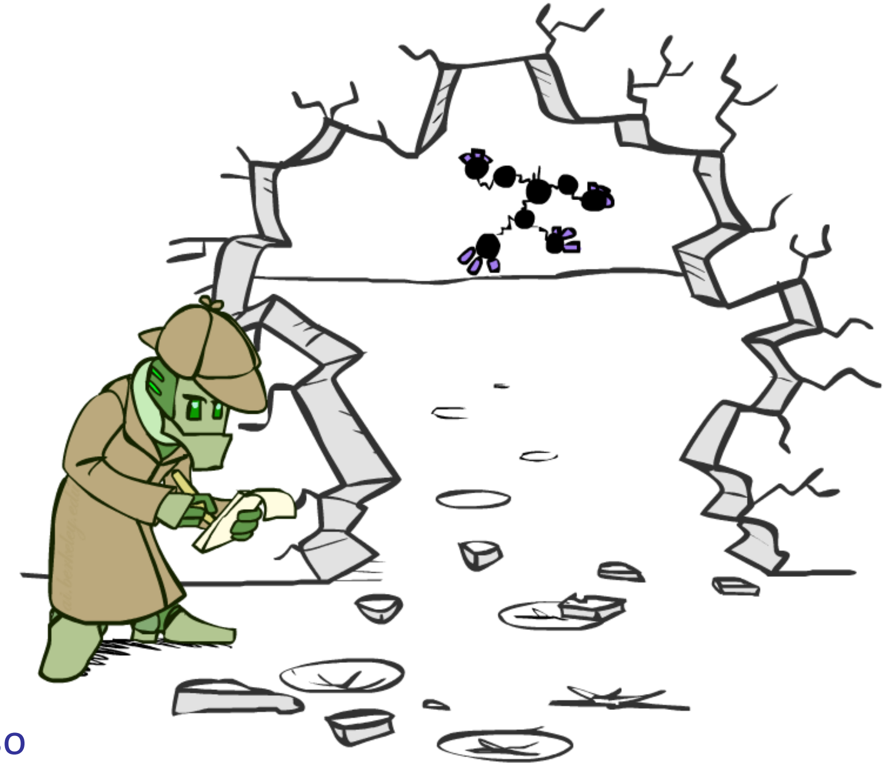
+r	0.1

$P(T|+r)$

+r	+t	0.8
+r	-t	0.2

$P(L|T)$

+t	+l	0.3
+t	-l	0.7
-t	+l	0.1
-t	-l	0.9



- Убираем все переменные, кроме запроса + свидетельство

Свидетельство II

- Результатом будет выбранное сочетание запроса и свидетельства
  - Например, для P(L | +r), мы закончим:

