Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Судаков Владимир Анатольевич

vasudakov@fa.com

Литература

- Самарский А. А., Михайлов А. П. - Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. - 2001. - 320с
- Хемди Таха. Исследование операций
- Олег Ларичев. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах
- Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства
- Аллен Б. Дауни. Изучение сложных систем с помощью Python
- https://simpy.readthedocs.io/
- Саттон Ричард С., Барто Эндрю Г. Обучение с подкреплением
- https://gymnasium.farama.org
- https://ray.io rllib
- https://github.com/sudakov/rl/blob/master/RL.pptx
- https://github.com/sudakov/math-for-ds/tree/main/Bayes
- https://github.com/sudakov/lab_it/blob/master/stat.pptx
- Луис Энрике Сукар. Вероятностные графовые модели. Принципы и приложения https://dmkpress.com/catalog/computer/data/978-5-97060-874-6/
- Рассел Стюарт, Норвиг Питер. Искусственный интеллект. Современный подход (AIMA) http://www.williamspublishing.com/Books/978-5-907365-26-1.html
- Джоэл Грас. Data Science. Наука о данных с нуля https://bhv.ru/product/nauka-o-dannyh-s-nulya-per-s-angl-2-e-izd/

Математическое моделирование. Определение

- **Математическая модель** — это приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное *математическими символами*

- **Математическое моделирование** — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель), находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом, способная замещать его в определённых отношениях и дающая при её исследовании, в конечном счёте, информацию о самом моделируемом объекте

Дискуссия

- Почему мы исследуем модели объектов, а не сами объекты?
- ......

Некоторые причины для моделирования

- Натурные испытания – это дорого/долго

- ***Суть моделирования в абстрагировании/избирательности***
  - Абстрагирование – это одни из способов борьбы со сложностями

Опасности математического моделирования

Ферми сказал, что в теоретической физике есть лишь два подхода к вычислениям:

- понимание физической природы процесса

или

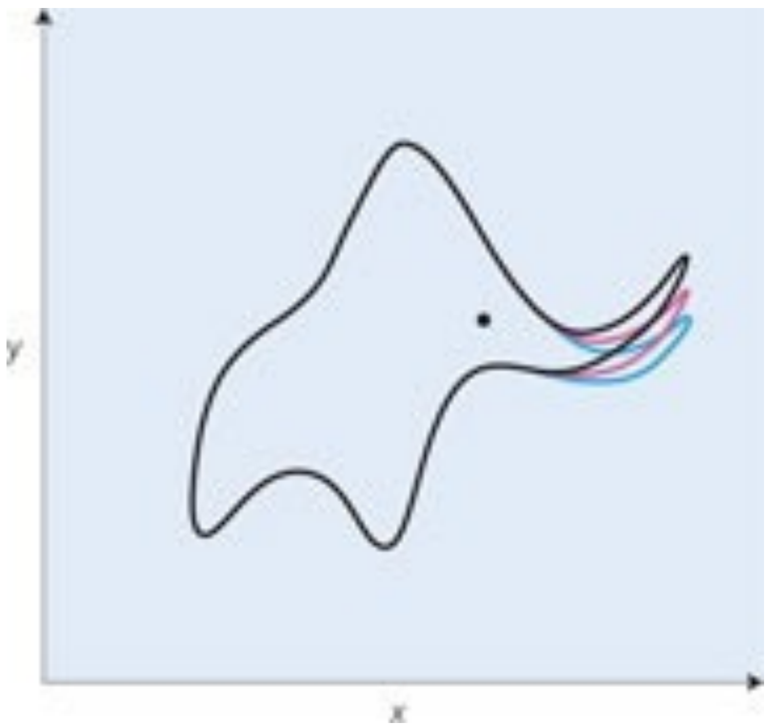
- наличие точного математического формализма,

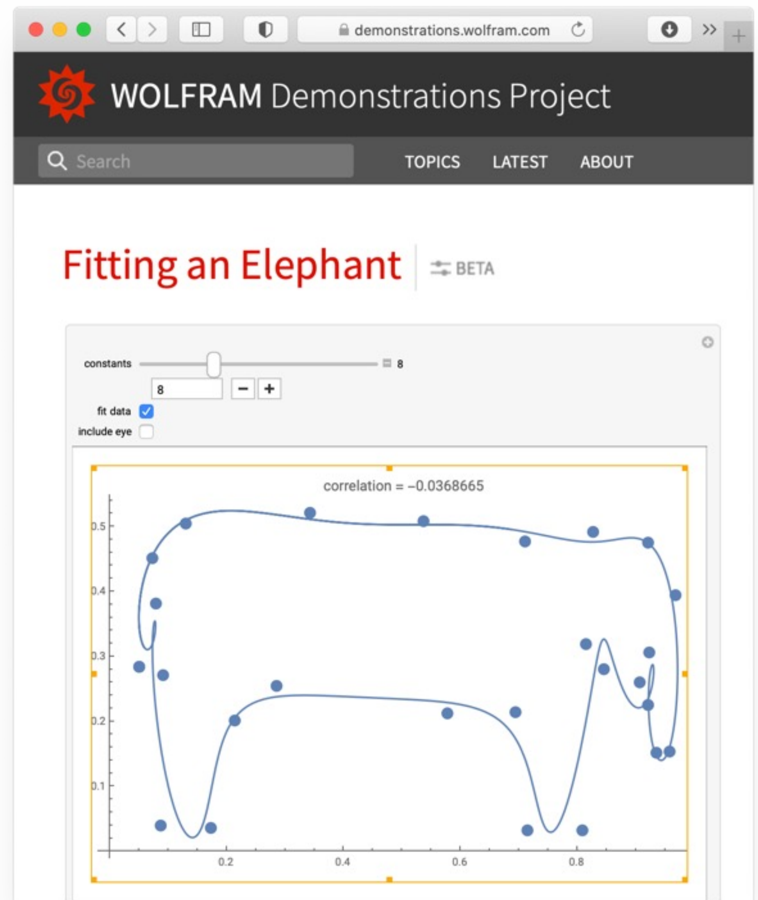
и работа Дайсона не идёт ни по одному из этих путей.

Когда обескураженный Дайсон спросил Ферми, почему тому не кажется убедительным совпадение результатов вычислений и эксперимента, Ферми указал на наличие произвольных параметров в модели Дайсона и отметил:

мой друг Джонни фон Нейман говорил, что с четырьмя параметрами он может описать слона, а с пятым — заставить его махать хоботом

Слон фон Неймана





- Jürgen Mayer, Khaled Khairy and Jonathon Howard. [Drawing an elephant with four complex parameters](). // Am. J. Phys. 78, 648 (2010).

Классификация моделей

- Линейные или нелинейные модели
- Дискретные или непрерывные
- Детерминированные или стохастические или нечеткие или игровые
- Статические или динамические
- Структурные или функциональные модели

Классификация задач

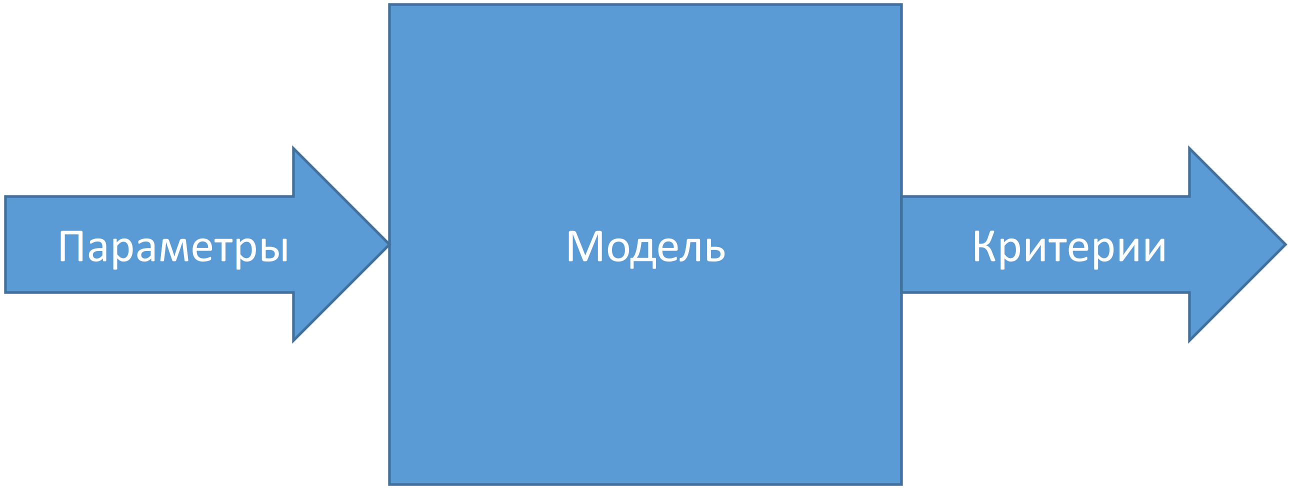
- **Прямая задача**: структура модели и все её параметры считаются известными, необходимо провести исследование модели для извлечения полезного знания об объекте.

- **Обратная задача**: известно множество возможных моделей, надо выбрать конкретную модель (параметры модели) на основании дополнительных данных об объекте.
- Если модель (или параметры) выбираются под требованиях к объекту, то это *задача проектирования.*

Этапы построения модели для решения практических задач

1. Предпроектное обследование (мониторинг ситуации)
   - Как же сейчас обходятся без модели или какие модели используют?
2. Определение целей моделирования
3. Определение критериев оценки результатов моделирования
4. Определение параметров модели (важен компромисс между универсальностью и сложностью)
5. Математическая формализация (на этом этапе определяется класс модели)
6. Выбор метода решения задачи
7. Разработка алгоритмов моделирования (опционально)
8. Выбор инструментальных средств или языков моделирования
9. Проведение вычислительных экспериментов
10. Анализ результатов
11. При необходимости возврат на предыдущие шаги

Модель



Дискуссия

- Но можно ли описать вертолет одной моделью?
- А есть ли польза от одной модели?
- Что такое система?

Анализ систем

Моделей много, их нужно объединять в систему

Система –

- множество элементов и
- отношений между ними,
- объединенных для достижения цели

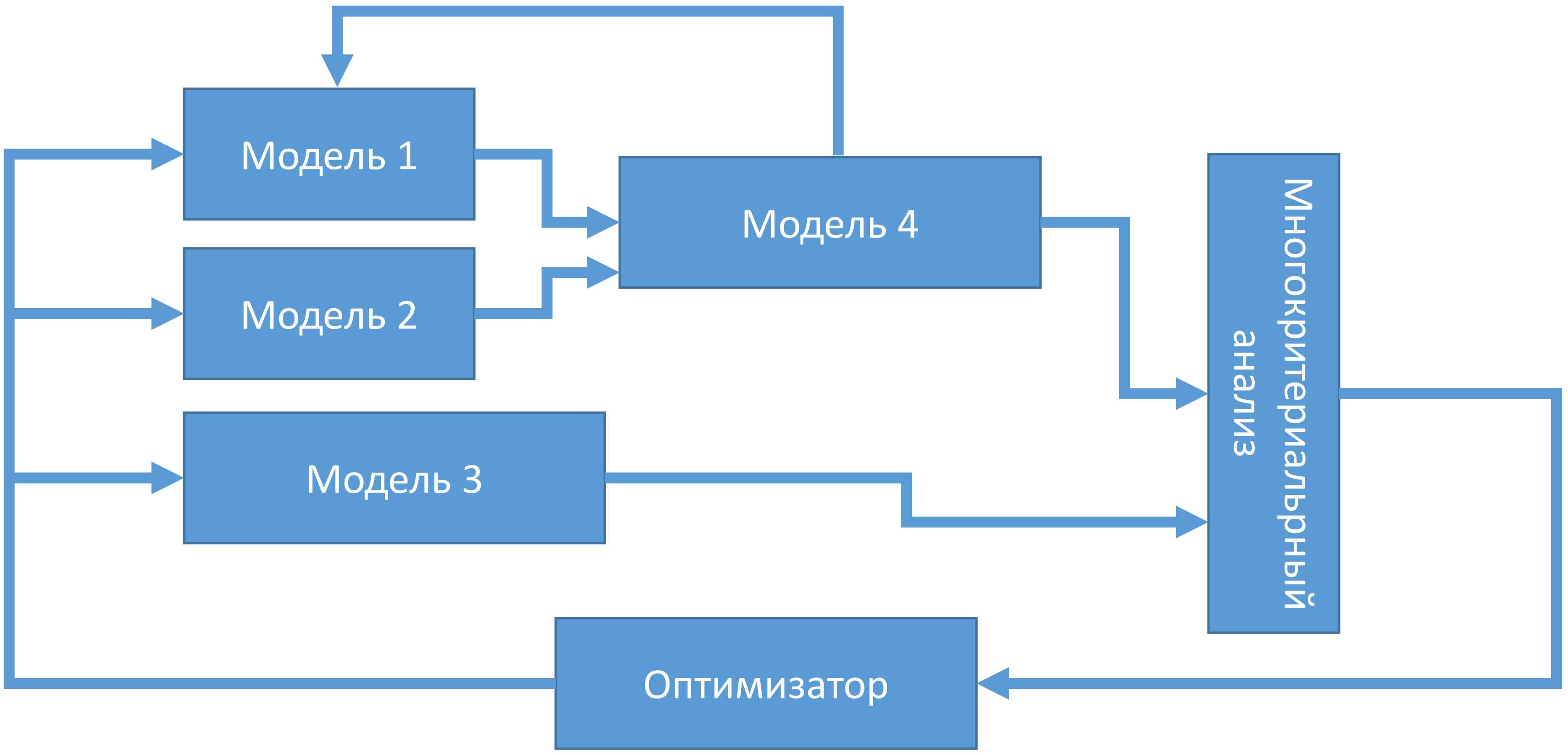
В качестве элементов могут быть другие системы

- Система взаимодействует со средой как единое целое

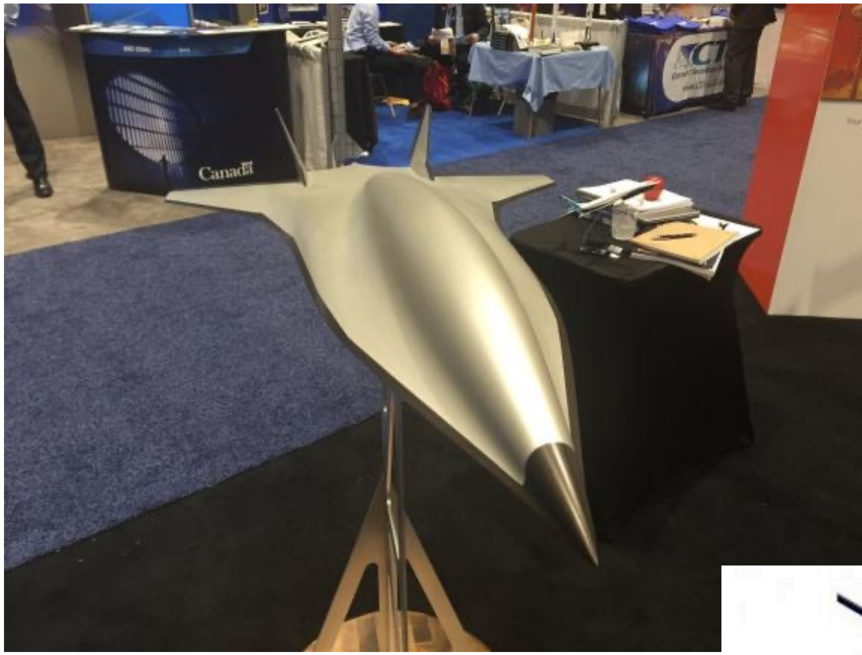
Свойства:

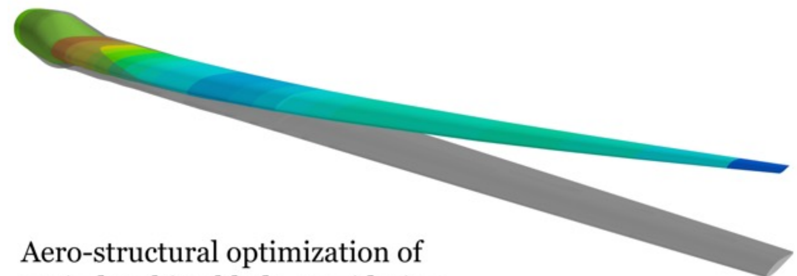
- Интегративность (ограниченность от среды)
- Синергичность
- Эмерджентность
- Ингерентность

Использование моделей

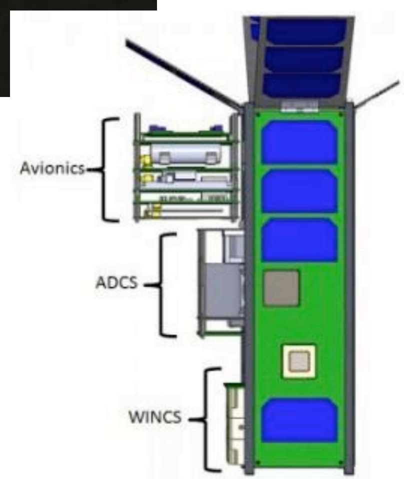


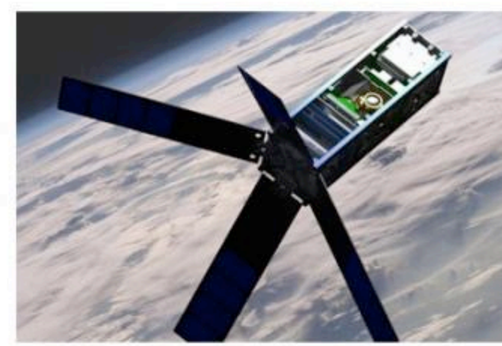
Мультидисциплинарная оптимизация





Aero-structural optimization of
a wind turbine blade considering
pre-curve jig shape





Пакет OpenMDAO

Модели исследования операций

- *Операция* — всякое мероприятие (система действий), объединённое единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели
- Решение — всякий определённый набор зависящих от человека значений параметров
- Оптимальное — решение, которое по тем или другим признакам предпочтительнее других
- Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений с опорой на показатель эффективности

Примеры

- Задача о формировании производственного плана предприятия
- Задача целераспределения средств ПВО по объектам нападения
- Задача выбора оптимального маршрута на транспортной сети.
- Задача оптимального управления многоэтапной программой работ

Общая постановка

$$\min_{x \in D}(\max)\{z = f(x)\}\ D = \{x \in R^n : g_i(x) \le (=,\ge) b[i],\ i = \overline{1,m}\}\ .$$

z – целевая функция,

$x = (x[1], x[2], \ldots, x[n])^T$ -вектор оптимизационных переменных,

min или max – направление оптимизации,

$\min_{x \in D}\{z = f(x)\}$ - критерий оптимизации,

D – множество допустимых решений оптимизационной задачи,

$x \in R^n$ - задание типа пространства, на котором определены оптимизационные переменные ($x \in Z^n$, $x \in N^n$),

$g_i(x) \le b[i]$ - ограничение оптимизационной задачи,

$g_i(x)$ - левая цасть ограничения,

$b[i]$ - правая часть ограничения.

Классификация

- Задачи линейного программирования
- Задачи дискретного программирования
- Задачи смешанного линейно-целочисленного программирования
- Задачи динамического программирования
- Задачи нелинейного программирования
- Задачи оптимального управления
- Задачи стохастического программирования

Производственная задача

Рассматривается некоторая производственная система, способная производить несколько видов продукции. Для производства используется ряд сырьевых ресурсов, имеющихся в системе в ограниченном количестве. От реализации произведенной продукции система получает прибыль. Требуется так составить производственный план (определить, какие виды продукции и в каком количестве производить), чтобы при имеющихся ограничениях на сырьевые ресурсы получить максимальную прибыль.

Формализованная постановка

n - количество видов продукции, которую может производить система;
m - количество видов сырья, используемого при производстве продукции;
$c[j],\ (j = 1,2,...,n)$ - прибыль, получаемая от реализации произведенной единицы j - ого вида продукции;

$b[i],\ (i = \overline{1,m})$ - количество имеющегося в наличии сырья i-ого вида;

$a[i,j],\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ - технологический коэффициент затрат i-ого вида сырья на производство единицы продукции j-ого вида;

$x[j],\ (j = \overline{1,n})$ - планируемого количество производимой продукции j-ого вида (оптимизационная переменная).

С учетом введенных обозначений формализованная запись имеет вид:

$$\max_x z = \sum_{j=\overline{1,n}} c[j]\,x[j],$$

$$\sum_{j=1}^{n} a[i,j]\,x[j] \le b[i],\ (i = \overline{1,m}), \qquad (1.1)$$

$$x[j] \ge 0,\ (j = \overline{1,n}).$$

Здесь z - суммарная прибыль от реализации произведенной продукции, $\sum_{j=1}^{n} a[i,j]\,x[j]$ - затраты i-ого вида сырьевого ресурса на реализацию всего производственного плана.

Задача о поднятии плит

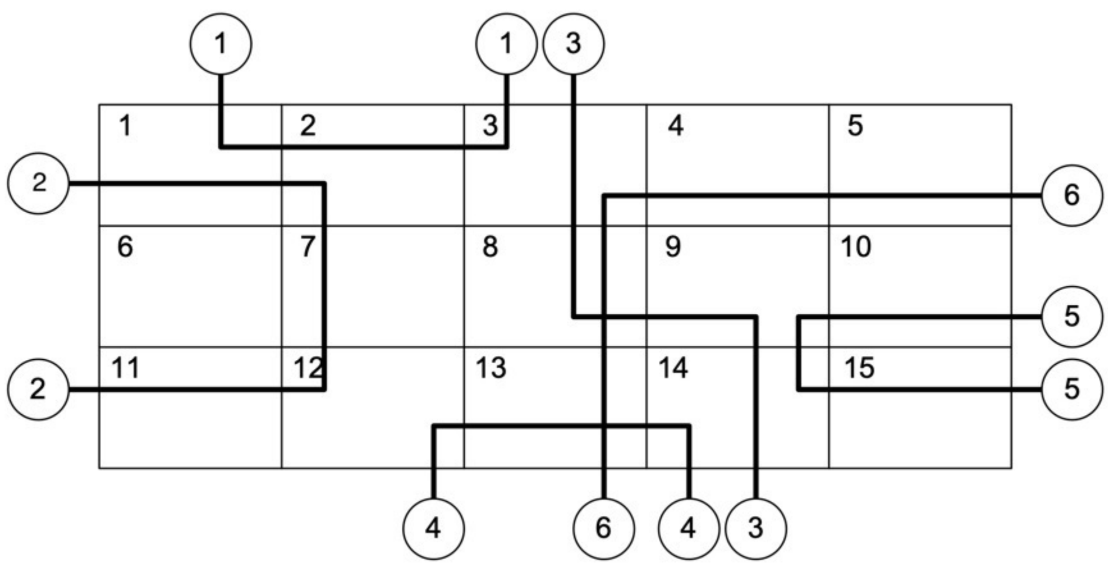
Необходимо проверить состояние кабельных линий, которые находятся под полом, состоящим из плит. Для проверки каждого кабеля достаточно получить к нему доступ в любом месте, для чего нужно поднять соответствующую плиту. На поле расположено оборудование. Поэтому с поднятием каждой плиты пола связан определенный объем работ по демонтажу и перемещению оборудования, задаваемый в человеко-часах. Необходимо определить плиты, которые нужно поднять таким образом, чтобы обеспечить доступ ко всем кабелям, а суммарный объем работ, связанный с поднятием плит фальшпола, был бы минимальным.

Вход: стоимость поднятия плит, какие кабели под какими плитами лежат.

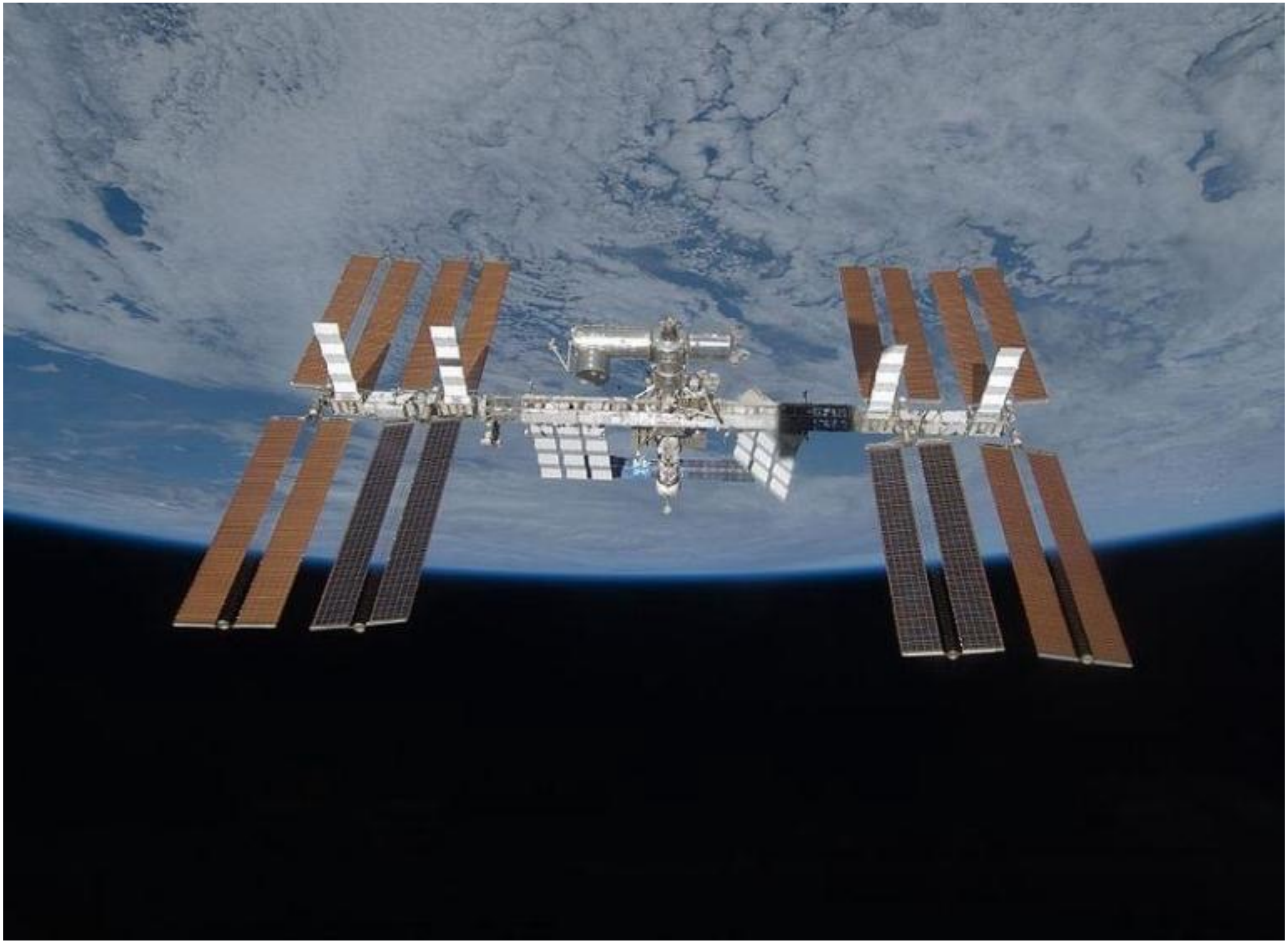
Выход: Какие плиты поднимаем.

Программа должна работать с произвольными корректными данными.

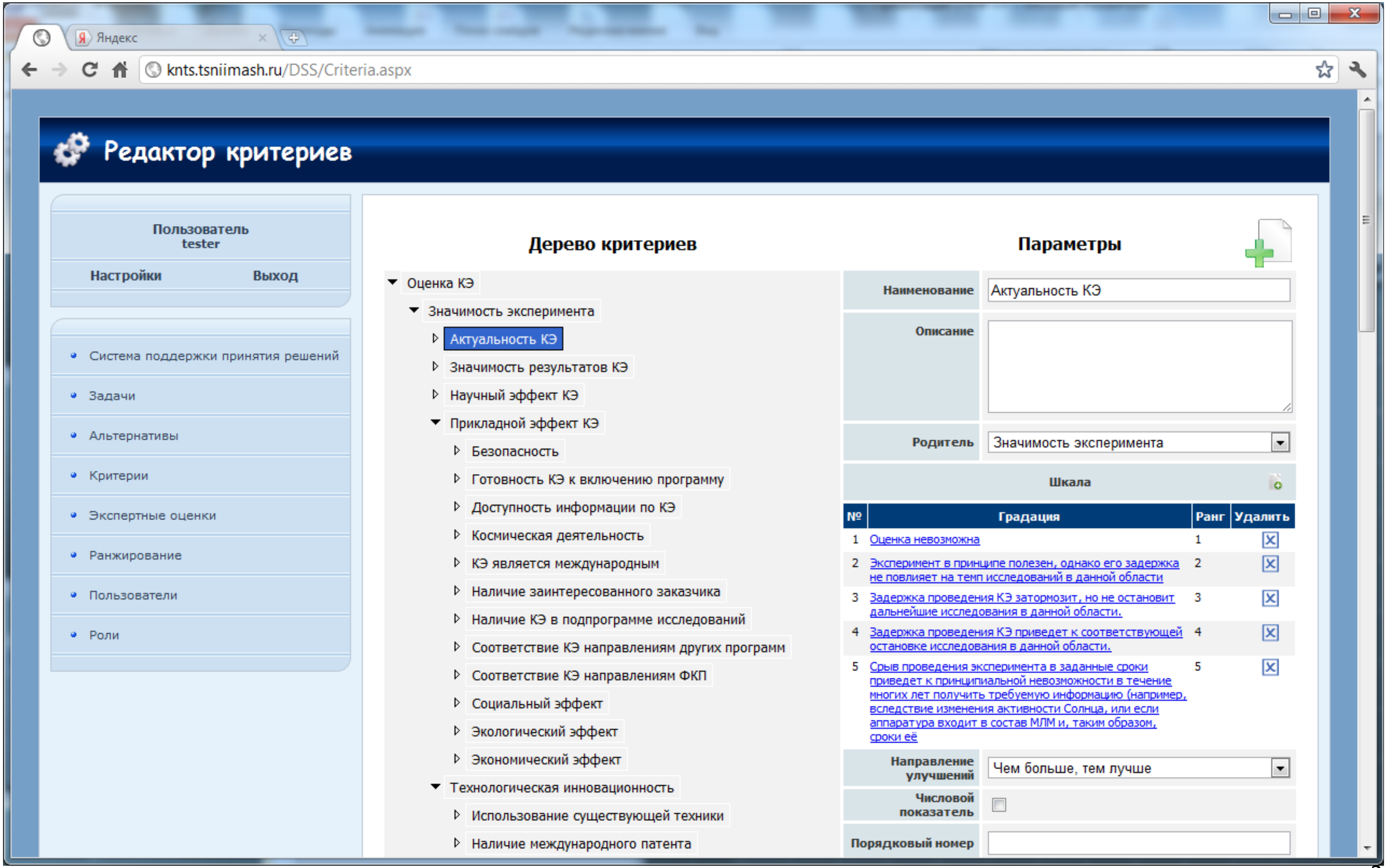
Пример исходных данных:



Планирование космических экспериментов (КЭ) на РС МКС



Редактор критериев



Ресурсные ограничения

Редактор ресурсов

Редактор ресурсов

192.168.56.101:8080/DSS/Resource.aspx

Google

Редактор ресурсов

Задача: Оценка КЭ

Пользователь: Администратор

Настройки Выход

- Система поддержки принятия решений
- Задачи
- Альтернативы
- Критерии
- Ресурсы
- Экспертные оценки
- Ранжирование
- Планирование
- Пользователи

Ресурсы

Наименование	Описание	Значение	Период	Единица изменения периода	Критерий	Удалить
Масса доставляемой на борт НА (кг)	Масса доставляемой на борт НА (кг)	0	2	квартал	Масса доставляемой на борт НА (кг)	
Объём доставляемой на борт НА (м^3)	Объём доставляемой на борт НА (м^3)	0	2	квартал	Объём доставляемой на борт НА (м^3)	
Масса возвращаемых блоков (кг)	Масса возвращаемых блоков (кг)	0	2	квартал	Масса возвращаемых блоков (кг)	
Объём возвращаемых блоков (м^3)	Объём возвращаемых блоков (м^3)	0	2	квартал	Объём возвращаемых блоков (м^3)	
Мощность НА (кВт)	Потребляемая мощность НА (кВт)	0	2	квартал	Мощность НА (кВт)	
Энергопотребление НА (кВт-ч)	Суммарное энергопотребление НА (кВт-ч)	0	2	квартал	Энергопотребление НА (кВт-ч)	
Время реализации сеансов КЭ (мин)	Суммарное время реализации сеансов КЭ (мин)	0	2	квартал	Время реализации сеансов КЭ (мин)	
Требуемое рабочее время экипажа (мин)	В том числе требуемое рабочее время экипажа на проведение КЭ (мин)	0	2	квартал	Требуемое рабочее время экипажа (мин)	
Объём передаваемой информации (Гбайт)	Необходимый за время проведения КЭ объём передаваемой информации по радиолинии связи в (Гбайт)	0	1	день	Объём передаваемой информации (Гбайт)	

