Johdanto

Vaikkakin maan pallonmuotoisuus kyseenalaistettiin vuosisatojen ajan, olivat useat oppineet vakuuttuneita tästä jo ennen Ptolemaiosta. Nekin, jotka luulivat maata litteäksi, pitivät taivasta puolipallon muotoisena. Niinpä tuli nopeasti tarve kuvata kaarevaa pintaa litteälle kartalle, ja huomattiin, ettei kuvauksesta selvitä ilman vääristymiä. Ja vaikka tiedot mannerten ja merien sijainneista olivat hyvin puutteellisia, kuvasi pituus- ja leveyspiirien muodostama asteverkko jo varhaisissa kartoissa käytettyjä projektioita.

Antiikin ja keskiajan projektiot

Antiikin aikaan ei yritetty kuvata koko maapalloa samalle kartalle, vaan suurin kerralla kuvattava alue oli ns. oikumenia eli asuttu maailma. Siksi tuolloin vältyttiin vielä ongelmilta, joita syntyi kuvattaessa koko pallopinta tasolle.

Viivatarkka lieriöprojektio

Nykyisin termein viivatarkaksi lieriöprojektioksi kutsuttava projektio on yksi vanhimmista projektioista. Asteverkon yksinkertaisuudesta johtuen projektio on helppo konstruoida, ja tämä ominaisuus kiehtoi tuon ajan kartantekijöitä. Projektion keksijänä pidetään Marinus Tyreläistä (n. 100 jKr.), josta on jäänyt tietoa ainoastaan viitteinä Ptolemaioksen Geographiassa. Marinus valitsi Rhodoksen kautta kulkevan paralleelin (36°N) oikeaan mittakaavaan antamalla meridiaanien välimatkaksi 4/5 paralleelien välimatkasta. Kreikkalainen Klaudios Ptolemaios (n. 90-170 jKr.) antoi tarkennuksena suhteeksi 93/115 , mikä on hyvin lähellä oikeaa arvoa cos 36°. Ptolemaios itse suositteli projektiota vain pienien alueiden karttoihin, ja hän antoikin ohjeen kuvata meridiaanit samassa mittakaavassa kartan keskimmäisen paralleelin kanssa. Projektio olikin yleisesti käytössä Geographian eri versioissa, siihen täydennyksenä myöhemmin lisätyissä kartoissa ja muissa pienien alueiden kartoissa monissa 1500-1600 -lukujen kartastoissa.

Ptolemaioksen projektiot

Klaudios Ptolemaios oli merkittävä henkilö kartografian kehityksessä Euroopassa ja Lähi-idässä ennen renessanssin aikaa. Hänen teoksistaan kartoitukseen liittyvää 8-osaista Geographiaa ja matematiikkaa sekä astronomiaa tutkivaa 13-osaista Almagestia pidettiin vielä 1400-luvullakin alojensa luotettavimpina lähdeteoksina. Marinuksen projektion kommentoinnin lisäksi Ptolemaios ehdotti kolmea omaa projektiotaan.

Ptolemaioksen ensimmäinen projektio on hyvin lähellä viivatarkkaa kartioprojektiota. Asuttua maailmaa kuvaava kartta (kuvio 5.1.) ulottuu Thulen leveyspiiriltä (63°N) aina päiväntasaajaan eteläpuolelle leveyspiirille joka on Meroen leveyspiiriä (16°25'N) vastaava (16°25'S). Meridiaanit ovat ympyrän säteitä kuitenkin vain päiväntasaajalle asti, Anti-Meroen leveyspiirille on meridiaanit merkitty samoin välimatkoin kuin mitä ne ovat Meroen leveyspiirillä ja pituuspiirit taittuvat päiväntasaajan kohdalla. Muut parametrit Ptolemaios sai kartalleen seuraavista reunaehdoistaan: karttaa reunustavan Thulen leveyspiirin pituuden tulee olla oikeassa suhteessa ekvaattorin pituuteen ja Rhodoksen leveyspiirin (36°N) tulee olla oikeassa mittakaavassa (meridiaanien mittakaavaan nähden). Tätä projektiota käytettiin joissakin Geographian painoksissa sekä maailman- että myös alueellisissa kartoissa.

Ptolemaios itse piti parempana toista projektiotaan, joka voitaisiin nykyään määritellä valekartioprojektioksi. Ptolemaioksen ajatus oli, että maata katsottaisiin kuvion 5.2a mukaisesti kohtisuoraan pisteeseen E, jolloin keskimeridiaani kuvautuu kartalle suorana ja muut meridiaanit käyrinä. Lisäksi Ptolemaios halusi kuvata puoliympyrän BED oikean pituisena janana. Piste E valittiin kartoitettavan alueen keskeltä: se sijaitsi Syenen kautta kulkevalla paralleelilla 23°50' N, joka oli suurin piirtein karttaa reunustavien Thulen ja Anti-Meroen paralleelien puolessa välissä. Tästä Ptolemaios laski paralleeliympyröiden keskipisteen H sijainniksi n 90° pohjoisnavan yläpuolella. Meridiaanien paikat hän merkitsi todellisin välimatkoin Thulen, Syenen ja Anti-Meroen paralleeleille ja piirsi kunkin meridiaanin näiden kolmen pisteen kautta kulkevana ympyränkaarena. Näin saatu projektio esittää pinta-alat lähes oikeassa suhteessa, mutta täydellistä pintatarkkuutta ei saavuteta ympyränkaaren muotoisilla meridiaaneilla. Ptolemaioksen toista projektiota voidaan kuitenkin pitää eräänlaisena Wernerin ja Bonnen projektioiden esiasteena. Vaikka Ptolemaios piti toista projektiotaan ensimmäistä parempana, ennusti hän kuitenkin ensimmäisen saavuttavan suuremman suosion yksinkertaisuuden vuoksi, ja ennustus näyttää toteutuneen, joskin Ptolemaioksen toista projektiota käytettiin joissakin Geographian versioissa.