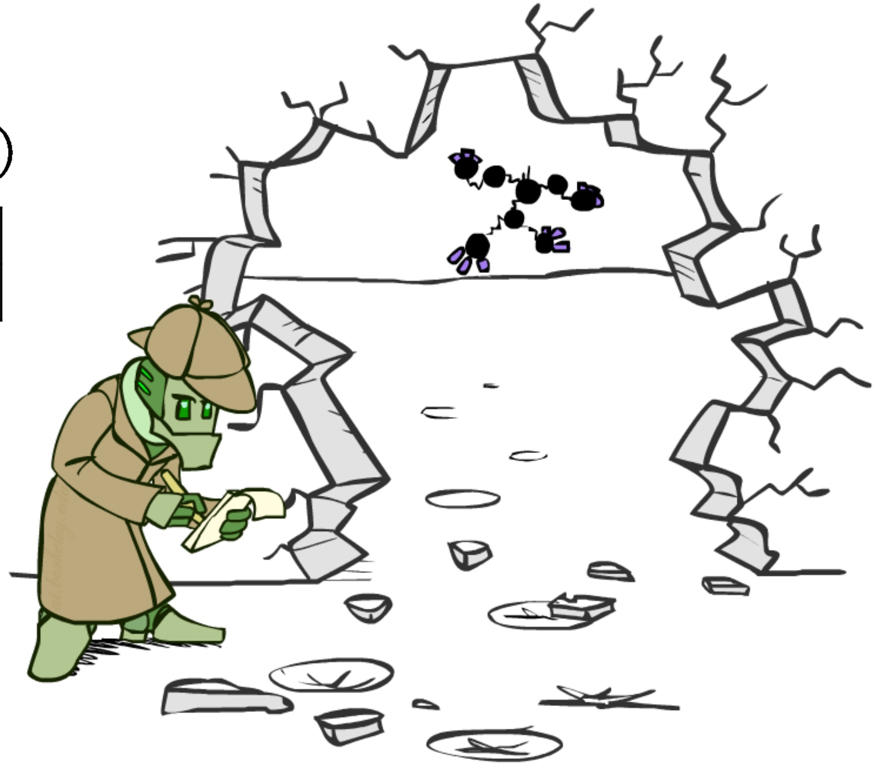
$$P(+r, L)$$

+r	+l	0.026
+r	-l	0.074

Нормализация

$$P(L | +r)$$

+l	0.26
-l	0.74



- Чтобы получить наш ответ, просто нормализуйте это!

- Вот и все!

Вывод с помощью перечисления

- Общий случай:
  - Свидетельство: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - Запрос*: Q
  - Скрытые перем.: $H_1 \dots H_r$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array}\right\} X_1, X_2, \dots X_n$$

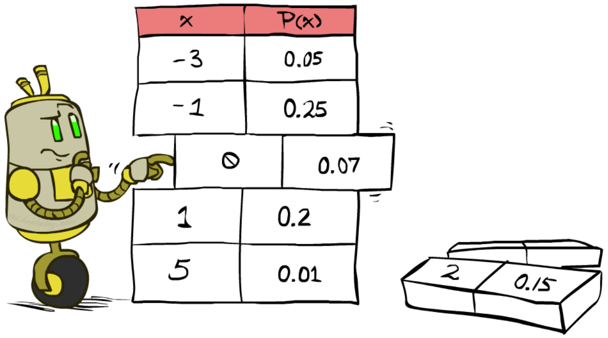
Все переменные

- Мы хотим:

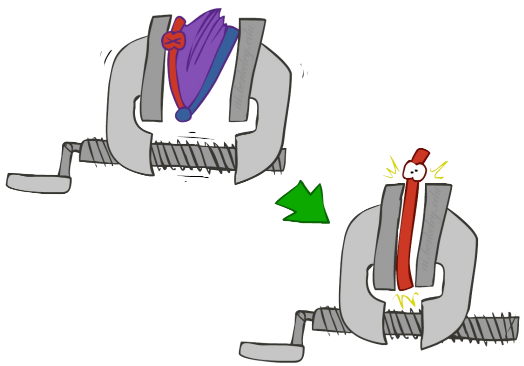
** Работает и с несколькими переменными*

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

- Шаг 1: Выберите записи, соответствующие наблюдениям



- Шаг 2: Суммируйте H, чтобы получить соединение запроса и свидетельства.



- Вычислить объединение

$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots X_n}$$

- Шаг 3: Нормализуйте

$$\times \frac{1}{Z}$$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \cdots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

Вывод с помощью исключения

- Общий случай:
  - Свидетельство: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$
  - Запрос*: Q
  - Скрытые перем.: $H_1 \dots H_r$

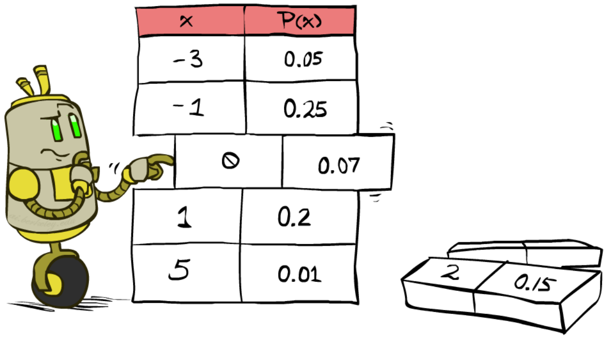
$\left.\begin{array}{l} E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k \\ Q \\ H_1 \dots H_r \end{array}\right\} X_1, X_2, \dots X_n$ *Все переменные*