Формализация задачи планирования КЭ

- Целевая функция

$$\max_{x_j, t_j (j \in J)} \left\{ \sum_{j=1}^{J} x_j p_j ; \ \sum_{j=1}^{J} x_j p_j (T - t_j)/T \right\}$$

- Ограничения

$$\sum_{j=1}^{J} x_j \left\{ \left(\sum_{t=(n-1)\Delta+1}^{n\Delta} f_j(t - t_j) \Big/ \tau_j \right) q_{jk} \right\} \le Q_k, \qquad (k=1,2,\dots,K;\ n=1,2,\dots,N) \quad ,$$

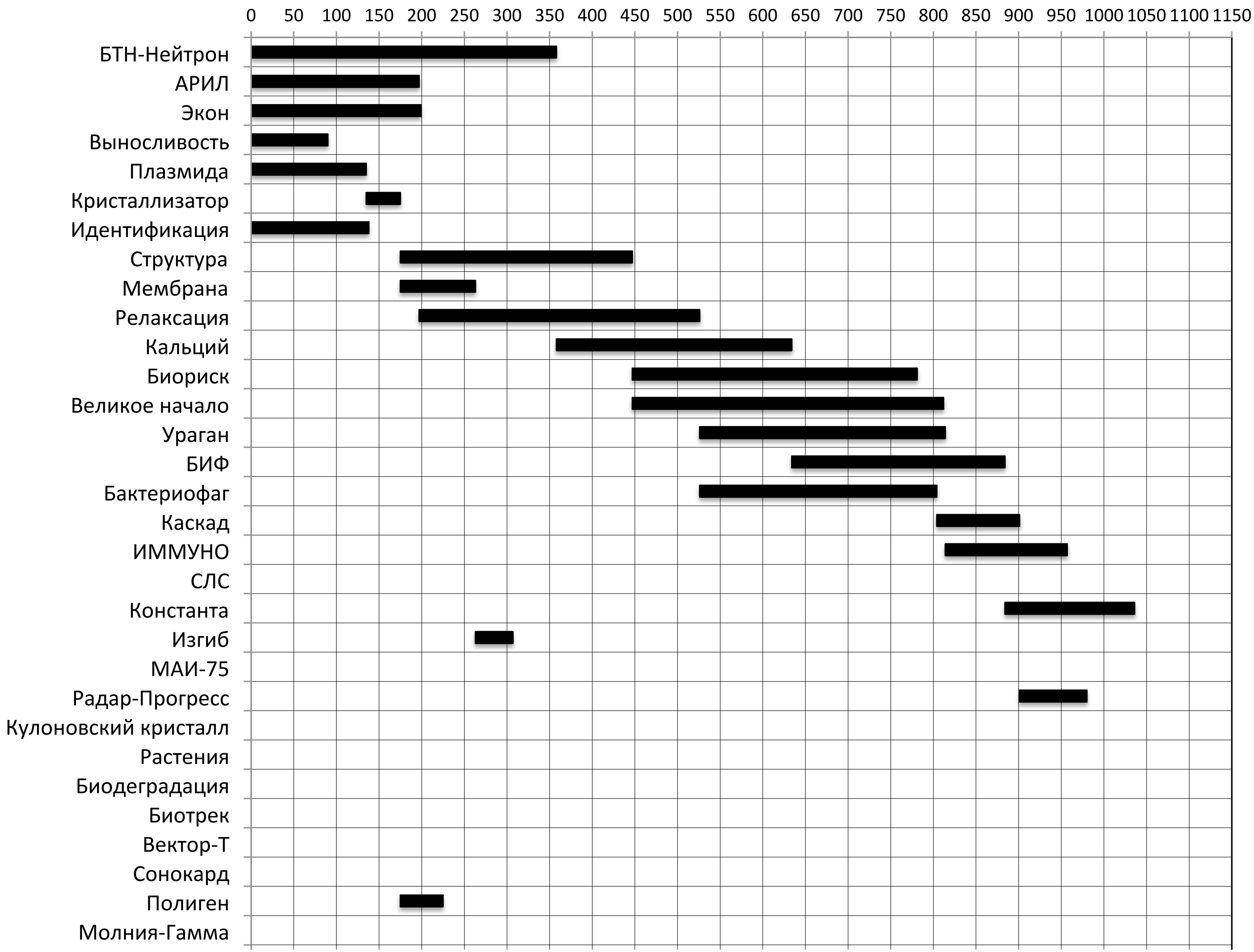
$$\sum_{j=1}^{J} x_j f_j (t - t_j) v_{jl} \le V_l, (l=1,2,\dots,L;\ t=1,2,\dots,T),$$

$$t_j \ge \max_s \{ t_{ps[j,s]} + \tau_{ps[j,s]} \}, \ (j=1, 2,\dots, J),$$

$$x_j \le t_j \le T x_j - \tau_j, \qquad (j=1, 2,\dots, J),$$

$$x_j = 0 \text{ или } 1, \ (j=1, 2,\dots, J).$$

Диаграмма Ганта



Экспоненциальная сложность на практике

- Некоторые задачи имеют экспоненциальную сложность, но это сложность для *наихудшего* случая
- Во многих практических задачах эта сложность не проявляется
- Проблема – нет способа спрогнозировать как поведет себя экспоненциальный алгоритм на тех или иных данных

Где решать задачи

Пакеты

- SCIP
- IBM ILOG
- GAMS
- FRODO
- GUROBI

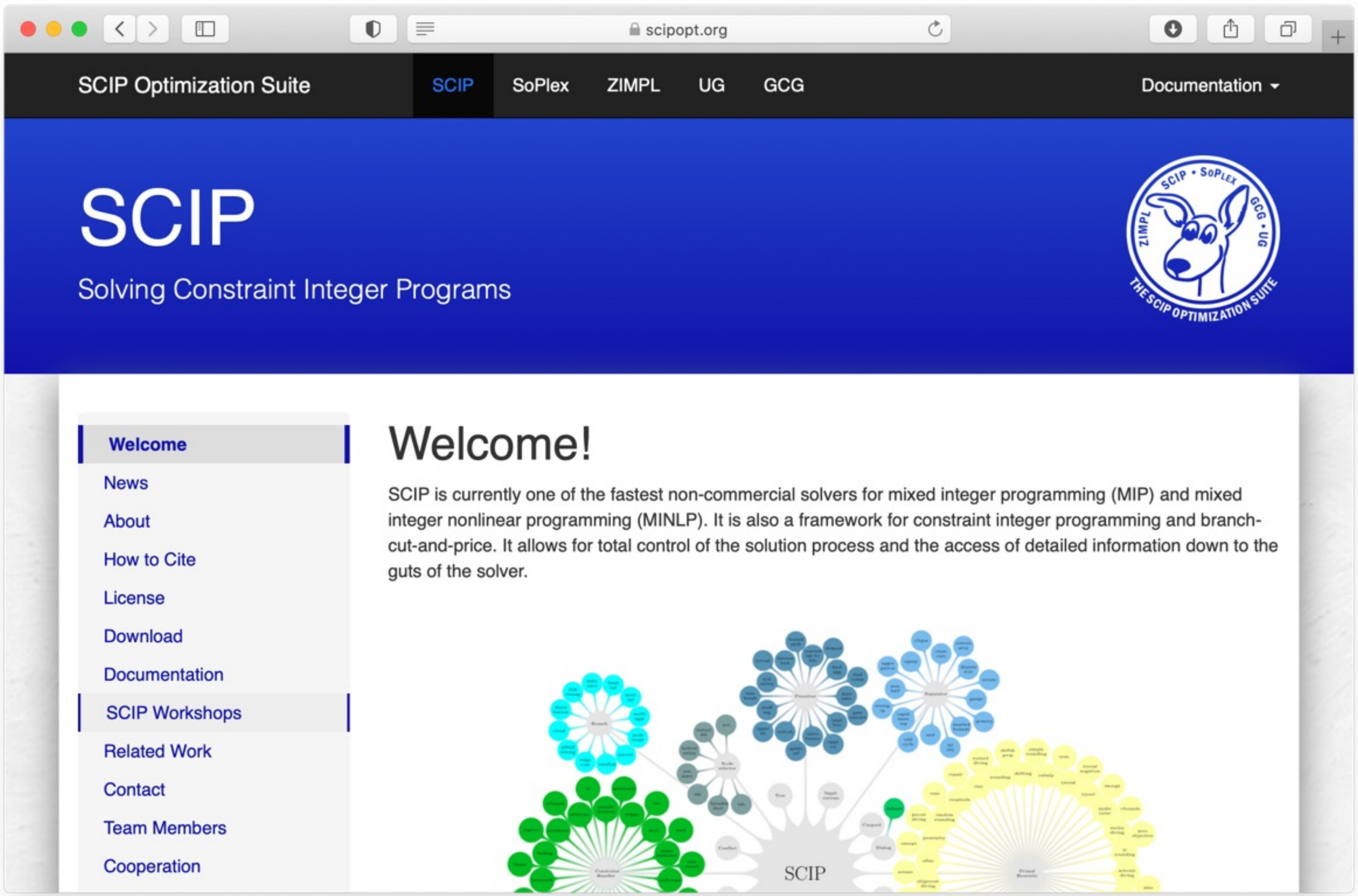
Языки/Форматы

- AMPL
- MPS

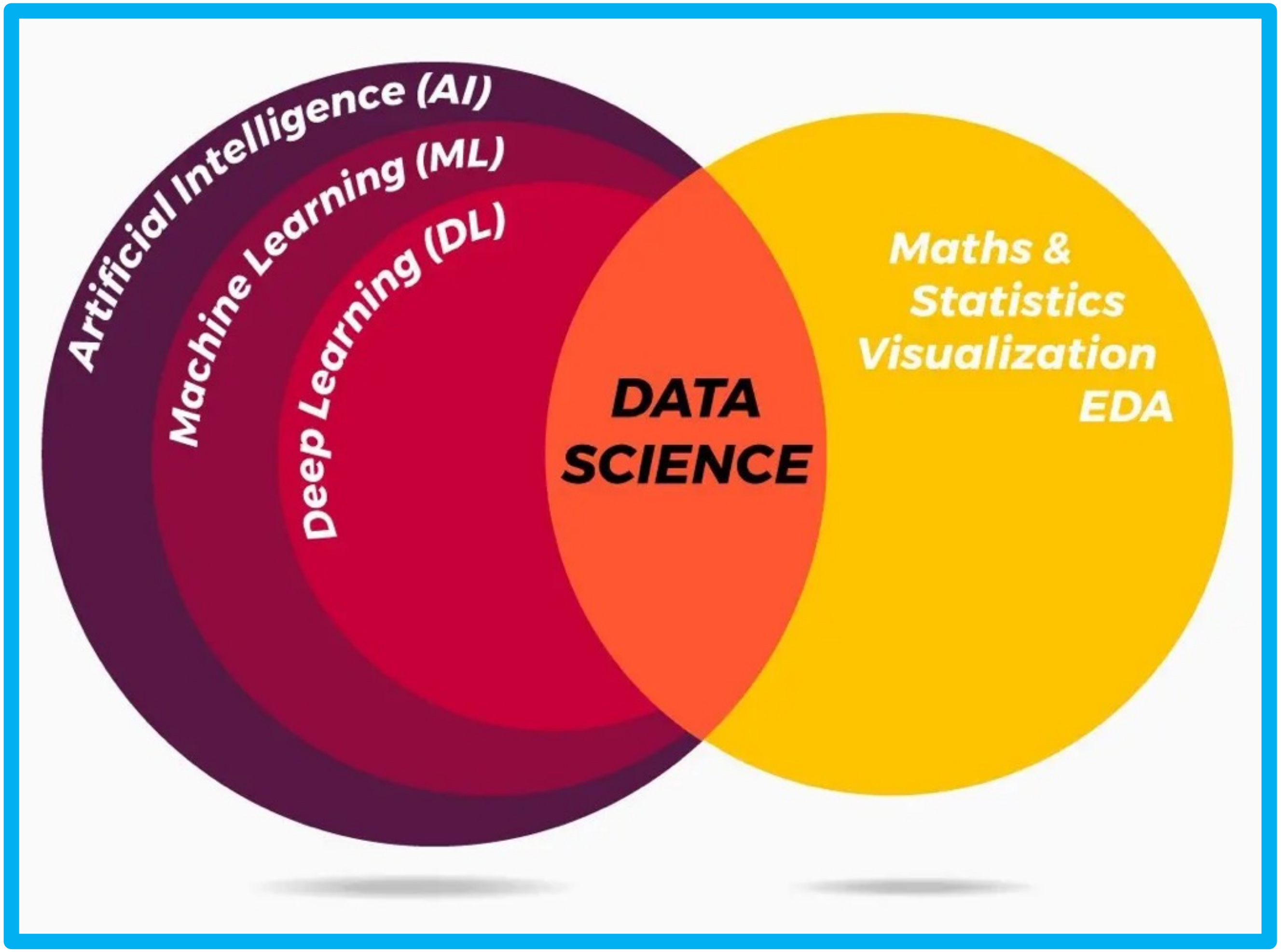
Современные средства решения задач оптимизации

- AMPL - A Modeling Language for Mathematical Programming — язык моделирования для математического программирования
- GAMS - General Algebraic Modeling System – система моделирования для математического программирования и оптимизации
- JULIA - высокоуровневый высокопроизводительный свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений.
- ILOG CPLEX - это решение, предназначенное для быстрой разработки и развертывания моделей математического программирования и программирования в ограничениях. Сочетает в себе полнофункциональную интегрированную среду разработки с поддержкой языка OPL и высокопроизводительные модули решений CPLEX и CP Optimizer.
- SCIP - один из самых быстрых некоммерческих решателей для смешанного целочисленного программирования (MIP) и смешанного целочисленного нелинейного программирования (MINLP).

SCIP

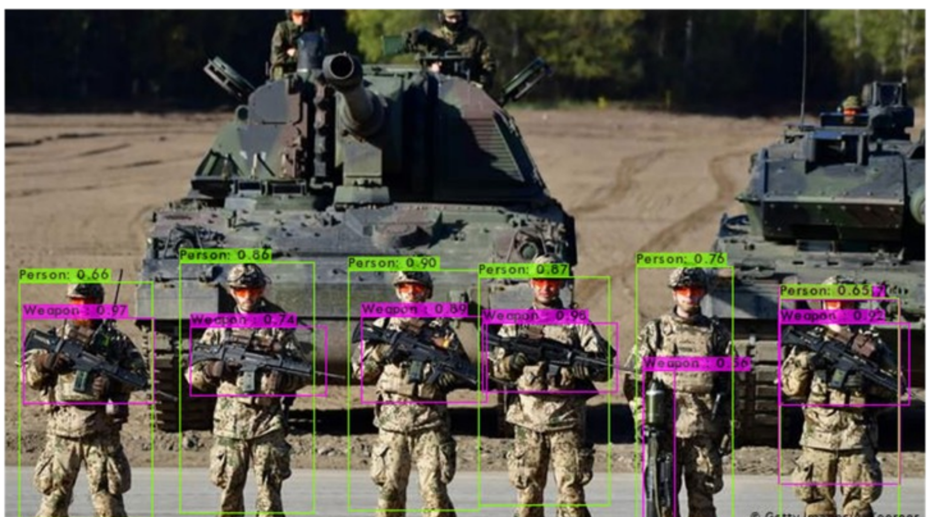

scipopt.org
SCIP Optimization Suite
SCIP
SoPlex
ZIMPL
UG
GCG
Documentation
SCIP
Solving Constraint Integer Programs
SCIP • SoPlex
GCG • UG
ZIMPL
THE SCIP OPTIMIZATION SUITE
Welcome
News
About
How to Cite
License
Download
Documentation
SCIP Workshops
Related Work
Contact
Team Members
Cooperation
Welcome!
SCIP is currently one of the fastest non-commercial solvers for mixed integer programming (MIP) and mixed integer nonlinear programming (MINLP). It is also a framework for constraint integer programming and branch-cut-and-price. It allows for total control of the solution process and the access of detailed information down to the guts of the solver.
SCIP

Взаимосвязи между науками



Некоторые популярные на сегодня задачи ИИ

- Обработка естественного языка (NLP), в том числе аннотирование научной-технической информации
- Анализ изображений



Машинное обучение. Определение

- Машинное обучение (англ. machine learning, ML) — это исследование компьютерных алгоритмов, которые автоматически улучшаются благодаря опыту и использованию данных.
- Алгоритмы машинного обучения создают модель на основе выборочных данных, известных как «обучающие данные», чтобы делать прогнозы или предлагать решения, не будучи явно запрограммированными на это.

Вопрос для обсуждения

Многие методы Data Science и Machine Learning появились достаточно давно - 50-70 года прошлого века, но активно использоваться в бизнесе начали только сейчас

С чем это связано?

Что такого случилось?

Что есть сейчас и чего не было тогда?

Машинное обучение

- Машинное обучение (англ. machine learning, ML) — это исследование компьютерных алгоритмов, которые автоматически улучшаются благодаря опыту и использованию данных
- Алгоритмы машинного обучения создают модель на основе выборочных данных, известных как «обучающие данные», чтобы делать прогнозы или предлагать решения, не будучи явно запрограммированными на это

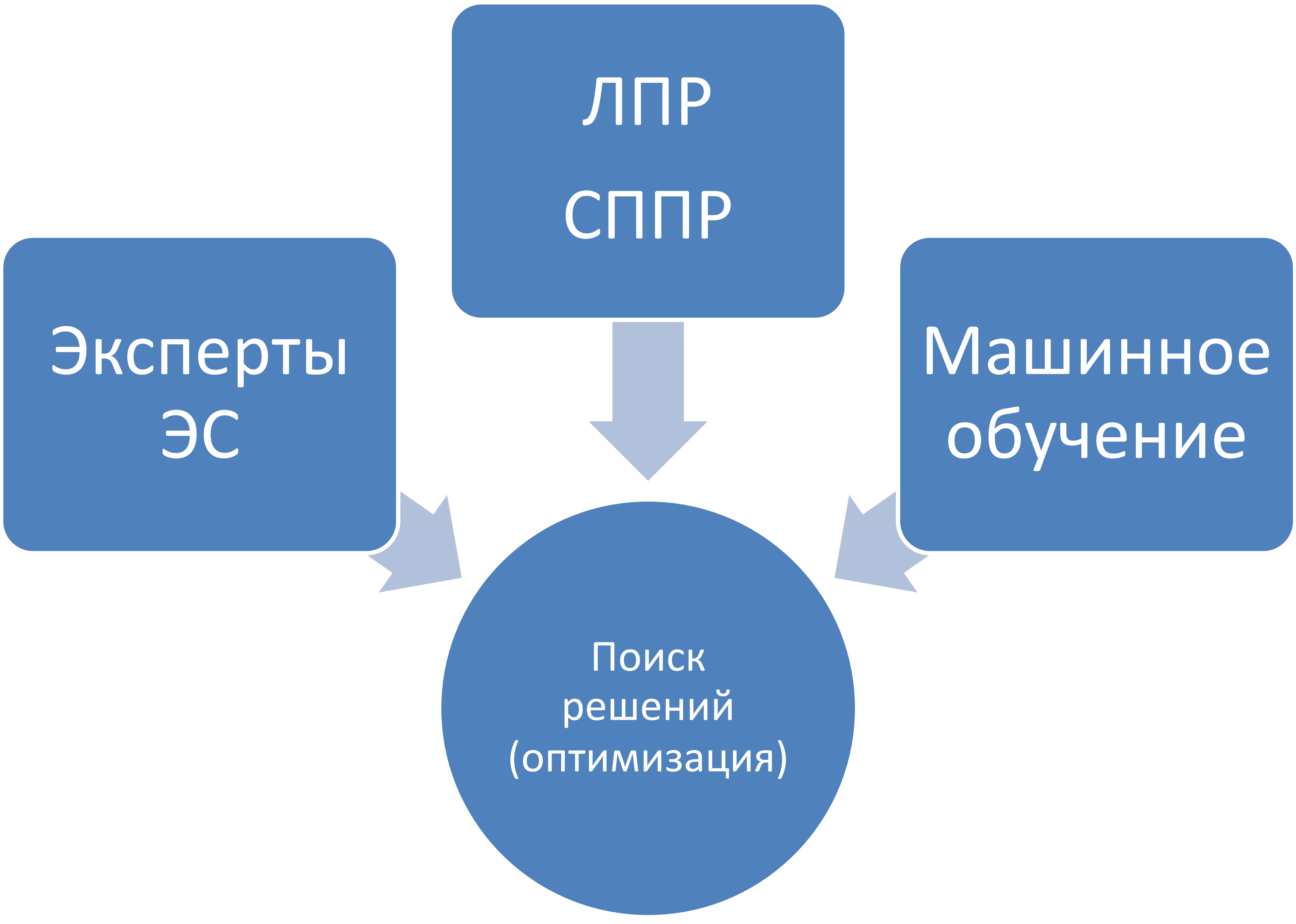
Давайте подумаем про цели

- Зачем мы учим машины? Например, получить прогноз продаж
- Какие у разработчика моделей?
- А какие цели у бизнеса?

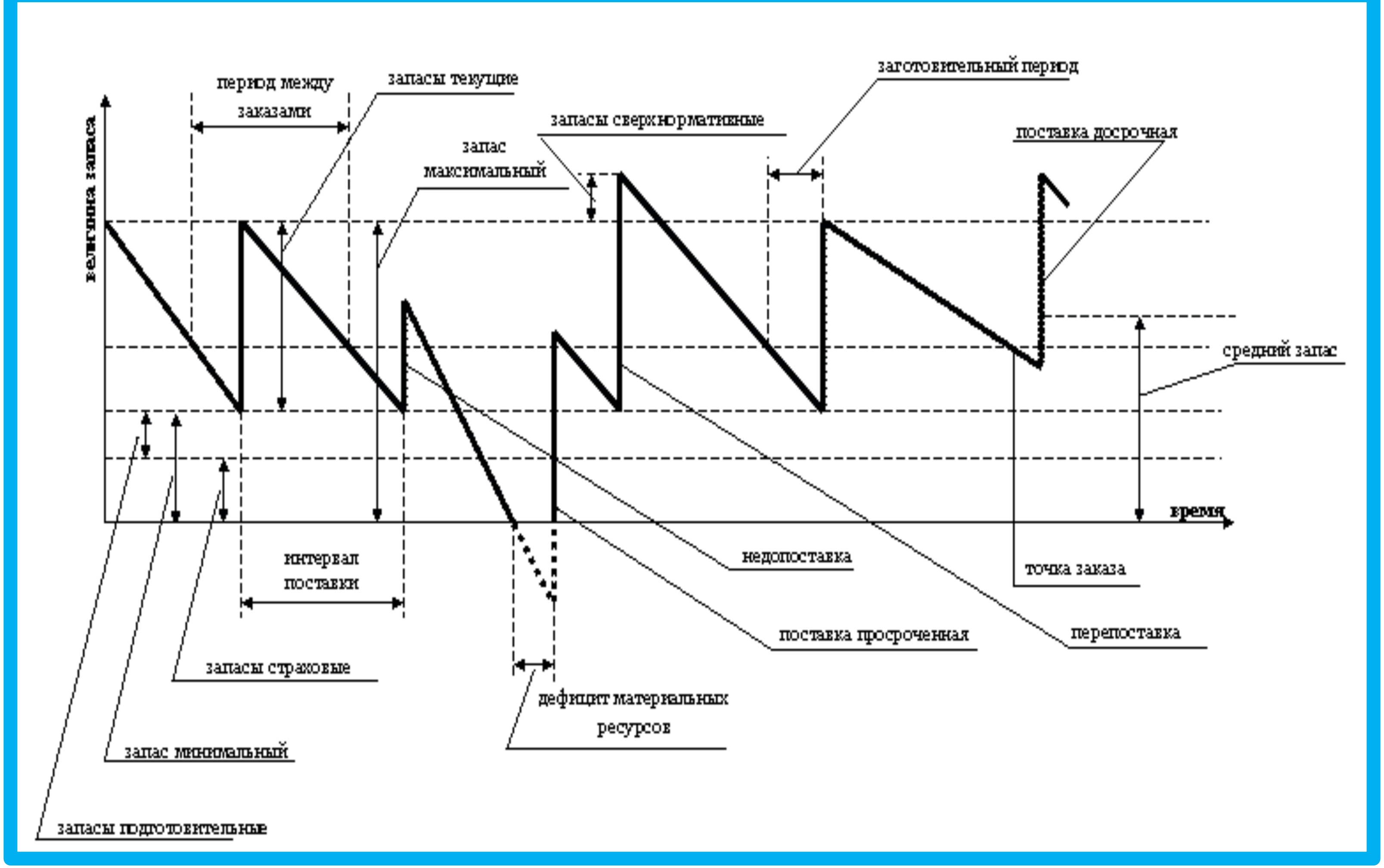
Цели

- Прибыль (часто важность не велика в краткосрочной перспективе)
- Доля рынка (важность велика)
- Сделать людей счастливыми
- Прославится
- Обеспечить долгую, стабильную жизнь компании
- Не знаю....

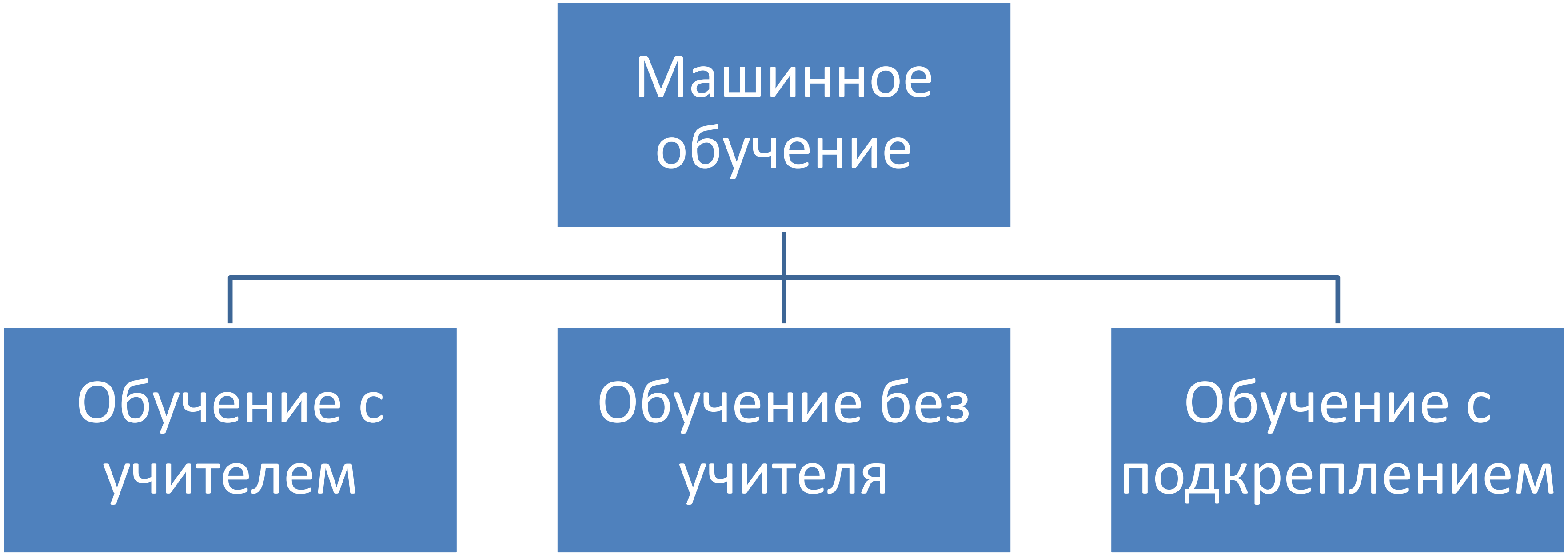
Подходы ИИ


ЛПР
СППР
Эксперты
ЭС
Машинное обучение
Поиск решений (оптимизация)

Пример из бизнеса FMCG



Машинное обучение



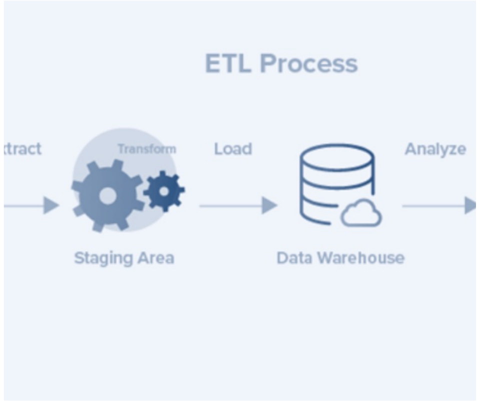
Задачи машинного обучения

- Регрессия
- Классификация
- Ранжирование
- Кластеризация
- Понижение размерности

Итоги

Нужно справиться с тремя сложностями:

Критерии и цели не определены



Нет данных

Пространство поиска решений колоссально – даже суперкомпьютер не справится

Методы машинного обучения с учителем

Дано

Множество объектов X.
Множество допустимых ответов Y.
Целевая функция (target function) $y^* : X \to Y$, значения которой $y_i = y^*(x_i)$ известны только на конечном подмножестве объектов $\{x_1, . . . , x_l\} \subset X$.
Пары «объект– ответ» (x_i, y_i) называются прецедентами.
Совокупность пар $X^l = (x_i, y_i)^l_{i=1}$ называется обучающей выборкой (training sample).

Требуется найти

зависимость y^* по выборке X^l, то есть построить решающую функцию (decision function)

$$a: X \to Y,$$

которая приближала бы целевую функцию $y^*(x)$, причём не только на объектах обучающей выборки, но и на всём множестве X.

Решающая функция a должна допускать эффективную компьютерную реализацию.

Типы задач

Задача регрессии – прогноз на основе выборки объектов с различными признаками. На выходе - вещественное число (2, 35, 76.454 и др.). Например, цена квартиры, стоимость ценной бумаги через неделю, ожидаемый доход магазина на следующий месяц, качество вина. Множество Y – бесконечное.

Задача классификации – получение категориального ответа на основе набора признаков. Имеет конечное количество ответов (часто, в формате «да» или «нет»): является ли изображение человеческим лицом, давать ли клиенту кредит, к какой категории отнести товар. Множество Y – конечное.