Ptolemaios esitteli myös kolmannen, atsimutaalisen kaltaisen projektion, mutta tätä ei tiedetä koskaan käytetyn.

Ptolemaioksen laatimia ja uudelleen löydettyjä karttoja alettiin kopioida 1400-luvulla käsin ja 1477 alkaen myös vasta kehitetyn kirjapainotekniikan avulla. Runsaan sadan vuoden ajan kartat julkaistiin Geographiaan tukeutuen. Kokonaisina säilyneissä Geographian versioissa on erikseen osasto vanhoille Ptolemaioksen tietoihin perustuville kartoille ja toinen osasto renessanssin ajan uusimman tietämyksen mukaisille kartoille.

Puolisuunnikasprojektio

Viivatarkalle lieriöprojektiolle ilmestyi kilpailijaksi lähes yhtä yksinkertaisesti konstruoitava puolisuunnikasprojektio. Tätä projektiota käytti alkeellisissa tähtikartoissa ehkä jo Hipparkhos (n. 150 jKr.), mutta myöhemmät karttahistorioitsijat pitivät sitä Donnus Nicolaus Germanuksen (n.1420-n.1490) keksintönä, ja projektiota onkin kutsuttu nimellä Donis-projektio. Germanus käyttikin projektiota useissa Geographian versioissa ja myös useimmat muiden kartantekijöiden piirtämät alueelliset kartat oli kuvattu tällä projektiolla. 1500-luvun loppupuolella puolisuunnikasprojektio oli alueellisten karttojen pohjana mm. Mercatorin, Orteliuksen ja Saxtonin kartastoissa. Mercator käytti myös 1578 alkaen omaa versiota projektiosta: siinä oikean mittakaavan paralleelit eivät ole kartan laitimmaiset vaan n. ¼:n ja ¾:n kohdalla, jolloin vääristymät vähenevät.

Globulaariprojektiot

Jo ennen renessanssin aikaa käytettiin muutamia projektioita, joissa pallonpuolisko oli kuvattu ympyrän sisään, ja näin saatu aikaan pallonkaltainen vaikutelma.

Ensimmäisen tunnetun version kehitti islamilainen tiedemies Al-Bîrûnî (973-n.1050) vuoden 1000 tienoilla. Hänen projektiossaan meridiaanit on merkitty tasavälein ekvaattorille ja piirretty ympyränkaarina napojen ja ekvaattorin pisteiden kautta. Myös paralleelit ovat ympyränkaaria joiden pisteet on saatu jakamalla suora keskimeridiaani ja pallonpuoliskoa ympyröivä ympyrä tasavälein. Al-Bîrûnîn työstä tietämättä italialainen Giovanni Battista Nicolosi (1610-1670) esitteli projektion omana keksintönään 1660, ja projektiosta tulikin yleinen itäistä ja läntistä pallonpuoliskoa kuvaavissa kartoissa 1800-luvun aikana. Al-Bîrûnî esitteli myös muutamia muita projektioita, mm. projektion jossa kaikkien pisteiden etäisyys kahdesta annetusta pisteestä on oikea. Aikaisimmat säilyneet Al-Bîrûnîn projektioilla tehdyt kartat ovat kuitenkin vasta renessanssin aikakaudelta.

Englantilainen Roger Bacon (1214-1294) teki oman globulaariprojektionsa 1265; tämä kartta poikkeaa Al-Bîrûnîn projektiosta siten, että paralleelit ovat vaakasuoria suoria, jotka on piirretty pallonpuoliskoa ympyröivän ympyrän tasavälisten pisteiden kautta. Seuraavat muunnelmat esitti Peter Apian 1524, hänen ensimmäisessä versiossaan ulkoympyrän sijaan keskimeridiaanille oli merkitty paralleelit tasavälein, toiseen oli muutettu myös meridiaanit ympyränkaarista ellipsin puolikkaiksi. Ranskalaisen Georges Fournierin v. 1643 kehittämistä globulaariprojektioista ensimmäinen käyttää Al-Bîrûnîn tapaan ympyränkaaria paralleeleina, ja toisessa paralleelit ovat suoria Baconin tapaan. Molemmissa meridiaanit ovat ellipsin puolikkaita.

Globulaariprojektioiden ”ympyrä sulkeutui” v. 1660 kun Nicolosi kehitti Fournierin ensimmäisestä projektiosta muunnelmansa, jonka siis Al-Bîrûnî oli keksinyt jo 650 vuotta aikaisemmin.

Atsimutaaliset projektiot

Yhä käytössä olevista projektioista tunnettiin antiikin aikaan neljä atsimutaalista projektiota. Nämä on helppo piirtää polaarisessa asemassa yksinkertaisilla geometrisilla konstruktioilla, ja kolme perspektiivistä projektiota pystytään piirtämään myös ekvatoriaalisessa ja vinossa asemassa ilman trigonometriaa ja algebraa. Niinpä geometriset valmiudet näihin projektioihin ovat olleet olemassa jo ainakin Eukleideen (n. 300 eKr.) ajoista lähtien. Ennen 1500-lukua atsimutaalisten projektioiden käyttö rajoittui lähinnä tähtikarttoihin.