- Мы хотим:

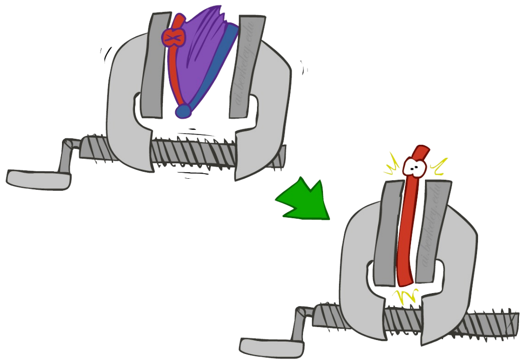
** Работает и с несколькими переменными*

$$P(Q|e_1 \dots e_k)$$

- Шаг 1: Выберите записи, соответствующие наблюдениям



- Шаг 2: Суммируйте H, чтобы получить соединение запроса и свидетельства.



$$P(Q, e_1 \dots e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} \underbrace{P(Q, h_1 \dots h_r, e_1 \dots e_k)}_{X_1, X_2, \dots X_n}$$

- Шаг 3: Нормализуйте

$$\times \frac{1}{Z}$$

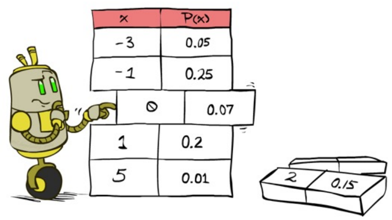
$$Z = \sum_q P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

$$P(Q|e_1 \cdots e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1 \cdots e_k)$$

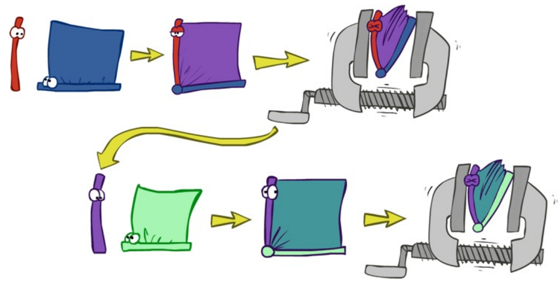
- Чередовать соединение и суммирование

Общее исключение переменной

- Запрос: $P(Q|E_1 = e_1, \dots E_k = e_k)$



- Начать с инициирующих факторов:
  - Локальные CPTs (подтвержденые свидетельством)
- Пока еще есть скрытые переменные (не Q или свидетельства):
  - Выберите скрытую переменную H
  - Присоединяйте все факторы, упоминающие H
  - Исключить (суммировать) по H

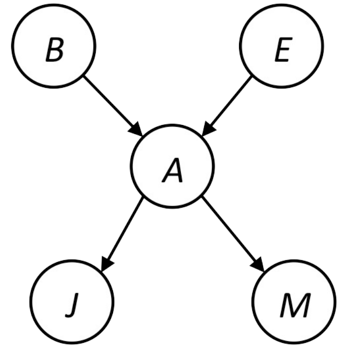


- Соедините все оставшиеся факторы и нормализуйте

$\times \frac{1}{Z}$

Пример

$$P(B|j,m) \propto P(B,j,m)$$



$$\boxed{P(B) \qquad P(E) \qquad P(A|B,E) \qquad P(j|A) \qquad P(m|A)}$$

$$\begin{aligned} P(B|j,m) &\propto P(B,j,m) \\ &= \sum_{e,a} P(B,j,m,e,a) \\ &= \sum_{e,a} P(B)P(e)P(a|B,e)P(j|a)P(m|a) \\ &= \sum_{e} P(B)P(e) \sum_{a} P(a|B,e)P(j|a)P(m|a) \\ &= \sum_{e} P(B)P(e) f_1(j,m|B,e) \\ &= P(B) \sum_{e} P(e) f_1(j,m|B,e) \\ &= P(B) f_2(j,m|B) \end{aligned}$$