Пример задачи

Вход *X*:

4, 8, 9, 26

Выход *Y*:

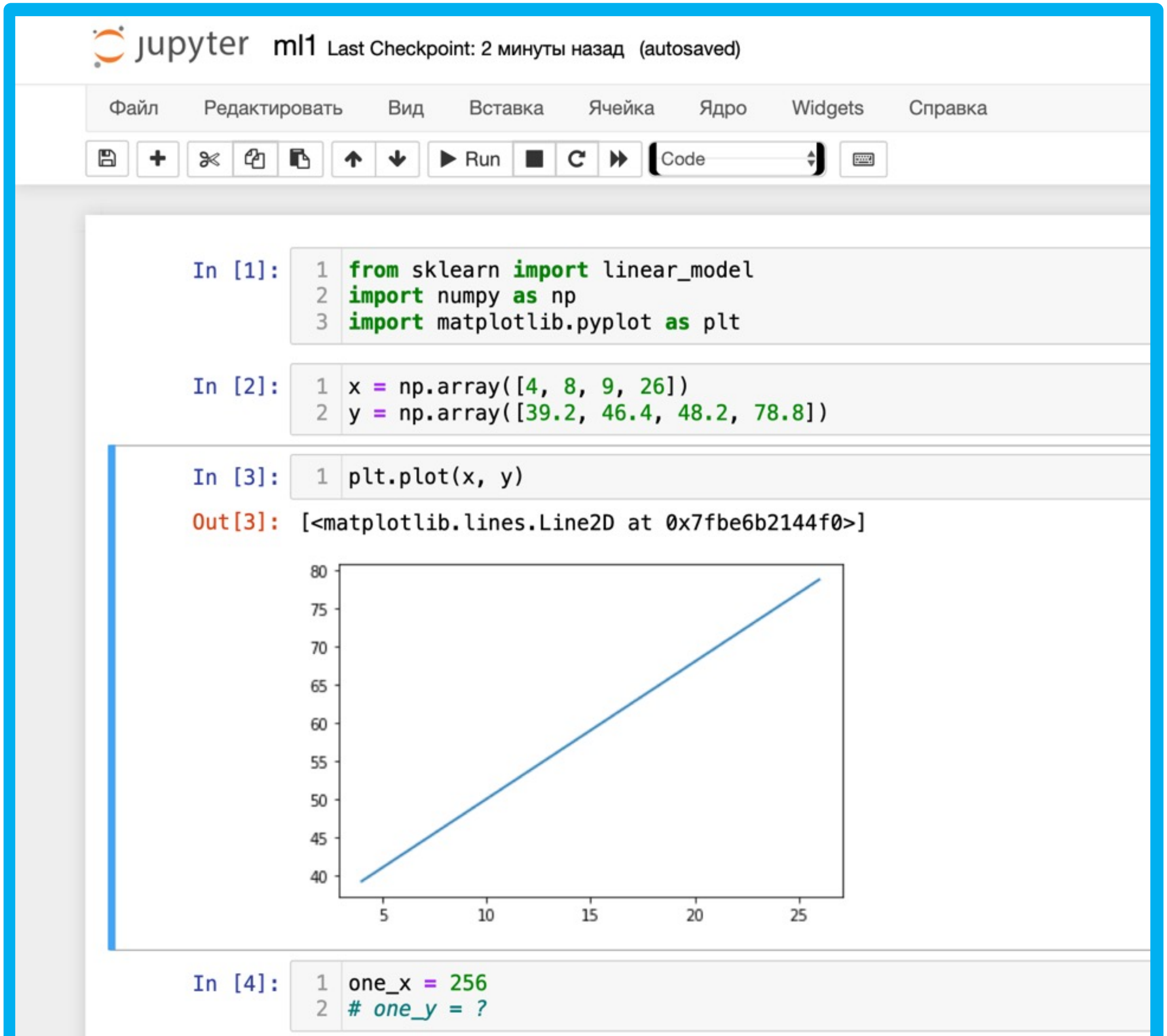
39.2, 46.4, 48.2, 78.8

Задача:

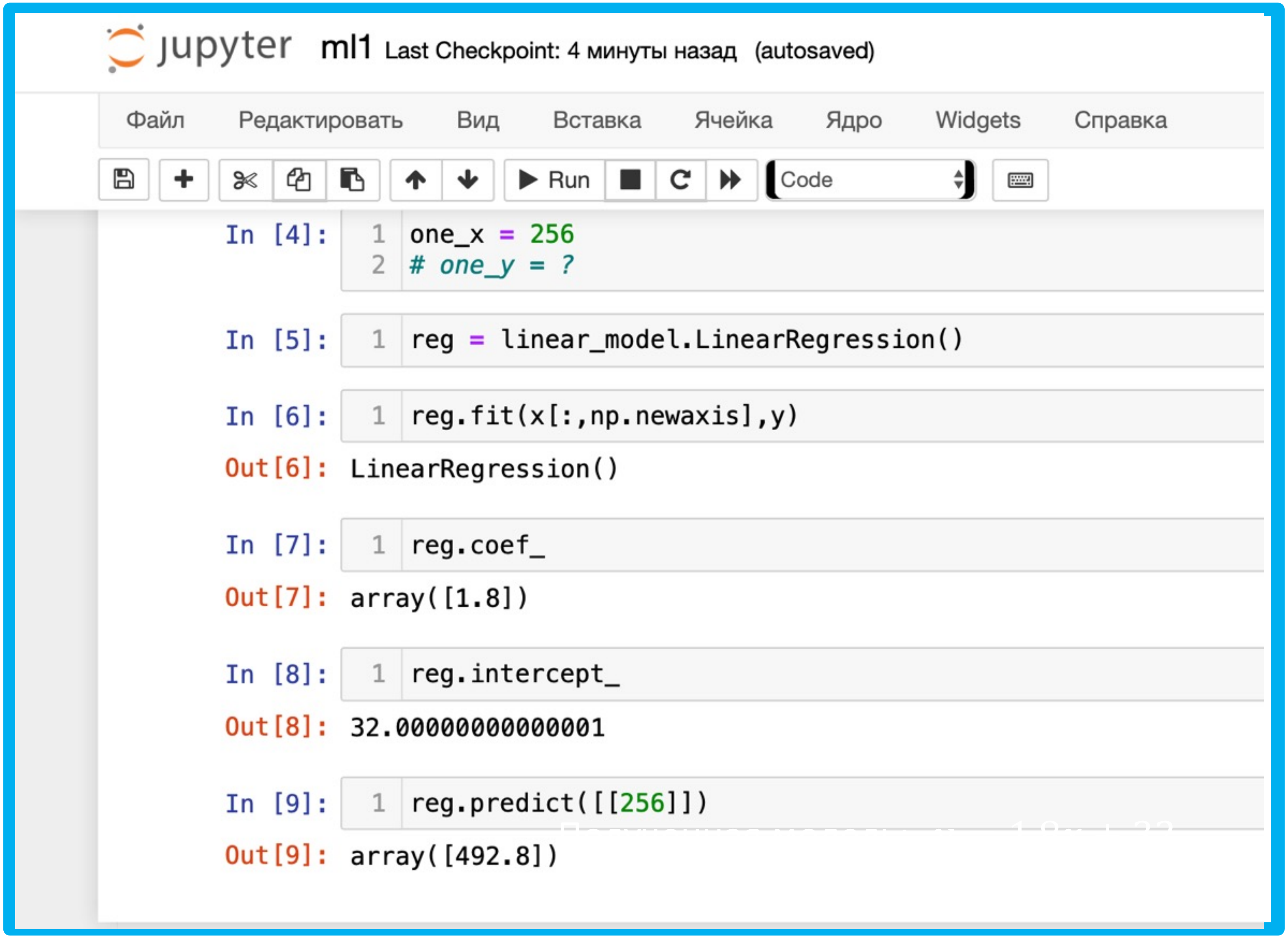
Если $x = 256$,

то чему равен y?

Подготовка к решению



Решение в scikit-learn



Математическая постановка

Дана обучающая выборка: $X^l = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{l}$

x_i – вектор размерности n.

Необходимо построить такую функцию:

$$a(x, w) = \sum_{j=1}^{n} w_j f_j(x_j)$$

Для поиска w используем метод наименьших квадратов:

$$\min_w \sum_{i=1}^{l} (a(x_i, w) - y_i)^2$$

Вопросы для контроля

Мы начали с простейшей модели:

$$y = 1.8x + 32$$

А как в формуле общего вида

$$y = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

Отразить свободный член 32?

А можно ли используя линейную регрессию получить квадратичную модель вида:

$$y = ax^2 + bx + c\ ?$$

Как оценить качество решения?

Перед началом обучения выборку разбивают на обучающую и тестовую.

Качество следует оценить на тестовой выборке.

Меры качества:

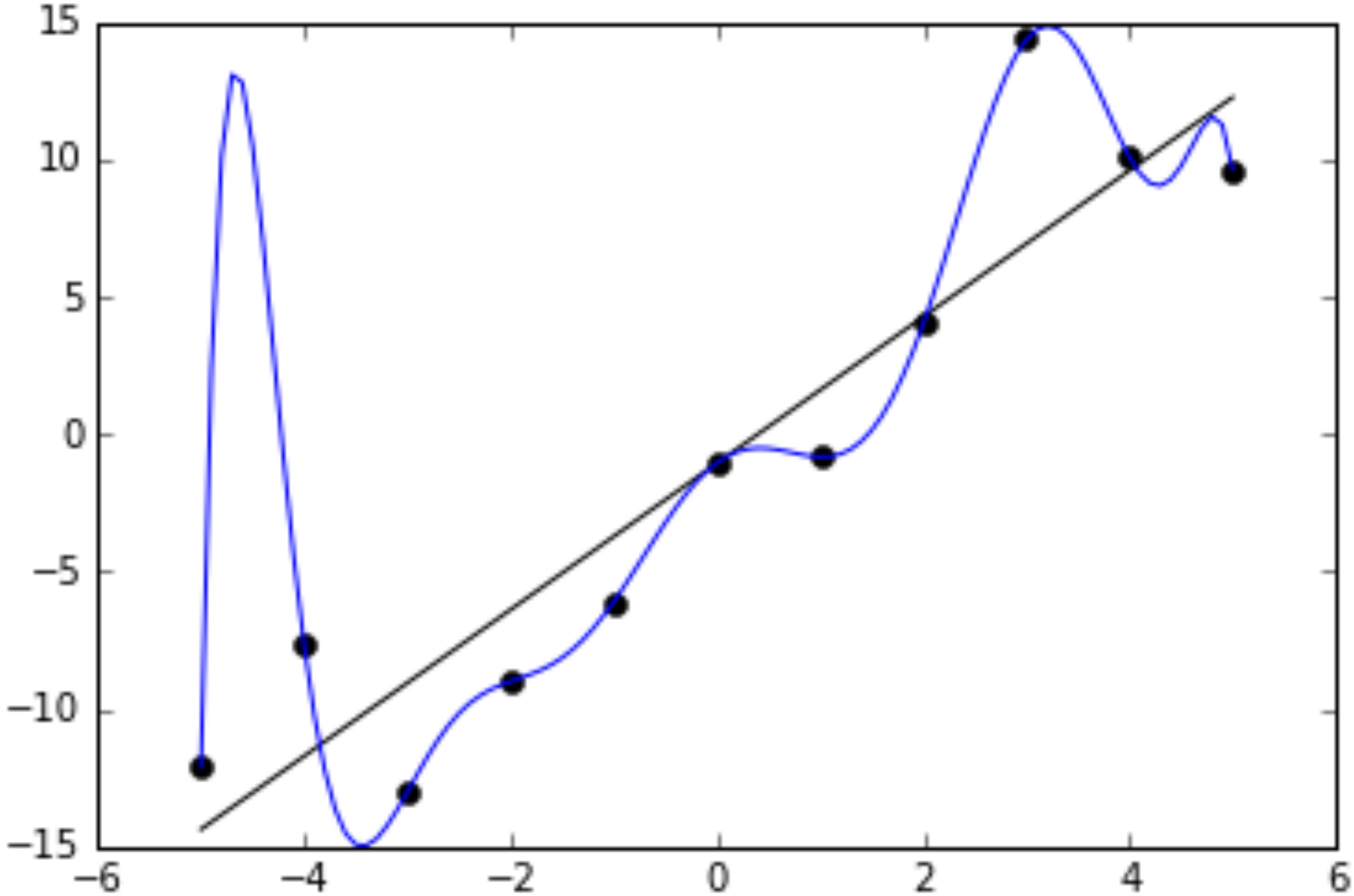
Средняя квадратичная ошибка (англ. Mean Squared Error, MSE).

Средняя абсолютная ошибка (англ. Mean Absolute Error, MAE).

Коэффициент детерминации (R^2). Коэффициент детерминации измеряет долю дисперсии, объясненную моделью, в общей дисперсии целевой переменной. Если она близка к единице, то модель хорошо объясняет данные, если же она близка к нулю, то прогнозы сопоставимы по качеству с константным предсказанием.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(a(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

Переобучение



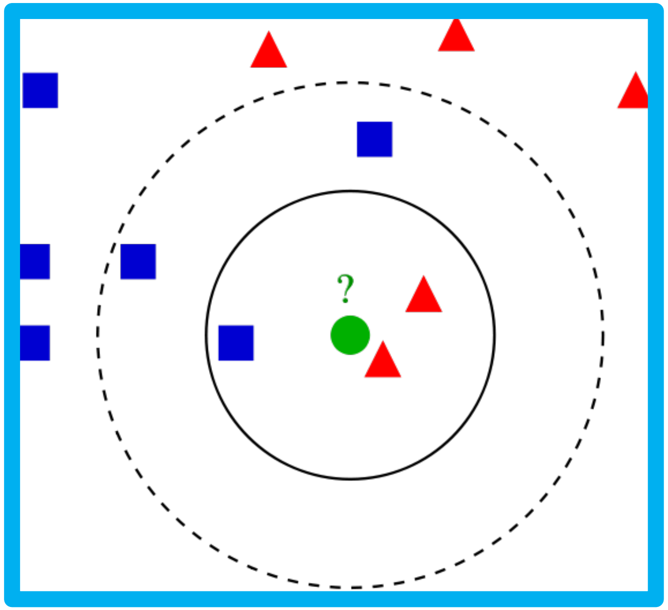
Метод ближайших соседей

Правило классификации: объект принадлежит тому же классу что и его k-ближайший соседей.

Близость определяется в пространстве признаков.

Для применения метода необходимо решить задачи:

- нормализация признаков,
- выбор метрики,
- выбор k.



Оценка качества классификации

Пусть есть два класса Y={0,1}. Пусть банк использует систему классификации заёмщиков на кредитоспособных и некредитоспособных. Обнаружение некредитоспособного заёмщика (y=1) можно рассматривать как "сигнал тревоги", сообщающий о возможных рисках.

Возможны следующие исходы классификации:

- Некредитоспособный заёмщик классифицирован как некредитоспособный, т.е. положительный класс распознан как положительный (True Positive — TP).
- Кредитоспособный заёмщик классифицирован как кредитоспособный, т.е. отрицательный класс распознан как отрицательный. (True Negative — TN).
- Кредитоспособный заёмщик классифицирован как некредитоспособный, т.е. имела место ошибка, в результате которой отрицательный класс был распознан как положительный (False Positive — FP) – это ошибка I рода (ложная тревога).
- Некредитоспособный заёмщик распознан как кредитоспособный, т.е. имела место ошибка, в результате которой положительный класс был распознан как отрицательный (False Negative — FN) – это ошибка II рода (пропуск цели).

Метрики качества классификации

Аккуратность (англ. Accuracy) – доля правильных ответов. Бесполезна в задачах с неравными классами.

Точность (англ. Precision) - доля правильных ответов модели в пределах класса:

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}$$

Полнота (англ. Recall) - это доля истинно положительных классификаций:

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

F-мера (англ. F-score) – гармоническое среднее между точностью и полнотой.

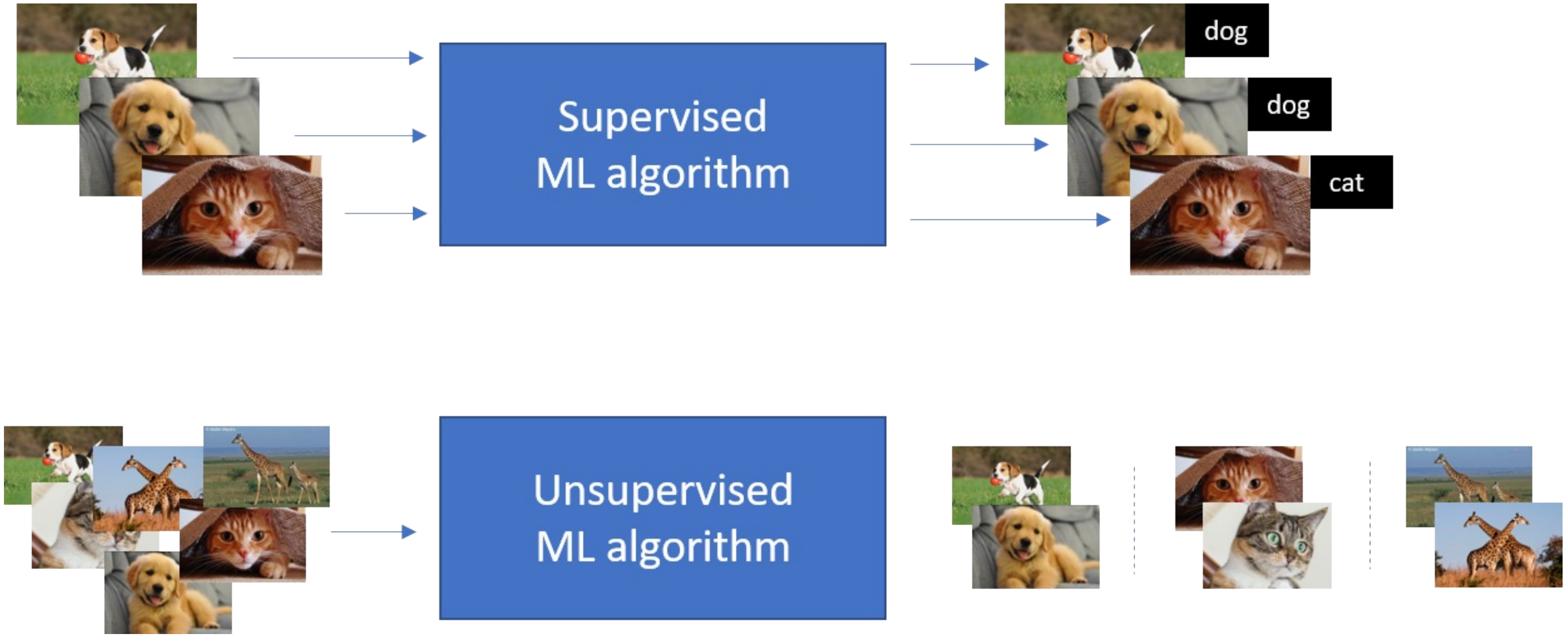
Итоги

- Машинное обучение с учителем решает задачи регрессии и классификации
- Нужно сформировать обучающую и проверочную выборки
- Визуализируйте данные, выбирайте признаки
- Оценивайте метрики результата
- Совершенствуйте модели

Методы машинного обучения без учителя

Отличия

Обучение с учителем (supervised) vs
Обучение без учителя (unsupervised)



Задачи и приложения

- Задачи кластеризации
- Задачи обобщения
- Задачи обнаружения аномалий
- Задачи поиска правил ассоциации
- Задачи сокращения размерности

- Маркетинговые исследования: разбиение множества всех клиентов на кластеры для выявления типичных предпочтений.
- Анализ рыночных корзин: выявление сочетаний товаров, часто встречающихся вместе в покупках клиентов.

Метод k-средних

Задача: разбить выборку на кластеры

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$$

Метод стремится минимизировать суммарное квадратичное отклонение точек кластеров от центров этих кластеров:

$$\arg\min_S \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in S_i} (x - \mu_i)^2$$

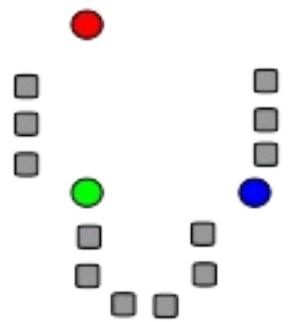
μ_i - центр кластера S_i.

Алгоритм k-средних

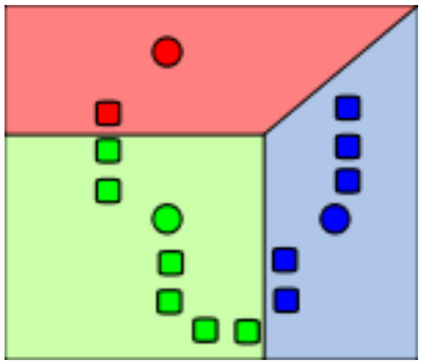
1. Начальные μ_i выбираются случайно.
2. Относим наблюдения к тем кластерам, чье μ_i к ним ближе всего.
3. Затем μ_i перевычисляется.
4. Если μ_i существенно изменились, то возврат к шагу 2.

Визуализация алгоритма k-средних

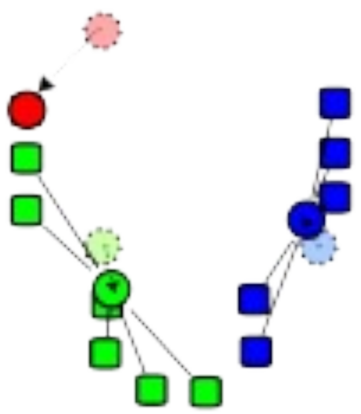
1



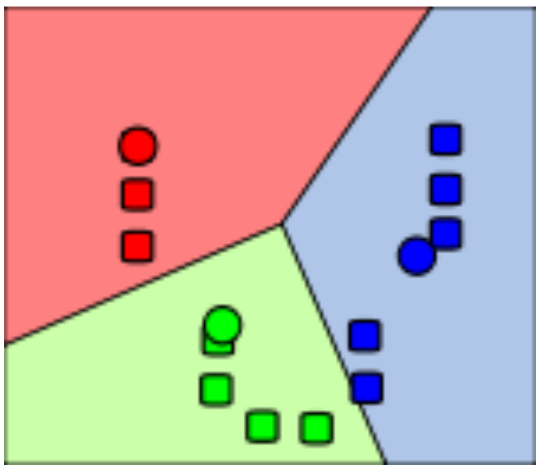
2



3



4



Пример задачи

Опасное вождение

Есть данные по трекам, скорости и ускорению
Нет (и не будет) данных о тому что такое опасное вождение
А что делать?

Кластеризация вождения

Вход модели:

- скорости и ускорения конкретных ТС по конкретным водителям
- число кластеров
- уровень иерархии объектов для прогноза

Выход модели:

- принадлежность водителя определённому кластеру

По результатам работы модели нужно:

- выбрать несколько водителей из каждого кластера – отследить насколько хорошо они водят.
- присвоить кластерам категории опасности.
- на регулярной основе информировать о попадании водителя в «опасный» кластер.

Оценка качества кластеризации

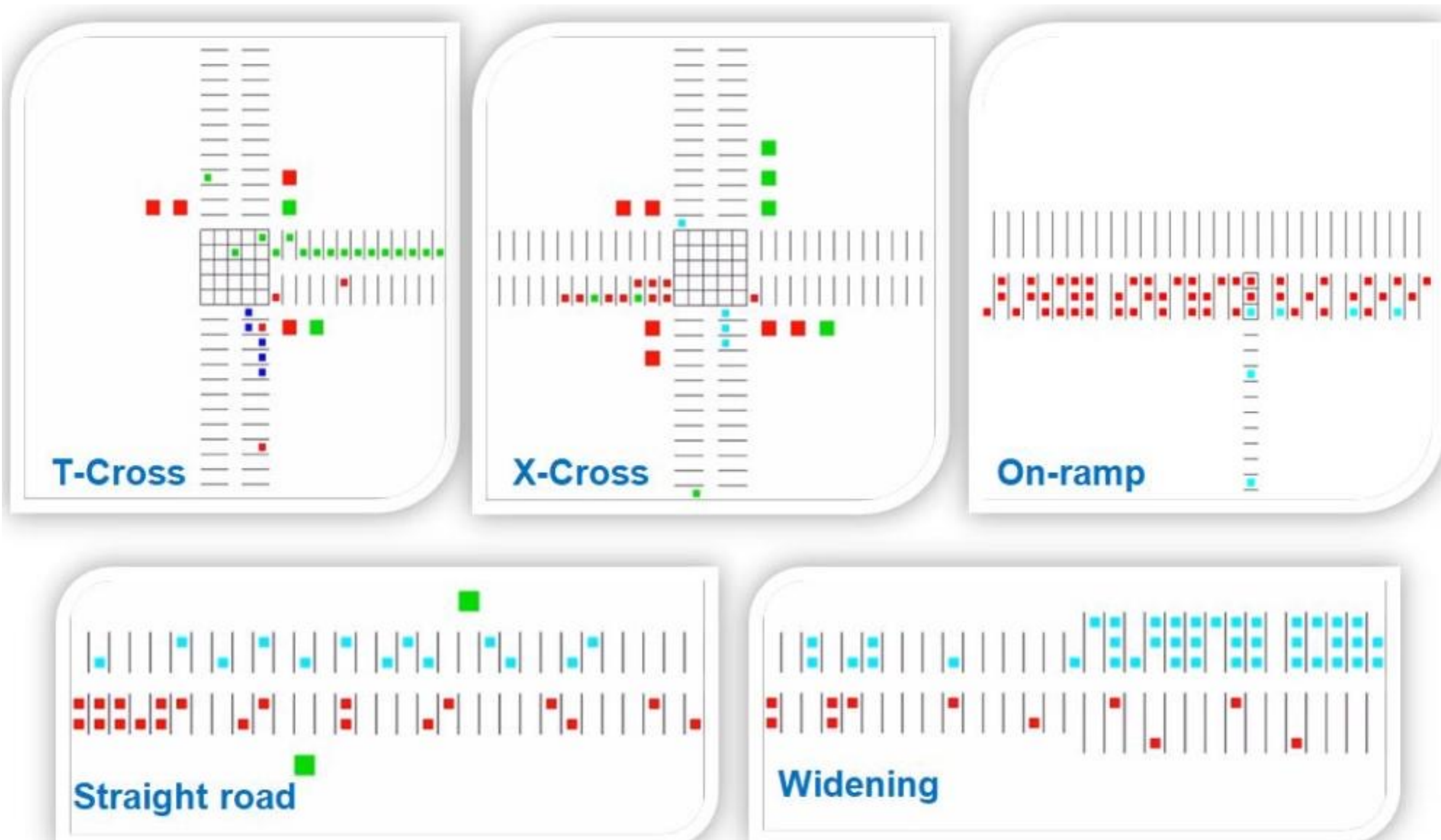
Внешние (англ. External) меры основаны на сравнении результата кластеризации с априори известным разделением на классы.

Внутренние (англ. Internal) меры отображают качество кластеризации только по информации в данных.

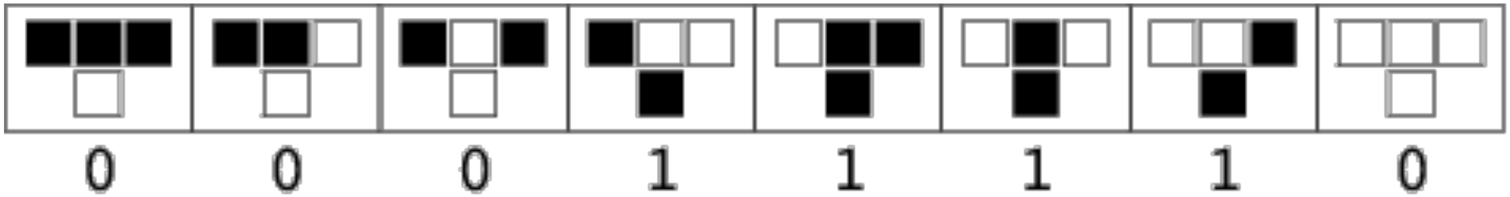
Из внутренних мер часто применяют:

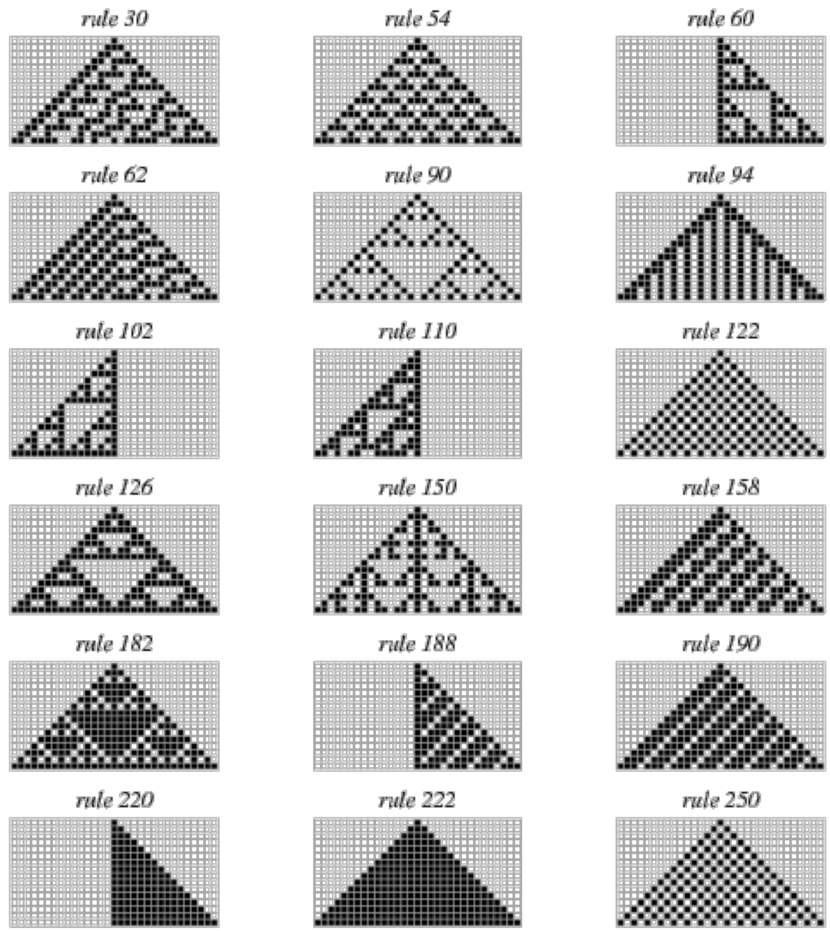
Силуэт (англ. Silhouette) – он показывает, насколько объект похож на свой кластер по сравнению с другими кластерами.

Модели клеточных автоматов



Модель Вольфрама



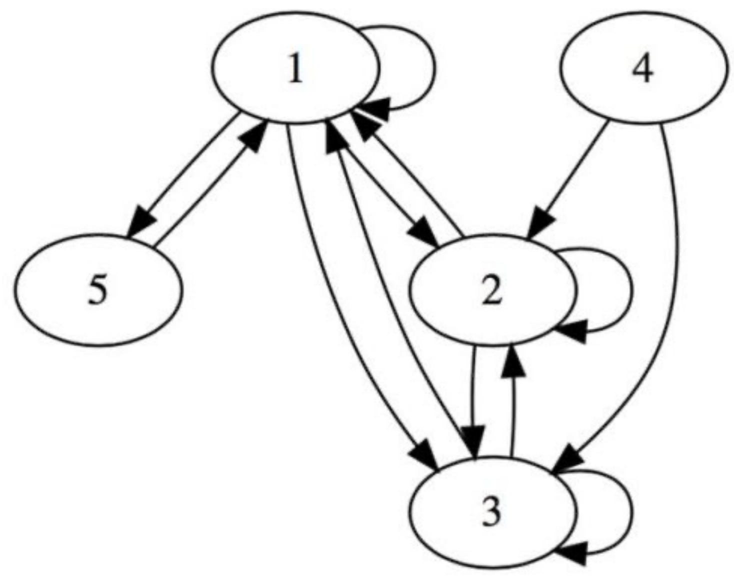


Дискретно-событийные модели

Планируемые события заносятся в список будущих событий (СБС). Его структура:

- время свершения события
- код события
- место события
- массив идентификаторов ЛА,

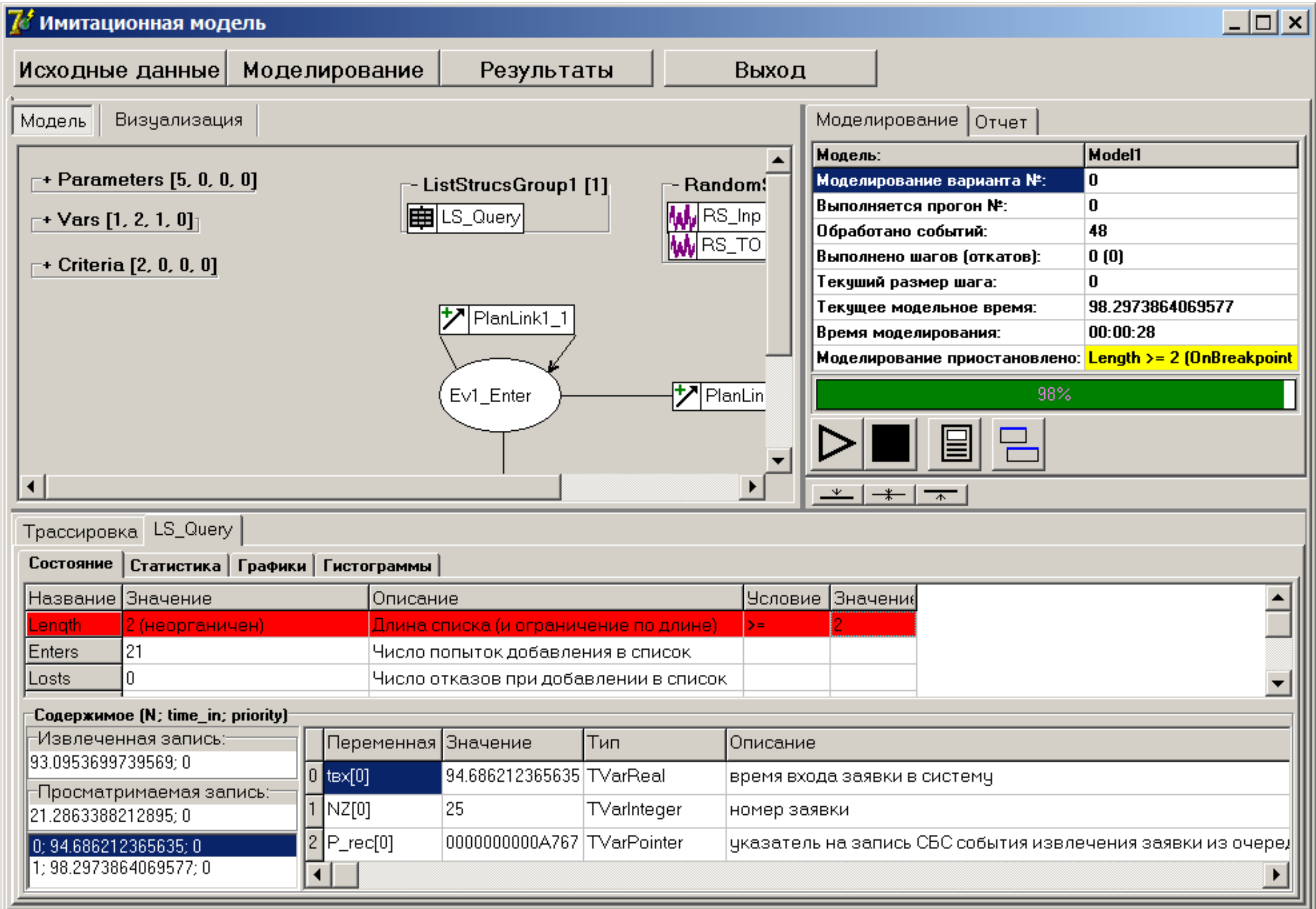
к которым относится событие.