Hipparkhos käytti ortograafista projektiota 200-luvulla eKr. tähtitieteellisiin laskelmiin, ja myös intialaiset ja arabit käyttivät sitä tähän tarkoitukseen. Ensimmäistä kertaa maapallon karttoihin ortograafista projektiota tiedetään käytetyn 1515, jolloin saksalainen taiteilija ja kartografi Albrecht Dürer (1471-1528) suunnitteli Vanhan Maailman kartan vinoasentoisella ortograafisella projektiolla.

Gnomonista projektiota käytti tähtikartoissaan Thales Miletolainen (n. 624-547 eKr.), mutta maapallon kartoissa käyttö oli hyvin vähäistä ja alkoi ilmeisesti vasta 1600-luvulta. Alun perin projektio oli nimetty horologiseksi, nimitys gnomoninen otettiin käyttöön vasta 1800-luvulla. Nimitys tulee siitä, että gnomonisella projektiolla on yhteys aurinkokellojen gnomoneihin.

Hipparkhos, Ptolemaios ja ehkä jo aikaisemmin egyptiläiset tunsivat myös kolmannen perspektiivisen projektion, stereograafisen. Ennen renessanssia stereograafista projektiota käytettiin vain tähtikartoissa. Polaarisessa asemassa projektiota käytettiin ensimmäistä kertaa maapallon kartoissa 1507. Vinoasentoisena sitä käytettiin tähtikartoissa jo 400-luvulla, mutta 1514 vinoasentoinen stereograafinen projektio esiteltiin yhtenä Wernerin neljästä uudesta projektiosta. Ekvatoriaalisessa asemassa stereograafista projektiota käytti tähtikartassaan espanjalainen arabi al-Zarqâllu n. vuonna 1050, maapallon kartoissa se esiintyi ensimmäistä kertaa 1542. Rumold Mercator (1446/48-1614, Gerardin poika) teki 1587 maailmankartan tällä projektiolla, minkä jälkeen stereograafisen projektion ekvatoriaalinen asema oli hyvin yleinen itäistä ja läntistä pallonpuoliskoa esittävissä kartoissa seuraavien 200 vuoden aikana.

Viivatarkkaa atsimutaalista projektiota sanotaan käytetyn joissain egyptiläisten pyhien kirjojen tähtikartoissa, ja Al-Bîrûnî esitteli sen yhtenä projektioistaan n. vuonna 1000. Varhaisin säilynyt tähtikartta tällä projektiolla on vuodelta 1426. Maapallon karttoihin projektiota käytettiin ensimmäisen kerran 1510, ja Mercator käytti sitä kuuluisan v.1569 maailmankarttansa liitteenä olleessa pohjoisten napa-alueiden kartassa. Projektio on nimetty myös ranskalaisen Guillaume Postelin (1510-1581) mukaan, mutta hän käytti sitä vasta v. 1581. Myöhempinä vuosisatoina viivatarkasta atsimutaalisesta projektiosta tuli standardi maapallon napa-alueita kuvaaviin karttoihin. Ekvatoriaalisessa ja vinossa asemassa projektio oli huomattavasti vaikeammin konstruoitavissa, ja niinpä niitä käytettiinkin vasta 1800-luvulta alkaen.

Renessannsin ajan uudet projektiot

Viivatarkka kartioprojektio

Lisääntynyt maantieteellinen tietous, joka oli seurausta löytöretkistä, sai aikaan tarpeen suurempia alueita esittäville projektioille. Giovanni Matteo Contarini esitti 1506 maailmankartan, jossa hän käytti omaa muunnostaan Ptolemaioksen ensimmäisestä projektiosta. Kartassaan Contarini laajensi meridiaanien aluetta 180°:sta täyteen 360°:een ja paralleelien skaalaa pohjoisessa pohjoisnavalle asti (joka kuvautui ympyrän kaarena). Merkittävin muutos Ptolemaiokseen oli päiväntasaajan eteläpuolella: Contarini jatkoi meridiaanit suorina 35°S leveyspiirille saakka ilman taitetta ekvaattorilla. Näin hän esitti ensimmäisen viivatarkalla kartioprojektiolla valmistetun kartan. Johannes Ruysch käytti lähes samaa muunnelmaa 1507-8, mutta hän sijoitti pohjoisnavan paralleeliympyröiden keskipisteeseen, ja piti ekvaattorin lähes samassa mittakaavassa meridiaanien kanssa.

Myöhemmin 1500-luvulla alettiin käyttää myös hieman muunneltua versiota kartioprojektiosta. Siinä paralleelit ovat samankeskisiä ympyränkaaria ja meridiaanit suoria, mutta meridiaanit eivät ole paralleeliympyröiden säteitä vaan ne on muodostettu kuten puolisuunnikasprojektiossa merkitsemällä kahdelle paralleelille meridiaanit oikeassa mittakaavassa. Näin ollen meridiaanit eivät leikkaa paralleeleja suorassa kulmassa, eikä kyseessä ole aivan aito kartioprojektio. Ero on kuitenkin hyvin pieni, ja tätä muunnosta voidaankin pitää alkeellisena esiasteena kahden standardiparalleelin viivatarkalle kartioprojektiolle. Mm. Mercator käytti tätä versiota monissa Euroopan ja joidenkin pienempien alueiden kartoissa.

