风险相依性的刻画-尾相关与Archimedean copula

杨静平

金融数学系

2019年10月

Outline

相依性度量

本节集中于三种相依性的风险度量:

- 线性相关
- 秩相关
- 尾相依系数 (Tail-dependence coefficients)

Outline

线性相关

X_1和X_2的相关系数定义为

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

- 相关系数在线性变化下是不变的，即

$$\rho(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho(X_1, X_2).$$

- 对于严格递增变换T，下式不一定成立，

$$\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2).$$

- 只有在方差存在的情况下才可以定义相关系数.

Fallacy 1: 随机向量的边缘分布和两两相关系数决定了它的联合分布.

例子 考虑两个随机变量，分别代表两个组合的利润-损失函数。假设两个风险都服从标准正态分布函数，相关系数为零。 按照如下方法构造随机变量：

模型 1: X_1 和 X_2为相互独立的标准正态随机变量列.

模型 2: 令 $P(V=1)=P(V=-1)=0.5$， 记$(Y_1,Y_2)=(X_1,VX_1)$.

则对$k\geq 0$, 有

$$P(X_1+X_2>k)=1-\Phi(\frac{k}{\sqrt{2}}), P(Y_1+Y_2>k)=\frac{1}{2}(1-\Phi(\frac{k}{2})).$$

Fallacy 2: 对于给定的边缘分布F_1 和F_2以及任意相关系数$\rho \in [-1, 1]$, 总是可以构造一个二元分布函数，其边缘分布为 F_1和F_2， 相关系数为 ρ.

下面的引理可用于考虑上面的问题.

引理： 如果(X_1, X_2)的联合分布为F，边缘分布为F_1和F_2，则X_1和X_2的协方差可以表示为

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1 dx_2$$

证明使用了

$$2cov(X_1, X_2) = E((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2))$$

以及

$$a - b = \int_{-\infty}^{\infty}(I_{\{b \le x\}} - I_{\{a \le x\}})dx.$$

定理： 令(X_1, X_2)为随机向量， 方差有限， 边缘分布分别为F_1和F_2; 假设$Var(X_1) > 0, Var(X_2) > 0$. 下面的事实成立:

- 可获得的相关系数区间为$[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$， 其中$\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$.
- 最小的相关系数$\rho = \rho_{min}$达到当且仅当X_1和X_2是反单调的. 最大的相关系数$\rho = \rho_{\max}$达到当且仅当 X_1 和X_2 是同单调的.
- $\rho_{min} = -1$ 当前仅当X_1和$-X_2$属于同一类型, 并且$\rho_{min} = 1$当前仅当X_1 和X_2属于同一类型。

例子 (Attainable correlations for lognormal rvs). 令$\ln(X_1) \sim N(0,1)$和$ln(X_2) \sim N(0,\sigma^2)$. 对于 $\sigma \neq 1$, 我们可以得到

$$\rho_{min} = \frac{e^{-\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}}, \rho_{max} = \frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}}.$$

结论： 如果相关性不在一个定义的联合模型中来考虑，将是无意义的。

例子 考虑五个资产, 其中包括两个股票指数 (DAX 30 和 S&P 500), 两个债券指数 (德国债券市场和美国债券市场的10-年期总收益指数, 分别记为GER10y 和 USA10y)，以及汇率DEN/USD. 考虑周收益的平均数据， 从Jan. 1992 to June 2001, 共有$n = 248$个观测值. 相关系数在下表中给出:

	$DAX30$	$S\&P$	$GER10y$	$USA10y$	DEM/USD
$DAX30$					
$S\&P$	0.67				
$GER10y$	0.18	0.13			
$USA10y$	-0.02	0.13	0.50		
DEM/USD	0.30	0.14	0.06	-0.21	

Outline

1. 相依性度量
   - 线性相关
   - 秩相关
   - 尾相关系数
2. Archimedean copula
   - 二元 Archimedean Copula
   - 多元Archimedean copula
   - 非可交换的Archimedean Copulas

秩相关

称两个点 (x_1, x_2)和 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$为concordant的，如果 $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$； 称为disconcordant的， 如果 $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$.

Kendall's tau. 考虑一个随机向量(X_1, X_2)以及它的独立的复制 $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. Kendall's tau 定义为

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E(sign((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2))).$$

Spearman's rho. 考虑一个随机向量(X_1, X_2)，边缘分布分别为F_1和F_2. 则Spearman's rho 定义为

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

命题： 假设随机向量(X_1, X_2)具有连续的边缘分布和copula函数 C. 则秩相关系数由如下的方式来确定

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)dC(u_1, u_2) - 1,$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\int_0^1\int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2)du_1 du_2.$$

下面的命题成立.