маргинал можно получить из объединения суммированием

Используйте объединение в сети Байеса

используйте x*(y+z) = xy + xz

Объединяйте по a, и затем суммируйте для f_1

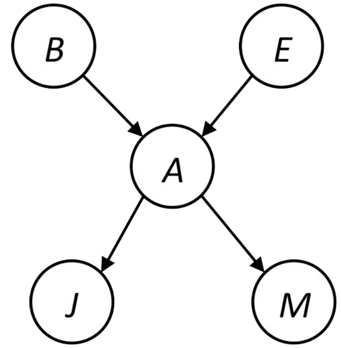
используйте x*(y+z) = xy + xz

Объединяя по e, и затем суммируйте для f_2

Все, что мы делаем, это эксплуатируем uwy + uwz + uxy + uxz + vwy + vwz + vxy +vxz = (u+v)(w+x)(y+z) чтобы повысить вычислительную эффективность!

Пример

$$P(B|j,m) \propto P(B,j,m)$$



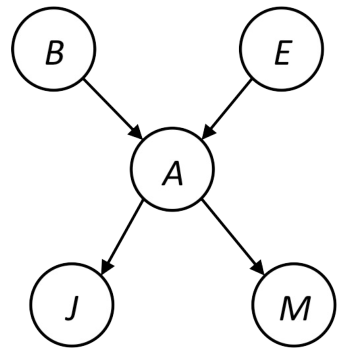
$$\boxed{P(B) \qquad P(E) \qquad P(A|B,E) \qquad P(j|A) \qquad P(m|A)}$$

Выбрать A

$$\left.\begin{matrix} P(A|B,E) \\ P(j|A) \\ P(m|A) \end{matrix}\right. \xrightarrow{\times} P(j,m,A|B,E) \xrightarrow{\sum} P(j,m|B,E)$$

$$\boxed{P(B) \qquad P(E) \qquad P(j,m|B,E)}$$

Пример



$$P(B) \qquad P(E) \qquad P(j,m|B,E)$$

Выбрать E

$$P(E) \quad P(j,m|B,E) \xrightarrow{\times} P(j,m,E|B) \xrightarrow{\sum} P(j,m|B)$$

$$P(B) \qquad P(j,m|B)$$

Finish with B

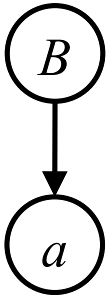
$$P(B) \quad P(j,m|B) \xrightarrow{\times} P(j,m,B) \xrightarrow{\text{Normalize}} P(B|j,m)$$

Пример 2: P(B|a)

Старт / Выбор

$P(B)$

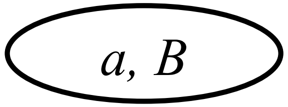
B	P
+b	0.1
□b	0.9



$P(A|B) \rightarrow P(a|B)$

B	A	P
+b	+a	0.8
~~b~~	~~□a~~	~~0.2~~
□b	+a	0.1
~~□b~~	~~□a~~	~~0.9~~

Join on B



$P(a, B)$

A	B	P
+a	+b	0.08
+a	□b	0.09

Normalize

$P(B|a)$

A	B	P
+a	+b	8/17
+a	□b	9/17

Другой пример исключения переменных

Query: $P(X_3|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, Y_3 = y_3)$

Начинаем обработку свидетельства со следующих факторов

$$P(Z), P(X_1|Z), P(X_2|Z), P(X_3|Z), P(y_1|X_1), P(y_2|X_2), P(y_3|X_3)$$

Eliminate X_1, this introduces the factor $f_1(y_1|Z) = \sum_{x_1} P(x_1|Z)P(y_1|x_1)$, and we are left with:

$$P(Z), P(X_2|Z), P(X_3|Z), P(y_2|X_2), P(y_3|X_3), f_1(y_1|Z)$$

Eliminate X_2, this introduces the factor $f_2(y_2|Z) = \sum_{x_2} P(x_2|Z)P(y_2|x_2)$, and we are left with:

$$P(Z), P(X_3|Z), P(y_3|X_3), f_1(y_1|Z), f_2(y_2|Z)$$

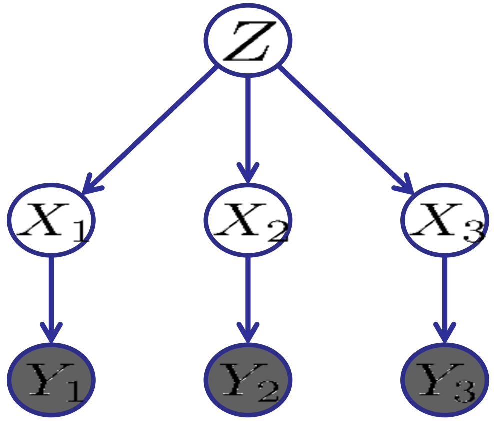
Eliminate Z, this introduces the factor $f_3(y_1, y_2, X_3) = \sum_z P(z)P(X_3|z)f_1(y_1|Z)f_2(y_2|Z)$, and we are left with:

$$P(y_3|X_3), f_3(y_1, y_2, X_3)$$

No hidden variables left. Join the remaining factors to get:

$$f_4(y_1, y_2, y_3, X_3) = P(y_3|X_3), f_3(y_1, y_2, X_3)$$

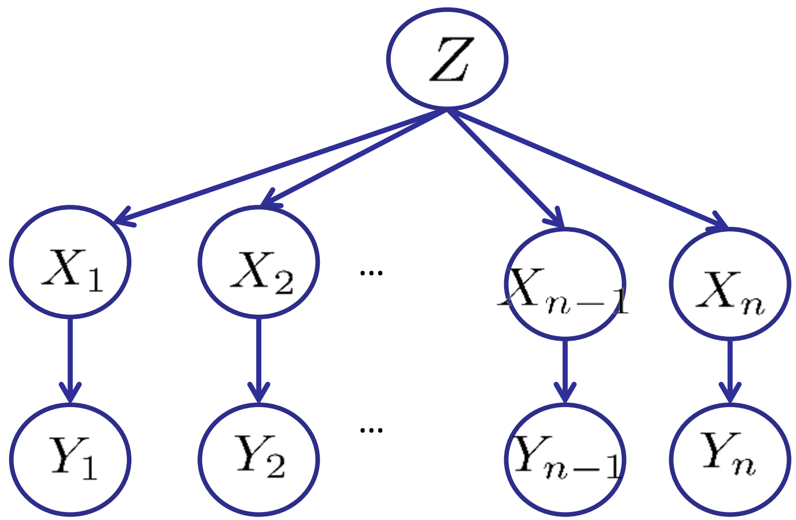
Normalizing over X_3 gives $P(X_3|y_1, y_2, y_3) = f_4(y_1, y_2, y_3, X_3)/\sum_{x_3} f_4(y_1, y_2, y_3, x_3)$



Вычислительная сложность критически зависит от самого большого фактора, генерируемого в этом процессе. Размер фактора = количество записей в таблице. В приведенном выше примере (при условии, что он двоичный) все сгенерированные факторы имеют размер 2 - поскольку все они имеют только одну переменную (Z, Z и X_3 соответственно).

Упорядочивание исключения переменных

- Для запроса $P(X_n | y_1,\ldots,y_n)$ работают следующие два разных порядка, как это было сделано на предыдущем слайде: $Z, X_1, \ldots, X_{n-1}$ и $X_1, \ldots, X_{n-1}, Z$. Каков размер максимального фактора, генерируемого для каждого из порядков??



- Ответ: 2^n вместо 2 (предполагая двоичные переменные)

- В целом: порядок может сильно повлиять на эффективность.

Вычислительная и пространственная сложность

- Вычислительная и пространственная сложность исключения переменных определяется наибольшим фактором

- Порядок исключения может сильно повлиять на размер наибольшего фактора.
  - Например, как на предыдущих слайдах 2^n вместо 2

- Всегда ли существует порядок, который приводит только к небольшим множителям?
  - Нет!

Сложность наихудшего случая?