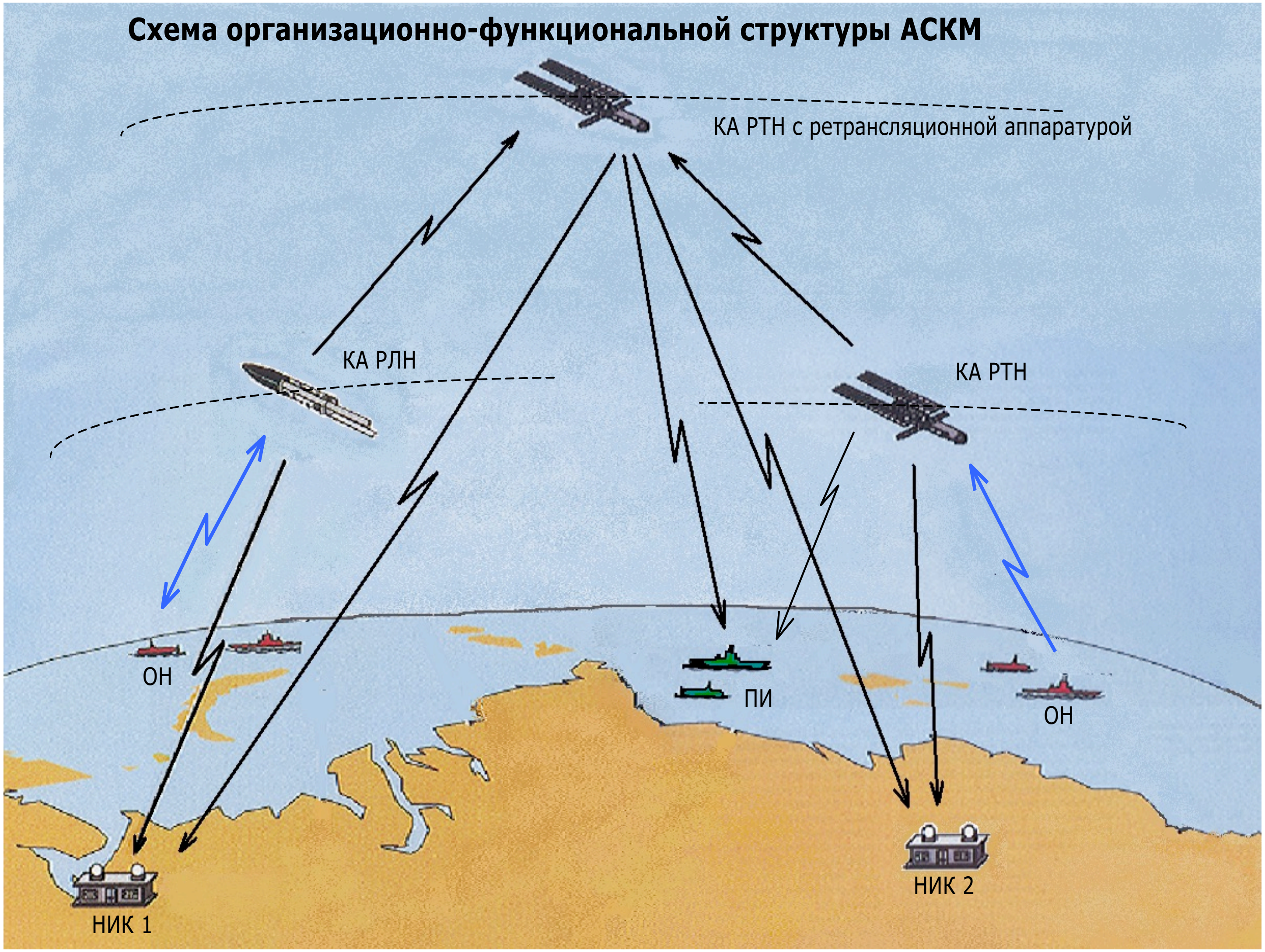
ПО:

AnyLogic, GPSS, SimPy

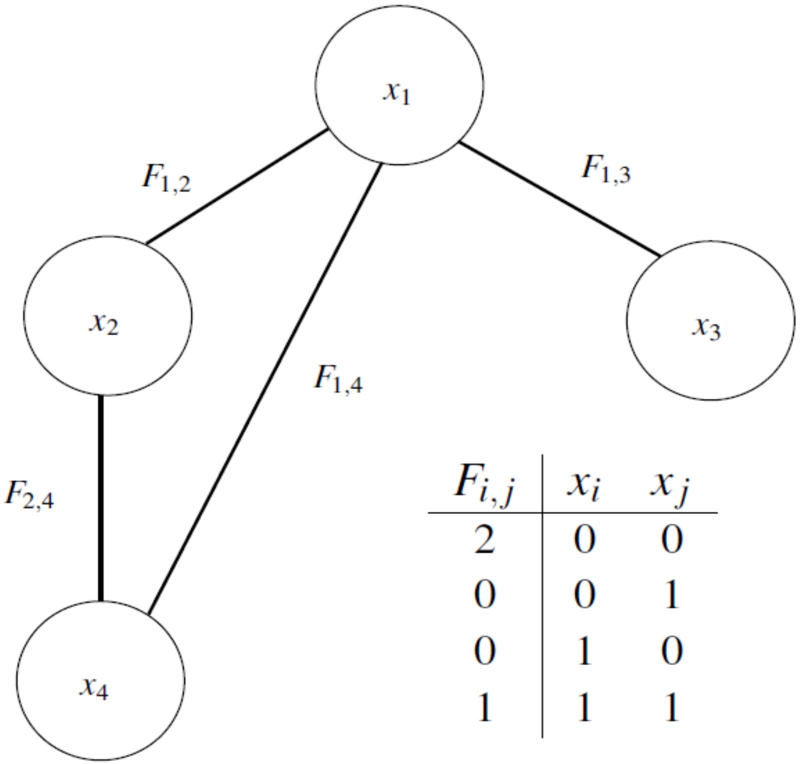
Имитационное моделирование



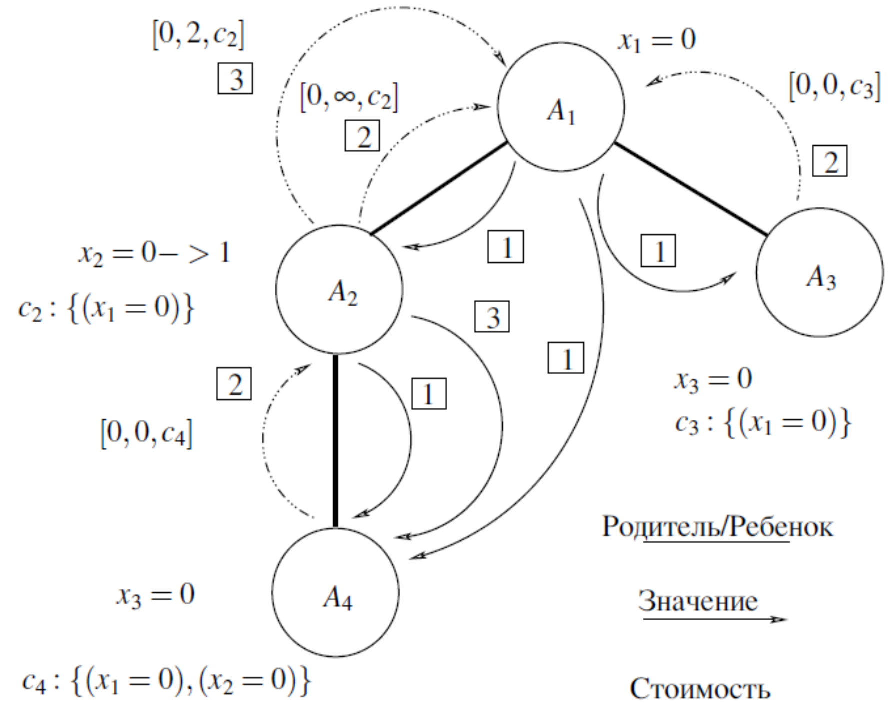
Планирование космических наблюдений



Мультиагентное моделирование в задачах DCOP



$F_{i,j}$	x_i	x_j
2	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1



Пакет pyDCOP

Многокритериальная оценка ЛА

Критерии:

Технические хар-ки
Хорошие 1
Удовл. 0.5
Неудовл. 0

Экономичность
Хорошая 1
Удовл. 0.5
Неудовл. 0

Импортозависимость
Высокая 1
Низкая 0

Альтернативы:

АН-124

ИЛ-76

Тех. хар-ки	Экономичность	Импорто-зависимость
0.25	0.8	1

Тех. хар-ки	Экономичность	Импорто-зависимость
0.5	0.35	0

Области предпочтения:

Уровень предпочтения

Значения критериев

Низкий
Тех. хар-ки: 0.5, 0
Экономичность: 0.5, 0
Импорт.: 1

Средний
Тех. хар-ки: 0.5
Экономичность: 1, 0.5
Импорт.: 1

Высокий
Тех. хар-ки: 1, 0.5
Экономичность: 1, 0.5
Импорт.: 0

Ранги:

Ранг АН-124: 0.8256

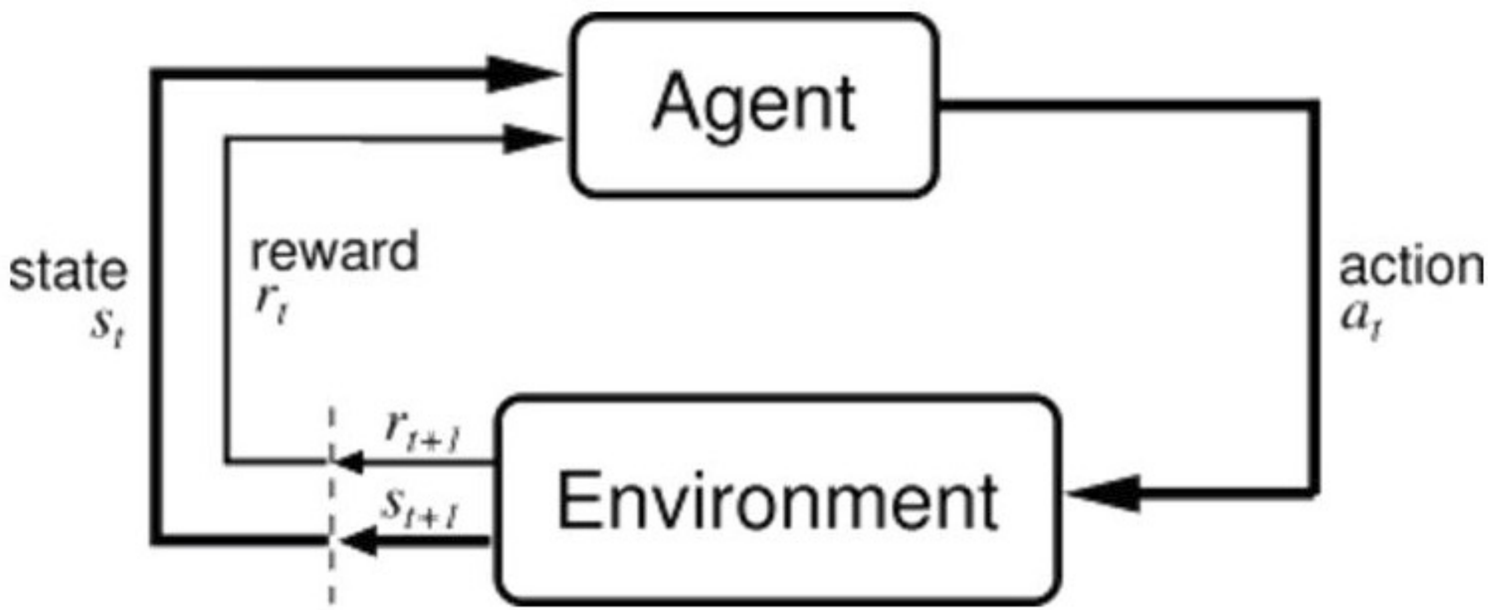
Ранг ИЛ-76: 0.3484

Обучение с подкреплением

- Обучение тому, что делать
- Как отобразить ситуации на действия, чтобы максимизировать вознаграждение
- Обучаемому не говорят, что делать
- Он должен сам понять какие действия приносят максимальное вознаграждение

Характеристики

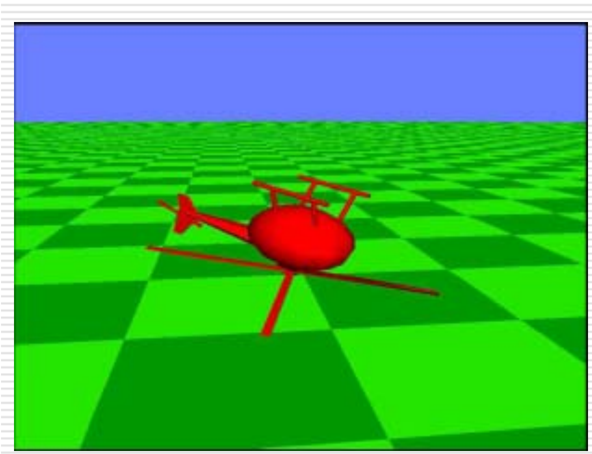
- Поиск методом проб и ошибок
- Отложенное вознаграждение

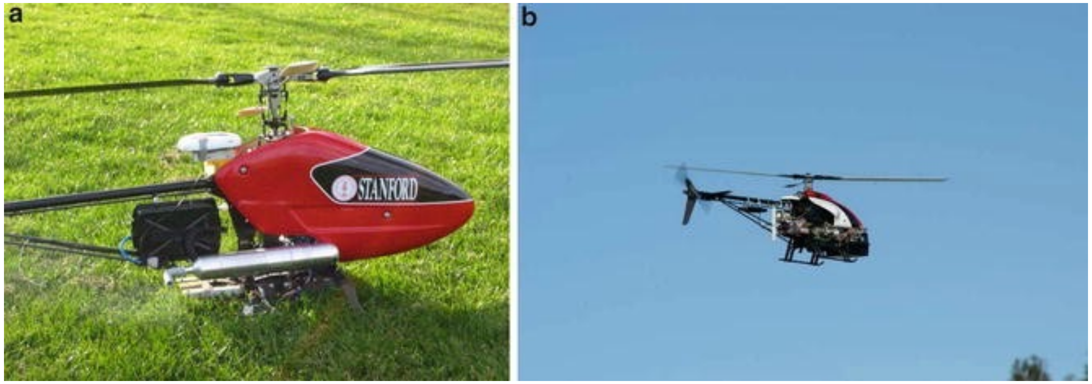


Основные понятия

- Стратегия – отображение множества состояний на действия. Могут быть стохастическими
- Сигнал вознаграждения – вознаграждение на каждом временном шаге. Цель агента – максимизировать полное вознаграждение
- Функция ценности – полное вознаграждение в будущем, если агент начнет работу в данном состоянии. Показывает, что хорошо в длительной перспективе.
- Модель – прогноз поведения среды

Обучение с подкреплением для управления вертолетами

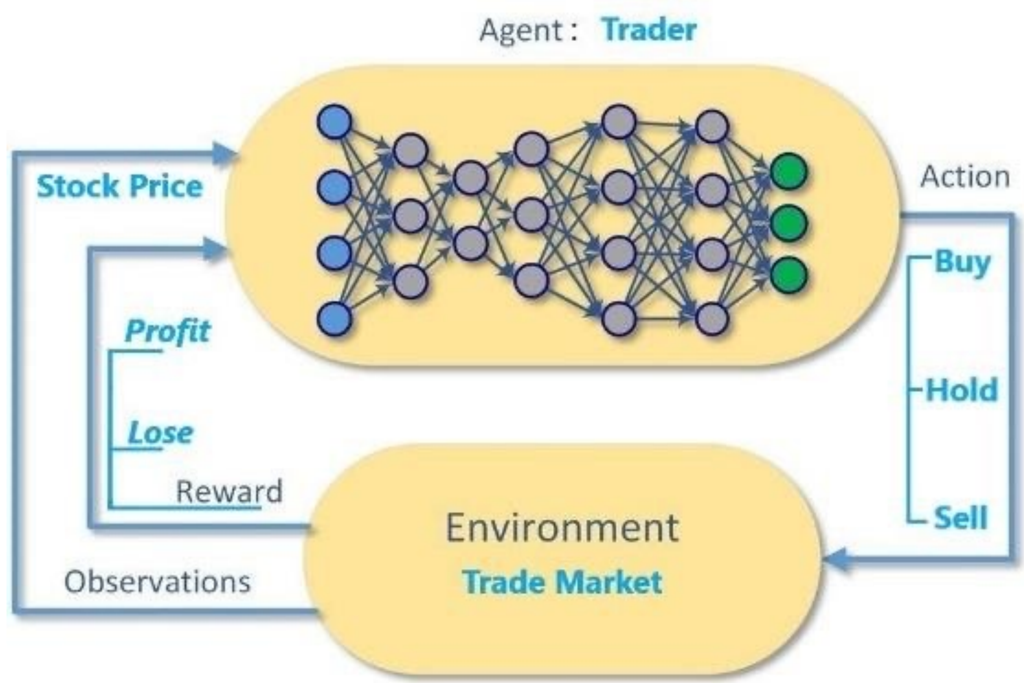




Coates A., Abbeel P., Ng A.Y. (2017) Autonomous Helicopter Flight Using Reinforcement Learning. In: Sammut C., Webb G.I. (eds) Encyclopedia of Machine Learning and Data Mining. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7687-1_16

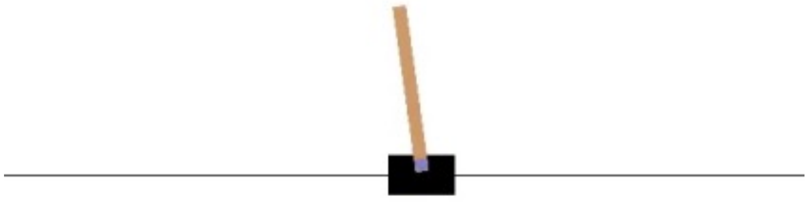
Это не только про роботов

- Задача коммивояжёра
- Портфель инвестиций



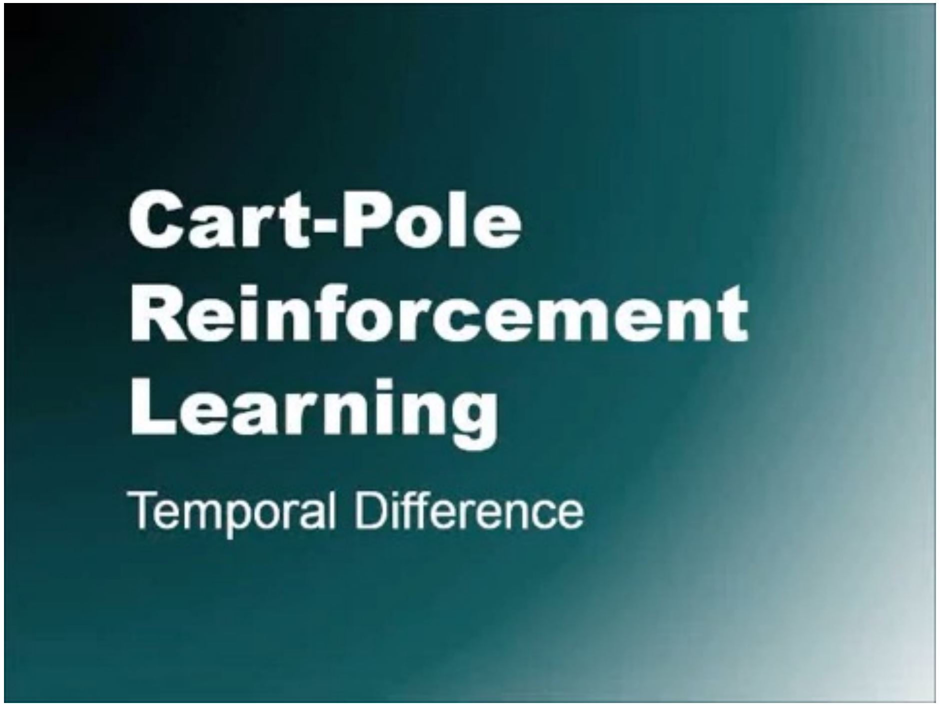
https://gymnasium.farama.org

CartPole



А как это происходит в реальности

Чем определяется состояние среды?
Каково множество действий агента?
Что в этой задаче сигнал вознаграждения?



random_agent.py

```
import gym
env = gym.make('CartPole-v0')

for i_episode in range(20):
    observation = env.reset()
    for t in range(100):
        # env.render()
        # print(observation)
        action = env.action_space.sample()
        #print(action)
        observation, reward, done, info = env.step(action)
        print(observation)
        if done:
            print("Episode finished after {} timesteps".format(t+1))
            break
env.close()
```

Задача о многоруком бандите

- Выбор одного из k действий
- Получаем вознаграждение по стационарному распределению
- Цель – максимальное вознаграждение за период

Ценность действий

$q_*(a)$ - ценность действия a:

$$q_*(a) \doteq \mathbb{E}[R_t | A_t = a]$$

A_t - действие выбранное на временном шаге t

R_t - вознаграждение на временном шаге t

Проблема: достоверно $q_*(a)$ не известно

Ищем оценку $Q_t(a)$ близкую к $q_*(a)$

Какое действие выбрать?

Жадное:

$$A_t \doteq \underset{a}{\operatorname{argmax}}\, Q_t(a)$$

Исследовательское – случайное. Оно позволяет улучшить оценку. А в перспективе и вознаграждение.

Это сложная задача

Часто распределение не стационарно

Выборочное среднее оценки ценности действий

Выборочное среднее:

$$Q_t(a) \doteq \frac{\sum_{i=1}^{t-1} R_i \mathbb{1}_{A_i=a}}{\sum_{i=1}^{t-1} \mathbb{1}_{A_i=a}}$$

По закону больших чисел $Q_t(a)$ сходится к $q_*(a)$

Реализация

$$Q_n \doteq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} R_i}{n-1}$$

Как вычислить?

Инкрементная реализация

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{n}\left(R_n + \sum_{i=1}^{n-1} R_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(R_n + (n-1)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} R_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(R_n + (n-1)Q_n\right) = Q_n + \frac{1}{n}\left(R_n - Q_n\right)$$

НоваяОценка <- СтараяОценка + РазмерШага[Цель- СтараяОценка]

Алгоритм Бандита

Initialize, for $a = 1$ to k:

$Q(a) \leftarrow 0$

$N(a) \leftarrow 0$

Loop forever:

$$A \leftarrow \begin{cases} \arg\max_a Q(a) & \text{with probability } 1 - \varepsilon \quad \text{(breaking ties randomly)} \\ \text{a random action} & \text{with probability } \varepsilon \end{cases}$$

$R \leftarrow bandit(A)$

$N(A) \leftarrow N(A) + 1$

$Q(A) \leftarrow Q(A) + \frac{1}{N(A)}\big[R - Q(A)\big]$

Нестационарная задача

Имеет смысл придавать больший вес недавним наблюдениям

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &= Q_n + \alpha(R_n - Q_n) = \alpha R_n + (1-\alpha)Q_n \\
&= \alpha R_n + (1-\alpha)[\alpha R_{n-1} + (1-\alpha)Q_{n-1}] \\
&= \alpha R_n + (1-\alpha)\alpha R_{n-1} + (1-\alpha)^2 Q_{n-1} \\
&= \alpha R_n + (1-\alpha)\alpha R_{n-1} + (1-\alpha)^2 \alpha R_{n-2} + \cdots \\
&+ (1-\alpha)^{n-1}\alpha R_1 + (1-\alpha)^n Q_1 \\
&= (1-\alpha)^n Q_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} R_i
\end{aligned}
$$

Взвешенная средняя

$$Q_{n+1} = (1-\alpha)^n Q_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} R_i$$

$$(1-\alpha)^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} = 1$$

дома доказать

Обозначим шаг: $\alpha_n(a)$

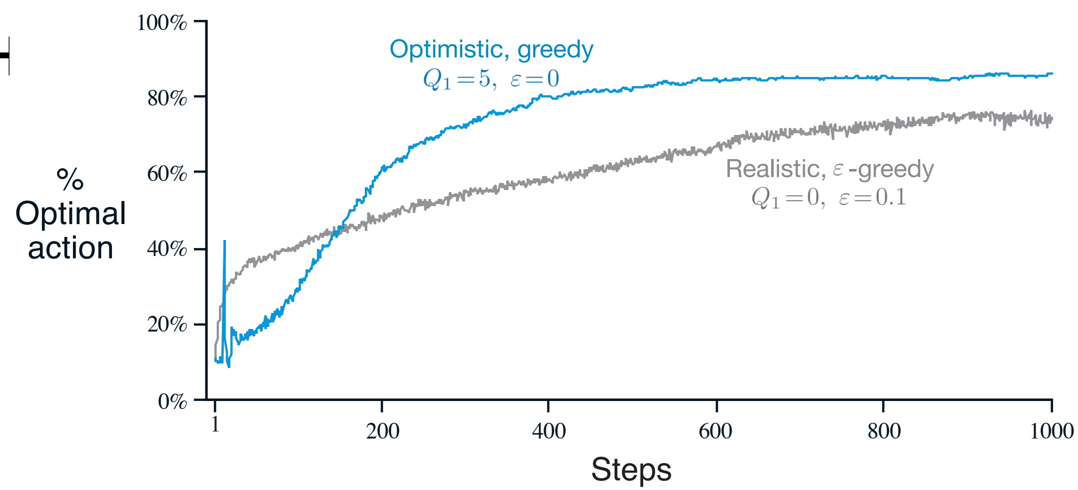
Если $\alpha_n(a) = {}^{1}/_{n}$ - выборочна средняя

Как выбирать начальные значения?

$Q_1(a)$ приводит к смещению. Методы являются смещёнными в силу начальных оценок.

Если α_n постоянно, то смещение не исчезает.

Идея – начальные ценности могут поощрять исследован



Верхняя доверительная граница

Правильно ли выбирать жадные действия "без разбора"?

Давайте используем при выборе близость к максимальным и степень недостоверности

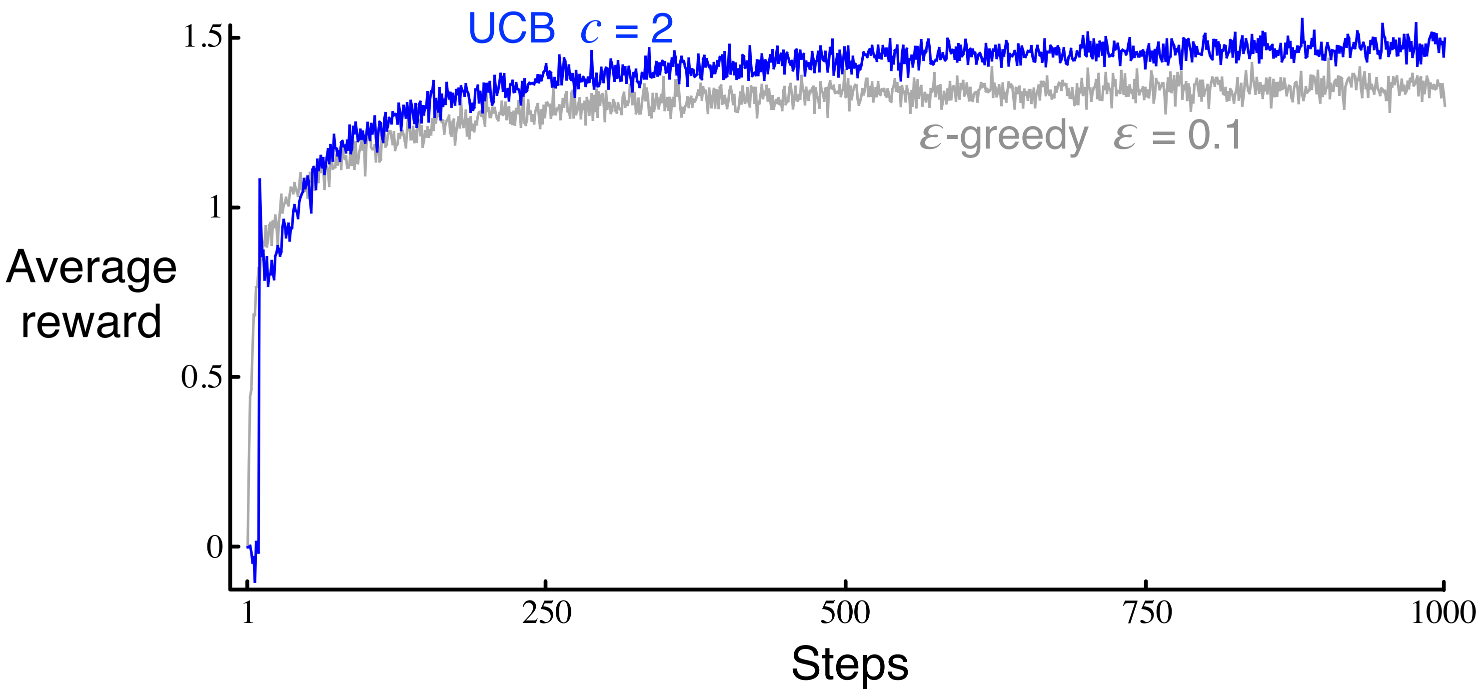
$A_t \doteq \underset{a}{\operatorname{argmax}}\left[Q_t(a) + c\sqrt{\frac{\ln t}{N_t(a)}}\right]$, где

$N_t(a)$ - сколько раз действие a выбиралось ранее,

$c > 0$ – степень исследования

Если $N_t(a) = 0$, то ….