Wernerin sydämenmuotoiset projektiot

Myös Ptolemaioksen toisesta projektiosta luotiin 1500-luvulla kehittyneempiä versioita. Muutamia karttoja ilmestyi projektiolla, joissa meridiaanit koostuivat muutamasta erillisestä ympyränkaaresta muodostaen taitteita eri kaarien yhtymäkohdissa. Bernardo Sylvano jalosti tätä omassa maailmankartassaan 1511. Sylvanon kartta käsittää meridiaanit 320° leveydeltä ja paralleelit väliltä 80°N - 40°S. Meridiaanit on merkitty lähes oikeassa mittakaavassa kaikille paralleeleille, joten ne eivät ole enää ympyränkaaria. Sylvanon käyttämä projektio vastaakin Bonnen projektiota standardiparalleelilla 47°N. Sylvano valmisti kuitenkin tällä projektiolla vain yhden kartan.

Wieniläinen matematiikan professori Johann Stabius (1460-1522) kehitti vuoden 1500 tienoilla kolme uutta projektiota, jotka esittävät maapallon sydämenmuotoisena. Hän luuli keksineensä myös neljännen uuden projektion, mutta tämä oli vinoasentoinen stereograafinen projektio. Saksalainen Johannes Werner (1468-1522) julkaisi Stabiuksen neljä projektiota vuonna 1514 omassa versiossaan Geographiasta. Kaikissa kolmessa uudessa projektiossa samankeskisten tasaisin välein olevien paralleeliympyröiden keskipisteenä on pohjoisnapa ja meridiaanit on merkitty jokaiselle paralleelille siten että mittakaava on kaikilla paralleeleilla sama, näin ollen meridiaanit ovat suoraa keskimeridiaania lukuun ottamatta käyriä. Kolme projektiota eroavat toisistaan siinä, mikä on paralleelien ja keskimeridiaanin mittakaavojen suhde. Kaikki kolme Wernerin projektiota olivat pintatarkkoja, tosin käsite ei ollut ilmeisesti keksijöille tuttu. Werner ei itse valmistanut karttoja näillä projektioilla, vaan hän esitteli vain projektioihin perustuvat asteverkot.

Stabiuksen ja Wernerin ensimmäisessä projektiossa on ekvaattoria esittävä puoliympyrä jaettu 180 pituusasteeseen, jolloin paralleelien ja keskimeridiaanin mittakaavojen suhteeksi tulee /2. Wernerin piirroksessa esitettiin vain toinen pallonpuolisko, teoriassa projektiolla voisi kattaa pituuspiirit 229°:n alueelta ilman päällekkäisyyksiä. Tällä projektiolla ei tiedetä valmistetun yhtään karttaa.

Toisessa projektiossa paralleelien mittakaava on asetettu samaksi kuin keskimeridiaanin, ja näin saatu projektio joka nykytermein vastaa Bonnen projektion rajatapausta standardiparalleelilla . Tämä projektio tunnetaan nimellä Wernerin (myös Stab-Wernerin) projektio, ja se oli yleisessä käytössä 1700-luvulle asti kunnes Bonnen projektio syrjäytti sen. Esim. Mercator valmisti vuoden 1538 maailmankarttansa käyttäen Wernerin projektiota erikseen pohjoiselle ja eteläiselle pallonpuoliskolle.

Wernerin kolmannessa projektiossa paralleelien ja keskimeridiaanien mittakaavojen suhde on /3 mikä on saatu aikaan asettamalla ekvaattorilla kahden 90° toisistaan olevan pisteen välinen jänne (kaaren sijaan) samanpituiseksi kuin 90° keskimeridiaanilla. Ero toisen projektion asteverkkoon on hyvin pieni, nyt 60° N paralleeli muodostaa täyden ympyrän ja sen pohjoispuolella ei pystytä esittämään koko 360° leveyttä ilman päällekkäisyyttä. Kolmatta projektiota käytettiin muutamassa 1500-luvun maailmankartassa.

Sinimuotoinen projektio

Sinimuotoista projektiota käytettiin ensimmäistä kertaa ilmeisesti 1570 ja muutamassa kartassa myös 1600-luvun alussa. Laajempaan käyttöön sen toivat ranskalainen Nicolas Sanson d'Abbeville (1600-67) ja englantilainen John Flamsteed (1646-1719) 1600-luvun toisella puoliskolla, ja projektiota kutsutaankin myös Sanson-Flamsteedin projektioksi. Varhaisissa versioissa projektion meridiaanit on joskus piirretty suorina segmentteinä pyöristetyin taittein. Tämä johtui luultavasti jatkuvasti kaarevuuttaan muuttavien käyrien piirtämiseen tarvittavien välineiden puutteesta.

Mercator-projektio

Hollantilaisen Gerard Mercatorin (1512-1594) keksimä kulmatarkka lieriöprojektio lienee nykyäänkin karttaprojektioista kuuluisin. Maantieteen lisäksi mm. matematiikasta, teologiasta ja filosofiasta kiinnostunut Mercator valmisti karttapallon 1536 ja ensimmäisen julkaistun karttansa (Palestiinasta) vuotta myöhemmin. Hänen vuonna 1538 valmistamassaan maailmankartassa (edellä kuvatulla Wernerin projektiolla) esiintyi ensimmäistä kertaa nimi Pohjois-Amerikka. Mercator muutti Saksaan 1552 ja julkaisi vuonna 1569 kuuluisan maailmankarttansa. Tämä ensimmäinen Mercator-projektiolla tehty kartta koostui 18 lehdestä ja oli kooltaan peräti 1,3 x 2 m.