- задача удовлетворения ограничений (constraint satisfaction problem – CSP):

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee x_6) \wedge (\neg x_5 \vee x_6 \vee \neg x_7) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee x_7)$$

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$$

$$Y_1 = X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3$$

$$\dots$$

$$Y_8 = \neg X_5 \vee X_6 \vee X_7$$

$$Y_{1,2} = Y_1 \wedge Y_2$$

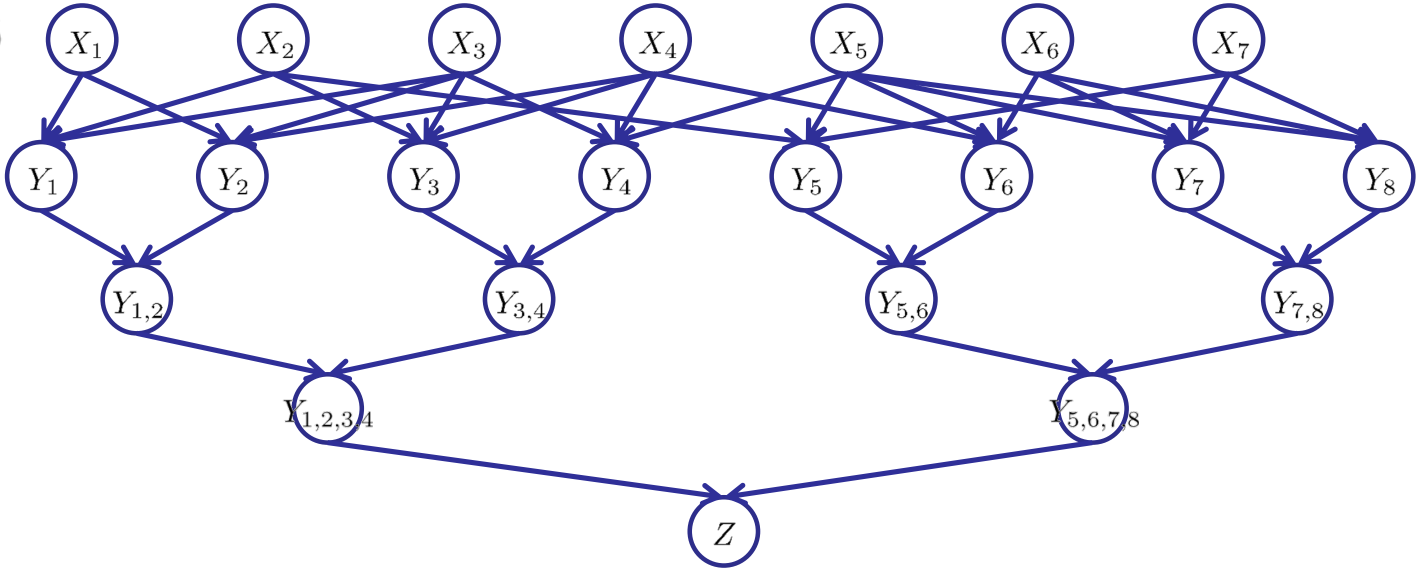
$$\dots$$

$$Y_{7,8} = Y_7 \wedge Y_8$$

$$Y_{1,2,3,4} = Y_{1,2} \wedge Y_{3,4}$$

$$Y_{5,6,7,8} = Y_{5,6} \wedge Y_{7,8}$$

$$Z = Y_{1,2,3,4} \wedge Y_{5,6,7,8}$$



- Если можно ответить P(z) равно нулю или нет, значит можно сказать что задача 3-SAT имеет решение.
- Следовательно, вывод в байесовских сетях NP-труден. Нет известного эффективного вероятностного вывода в целом.

“Простые” структуры: Полидеревья

- Полидерево — это ориентированный граф без неориентированных циклов.

- Для полидеревьев всегда можно найти эффективный порядок
  - Попробуй найти!

- Обуславливание набора отсечений для вывода байесовской сети
  - Выберите набор переменных таким образом, чтобы при удалении оставалось только полидерево
  - Упражнение: Подумайте о том, как особенности будут работать!