Выбор по Upper-Confidence-Bound (UCB)



Градиентный метод бандита

- Введем $H_t(a)$ – количественное предпочтение действия
- Чем больше предпочтение, тем чаще выбирается действие.
- Но это не вознаграждение!
- Вероятности выбора действий:

$$\Pr\{A_t = a\} \doteq \frac{e^{H_t(a)}}{\sum_{b=1}^{k} e^{H_t(b)}} \doteq \pi_t(a)$$

Обновление предпочтений

- На каждом шаге после выбора действия A_t и получения вознаграждения R_t :

$$H_{t+1}(A_t) \doteq H_t(A_t) + \alpha(R_t - \overline{R_t})(1 - \pi_t(A_t))$$

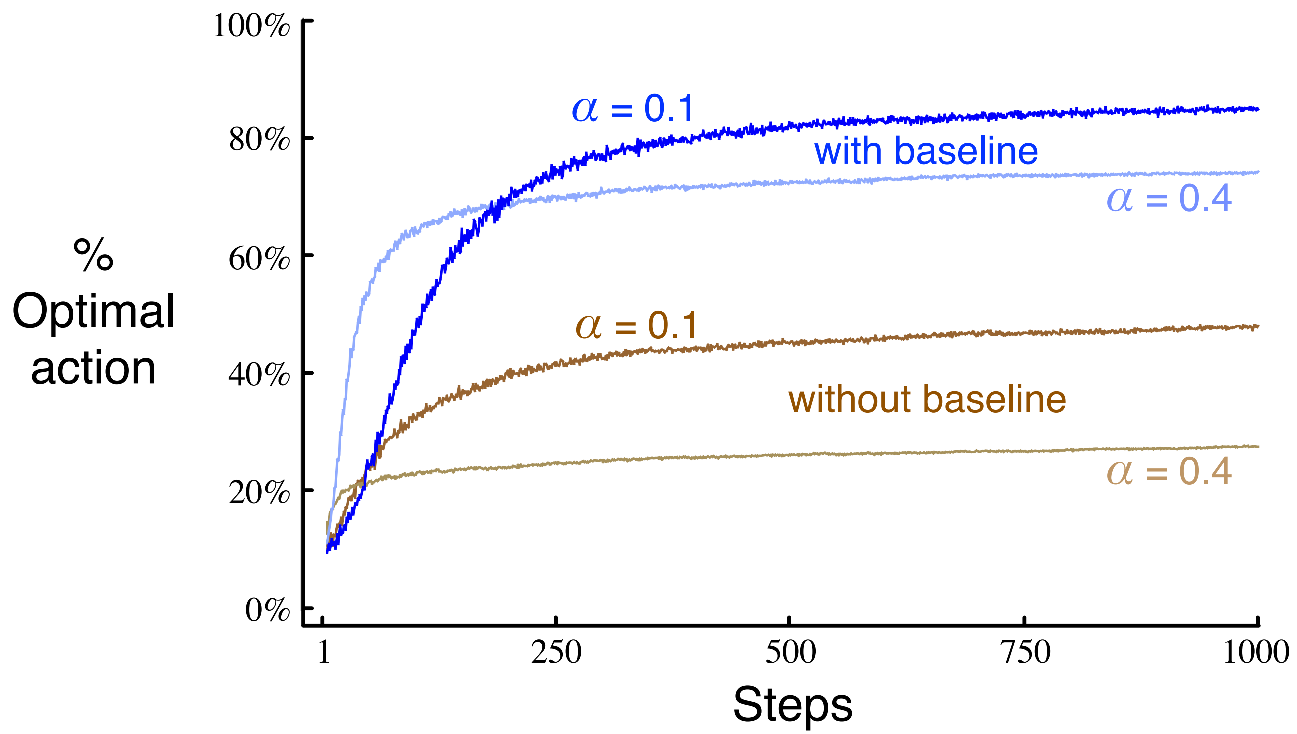
$$H_{t+1}(a) \doteq H_t(a) - \alpha(R_t - \overline{R_t})\pi_t(a), \forall a \neq A_t,$$

где

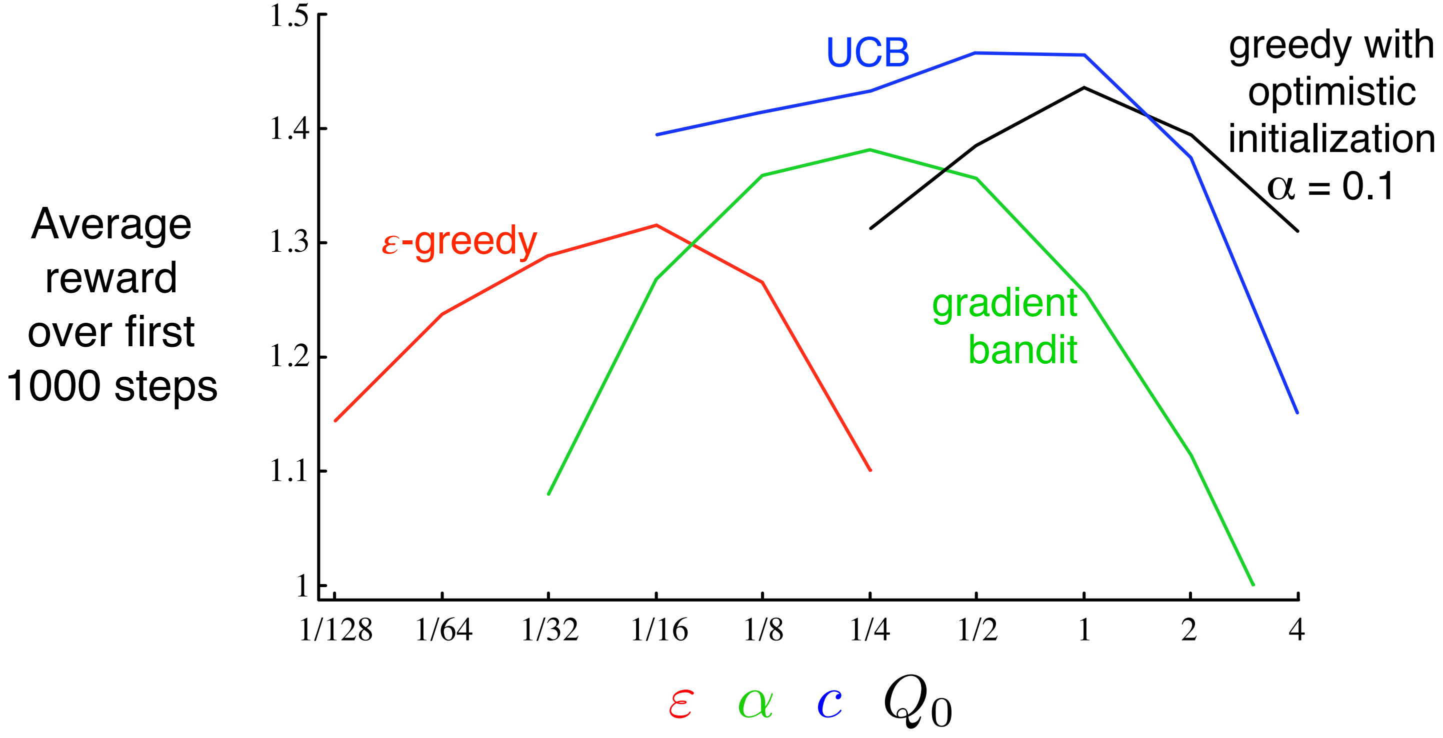
$\alpha > 0$ – шаг,

$\overline{R_t} \doteq \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t-1} R_i$ - база вознаграждения

Качество градиентного алгоритма



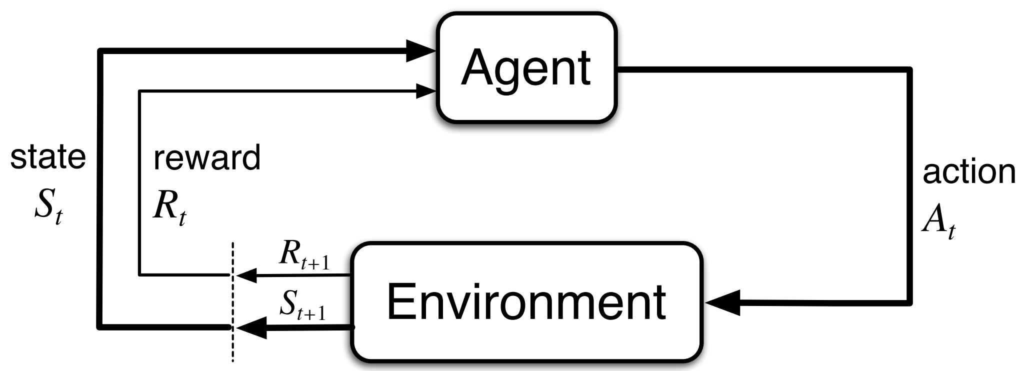
Сравнение эффективности



Марковский процесс принятия решений (MDP)

$q_*(a,s)$ – ценность действия a в состоянии s

$v_*(s)$ - ценность состояния при условии выбора оптимального действия



$$S_0, A_0, R_1, S_1, A_1, R_2, S_2, A_2, R_3, \ldots$$

Конечный MDP

Множество состояний, действий и вознаграждений конечно

Вероятность состояния и вознаграждения зависит только от предыдущего состояния и действия:

$$p(s', r | s, a) \doteq \Pr\{S_t = s', R_t = r | S_{t-1} = s, A_{t-1} = a\}$$

$$\mathcal{S} \times \mathcal{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to [0,1]$$

$$\sum_{s' \epsilon \mathcal{S}} \sum_{r \epsilon \mathcal{R}} p(s', r | s, a) = 1, \forall s \epsilon \mathcal{S}, a \epsilon \mathcal{A}$$

MDP

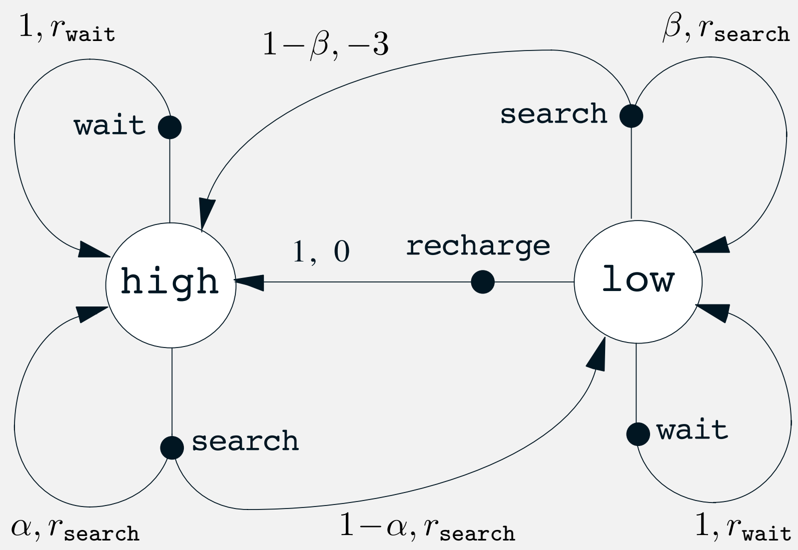
$$p(s'|s,a) = \sum_{r \in \mathcal{R}} p(s',r|s,a)$$

$$r(s,a) = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s',r|s,a)$$

$$r(s,a,s') = \sum_{r \in \mathcal{R}} r \frac{p(s',r|s,a)}{p(s'|s,a)}$$

Пример: Робот уборщик

s	a	s'	$p(s' \mid s, a)$	$r(s, a, s')$
high	search	high	α	$r_{\texttt{search}}$
high	search	low	$1-\alpha$	$r_{\texttt{search}}$
low	search	high	$1-\beta$	-3
low	search	low	β	$r_{\texttt{search}}$
high	wait	high	1	$r_{\texttt{wait}}$
high	wait	low	0	-
low	wait	high	0	-
low	wait	low	1	$r_{\texttt{wait}}$
low	recharge	high	1	0
low	recharge	low	0	-



Про цели

- Максимизация мат.ожидания вознаграждения
- Вознаграждение – должно быть за достижение цели, а не за хорошие априорно ходы
- Априорная информация может быть в функции ценности
- Нужно сообщить что следует достичь, а не как это сделать

Ожидаемый доход

$$G_t \doteq R_{t+1} + R_{t+2} + R_{t+3} + \cdots + R_T$$

T – время завершения эпизода (в общем случае случайна)

А если взаимодействие бесконечно?

То доход может быть бесконечным

Обесценивание дохода

$$G_t \doteq R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}$$

$0 \leq \gamma \leq 1$ – коэффициент обесценивания

$$G_t \doteq R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \cdots = R_{t+1} + \gamma\, G_{t+1}$$

Для эпизодов $G_T = 0$

Если $\forall t\ R_t = 1, \gamma < 1$, то $G_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma}$

Доказать.

Упражнение: Лабиринт и робот

Пусть цель обучить робота выходить из лабиринта.

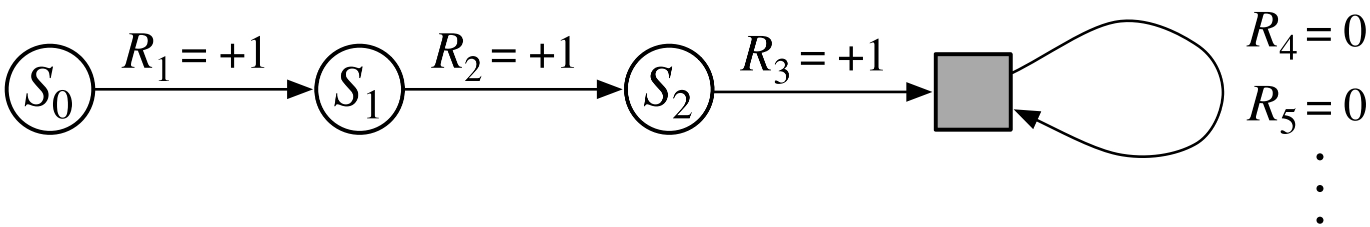
Мы решили: давать +1 за каждый выход из лабиринта, 0 в остальных случаях.

Рассматриваем задачу как эпизодическую.

Цель – максимизировать полное вознаграждение.

Гоняем агента, но прогресса нет. Почему?

Унифицированное представление



$$G_t \doteq \sum_{k=t+1}^{T} \gamma^{k-t-1} R_k$$

Стратегии (policies)

Если агент следует стратегии π в момент t, то $\pi(a|s)$ – вероятность действия a в состоянии s

Задача: записать R_{t+1} через $\pi(a|s)$ и $p(s', r|s, a)$

Функция ценности

функция ценности – это ожидаемый доход

$v_\pi(s)$ - функция ценности состояния

$$v_\pi(s) \doteq \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s] = \mathbb{E}_\pi[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \Big| S_t = s]$$

$q_\pi(s,a)$ - функция ценности действия

$$\begin{aligned} q_\pi(s,a) &\doteq \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_\pi[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \Big| S_t = s, A_t = a] \end{aligned}$$

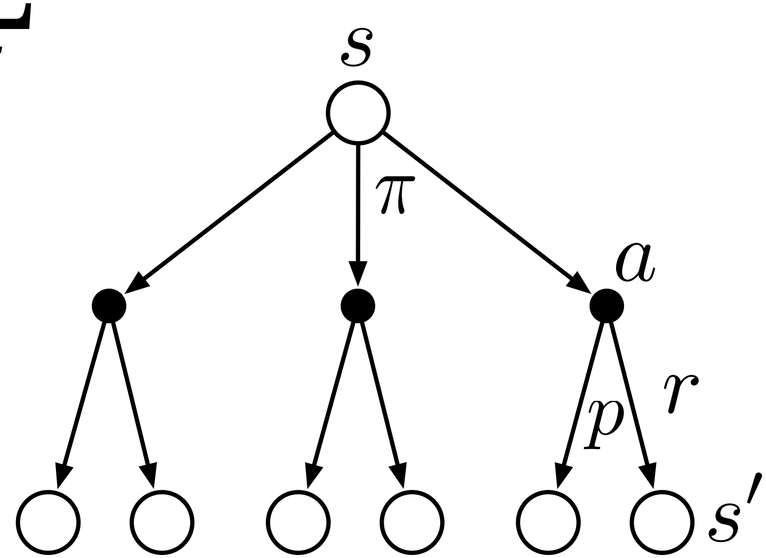
$v_\pi(s)$ - можно получить из опыта (метод Монте-Карло)

Если состояний много, то приходится аппроксимировать

Фундаментальное свойство

$$v_\pi(s) \doteq \mathbb{E}_\pi[G_t|S_t = s] = \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma\, G_{t+1}|S_t = s]$$
$$= \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} \sum_r p(s', r|s, a)\Big[r + \gamma \mathbb{E}_\pi[G_{t+1}|S_{t+1} = s']\Big]$$

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} \sum_r p(s', r|s, a)[r + \gamma v_\pi(s')]$$



Сеточный мир

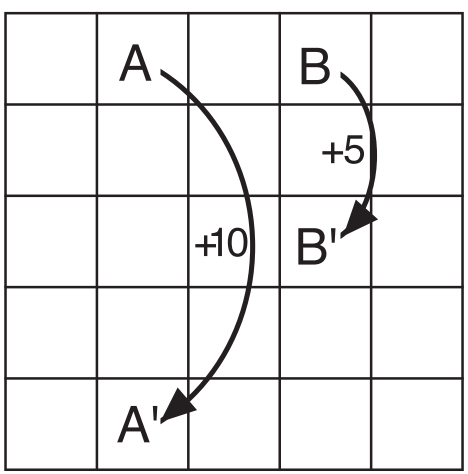
Шаг за пределы сетки – штраф -1

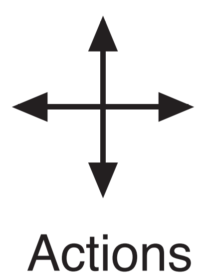
Любой шаг из A переводит в A', вознаграждение +10

Любой шаг из B переводит в B', вознаграждение +5

Все прочие шаги – вознаграждение 0

$$\gamma = 0.9$$





3.3	8.8	4.4	5.3	1.5
1.5	3.0	2.3	1.9	0.5
0.1	0.7	0.7	0.4	-0.4
-1.0	-0.4	-0.4	-0.6	-1.2
-1.9	-1.3	-1.2	-1.4	-2.0

Оптимальная стратегия

Стратегия π лучше или равна π' ($\pi \succcurlyeq \pi'$) если

$$v_\pi(s) \geq v_{\pi'}(s), \forall s \epsilon \mathcal{S}$$

Оптимальная стратегия $\pi_* \succcurlyeq \pi', \forall \pi'$

Может быть несколько оптимальных стратегий

Функция ценности оптимальной стратегии:

$$v_*(s) \doteq \max_\pi v_\pi(s), \forall s \epsilon \mathcal{S}$$

Оптимальная ценность действий

$$q_*(s,a) \doteq \max_{\pi} q_\pi(s,a)\,, \forall s \epsilon \mathcal{S}, a \epsilon \mathcal{A}$$

$$q_*(s,a) = \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_*(S_{t+1}) | S_t = s, A_t = a]$$

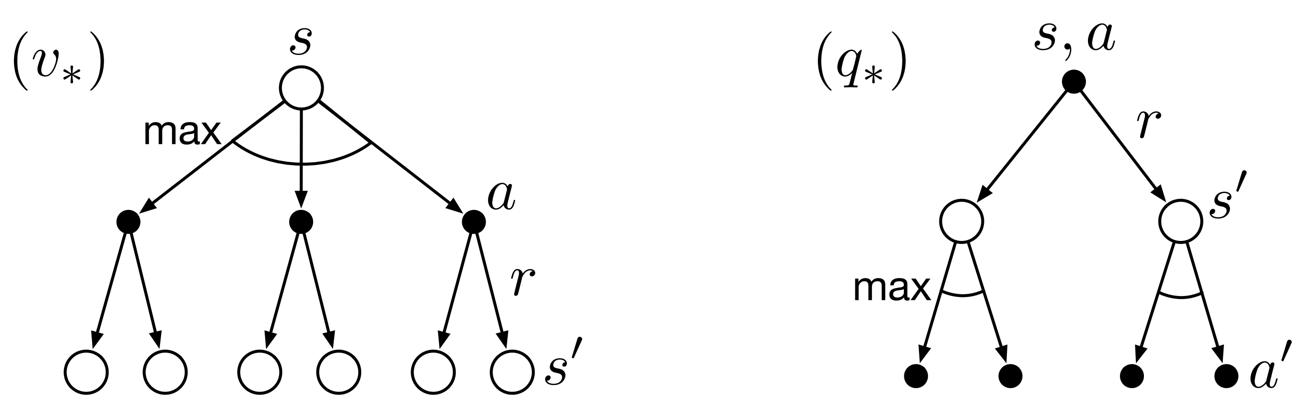
Уравнение оптимальности Беллмана

$$v_*(s) = \max_a q_*(s,a) = \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_*(S_{t+1}) | S_t = s, A_t = a]$$

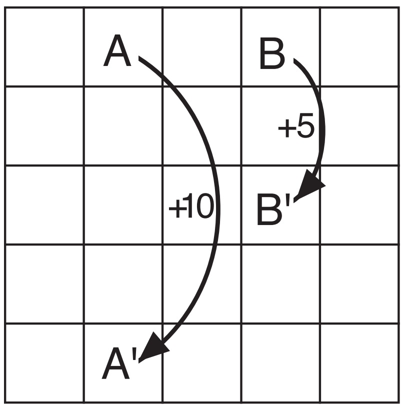
$$= \max_a \sum_{s'} \sum_r p(s', r | s, a)[r + \gamma v_*(s')]$$

$$q_*(s,a) = \mathbb{E}\left[R_{t+1} + \gamma \max_{a'} q_*(S_{t+1}, a') \middle| S_t = s, A_t = a\right]$$

$$= \sum_{s'} \sum_r p(s', r | s, a)\left[r + \gamma \max_{a'} q_*(s', a')\right]$$



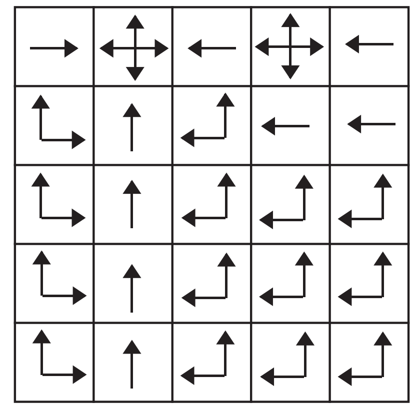
Решение задачи о сеточном мире



Gridworld

22.0	24.4	22.0	19.4	17.5
19.8	22.0	19.8	17.8	16.0
17.8	19.8	17.8	16.0	14.4
16.0	17.8	16.0	14.4	13.0
14.4	16.0	14.4	13.0	11.7

v_*



π_*

Проблемы на практике

- Динамика среды точно не известна
- Объем вычислений слишком велик
- Не выполняется "марковость"

В задачах малой размерности для $q_*(s, a)$ строят таблицу. Если она велика, то можем аппроксимировать функцией с параметрами

Динамическое программирование (ДП)

способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи.

Алгоритм:

1. Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера.
2. Нахождение оптимального решения подзадач рекурсивно, проделывая такой же трех-шаговый алгоритм.
3. Использование полученного решения подзадач для конструирования решения исходной задачи.

Итеративное оценивание

$$v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} \sum_r p(s', r|s, a)[r + \gamma v_\pi(s')]$$

зададим произвольное начальное приближение $v_0(s)$ и далее будем итеративно находить:

$$v_{k+1}(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} \sum_r p(s', r|s, a)[r + \gamma v_k(s')]$$

Существует неподвижная точка $v_k = v_\pi$, так как уравнение Беллмана гарантируют выполнение равенства в этом случае

При $k \to \infty$ последовательноять $\{v_k\}$ сходится к v_π

Алгоритм итеративного оценивания

Iterative Policy Evaluation, for estimating $V \approx v_\pi$

Input π, the policy to be evaluated
Algorithm parameter: a small threshold $\theta > 0$ determining accuracy of estimation
Initialize $V(s)$, for all $s \in \mathcal{S}^+$, arbitrarily except that $V(terminal) = 0$

Loop:
  $\Delta \leftarrow 0$
  Loop for each $s \in \mathcal{S}$:
    $v \leftarrow V(s)$
    $V(s) \leftarrow \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p(s',r\,|\,s,a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
    $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$
until $\Delta < \theta$

Улучшение стратегии

Давайте выберем а $\neq \pi(s)$

Будет ли такое действие лучше или хуже, если далее следовать π?

Ценность такого действия:

$$q_\pi(s,a) = \sum_{s'} \sum_{r} p(s',r|s,a)[r + \gamma v_\pi(s')]$$

Сравним $v_\pi(s)$ и $q_\pi(s,a)$

Улучшение стратегии

Давайте изменим стратегию на жадную:

$$\pi'(s) = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\, q_\pi(s, a)$$

$$= \underset{a}{\operatorname{argmax}}\, \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) | S_t = s, A_t = a]$$

$$= \underset{a}{\operatorname{argmax}} \sum_{s'} \sum_{r} p(s', r | s, a) \left[r + \gamma v_\pi(s') \right]$$

Жадная стратегия удовлетворяет условиям теоремы об улучшении стратегии.

А если жадная стратегия не лучше?

$$v_{\pi'}(s) = v_{\pi}(s), \forall s \epsilon \mathcal{S}$$

$$v_{\pi'}(s) = \max_a \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_{\pi'}(S_{t+1}) | S_t = s, A_t = a]$$

$$= \max_a \sum_{s'} \sum_r p(s', r | s, a)[r + \gamma v_{\pi'}(s')]$$

То мы получили....

Что означает...

Итерации по стратегиям

$$\pi_0 \xrightarrow{\text{E}} v_{\pi_0} \xrightarrow{\text{I}} \pi_1 \xrightarrow{\text{E}} v_{\pi_1} \xrightarrow{\text{I}} \pi_2 \xrightarrow{\text{E}} \cdots \xrightarrow{\text{I}} \pi_* \xrightarrow{\text{E}} v_*$$

Policy Iteration (using iterative policy evaluation) for estimating $\pi \approx \pi_*$

1. Initialization
   $V(s) \in \mathbb{R}$ and $\pi(s) \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily for all $s \in \mathcal{S}$

2. Policy Evaluation
   Loop:
   - $\Delta \leftarrow 0$
   - Loop for each $s \in \mathcal{S}$:
     - $v \leftarrow V(s)$
     - $V(s) \leftarrow \sum_{s',r} p(s', r \mid s, \pi(s))\big[r + \gamma V(s')\big]$
     - $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$

   until $\Delta < \theta$ (a small positive number determining the accuracy of estimation)

3. Policy Improvement
   policy-stable $\leftarrow$ *true*
   For each $s \in \mathcal{S}$:
   - *old-action* $\leftarrow \pi(s)$
   - $\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s',r} p(s', r \mid s, a)\big[r + \gamma V(s')\big]$
   - If *old-action* $\neq \pi(s)$, then *policy-stable* $\leftarrow$ *false*

   If *policy-stable*, then stop and return $V \approx v_*$ and $\pi \approx \pi_*$; else go to 2

В алгоритме есть одна проблема. Как ее решить?

Домашнее задание: Аренда машин

Дано:

- 2 офиса по аренде машин
- Прибыль от сдачи в аренду если машина есть - $10, а если нет - $0.
- Перегон из офиса в офис стоит $2.
- Потоки аренды и возвратов распределены по закону Пуассона:

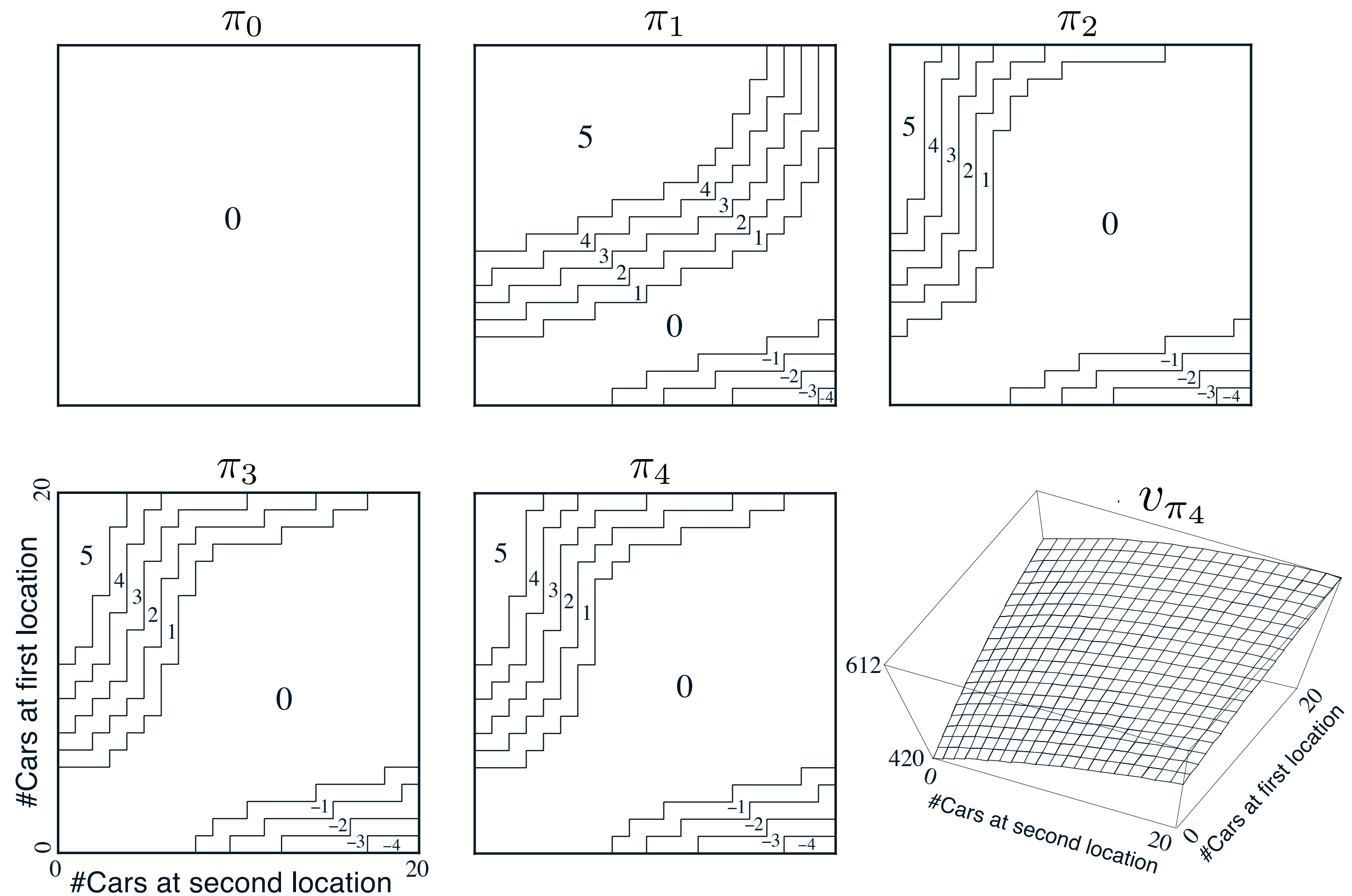
$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

- Аренда в офисе 1: $\lambda = 3$, в офисе 2: $\lambda = 4$
- Возвраты в офисе 1: $\lambda = 3$, в офисе 2: $\lambda = 2$
- В каждом офисе не более 20 машин
- Перегнать можно не более 5 машин
- $\gamma = 0.9$

Требуется:

- Найти оптимальную стратегию методом итераций по стратегиям

Результат решения



SARSA

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha[R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1}) - Q(S_t, A_t)]$$

Sarsa (on-policy TD control) for estimating $Q \approx q_*$

Algorithm parameters: step size $\alpha \in (0, 1]$, small $\varepsilon > 0$
Initialize $Q(s, a)$, for all $s \in \mathcal{S}^+, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily except that $Q(\textit{terminal}, \cdot) = 0$

Loop for each episode:
  Initialize S
  Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
  Loop for each step of episode:
    Take action A, observe R, S'
    Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha\big[R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A)\big]$
    $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
  until S is terminal

Стратегия может быть ε жадной или ε мягкой

Q-обучение

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha[R_{t+1} + \gamma \max_a Q(S_{t+1}, a) - Q(S_t, A_t)]$$

Q-learning (off-policy TD control) for estimating $\pi \approx \pi_*$

Algorithm parameters: step size $\alpha \in (0, 1]$, small $\varepsilon > 0$
Initialize $Q(s, a)$, for all $s \in \mathcal{S}^+, a \in \mathcal{A}(s)$, arbitrarily except that $Q(\mathit{terminal}, \cdot) = 0$

Loop for each episode:
    Initialize S
    Loop for each step of episode:
        Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
        Take action A, observe R, S'
        $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha\big[R + \gamma \max_a Q(S', a) - Q(S, A)\big]$
        $S \leftarrow S'$
    until S is terminal

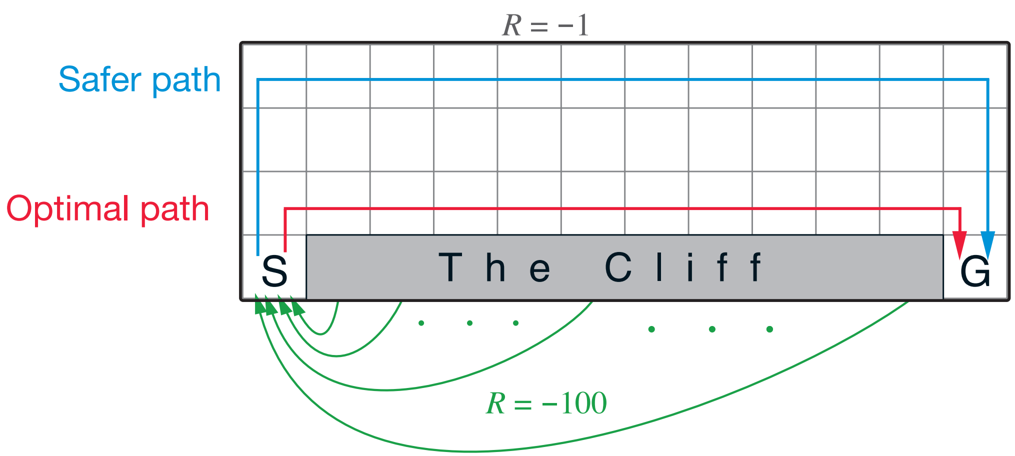
Блуждание на краю обрыва

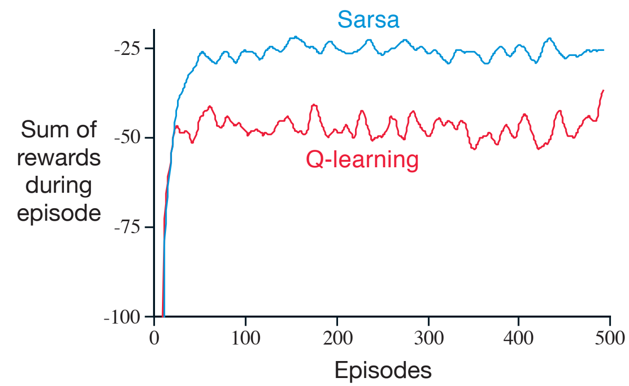
Возможные ходы: {вверх, вниз, влево, вправо}

Попадание в обрыв (Cliff)– вознаграждение -100

Любой другой ход - вознаграждение -1

Начальное состояние S, конечное - G





Графовые модели

Программное обеспечение

- Git
- Python
- Jupyter Notebook
- Библиотеки:
  - networkX
  - pgmpy

Центральность в графе

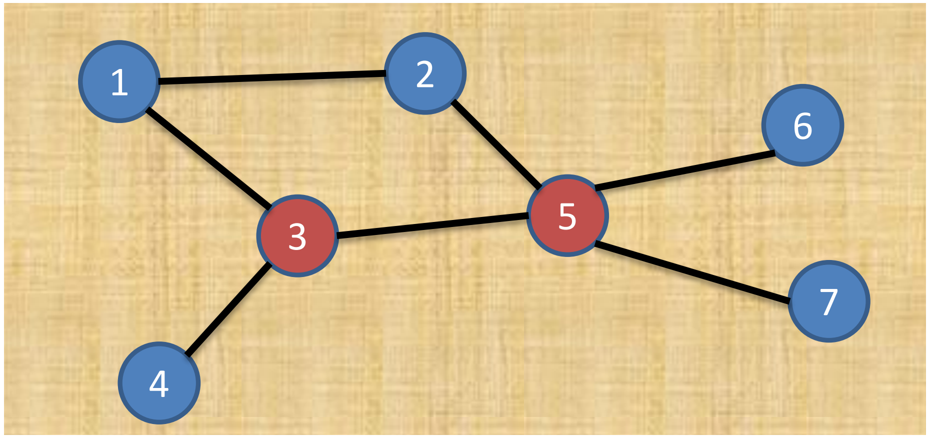
Центральность вершин в графе – это вектор, сопоставляющей каждой вершине графа некоторое число (индекс).

Наиболее распространенные индексы:

- Степенная центральность (degree centrality);
- Центральность по близости (closeness centrality);
- Центральность по посредничеству (betweenneess centrality);
- Центральность по собственному вектору (eigenvector centrality);
- Центральность PageRank.