Mercatorin tavoite uuden projektion kehittämiseen liittyi merenkulkuun, hän nimesikin karttansa "uudeksi ja laajennetuksi maapallon kuvaukseksi, jossa on korjauksia navigointia varten". Mercator-projektion ainutlaatuinen ominaisuus on kaikkien loksodromien kuvautuminen suorina. Todennäköisesti Mercator määritti paralleelien välimatkat graafisesti 10° välein käyttämällä likimääräistä kaavaa .On myös esitetty, että menetelmä on voinut olla empiirinen loksodromien siirtäminen karttapallolta tasokartalle.

Mercator siis ymmärsi projektionsa perusteet vaikka tuon ajan matematiikka ei antanut välineitä tarkkojen kaavojen johtamiseen, logaritmilaskennan perusteet kehitettiin vasta 1600-luvun alussa. Englantilainen Edward Wright (1561-1615) tutki myöhemmin projektiota ja julkaisi taulukon, joka antoi Mercatorin laskelmia tarkemmat arvot paralleelien sijoittamiseen.

Projektion yleistyminen alkoi hitaasti, mutta vähitellen se sai valta-aseman merikartoissa. Vaikka Mercator itse tiesi projektion suurien pintavääristymien vuoksi sopivan huonosti maailmankarttoihin, tuli siitä yleinen myös maantieteellisissä kartoissa.

Ovaalinmuotoiset projektiot

Pallonpuoliskojen globulaariprojektioita vastaavat koko maapallon esittämiseen tarkoitetut ovaalinmuotoiset projektiot, joiden yhteisinä piirteinä ovat vaaka-suorat paralleelit ja käyrät meridiaanit. 1500-luvun alussa Francesco Rosselinin kartassa meridiaanit ovat ellipsejä, jotka leikkaavat navalla, ekvaattorin ja keskimeridiaanin suhteen ollessa 2:1. Abraham Orteliuksen 1570 ja Battista Agnesen 1540 kartoissa suhde on myös 2:1, mutta meridiaanit ovat puoliympyröitä. Ovaalinmuotoisten projektioiden käyttö loppui vuoden 1600 jälkeen, vaikka jotkut modernit valelieriöprojektiot ovat lähes samanlaisia.

Yhteenveto

Kreikkalaisen ja egyptiläisten osoittaman kiinnostuksen jälkeen projektioiden kehitys Euroopassa pysähtyi yli tuhanneksi vuodeksi. Uskonnollinen suvaitsemattomuus, sodat ja muut levottomuudet johtivat paitsi uusien innovaatioiden tyrehtymiseen myös aikaisempien töiden häviämiseen "pimeällä" keskiajalla. Onneksi islamilaisessa maailmassa tapahtui 700-luvulta alkaen kulttuurin heräämistä, joka edesauttoi antiikin tieteen säilymiseen myöhemmille ajoille.

Keskiajalla ainoastaan puolisuunnikasprojektio ja joitakin karkeita globulaariprojektioita kehitettiin Ptolemaioksen ja hänen edeltäjiensä työn jatkeeksi. Tosin tuohon aikaan karttojen sisältämä informaatio oli niin epätarkkaa, että alkeellisten projektioiden käyttö oli ymmärrettävää. Projektioiden kehitys renessanssin aikaan johtuikin osaksi maantieteellisen tietoisuuden lisääntymisestä. Tärkeämpi syy oli ehkä kiinnostus filosofiseen ja tieteelliseen tietoon sinänsä. Monet projektioiden kehitykseen vaikuttaneet henkilöt olivatkin filosofeja tai pappeja.

Projektioiden asteverkon konstruoinnin helppous oli aluksi tärkein syy projektion valinnassa, ja muu informaatio sijoitettiinkin kartalle usein interpoloimalla asteverkon viivojen väliin. Renessanssin aikaan myös muut ominaisuudet tulivat vähitellen merkittävämmiksi Mercatorin, Wernerin ja sinimuotoisen projektion tarjotessa pinta- ja kulmatarkkuusominaisuuksia, vaikka kaikkia näitä ei luultavasti tuolloin edes tunnettu. Joitakin karttoja pidettiin myös maapallon kauneutta kuvaavina taideteoksina, ja tällöin oli tärkeää, että asteverkon muoto kuvasi maan pallonmuotoisuutta.

Kehittyneempien projektioiden keksimisen esti myös tarvittavan matematiikan puute. Vaikka geometria ja algebran ja trigonometrian alkeet tunnettiin jo Ptolemaioksen aikoihin, sovellettiin näitä projektioiden konstruoimiseen laajemmin vasta renessanssin ajan jälkeen. Kuitenkin vasta differentiaalilaskennan nopea kehittyminen 1600-luvun lopulla avasi tien uusien matemaattis-perusteisten projektioiden kehittämiselle. Tarvetta tähän olikin mannerten ja maiden sijaintiin ja maapallon muotoon liittyvien tietojen tarkentuessa.

1700-luku

Renessanssin ajan projektioita ei tehty pinta- tai kulmatarkkuuden lähtökohdista käsin, vaan nämä ominaisuudet syntyivät ikään kuin sivutuotteina. Wernerin ja sinimuotoisen projektion pintatarkkuutta ei ilmeisesti edes tunnettu, ja stereograafinen projektio todettiin kulmatarkaksi vasta 1695 (Edmond Halley). Mercator kyllä tiesi projektionsa kulmatarkaksi, vaikka hänen tietonsa kulmatarkkuuden periaatteesta olivat melko alkeelliset.