Центральность по близости

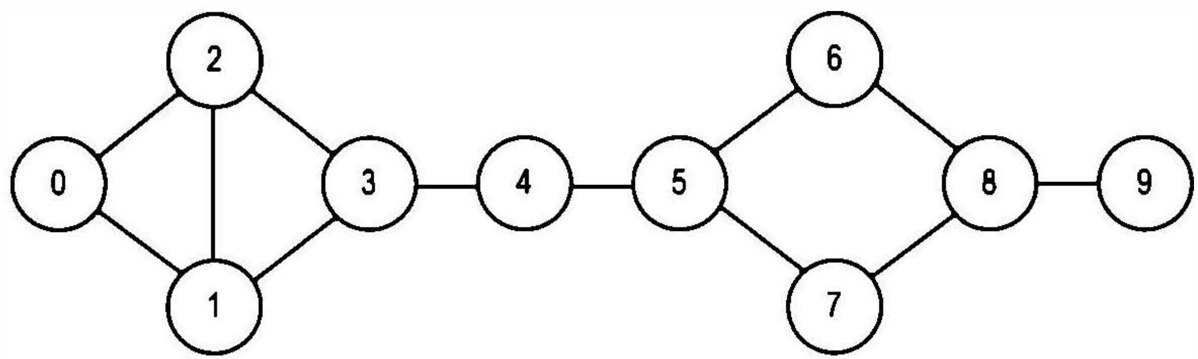
Вершина, находящаяся ближе всех к другим вершинам сети, является наиболее центральной



$$C_i = \frac{1}{\sum_j d_{ij}} \quad C_i = \sum_j \frac{1}{d_{ij}}$$

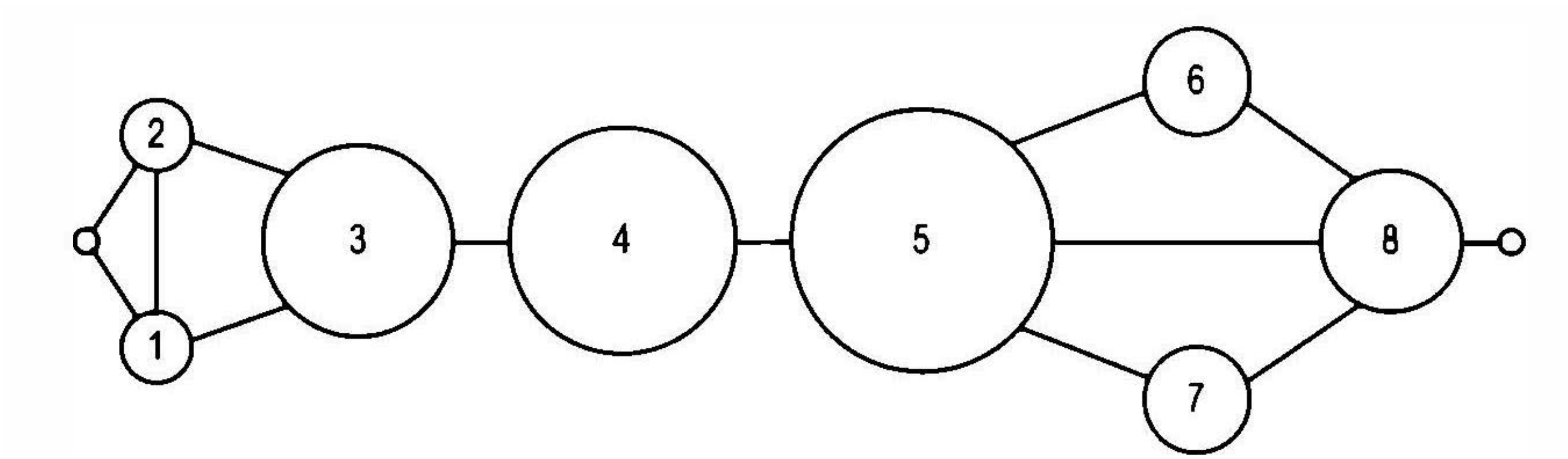
Центральность по посредничеству

Вершина, через которую проходит наибольшее число кратчайших путей, является наиболее центральной.



$$C_i = \sum_{jk} \frac{w_{jk}(i)}{w_{jk}}$$

Центральность по посредничеству



Центральность по собственному значению

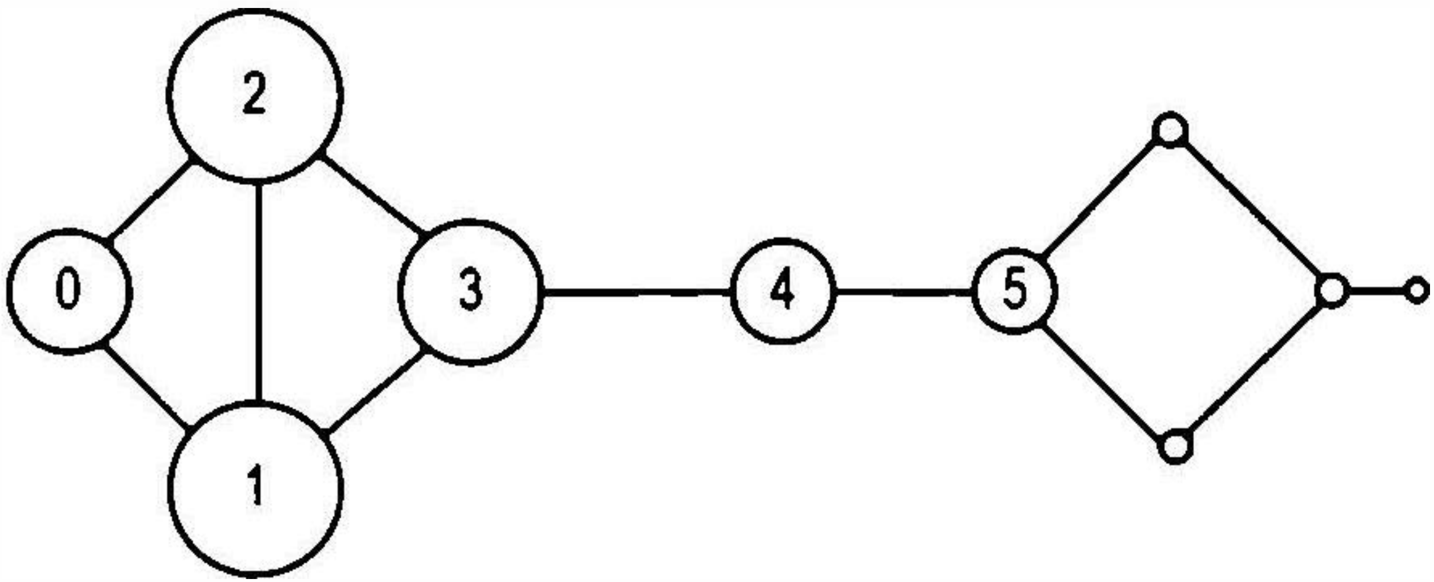
Центральность вершины i зависит от центральностей соседей вершины i.

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in F_i} x_j = \frac{1}{\lambda} \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\lambda x = Ax$$

- Выбирается собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению.
- Данная центральность учитывает дальние взаимодействия.
- Наиболее центральными считаются вершины, которые сами указывают на сильные вершины.

Центральность по собственному значению



Определение

Графовая вероятностная модель — это вероятностная модель, в которой в виде графа представлены зависимости между случайными величинами. Вершины графа соответствуют случайным переменным, а рёбра — непосредственным вероятностным взаимосвязям между случайными величинами.

Могут работать с малыми выборками

Применение

- извлечение информации
- распознавание речи
- компьютерное зрение
- диагностика болезней
- диагностика промышленного оборудования
- оценка систем безопасности
- прогнозирование отказов

Некоторые сведения из теории вероятностей

Для независимых событий:

P(AB) = P(A) P(B)

Для зависимых событий:

P(AB) =P(A) P(B/A)

P(AB) = P(B) P(A/B)

Формула Байеса:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

Теорема Байеса для классификации

$$P(y/x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P(y)P(x_1, x_2, \ldots, x_n/y)}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$\hat{y} = \arg\max_y P(y/x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Наивное предположение:

$$P(x_i/y, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) = P(x_i/y\ )$$

$$P(y/x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P(y)\prod_{i=1}^{n} P(x_i/y\ )}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$\hat{y} = \arg\max_y P(y)\prod_{i=1}^{n} P(x_i/y\ )$$

Проблема и путь решения

Независимость признаков часто не выполняется

$$P(x_i / y, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) \neq P(x_i / y)$$

Путь решения - рассчитывать условные вероятности значений признака и от *y* и от *x*, которые на него влияют.

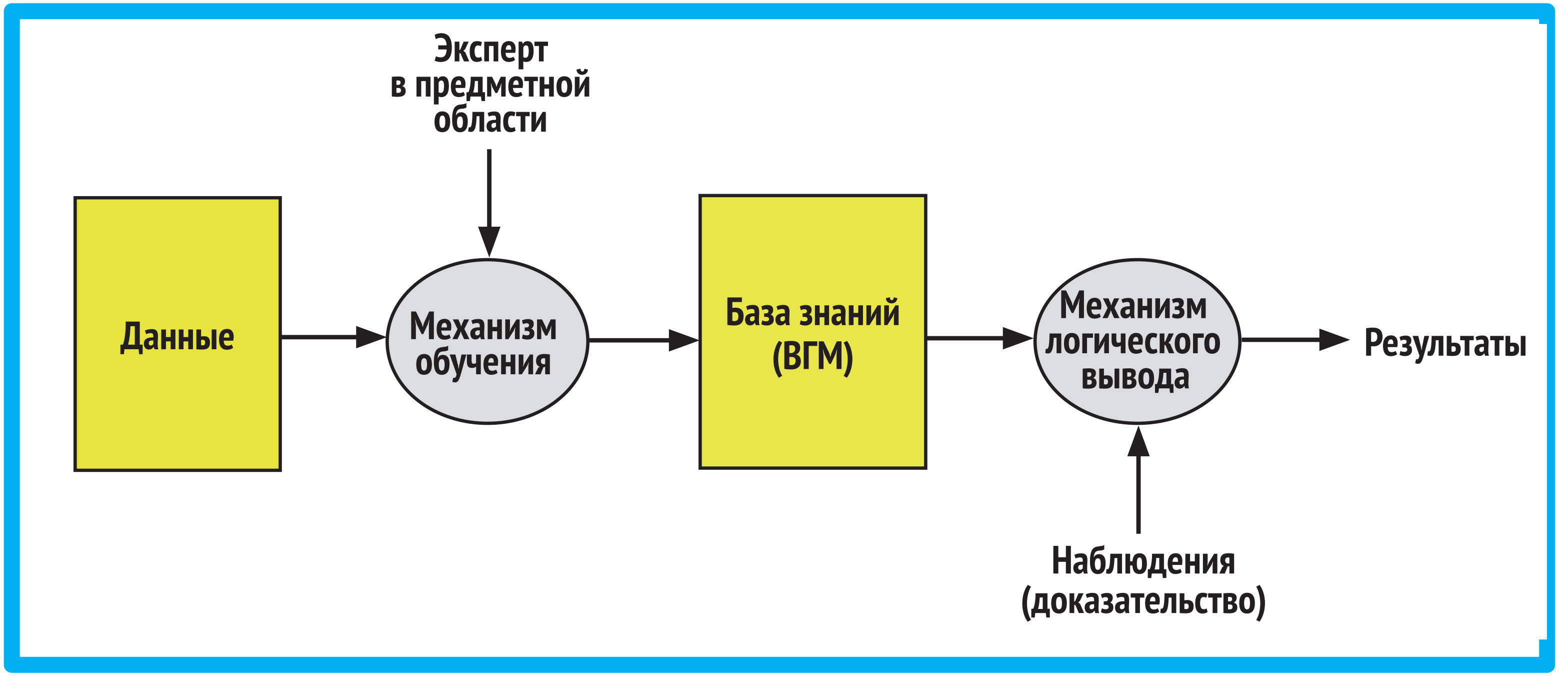
Для этого нужно построить граф. В нем:

- вершины – это признаки
- дуги/ребра отражают влияние признаков друг на друга

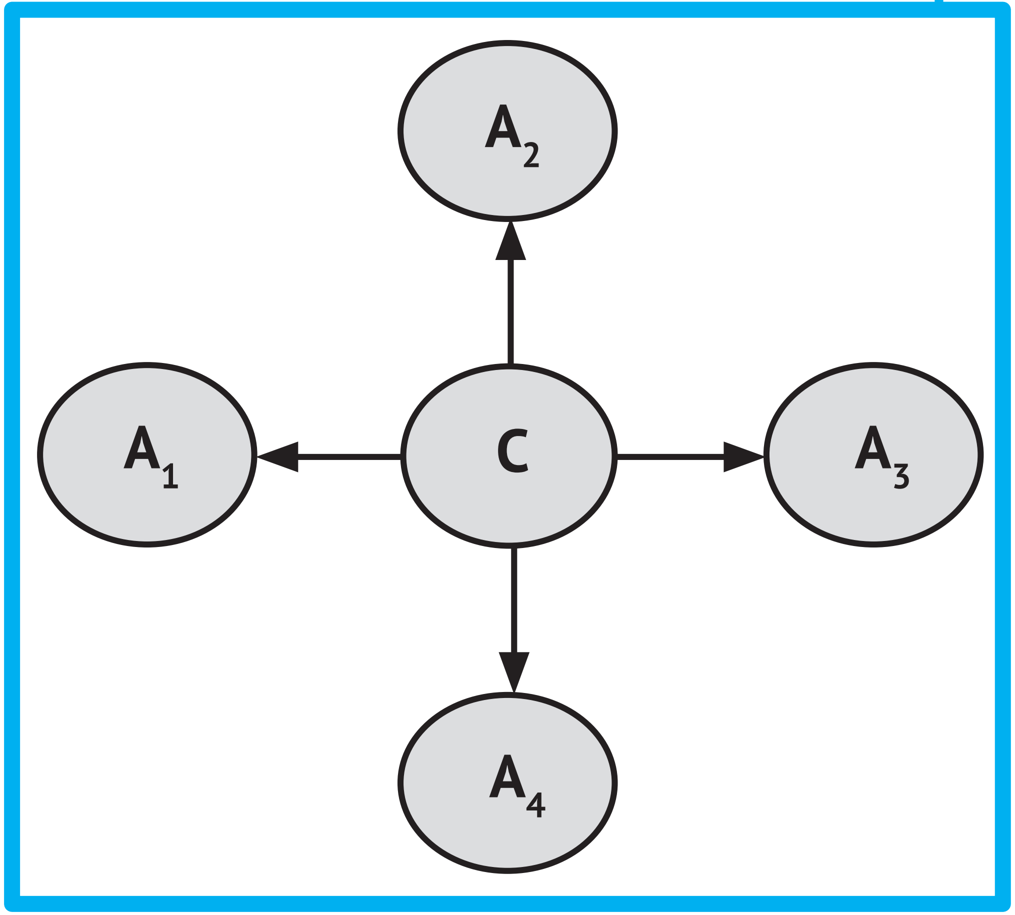
Типы моделей

Тип модели	Направленный / Ненаправленный граф	Статическая / Динамическая	Вероятностная / Для принятия решений
Байесовские классификаторы	Напр./ Ненапр.	Статическая	Вероятностная
Марковские цепи	Напр.	Динамическая	Вероятностная
Скрытые марковские модели	Напр.	Динамическая	Вероятностная
Марковские случайные поля	Ненапр.	Статическая	Вероятностная
Байесовские сети	Напр.	Статическая	Вероятностная
Динамические байесовские сети	Напр.	Динамическая	Вероятностная
Диаграммы влияния	Напр.	Статическая	Для принятия решений
Марковские процессы принятия решений (МППР)	Напр.	Динамическая	Для принятия решений
Частично наблюдаемые МППР	Напр.	Динамическая	Для принятия решений

Представление, логический вывод и обучение



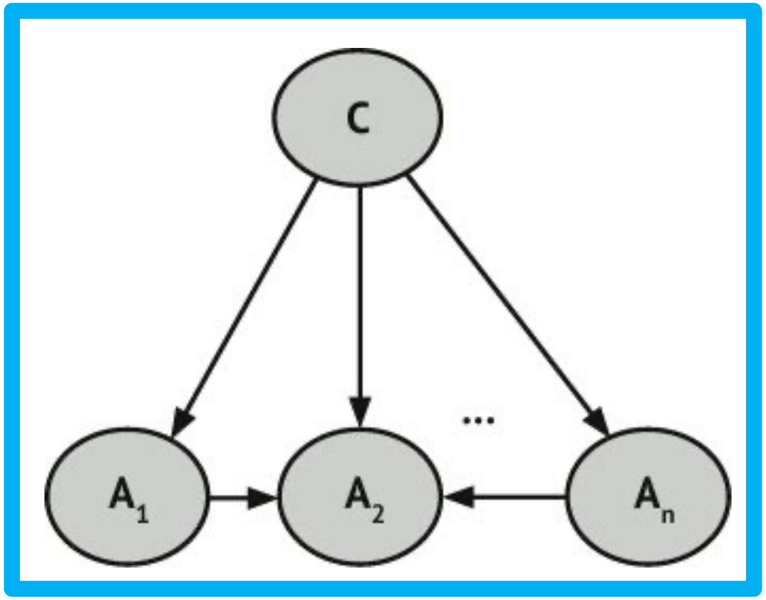
Визуализация наивного байесовского классификатора

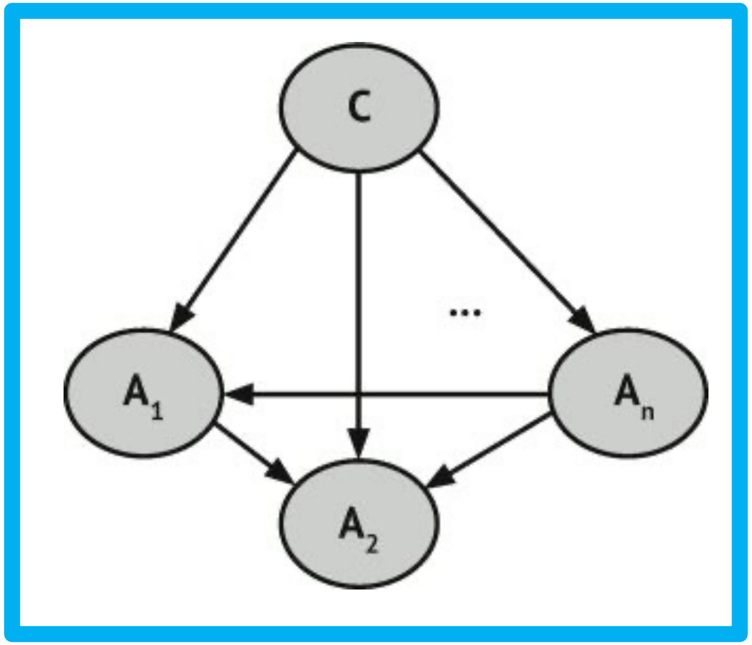


Другие классификаторы

TAN (Tree augmented Bayesian classifier - байесовский классификатор, дополненный деревом)

BAN (Bayesian Network augmented Bayesian classifier - байесовский классификатор, дополненный байесовской сетью)





Расчет вероятностей в TAN и BAN

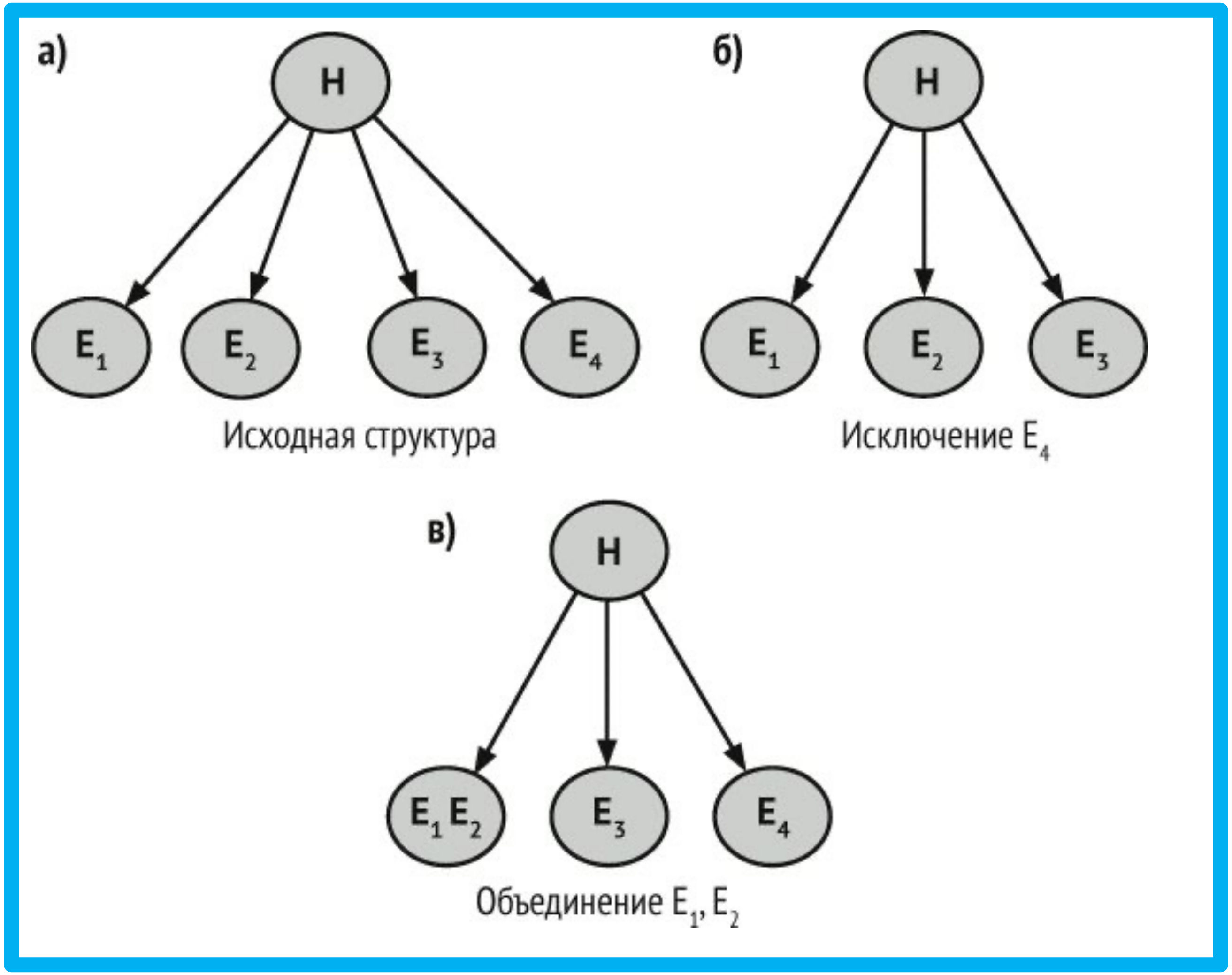
Апостериорную вероятность для переменной класса можно получить тем же способом, что и для наивного байесовского классификатора.

Каждый атрибут зависит не только от класса, но и от других атрибутов в соответствии со структурой графа.

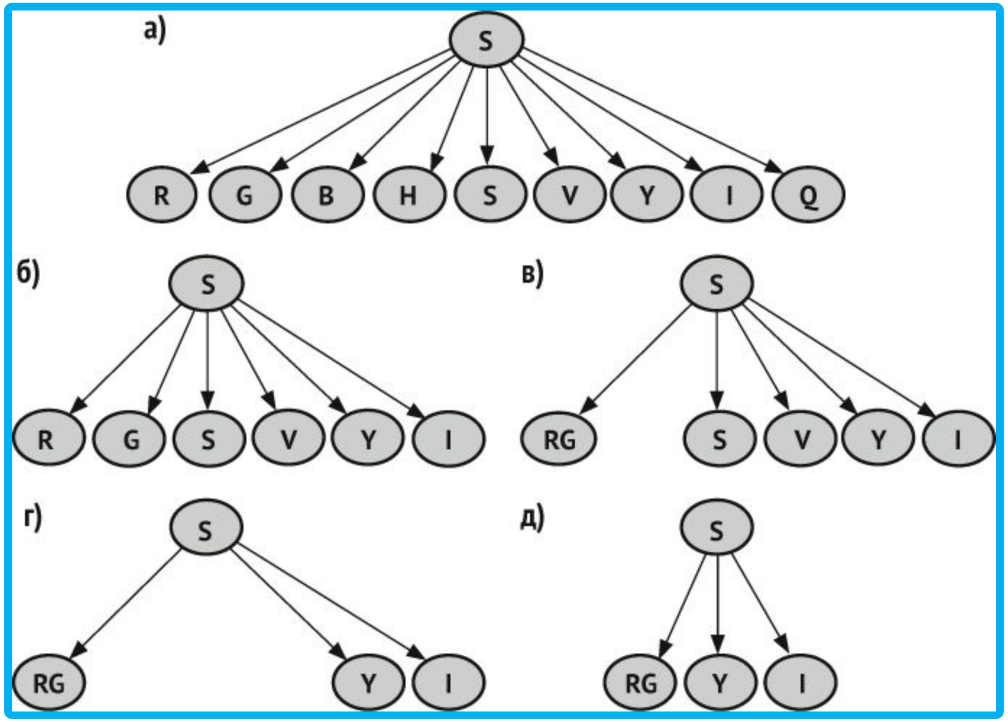
Необходимо учитывать условную вероятность каждого атрибута по отношению к классу и к своим родительским атрибутам:

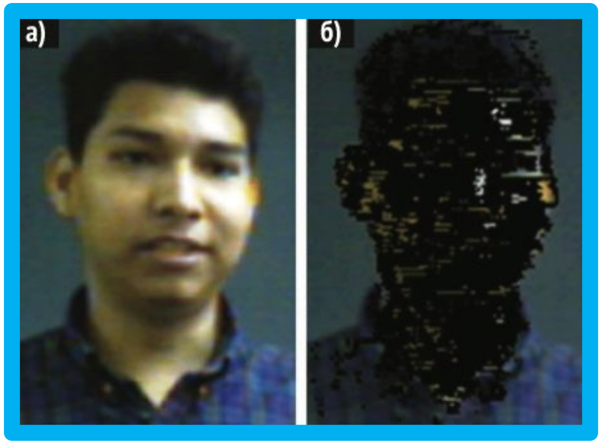
$$P(C|A_1, A_2, \dots, A_n) = \frac{P(C)P(A_1|C, Pa(A_1))P(A_2|C, Pa(A_2)) \dots P(A_n|C, Pa(A_n))}{P(A)}$$

Улучшение структуры

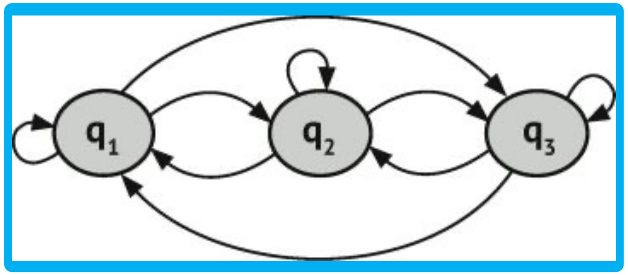


Определение кожи человека





Марковские цепи



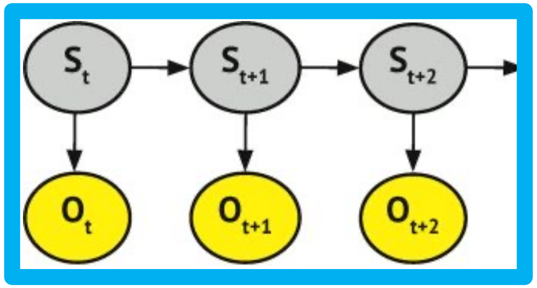
Солнечно	Облачно	Дождь
0.2	0.5	0.3

	Солнечно	Облачно	Дождь
Солнечно	0.8	0.1	0.1
Облачно	0.2	0.6	0.2
Дождь	0.3	0.3	0.4

Марковская цепь позволяет ответить на вопросы:

- Какова вероятность некоторой конкретной последовательности состояний?
- Какова вероятность того, что цепь остается в определенном состоянии в течение некоторого интервала времени?
- Каково ожидаемое время, в течение которого цепь будет оставаться в определенном состоянии?

Скрытые марковские цепи



Распознавание жеста Стоп

Итоги

- Вероятностные графовые модели позволяют учесть экспертное мнение о взаимосвязи параметров
- Вероятностные графовые модели позволяют работать с малыми выборками
- Наивный байесовский классификатор не всегда применим в силу зависимости показателей
- Марковские цепи позволяют прогнозировать поведение динамических систем

Проверка статистических гипотез

Выравнивание статистических рядов

- Во всяком статистическом распределении неизбежно присутствуют элементы случайности, связанные с тем. что число наблюдений ограничено, что произведены именно те, а не другие опыты, давшие именно те, а не другие результаты.
- Только при очень большом числе наблюдений эти элементы случайности сглаживаются, и случайное явление обнаруживает в полной мере присущую ему закономерность.
- На практике мы почти никогда не имеем дела с таким большим числом наблюдений и вынуждены считаться с тем, что любому статистическому распределению свойственны в большей или меньшей, мере черты случайности.
- Поэтому при обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала, но не случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Такая задача называется задачей ***выравнивания*** (сглаживания) ***статистических рядов.***
- Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую плавную кривую распределения, с той или иной точки зрения наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение.

Как выравнивать?

- Как правило, принципиальный вид теоретической кривой выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а в некоторых случаях просто с внешним видом статистического распределения. Аналитическое выражение выбранной кривой распределения зависит от некоторых параметров; задача выравнивания статистического ряда переходит в задачу рационального выбора тех значений параметров, при которых соответствие между статистическим и теоретическим распределениями оказывается наилучшим.

Например,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, \text{при } \alpha \le x \le \beta \\ 0, \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta \end{cases} \qquad (2)$$

Что это за законы? Что будем подбирать?

Требуемые ограничения

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Метод моментов

- Согласно методу моментов, параметры ***a, b,*** . . . выбираются с таким расчетом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик (моментов) теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам.
- Например, если теоретическая кривая ***f(x)*** зависит только от двух параметров ***a*** и ***b,*** эти параметры выбираются так, чтобы математическое ожидание и дисперсия теоретического распределения совпадали с соответствующими статистическими характеристиками.
- Если кривая ***f(x)*** зависит от трех параметров, можно подобрать их так, чтобы совпали первые три момента, и т. д.
- При выравнивании статистических рядов может оказаться полезной специально разработанная система ***кривых Пирсона,*** каждая из которых зависит в общем случае от четырех параметров. При выравнивании эти параметры выбираются с тем расчетом, чтобы сохранить первые четыре момента статистического распределения (математическое ожидание, дисперсию, третий и четвертый моменты).

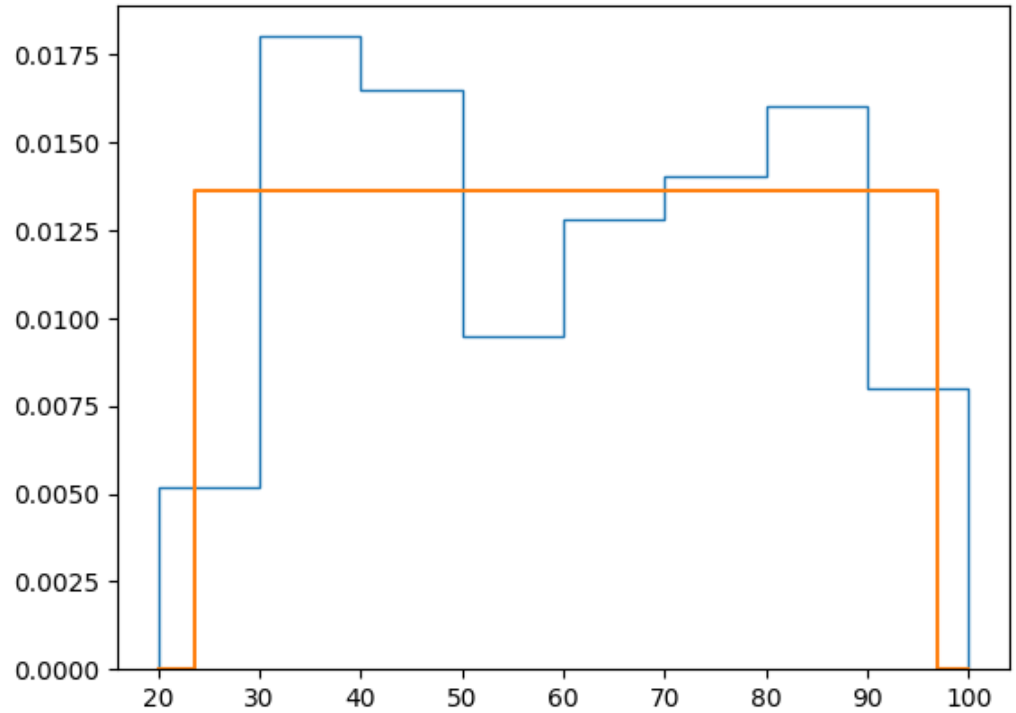
Пример

- С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты опытов представлены в виде статистического ряда:

I_i (*м*)	20; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80	80; 90	90; 100
m_i	21	72	66	38	51	56	64	32
p_i^*	0,052	0,180	0,165	0,095	0,128	0,140	0,160	0,080

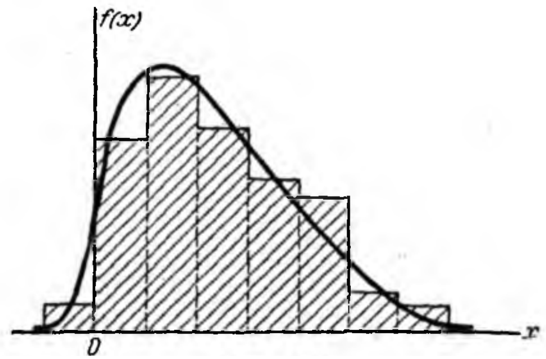
Решение

https://colab.research.google.com/drive/1Ce0rPKw1jdU7mRzOkgNRiKIln68XDzR0



Критерии согласия

- Допустим, что данное статистическое распределение выравнено с помощью некоторой теоретической кривой



- Как бы хорошо, ни была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения.
- Вопрос: объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная нами кривая плохо выравнивает данное статистическое распределение?
- Для ответа служат «критерии согласия».

Идея метода

- Гипотеза ***H***: случайная величина ***X*** подчиняется некоторому определенному закону распределения. Этот закон может быть задан в той или иной форме: например, в виде функции распределения ***F (x***) или в виде плотности распределения ***f (x) ,*** или же в виде совокупности вероятностей p_i , где p_i — вероятность того, что величина ***X*** попадет в пределы ***i***-го разряда.
- рассмотрим величину ***U ,*** характеризующую степень расхождения теоретического и статистического распределений.
- Величина ***U*** может быть выбрана различными способами; например, в качестве ***U*** можно взять сумму квадратов отклонений теоретических вероятностей p_i от соответствующих частот p_i^* или же сумму тех же квадратов с некоторыми коэффициентами («весами»), или же максимальное отклонение статистической функции распределения ***F*(x)*** от теоретической ***F(x)*** и т. д. Допустим, что величина ***U*** выбрана тем или иным способом. Очевидно, это есть некоторая ***случайная величина.***

Идея метода (2)

- Закон распределения случайной величины ***U*** зависит от закона распределения случайной величины ***X*** ***,*** над которой производились опыты, и от числа опытов ***n.*** Если гипотеза ***H*** верна, то закон распределения величины ***U*** определяется законом распределения величины X (функцией F(x)) и числом ***n.***
- Допустим, что этот закон распределения нам известен. В результате данной серии опытов обнаружено, что выбранная нами мера расхождения ***U*** приняла некоторое значение ***u***.
- Можно ли объяснить это случайными причинами или же это расхождение слишком велико и указывает на наличие существенной разницы между теоретическим и статистическим распределениями и, следовательно, на непригодность гипотезы ***H***?

Идея метода (3)

- Предположим, что гипотеза ***H*** верна, и вычислим в этом предположении вероятность того, что за счет случайных причин, связанных с недостаточным объемом опытного материала, мера расхождения ***u*** окажется не меньше, чем наблюденное нами в опыте значение. Вычислим вероятность события:

$$U \geq u$$

- Если эта вероятность весьма мала, то гипотезу следует *отвергнуть* как мало правдоподобную
- Если же эта вероятность значительна, следует признать, что *экспериментальные данные не противоречат гипотезе **H**.*

Как следует выбирать U?

- При некоторых способах ее выбора закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами.
- При достаточно большом n он практически не зависит от функции $F(x)$.

Критерий Хи-квадрат Пирсона

- Произведено ***n*** независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ***X*** приняла определенное значение. Результаты опытов сведены в *k* разрядов и оформлены в виде статистического ряда:

I_i	$x_1;\ x_2$	$x_2;\ x_3$	$\ldots$	$x_k;\ x_{k+1}$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_k^*

- Зная теоретический закон распределения, можно найти теоретические вероятности попадания случайной величины в каждый из разрядов:

$$p_1, p_2, \ldots p_k$$

- В качестве меры возьмем

$$U = \sum_{i=1}^{k} c_i (p_i^* - p_i)^2$$

Критерий Хи-квадрат Пирсона (2)

- Коэффициенты c_i («веса» разрядов) вводятся потому, что в общем случае отклонения, относящиеся к различным разрядам, нельзя считать равноправными по значимости.
- Одно и то же по абсолютной величине отклонение $p_i^* - p_i$ может быть мало значительным, если сама вероятность p_i велика, и очень заметным, если она мала. Поэтому естественно «веса» c_i взять обратно пропорциональными вероятностям разрядов p_i.
- ***Если положить***

$$c_i = \frac{n}{p_i}$$

то при больших n закон распределения величины U обладает весьма простыми свойствами:

он практически не зависит от функции распределения $F(x)$ и от числа опытов n, а зависит только от числа разрядов k,

Этот закон при увеличении n приближается к «распределению χ^2»

Мера расхождения

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \qquad U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i - p_i)^2}{np_i}$$

χ^2 с *r* степенями свободы – это распределение суммы квадратов *r* независимых случайных величин, каждая из которых подчинена нормальному закону с мат.ожиданием = *0* и дисперсией = 1.

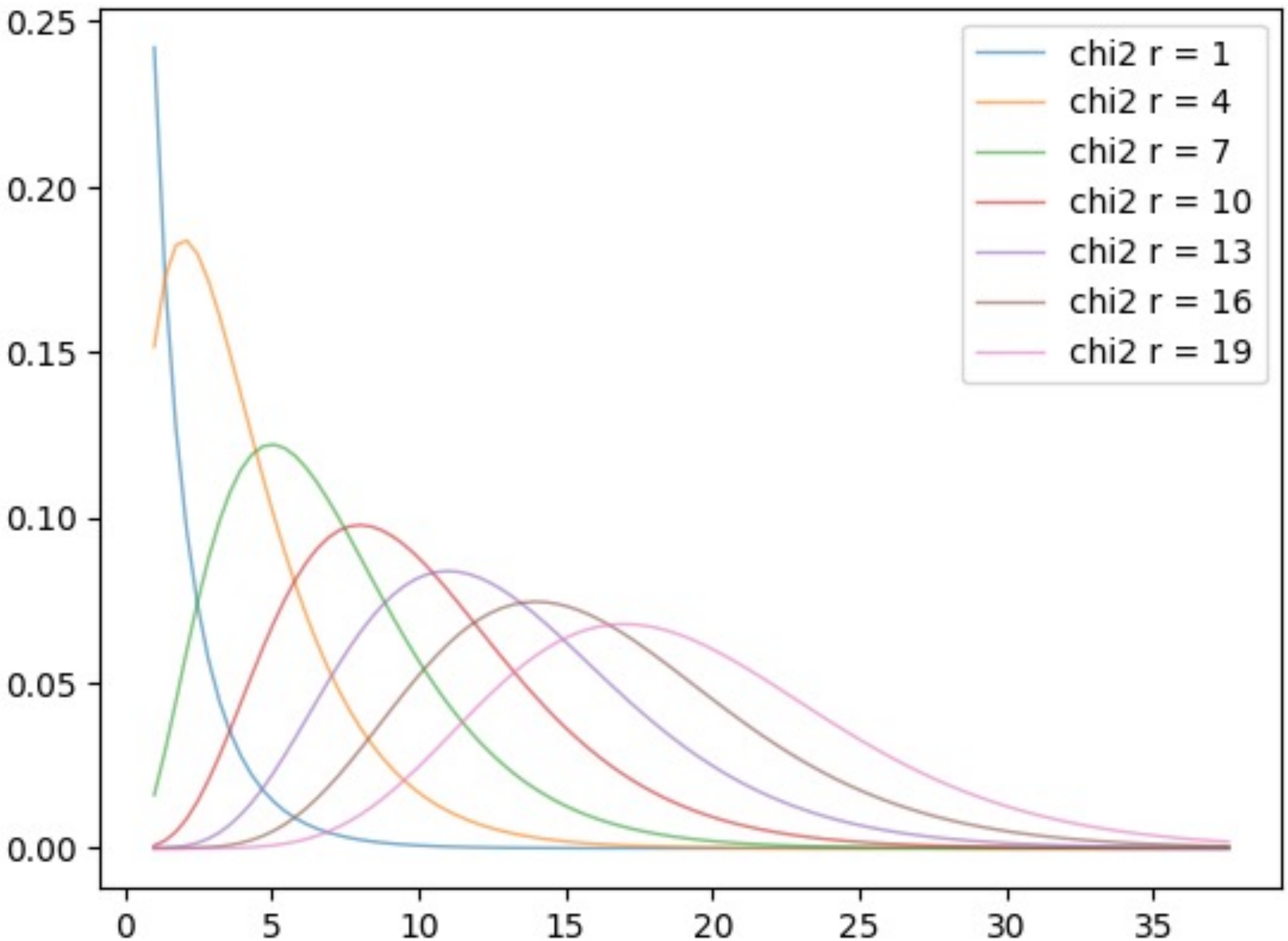
Плотность распределения:

$$f_r(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})} u^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \text{ при } u > 0 \\ 0 \text{ при } u \le 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ – гамма функция.

мат.ожидание $\mathrm{M}[U] = r$ и дисперсия $D[U] = 2r.$

Функция плотности распределения χ^2



Как определить число степеней свободы

- Распределение χ^2 зависит от параметра ***r*,** называемого числом «степеней свободы» распределения. Число «степеней свободы» *r* равно числу разрядов *k* минус число независимых условий («связей»), наложенных на частоты ***p_i*.**
- ***Примеры условий:***

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^* = 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^* = m_x$$

$$\sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 p_i^* = D_x$$

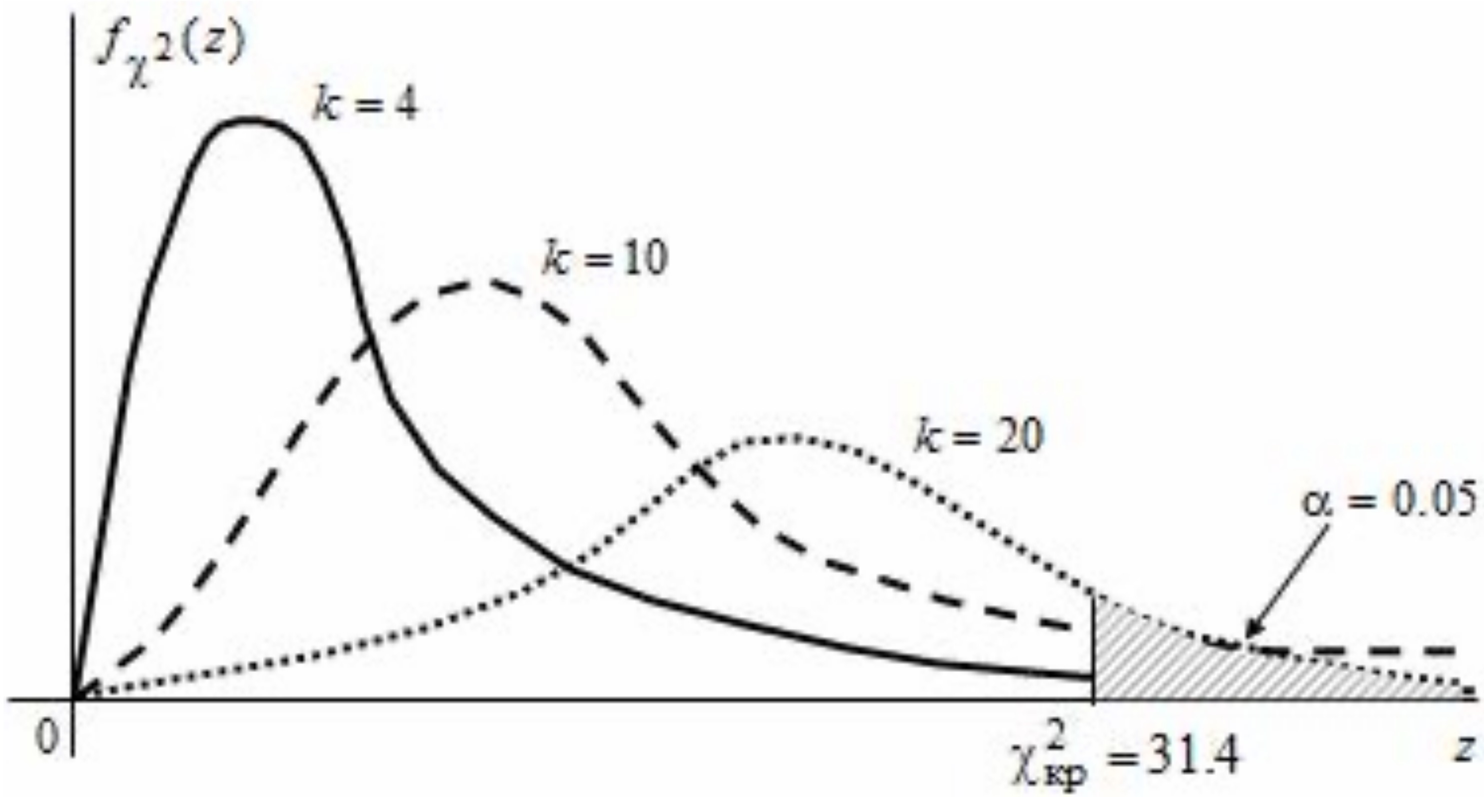
Как посчитать критерий

https://colab.research.google.com/drive/1EuF6rmUqZtt8EQEThsVeiSbNZ8G7TKcx

Смысл p-value

- Распределение χ^2 дает возможность оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений,
- Будем исходить из того, что величина ***X*** действительно распределена по закону ***F (x).***
- Тогда вероятность ***p (p-value)***, есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений будет не меньше, чем фактически наблюденное в данной серии опытов значение χ^2.
- Если эта вероятность***, p*** весьма мала (настолько мала, что событие с такой вероятностью можно считать практически невозможным), то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе ***H*** о том, что закон распределения величины ***X*** есть ***F (x) .***
- Эту гипотезу следует отбросить как неправдоподобную. Напротив, если вероятность ***p*** сравнительно велика, можно признать расхождения между теоретическим и статистическим распределениями несущественными и отнести их за счет случайных причин. Гипотезу ***H*** о том, что величина ***X*** распределена по закону ***F*** (x), можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным.

Смысл p-value



На сколько должно быть мало p-value?

- Вопрос неопределенный; он не может быть решен из математических соображений, так же как и вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события для того, чтобы считать его практически невозможным.
- На практике, если ***p*** оказывается меньшим чем 0,1, рекомендуется проверить эксперимент, если возможно — повторить его и в случае, если заметные расхождения снова появятся, пытаться искать более подходящий для описания статистических данных закон распределения.
- С помощью критерия χ^2 (или любого другого критерия согласия) можно только в некоторых случаях ***опровергнуть*** выбранную гипотезу ***H*** и отбросить ее как явно несогласную с опытными данными.
- Если же вероятность ***p*** велика, то этот факт сам по себе ни в коем случае не может считаться доказательством справедливости гипотезы ***H,*** а указывает только на то, что гипотеза не противоречит опытным данным.

Критерий Колмогорова

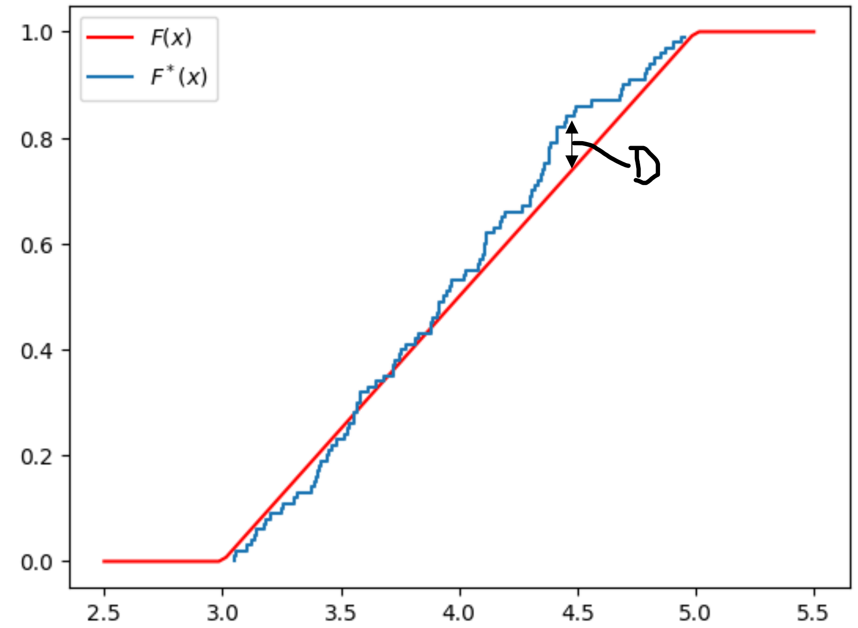
$$D = \max|F^*(x) - F(x)|$$

- Какова бы ни была функция распределения F(***x***) непрерывной случайной величины ***X*,** при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений ***n*** вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

- стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$



Как посчитать критерий Колмогорова

https://colab.research.google.com/drive/1g9aS5RpoBYB-xcwreZ0TCns0RBBL-mdv

Критерий Колмогорова. Когда применим?

- Можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение ***F(x)*** полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т. е. когда известен не только вид функции распределения ***F(x),*** но и все входящие в нее параметры.
- Такой случай сравнительно редко встречается на практике. Обычно из теоретических соображений известен только общий вид функции ***F(x)****, а* входящие в нее числовые параметры определяются по данному статистическому материалу.
- При применении критерия χ^2 это обстоятельство учитывается соответствующим уменьшением числа степеней свободы распределения χ^2**.** Критерий А. Н. Колмогорова такого согласования не предусматривает. Если все же применять этот критерий в тех случаях, когда параметры теоретического распределения выбираются по статистическим данным, критерий дает заведомо завышенные значения вероятности P(X); поэтому мы в ряде случаев рискуем принять как правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными данными.

Оценка параметров

- Для поиска закона распределения нужно много наблюдений
- А что делать если их мало?
- На основе ограниченного числа наблюдений можно приблизительно найти параметры законов – мат. ожидание, дисперсия …
- Любая оценка на основе опытов – случайная величина
- Будем заниматься поиском «оценок параметров»
- Желательно найти оценку с минимальной ошибкой

Общая задача оценки параметров

Дано:

Наблюдения сл.величины X: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Закон распределения наблюдений одинаков

Пусть $\tilde{a} = \tilde{a}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – оценка

$\tilde{a}$ - это функция

$\tilde{a}$ - это случайная величина

Закон распределения $\tilde{a}$ зависит от:

1) закона распределения X

2) числа наблюдений n

Требуется найти $\tilde{a}$ удовлетворяющую требованиям на следующем слайде

Требования к оценке $\tilde{a}$

- Состоятельность: при увеличении n оценка $\tilde{a}$ должна сходиться по вероятности к параметру a.
- Несмещенность: $\mathrm{M}[\tilde{a}] = a$
- Эффективность: $\mathrm{D}[\tilde{a}] \to \min$

Оценка $\tilde{a}$ должна быть получена за приемлемое время, поэтому требования могут немного нарушаться.

Методы многокритериального анализа результатов моделирования

Определение СППР

- СППР (DSS) – автоматизированная система, которая *помогает* лицам, принимающим решения (ЛПР), использовать данные и модели, чтобы решать *слабоструктурированные и неструктурированные* проблемы.
- Слабоструктурированные проблемы – это проблемы, которые содержат как количественные так и качественные переменные. Причем качественные аспекты проблемы имеют тенденцию доминировать.
- СППР и экспертная система не одно и тоже!

Критерии

- Критерий – позволяет оценить степень достижения цели/целей

Отношение критерий-цели – многие-ко-многим

Различают задачи:

- Однокритериальные – решать проще
- Многокритериальные – решать сложнее

Требования к критериям

- Полнота – набор критериев должен охватывать все существенные аспекты решаемой задачи.
- Действенность – набор критериев может быть с пользой применен при анализе задачи.
- Разложимость – набор критериев можно разбить на части, чтобы упростить решаемую задачу.
- Не избыточность – критерии не должны дублировать одни и те же аспекты решаемой задачи.
- Минимальность – векторный критерий должен иметь по возможности минимальную размерность.

Альтернатива

- Альтернатива - каждое из несовместных решений отображаемое точкой критериального пространства.
- Совокупность всех точек представляет собой полное множество альтернатив. Оно содержит как реализуемые, так и не реализуемые решения. Альтернативами являются как решения по выбору управления, так и решения по выбору структуры или параметров управляемой системы.
- Основная задача принятия решений - задача оптимизации или ранжирования альтернатив.

Пусть $A=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ – множество реализуемых альтернатив.

Тогда оптимальная альтернатива запишется в виде

$$a^0 = \arg \max_{a}/\min F(a)$$

где $F(a)$ - значение критерия при альтернативе a.

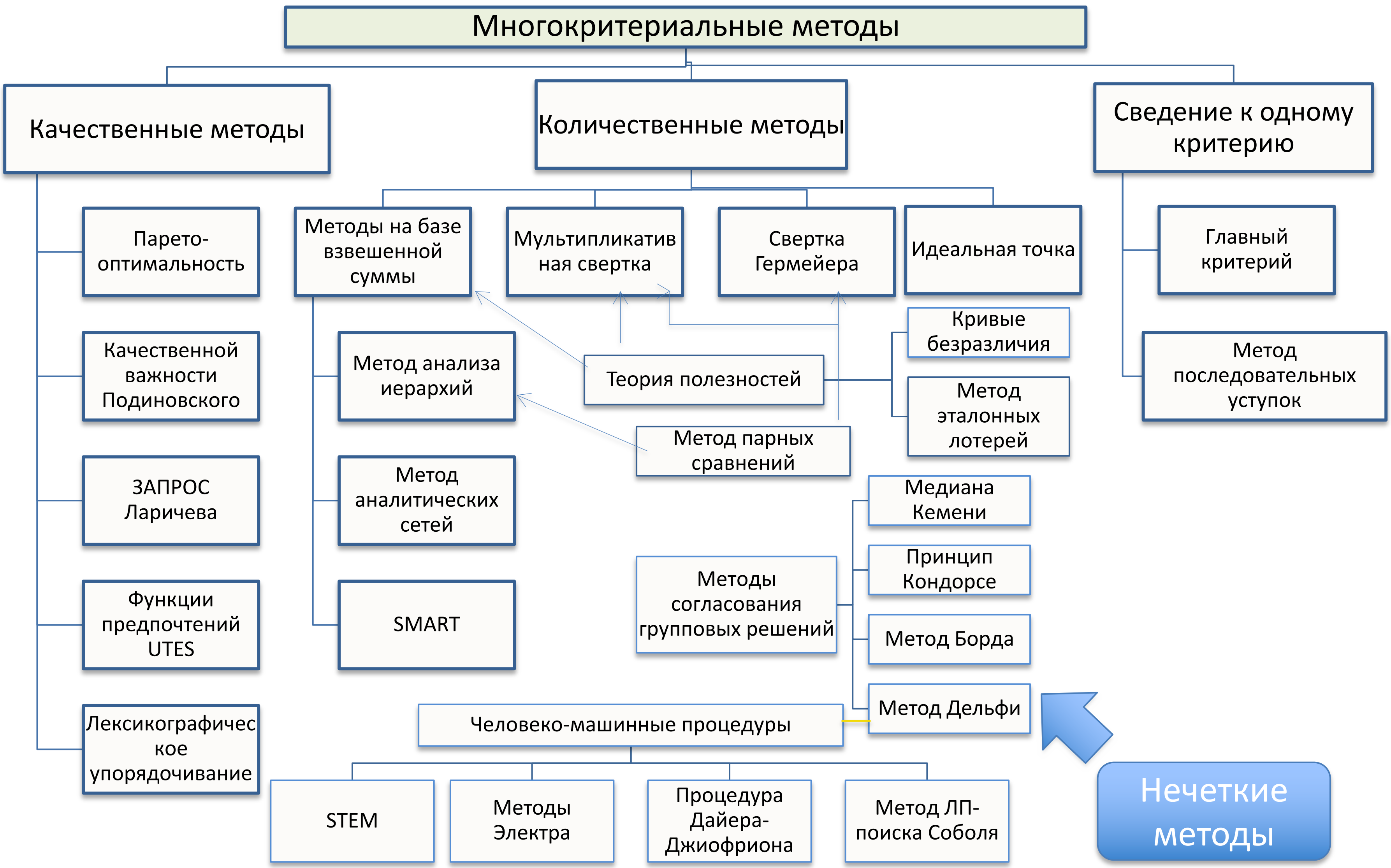
Оптимальность по Парето

- Альтернатива А1 **доминирует** над альтернативой А2, если по всем показателям (локальным критериям) А1 не уступает А2, а хотя бы по одному из них лучше.
- Решение следует искать среди недоминируемых альтернатив

Проблемы:

- Недоминируемых альтернатив может быть много
- Нет способа ранжировать внутри множеств недоминируемых и доминируемых альтеранитв

Методы поддержки решений



Взвешенная сумма

$$\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \text{, где}$$

$u_i=(w_i- w_{i\,min})/(w_{i\,max}- w_{i\,min})$ если $w_i \rightarrow max$

$u_i=(w_{imax}- w_i)/(w_{i\,max}- w_{i\,min})$ если $w_i \rightarrow min$

$\sum \alpha_i=1$

непосредственное назначение для n < 10

Нахождение весов

- Матрица парных сравнений
- Элементы матрицы a_{ij} показывают во сколько раз i-й показатель важнее j – го

$$x_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} \qquad \alpha_i = \frac{x_i}{\sum_n x_i}$$

$$L_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \right) \qquad ИС = \frac{L_{\max} - n}{n-1}$$

Прочие количественные методы

- Свертка Гермейера **W= min α_i u_i**

- Мультипликативная свертка **W= Π $u_i^{\alpha_i}$**

- Идеальная точка

$$d(w_1, w_2, ..., w_n) = \sqrt{(w_1 - w_1^u)^2 + (w_2 - w_2^u)^2 + ... + (w_n - w_n^u)^2}$$

Медиана Кемени

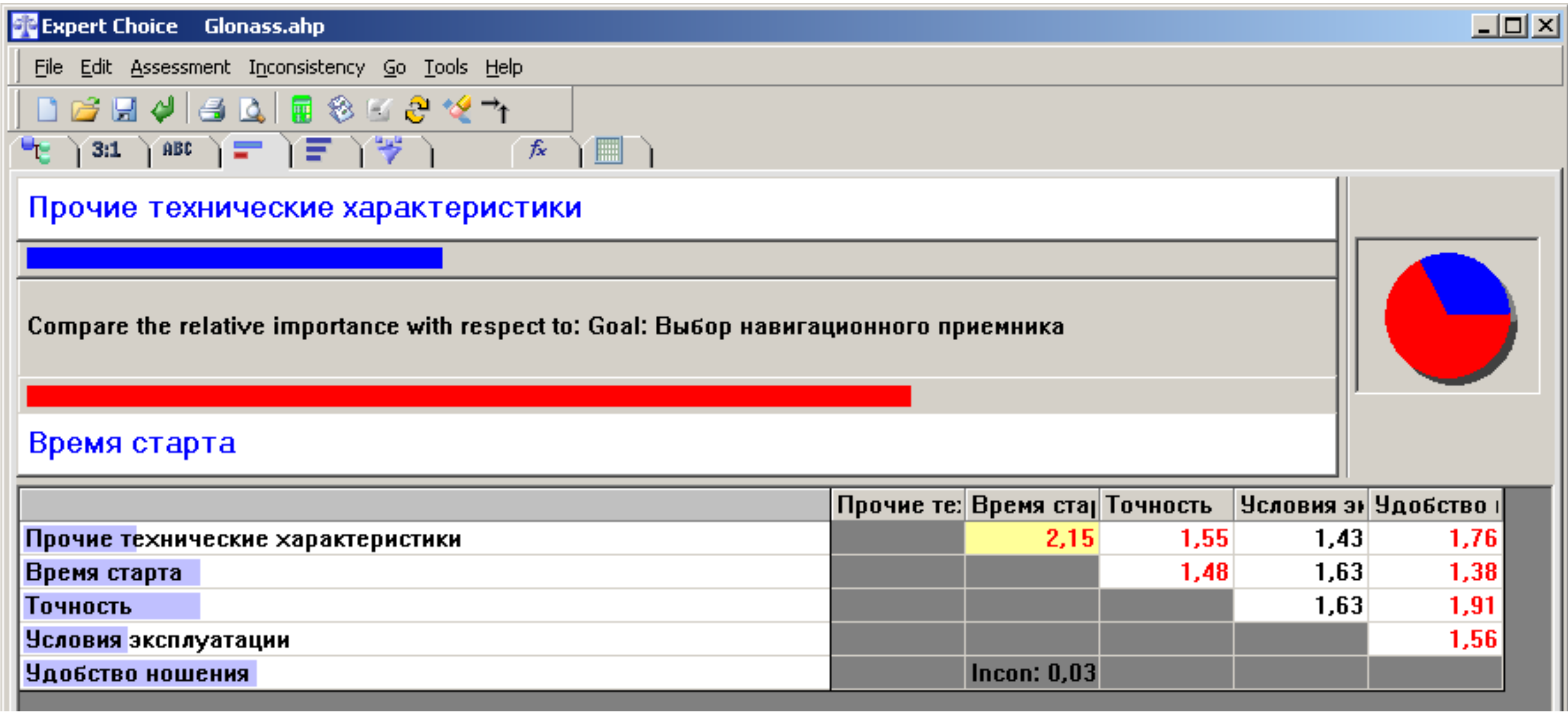
$$\mathrm{d(A,B)}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|$$, где N - число альтернатив

$$a_{ij}=\begin{cases}1-\text{если i - я альтернатива предпочтительней j - й}\\ 0\text{ - если i - я альтернатива эквивалентна j - й}\\ \text{-1 - если j - я альтернатива предпочтительней i - й}\end{cases}$$

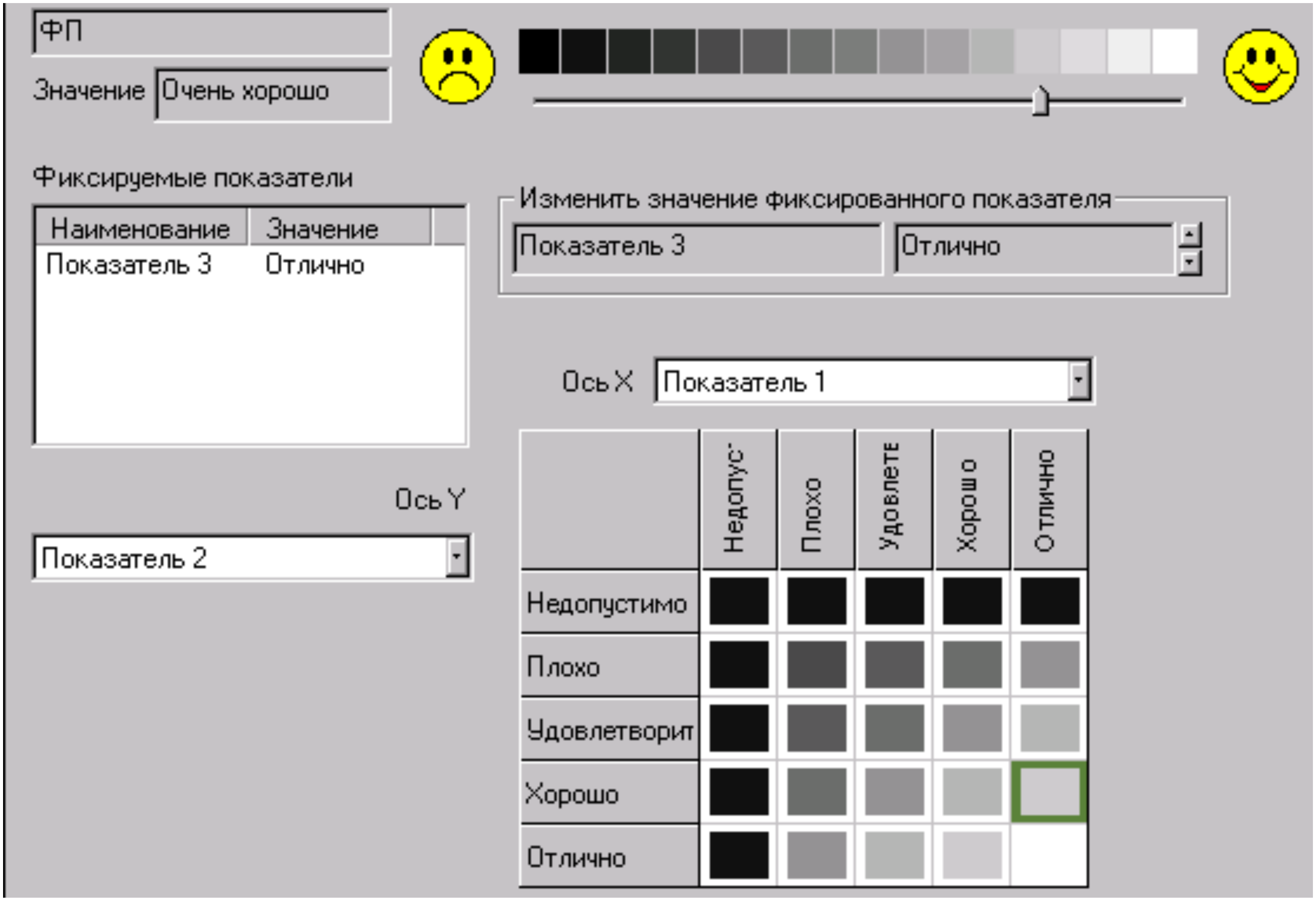
$$\min_{K}\sum_{i=1}^{n}d(K,R_i)$$

где K – среднее ранжирование(медиана Кемени),
R_i – ранжирование полученное экспертом