1700-luvulla alettiin valjastaa voimakkaammin matematiikkaa karttaprojektio-oppiin. Maapallo todettiin ellipsoidin muotoiseksi, mikä alettiin ottaa huomioon myös projektioissa. Myöskin paikanmääritys tarkentui huomattavasti ja tämä lisäsi karttojen tarkkuutta. Tämä tarkkuus antoi lisää vaatimuksia kartanpiirtämiselle ja sai aikaan tarpeen myös uusille projektiolle. Joissakin projektioissa geometriset konstruktiot olivat mahdollisia, mutta monissa, varsinkin 1700-luvun uusissa projektioissa, asteverkon leikkauskohdat piti laskea kertomalla useita desimaalilukuja. Tärkeä keksintö tämän laskemisen vaatiman työmäärän vähentämiseksi olivat logaritmit. Skotlantilaisen John Napierin esiteltyä logaritmit ensimmäistä kertaa vuonna 1614, niistä tuli vähitellen hyödyllinen apuväline laskemiseen aina taskulaskinten ja tietokoneiden aikakauteen asti.

Merkittävämmän askeleen kohti matemaattisempaa projektio-oppia antoi differentiaalilaskennan keksiminen. Englantilainen Isaac Newton (1642-1727) kehitti differentiaalilaskennan perusteet 1665-66, mutta julkaisi ne Principiassaan vasta 1687 ja saksalainen Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ehtikin julkaisemaan oman kehitelmänsä 1684-86. Leibniz kehitti myös differentiaalilaskentaan nykyisin käytössä olevat symbolit. Juuri differentiaalilaskennan pohjalta Johann Heinrich Lambert (1728-1777) kehitti uusia kulma- ja pintatarkkoja projektioita.

Bonnen projektio

Ptolemaioksen toisen projektion pohjalta kehitetty valekartioprojektio, joka tunnetaan Bonnen projektion nimellä, oli ensimmäisen kerran käytössä jo 1500-luvun alussa, ja sitä käytettiin satunnaisesti myös 1600-luvulla. Projektio on kuitenkin nimetty ranskalaisen maantieteilijän Rigobert Bonnen (1727-1795) mukaan, joka aloitti projektion järjestelmällisen käytön vuodesta 1752 alkaen. Bonnen projektio olikin hyvin yleinen 1800-luvulla paitsi maanosien ja maiden pienimittakaavaisissa kartoissa myös eri maiden suurimittakaavaisissa topografisissa kartoissa.

Uusia atsimutaalisia projektioita

Aiemmin tunnettujen atsimutaalisten projektioiden lisäksi 1700-luvulla kehitettiin uusia perspektiivisiä projektioita. Kun ortograafisessa projektiossa projektiopiste on äärettömyydessä, gnomonisessa maapallon keskipisteessä ja stereograafisessa maapallon vastakkaisella puolella, 1700- luvun uusissa projektioissa projektiopistettä on sovitettu sopivaan kohtaan karttatasoa vastaan kohtisuoralle maapallon keskipisteen kautta kulkevalle suoralle, jotta kartta-alueen vääristymät vähenisivät. Philippe de La Hiren (1640-1718) projektiossa karttataso kulkee maapallon keskipisteen kautta ja projektiopisteen etäisyys kartan keskuksesta on kertaa maapallon säde, jolloin ekvaattoria esittävän ympyrän säde on kaksi kertaa 45° leveyspiiriä esittävän ympyrän säteen mittainen (pohjoisessa polaarisessa asemassa). Antoine Parent (1666-1718) ehdotti kolmea vastaavaa perspektiivistä projektiota, joissa projektiopisteiden etäisyydet olivat 1,594, 1,732 (eli  ) ja 2,105 kertaa säde. Nämä luvut hän sai omista pituuden ja pinta-alan vääristymien minimoimiseen tähtäävistä laskelmistaan. Mikään näistä varhaisista ranskalaisista perspektiiviprojektioista ei saavuttanut suurta suosiota, mutta ne olivat yksi askel kehityksessä, joka johti matemaattisen analyysin käyttöön alkeisgeometrian sijaan projektioiden parametrien määrittämisessä.

Maapallon muodon määrittäminen

Tarkan suurimittakaavaisen kartoituksen ensimmäisiä vaiheita oli Jean Dominique Cassinin (1625-1712) ja Jean Picardin (1620-82) koko Ranskan kartoitus vasta kehitetyn kolmiomittausmenetelmän avulla 1669. Mittaukset perustuivat yleiseen käsitykseen maan pallonmuotoisuudesta, mutta Picardin ja myöhemmin Cassinin pojan Jacquesin (1677-1756) suorittamat mittaukset Pariisin kautta kulkevalla meridiaanilla johtivat 1720 tulokseen, jonka mukaan paralleelit eivät olekaan tasavälein, mikä olisi tilanne pallolla. Mittausten pohjalta Jacques Cassini esitti maan olevan navoilta venynyt ellipsoidi. Toisaalta mm. Newton päätteli maan pyörimisen aiheuttavan päinvastoin litistymisen navoilla. Newton arvioi teoreettisten laskelmiensa perusteella tämän litistymän suuruudeksi n. 1/230.

Asian ratkaisemiseksi päätti Ranskan tiedeakatemia 1735 lähettää retkikunnat Peruun ja Suomen Lappiin mittaamaan meridiaaneja. Retkikuntien valmistelujen aikaan Pariisissa oleskeli ruotsalainen tähtitieteen professori Anders Celsius, joka tunnetaan parhaiten lämpömittariasteikostaan. Ilmeisesti Celsiuksen vaikutusta oli retkikunnan lähettäminen Ruotsi-Suomeen aikaisemmin kaavailtujen Islannin tai Pohjois-Norjan sijasta.

Suomeen lähetetyn seitsenhenkisen retkikunnan johtajana toimi akateemikko Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759). Huhtikuussa 1736 matkaan lähtenyt retkikunta saapui Tornioon kesäkuun loppupuolella, ja alkoi suunnitella kolmiomittausketjua, jonka avulla asteen suuruisen meridiaanin kaaren pituus määriteltäisiin. Ketjun yhdeksästä pisteestä eteläisin oli Tornion kirkon edustalla ja pohjoisin Pellon Kittisvaaralla. Kolmiomittausketjun pisteistä suoritettiin kulmamittaukset, ja Kittisvaaran ja Tornion välinen leveysaste-ero määritettiin tähtitieteellisesti. Kun joulun aikaan mitattiin lopuksi 14.5 km pituinen perusviiva Tornionjoen jäällä, oli mittaukset saatu valmiiksi kuudessa kuukaudessa. Tämän jälkeen retkikunta asettui aloilleen Tornion kaupunkiin, missä se suoritti paitsi laskujaan, myös erilaisia tarkistusmittauksia, ja vajaa vuosi saapumisensa jälkeen, kesäkuussa 1737 retkikunta lähti matkaamaan kohti Pariisia.

Elokuussa 1737 retkikunta saapui Pariisiin, ja jo viikkoa myöhemmin Maupertuis esitti tiedeakatemialle alustavan selostuksen matkasta ja sen tieteellisistä tuloksista. Kun Perussa vastaavia mittauksia suorittamaan lähetetyn retkikunnan työ venyi aina vuoteen 1743 asti, verrattiin Maupertuis’n mittaustuloksia ensin Ranskassa suoritettuihin mittauksiin, jolloin todettiin maan olevan navoilta litistynyt suhteessa 1:205. Saatu arvo oli hieman liian suuri, myöhemmin on todettu Maupertuis’n mitanneen Tornion ja Kittisvaaran n. 107 km pituisen välimatkan 400 m liian pitkäksi.

Maupertuis’n retkikunnan mittausten saama julkisuus nopeutti myös osaltaan Suomen valtakunnan maantieteellisten mittausten suoritusta. Mutta ennen kaikkea Maupertuis teki lopun maan muotoa koskevasta riidasta, ja siitä lähtien maan ellipsoidinmuotoisuutta on käytetty karttaprojektio-opissa maan dimensioihin liittyvien mittausten tarkentuessa jatkuvasti.

Cassinin poikittainen viivatarkka lieriöprojektio

Vuonna 1745 Jean Cassinin pojanpoika César François Cassini de Thury (1714-1784) suunnitteli karttaprojektionsa nimenomaan ellipsoidille. Nykyisin termein poikittaisasentoinen viivatarkka lieriöprojektio kantaa edelleen Cassinin nimeä, ja sitä käytettiin Ranskan topografisissa kartoissa, kunnes Bonnen projektio syrjäytti sen 1803. Cassini käytti kartoissaan myös nykyisistä topografisista kartoista tuttua suorakulmaista asteverkkoa meridiaanien ja paralleelien sijaan. Projektiota käytettiin muutamin käytännöllisin korjauksin monissa muissa Euroopan maissa 1900-luvun alkupuolelle asti, korjatusta versiosta käytetään nimeä Cassini-Soldner.

Viivatarkan kartioprojektion parannukset

Mm. Mercatorin käyttämä versio viivatarkasta kartioprojektiosta, jossa meridiaanit on vedetty kahden oikean mittakaavan paralleelin pisteiden kautta, eivätkä näin ollen leikkaa paralleeleja suorissa kulmissa, tuli myöhemmin tunnetuksi ranskalaisen Joseph Nicolas De l'Islen (1688-1768) kehittämänä. De l'Isle antoi kartan keskimmäistä paralleelia kuvaavalle ympyrälle oikean kaarevuuden (säteeksi siis cot  R) ja valitsi oikean mittakaavan paralleeleiksi n 1/4 ja 3/4 kohdalla kartan alueesta olevat leveyspiirit. Vaikka siis De l'Islen projektio poikkeaakin hieman nykyisestä "todellisesta" viivatarkasta kahden standardiparalleelin kartioprojektiosta, kutsutaan usein todellista versiotakin De l'Islen projektioksi. De l'Islen (ja Mercatorin) alkeellisempi kehitelmä oli yleisesti käytössä 1800-luvun ensimmäiselle puoliskolle asti, mutta samaan aikaan käytettiin jo myös oikeampaa versiota.

De l'Islen valitsemat standardiparalleelit 1/4 ja 3/4 kohdalla kartan alueesta olivat käytännöllinen valinta, mutta muutamat matemaatikot etsivät analyyttisempia perusteita näiden parametrien valintaan. Skotlantilainen Patrick Murdoch (n.1700-74), joka oli 1741 julkaissut ensimmäisenä Mercatorin kulmatarkan lieriöprojektion paralleelien etäisyyksiä ellipsoidille, esitteli omat laskelmansa kartioprojektion parametreistä vuonna 1758. Hän esitteli kolme projektiota, joilla oli yhteisenä ominaisuutena kartoitettavan alueen oikea kokonaispinta-ala mittakaavaan nähden (siis ei kuitenkaan pintatarkkuus). Ensimmäinen ja kolmas projektio olivat viivatarkkoja, joissa kaksi standardiparalleelia pystyttiin määrittämään vain iteroimalla. Tosin Murdoch ei näitä laskenut, vaan hän johti projektion kaavat vain kokonaisvääristymiä tutkimalla. Toinen projektio oli perspektiiviprojektio maapallon keskipisteestä.