Пример парных сравнений



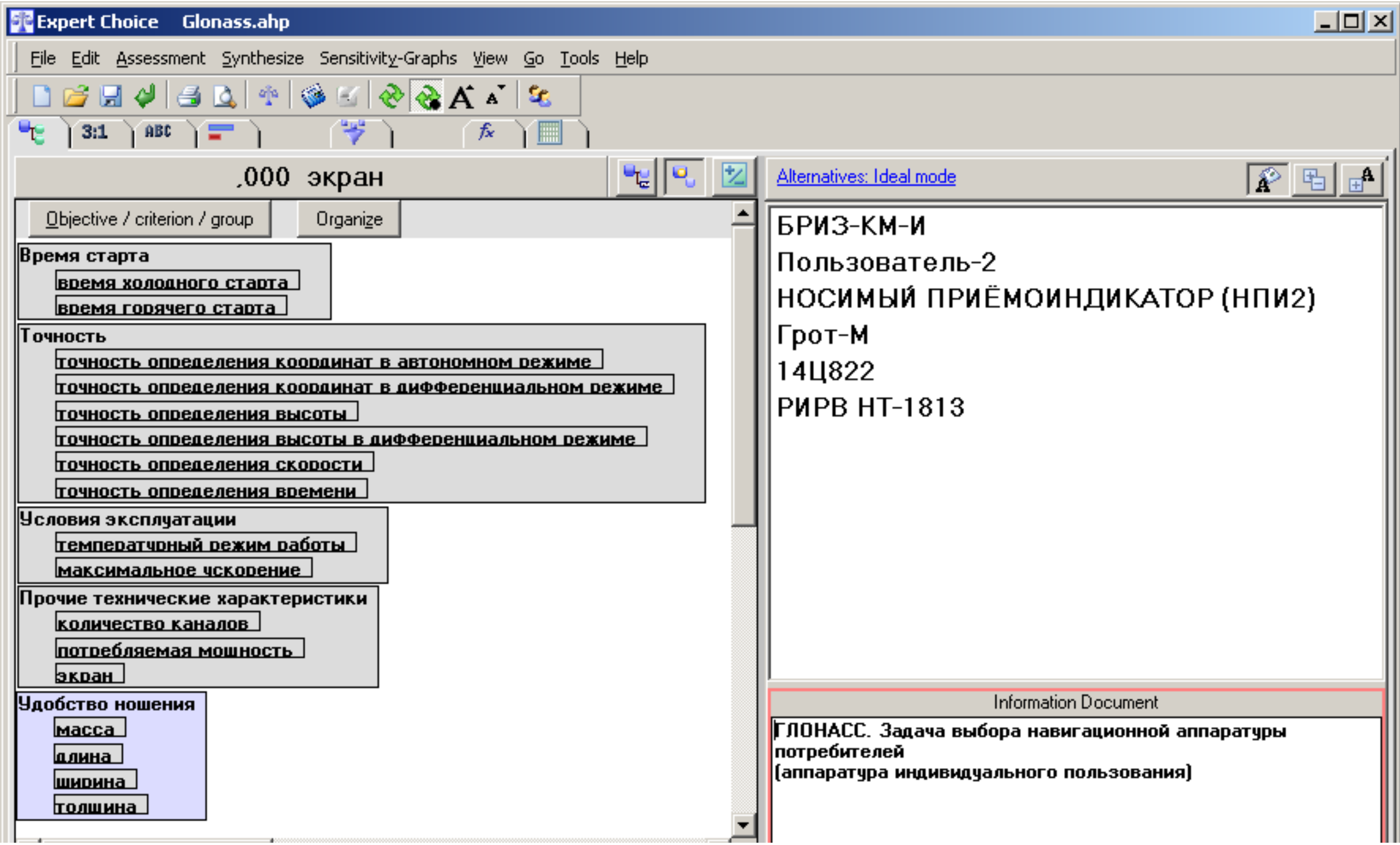
Функция предпочтений



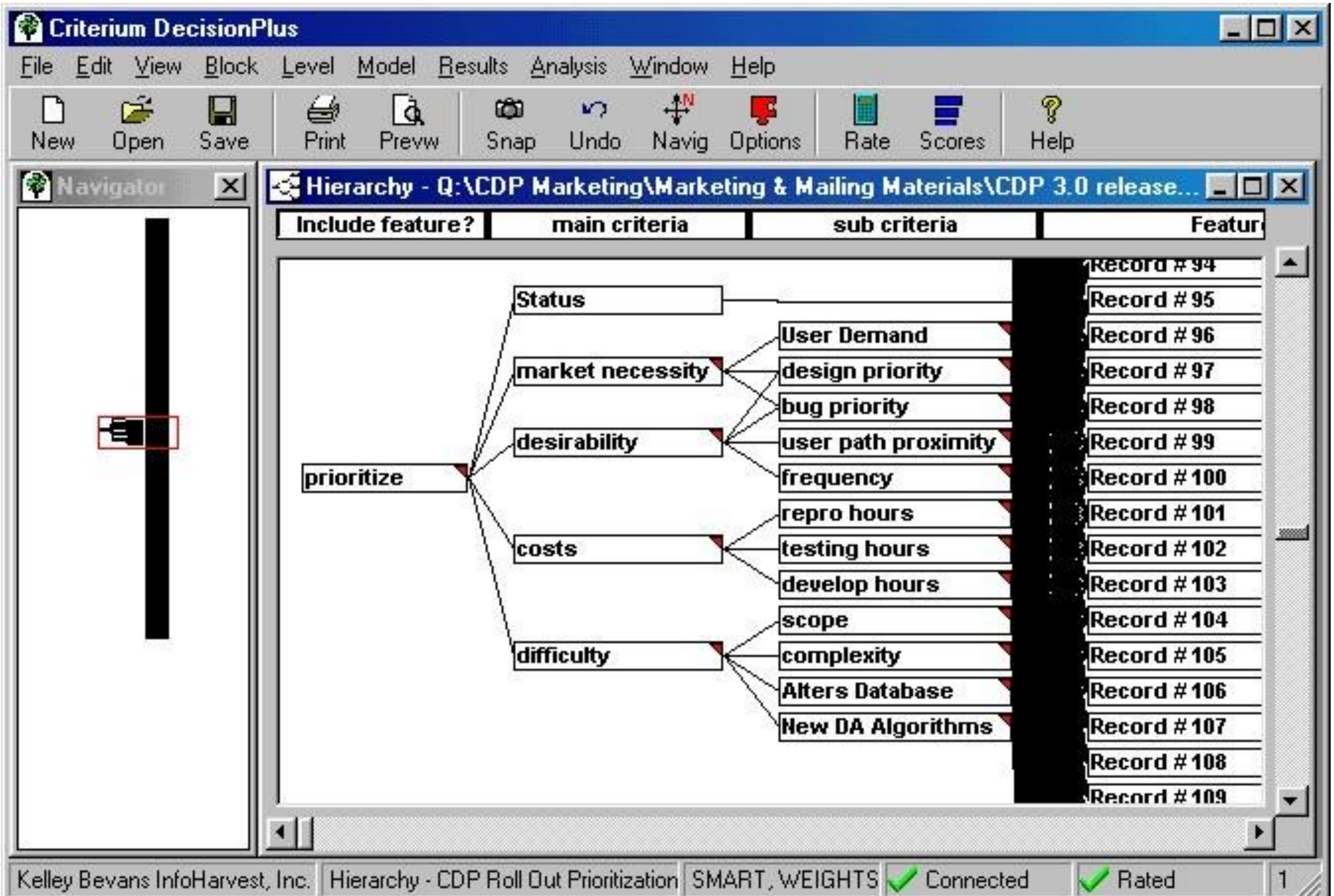
СППР оболочки

- Expert Choice
- Super Decisions
- Criterium Decision Plus
- Decision Lens
- ИАС “ОЦЕНКА и ВЫБОР”
- «Быстрый прототип»
- DASS
- FEASIBLE GOALS
- ПК MOVI
- Web-HIPRE

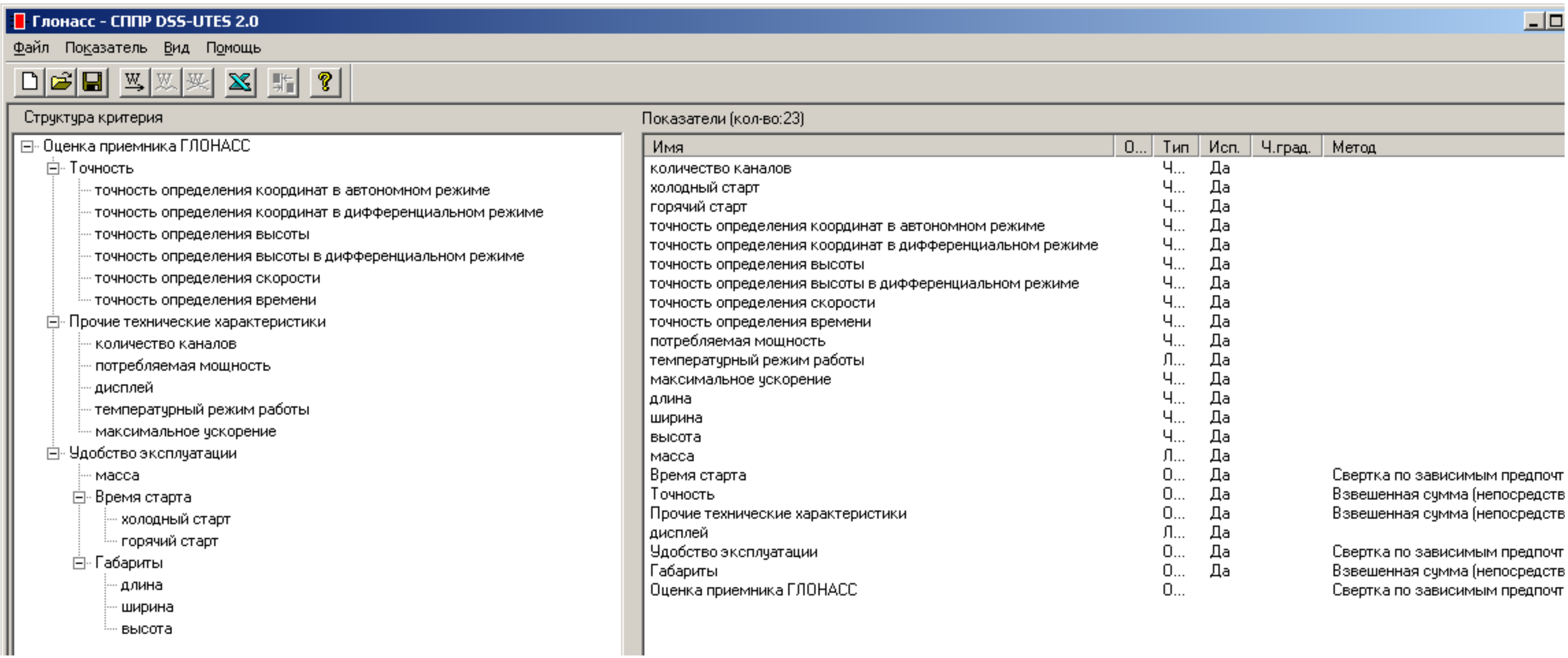
Фрагменты интерфейсов



Фрагменты интерфейсов



Фрагменты интерфейсов

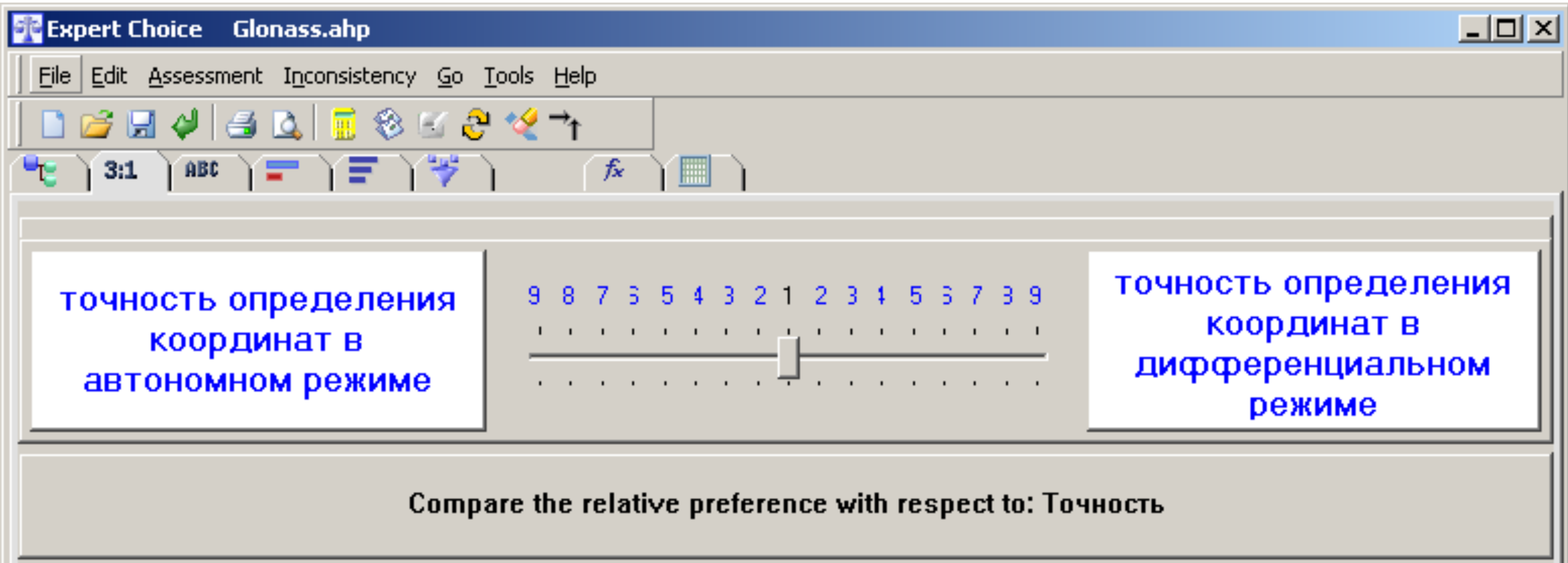


Фрагменты интерфейсов

OK Cancel

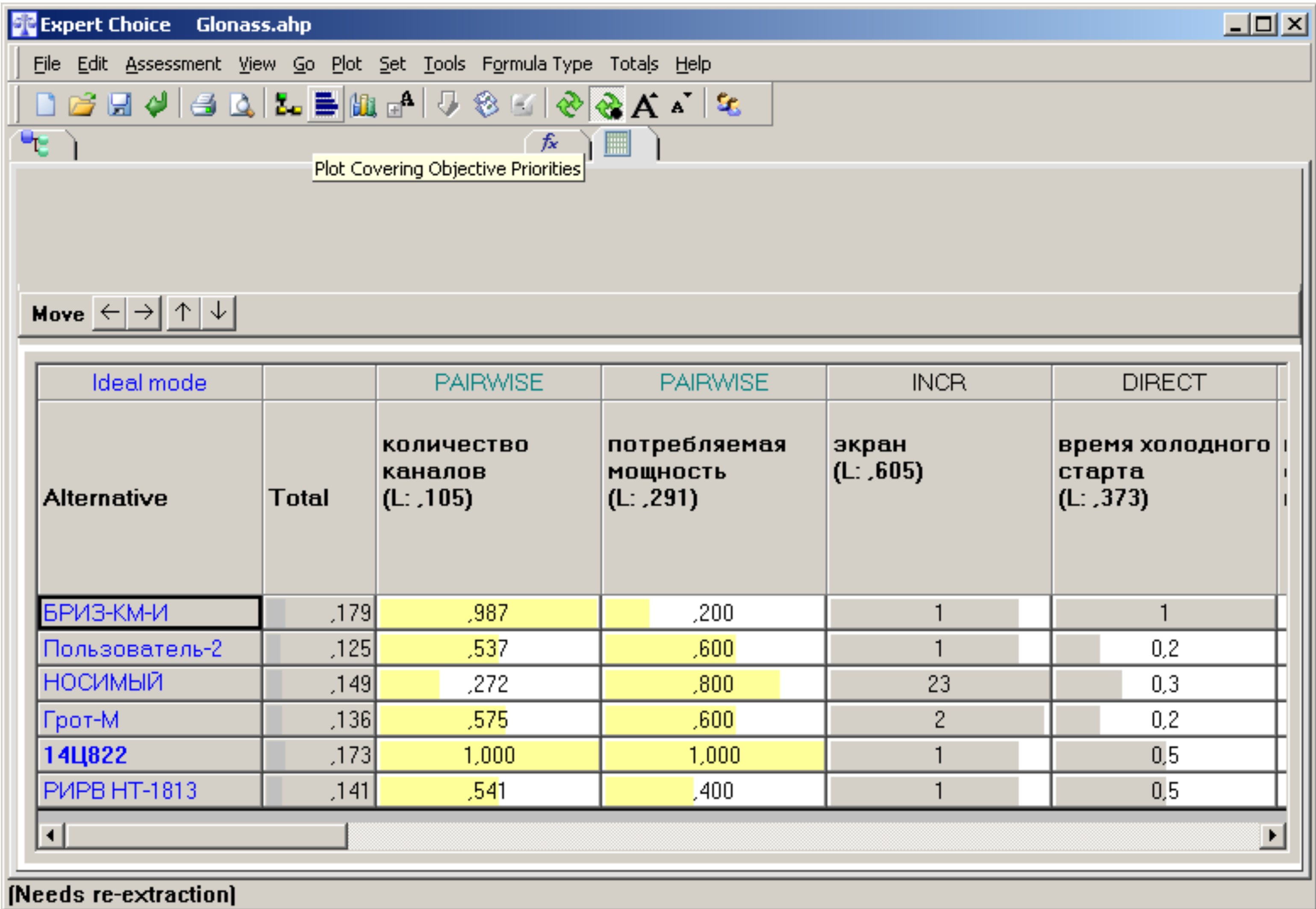
	Priority	Value	
точность определения координат в автономном режиме	0,125	0,1250	
точность определения координат в дифференциальном режиме	0,125	0,1250	
точность определения высоты	0,25	0,2500	
точность определения высоты в дифференциальном режиме	0,25	0,2500	
точность определения скорости	0,125	0,1250	
точность определения времени	0,125	0,1250	
Total	1	1,0000	

Фрагменты интерфейсов



	точность о	точность о	точность о	точность о	точность о	точность о
точность определения координат в ав		1,0				
точность определения координат в ди			2,0			
точность определения высоты				1,0		
точность определения высоты в дифф					2,0	
точность определения скорости						1,0
точность определения времени		Incon: 0,00				

Фрагменты интерфейсов



Ideal mode		PAIRWISE	PAIRWISE	INCR	DIRECT
Alternative	Total	количество каналов (L: ,105)	потребляемая мощность (L: ,291)	экран (L: ,605)	время холодного старта (L: ,373)
БРИЗ-КМ-И	,179	,987	,200	1	1
Пользователь-2	,125	,537	,600	1	0,2
НОСИМЫЙ	,149	,272	,800	23	0,3
Грот-М	,136	,575	,600	2	0,2
14Ц822	,173	1,000	1,000	1	0,5
РИРВ НТ-1813	,141	,541	,400	1	0,5

Численные методы

- Численные (вычислительные) методы — методы решения математических задач в численном виде.
- Представление как исходных данных в задаче, так и её решения — в виде числа или набора чисел.

Примеры задач на использование численных методов

- решение систем линейных уравнений;
- интерполирование и приближённое вычисление функций;
- численное интегрирование;
- численное решение системы нелинейных уравнений;
- численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численное решение уравнений в частных производных;
- решение задач оптимизации.

Нахождение градиента

- Численное дифференцирование. Конечные разности
- Аналитическое решение (например, в sympy)
- Автоматическое дифференцирование

  (см. https://fmin.xyz/docs/methods/Autograd.html)

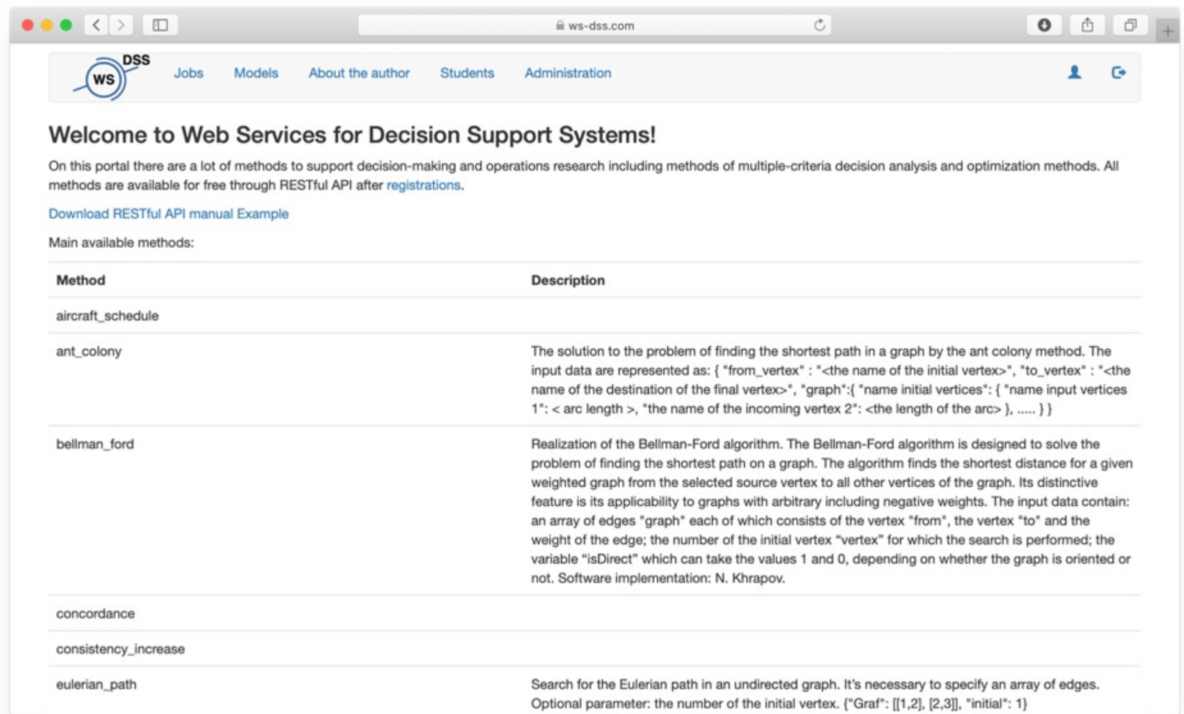
ГОСТ 19.101-77

По видам программы делят на:

- компонент — программа, рассматриваемая как единое целое, выполняющая законченную функцию и применяемая самостоятельно или в составе комплекса;
- комплекс — программа, состоящая из двух или более компонентов и (или) комплексов, выполняющих взаимосвязанные функции, и применяемая самостоятельно или в составе другого комплекса.

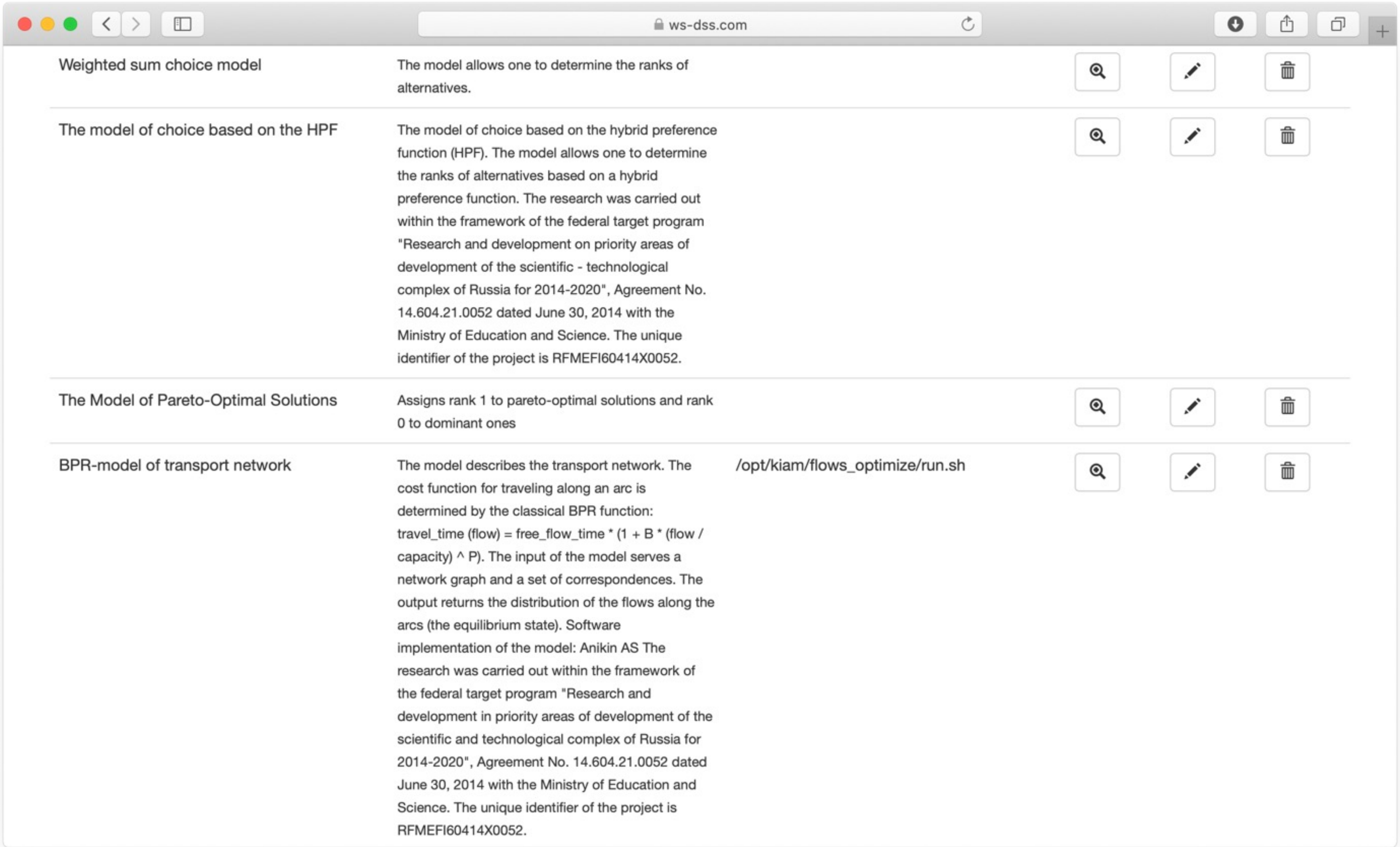
WS-DSS.COM

- Ruby on Rails
- PostgreSQL
- Implementation of models in Python, Ruby, R, C ++
- SCIP, metis, nlopt optimizers
- RESTful API integration with JSON and console methods



Sidekiq

Models in WS-DSS



ws-dss.com

Weighted sum choice model	The model allows one to determine the ranks of alternatives.		
The model of choice based on the HPF	The model of choice based on the hybrid preference function (HPF). The model allows one to determine the ranks of alternatives based on a hybrid preference function. The research was carried out within the framework of the federal target program "Research and development on priority areas of development of the scientific - technological complex of Russia for 2014-2020", Agreement No. 14.604.21.0052 dated June 30, 2014 with the Ministry of Education and Science. The unique identifier of the project is RFMEFI60414X0052.		
The Model of Pareto-Optimal Solutions	Assigns rank 1 to pareto-optimal solutions and rank 0 to dominant ones		
BPR-model of transport network	The model describes the transport network. The cost function for traveling along an arc is determined by the classical BPR function: travel_time (flow) = free_flow_time * (1 + B * (flow / capacity) ^ P). The input of the model serves a network graph and a set of correspondences. The output returns the distribution of the flows along the arcs (the equilibrium state). Software implementation of the model: Anikin AS The research was carried out within the framework of the federal target program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014-2020", Agreement No. 14.604.21.0052 dated June 30, 2014 with the Ministry of Education and Science. The unique identifier of the project is RFMEFI60414X0052.	/opt/kiam/flows_optimize/run.sh	

Parameters

ws-dss.com

User: vsudakov@bk.ru Русский | English

WS DSS Jobs Models About the author Students Administration

Name: The model of choice based on the HPF

Description: The model of choice based on the hybrid preference function (HPF). The model allows one to determine the ranks of alternatives based on a hybrid preference function. The research was carried out within the framework of the federal target program "Research and development on priority areas of development of the scientific - technological complex of Russia for 2014-2020", Agreement No. 14.604.21.0052 dated June 30, 2014 with the Ministry of Education and Science. The unique identifier of the project is RFMEFI60414X0052.

Url:

Internal method: GFP

Accessibility: public

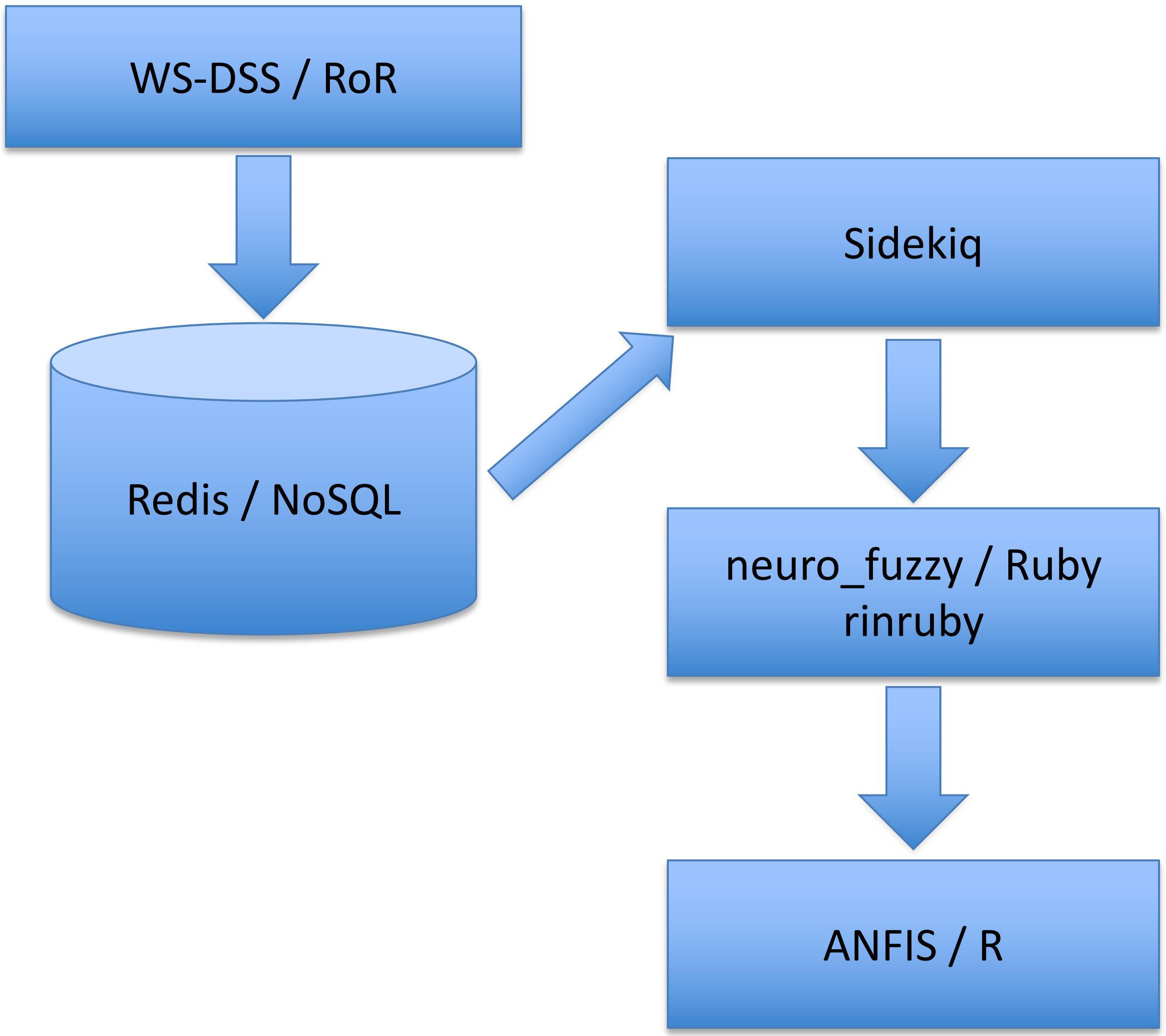
Model parameters

Name	Description	integer.	Number of meas.	Min value	Max value	Required	Replication
mk		i18n: Yes	3			i18n: Yes	i18n: No
p		i18n: Yes	1			i18n: Yes	i18n: No
criteria_weight		i18n: No	1	0.0		i18n: Yes	i18n: No
criteria_values		i18n: No	2			i18n: Yes	i18n: No
alternative_rank		i18n: No	1	0.0	1.0	i18n: No	i18n: No
interval		i18n: No	1			i18n: Yes	i18n: No
scale		i18n: No	2			i18n: Yes	i18n: No
full_trace		i18n: No	0			i18n: Yes	i18n: No

Edit | Back

Feedback

Interaction scheme



Спасибо за внимание!