1700-luvun ehkä merkittävin matemaatikko, sveitsiläinen Leonhard Euler (1707-83), esitti myös oman ehdotuksensa viivatarkasta kartioprojektiosta. Sen kaavat oli johdettu reunaehdoista, joiden mukaan kartan uloimmaisilla paralleeleilla mittakaavan vääristymän tuli olla yhtä suuri (mutta vastakkaismerkkinen) kuin keskimmäisellä paralleelilla. Eulerin moniin matemaattisiin saavutuksiin kuuluu myös ensimmäinen formaali todistus, ettei pallopintaa voi siirtää tasolle ilman jonkinlaisia vääristymiä.

Lambertin seitsemän projektiota

Noin sata vuotta differentiaalilaskennan keksimisen jälkeen sitä käytettiin merkittävimpään yksittäiseen edistysaskeleeseen kohti nykyaikaisia karttaprojektioita. Sveitsin saksalainen matemaatikko ja filosofi Johann Heinrich Lambert (1728-77) esitteli yhdessä teoksessa seitsemän uutta projektiota vuonna 1772. Lambertin työ oli myös ensimmäinen, jossa karttaprojektio-oppia käsiteltiin yleisemmällä tasolla, sen sijaan että keskityttäisiin vain yksittäisen projektion konstruoimiseen. Lambert johti projektioidensa kaavat differentiaalilaskennan avulla kulma- ja pintatarkkuuden lähtökohdista käsin. Vaikka hän ei kehittänyt kyseisten ominaisuuksien teoriaa loppuun asti, hän oli kuitenkin ensimmäinen joka ilmaisi selvästi näihin liittyvät ideat. Nykyisin kulmatarkkuuden määrittelyssä käytettävät Cauchy-Riemannin yhtälöt oli johdettu alun perin jo vuonna 1752 nesteiden virtausvastusta käsittelevässä artikkelissa, mutta Lambert käytti muita lähestymistapoja. Seuraavassa Lambertin uudet projektiot on esitelty nykyisin termein, Lambert itse ei ehdottanut projektioilleen mitään nimiä.

Kulmatarkka kartioprojektio

Ensimmäisenä uusista projektioista Lambert esitteli kulmatarkan kartioprojektion, jota hän piti aiemmin tunnettujen kulmatarkkojen projektioiden stereograafisen ja Mercatorin välimuotona, jossa meridiaanien väliset kulmat olivat pienemmät tai suuremmat kuin pallolla. Hän johti mm. differentiaalilaskennan avulla projektion kaavat sekä pallolle että ellipsoidille.

Lagrangen projektio

Toinen Lambertin kehittämistä projektioista on nimetty sitä myöhemmin kehittäneen matemaatikon Joseph Louis Lagrangen (1736-1813) mukaan. Lambert johti pallokuvauksen yleisen tapauksen kaavat projektioille jotka esittävät koko maapallon kulmatarkkana (napoja lukuun ottamatta) ympyrän sisällä, siten että asteverkko koostuu ympyränkaarista. Projektion kaavat saadaan muuttamalla ekvatoriaalisen stereograafisen projektion kaavoja valitun vakion avulla. Lambert esitti esimerkkinä yhden tapauksen Lagrange julkaisi myöhemmin laajennetun tutkimuksen aiheesta liittäen siihen mm. ellipsoidikuvausten kaavat, joiden johtamisessa hän käytti myös kompleksilukuja.

Poikittainen Mercator-projektio

Nykypäivänä suurimittakaavaisissa kartoissa suosituin projektio, poikittaisasentoinen Mercator, oli kolmas Lambertin kehittämistä projektioista. Tähänkin hän johti kaavat vain pallokuvaukselle, ja nykyisen muodon nimi Gauss-Krüger tulee matemaatikoista, jotka kehittivät projektion ellipsoidikuvauksen 1825 ja 1912.

Pintatarkat projektiot

Kuvailtuaan kolme kulmatarkkaa projektiota Lambert siirtyi pintatarkkoihin projektioihin ja esitteli ensin harvoin käytetyn pintatarkan lieriöprojektion normaalin ja poikittaisasentoiset muodot. Seuraavana tullut pintatarkka atsimutaalinen projektio on nykyäänkin yleisesti käytössä, Lambert johti differentiaalilaskennan avulla kaavat polaariselle ja ekvatoriaaliselle asemalle ja viittasi myös vinon aseman käyttökelpoisuuteen. Viimeisenä seitsemästä projektiostaan hän johti kaavat pintatarkalle kartioprojektiolle, mutta tämä on vain nykyisin käytössä olevan Albersin pintatarkan kartioprojektion erikoistapaus, jossa toinen standardiparalleeli on napa. Yleisemmän kahden standardiparalleelin tapauksen julkaisi Heinrich Christian Albers (1773-1833) vuonna 1805.

Myöhempi kehitys

Lambertin aloittama kehitys kohti matemaattisperusteisempaa projektio-oppia jatkui 1800-1900-luvuilla voimakkaana. Joitakin uusia yksinkertaisia projektioita kehitettiin, mutta toisaalta keskityttiin myös spesifimpiin monimutkaisiin projektioihin. Snyderin teoksessa on vuoteen 1988 asti listattu yhteensä 265 eri projektiota joista vain 32 on ajoitettu ajalle ennen vuotta 1800, mihin tämä tutkielma rajoittuu.