命题： 有$\rho_\tau = 1$当且仅当$C = C^+$; $\rho_\tau = -1$ 当且仅当 $C = C^-$. 并且Kendall's τ 可以通过下面的方式来计算：

$$\rho_\tau = 1 - 4\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial C(v,z)}{\partial v}\frac{\partial C(v,z)}{\partial z}dvdz$$

具体估计ρ_τ， 根据n个样本$(X_i, Y_i), i \leq n$, 定义

$$A_{ij} = sign(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)$$

则可以通过下面的估计量估计ρ_τ:

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} A_{ij}.$$

例子 考虑五个资产, 其中包括两个股票指数 (DAX 30 和 S&P 500), 两个债券指数 (德国债券市场和美国债券市场的10-年期总收益指数, 分别记为GER10y 和 USA10y)，以及汇率DEN/USD. 考虑周收益的平均数据，从Jan. 1992 到June 2001, 共有$n = 248$个观测值.

	$DAX30$	$S\&P$	$GER10y$	$USA10y$	DEM/USD
$DAX30$					
$S\&P$	0.44				
$GER10y$	0.13	0.12			
$USA10y$	0.03	0.14	0.35		
DEM/USD	0.22	0.13	0.05	-0.11	

可以得到下面的结论.

命题 有$\rho_S = 1$ iff $C = C^+$; $\rho_S = -1$ iff $C = C^-$.

为了估计ρ_S， 基于n个样本$(X_i, Y_i), i \le n$, 定义

$$R_i = Rank(X_i), S_i = Rank(Y_i).$$

则可以通过如下的估计量来估计ρ_S:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \overline{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \overline{S})^2}}.$$

上式可以简化为

$$\frac{12 \sum_{i=1}^n (R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{n(n^2 - 1)}.$$

例子：

考虑五个资产，其中包括两个股票指数 (DAX 30 和 S&P 500)，两个债券指数 (德国债券市场和美国债券市场的10-年期总收益指数，分别记为GER10y 和 USA10y)，以及一个汇率，the DEN/USD. 考虑周收益的平均数据，从Jan. 1992 to June 2001，共有$n = 248$个观测值.

相关系数

	$DAX30$	$S\&P$	$GER10y$	$USA10y$	DEM/USD
$DAX30$					
$S\&P$	0.67				
$GER10y$	0.18	0.13			
$USA10y$	−0.02	0.13	0.50		
DEM/USD	0.30	0.14	0.06	−0.21	

ρ_τ

	$DAX30$	$S\&P$	$GER10y$	$USA10y$	DEM/USD
$DAX30$					
$S\&P$	0.44				
$GER10y$	0.13	0.12			
$USA10y$	0.03	0.14	0.35		
DEM/USD	0.22	0.13	0.05	-0.11	

ρ_S

	$DAX30$	$S\&P$	$GER10y$	$USA10y$	DEM/USD
$DAX30$					
$S\&P$	0.67				
$GER10y$	0.20	0.18			
$USA10y$	0.04	0.13	0.49		
DEM/USD	0.31	0.19	0.06	-0.22	

Outline

1. 相依性度量
   - 线性相关
   - 秩相关
   - 尾相关系数
2. Archimedean copula
   - 二元 Archimedean Copula
   - 多元Archimedean copula
   - 非可交换的Archimedean Copulas

尾相关系数

令X_1 和 X_2的分布分别为F_1 和F_2. 则X_1 和X_2的上尾相依性系数定义为

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \to 1-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)),$$

假设极限$\lambda_u \in [0, 1]$ 存在.
如果$\lambda_u \in (0, 1]$, 则称X_1 和X_2 具有**upper tail dependence** 或者 **extremal dependence** in the upper tail; 如果 $\lambda_u = 0$, 则称X_1和X_2在上尾是渐进独立的。

类似的, X_1 和X_2的下尾相依性的系数定义为

$$\lambda_l := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \to 0+} P(X_2 < F_2^{\leftarrow}(q) | X_1 < F_1^{\leftarrow}(q)),$$

假设极限$\lambda_u \in [0, 1]$ 存在.

Example (Gumbel copula):

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2)=exp\{-((-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta)^{1/\theta}\},1\le\theta<\infty$$

对于Gumbel copula，具有上尾相关性：

$$\lambda_u=2-\lim_{q\to 1-}\frac{C_\theta^{Gu}(q,q)-1}{q-1}=2-2^{1/\theta}.$$

其中， 利用

$$\begin{aligned} C_\theta^{Gu}(q,q)-1 &= exp\{-((-\ln q)^\theta+(-\ln q)^\theta)^{1/\theta}\}-1 \\ &\sim -((-\ln q)^\theta+(-\ln q)^\theta)^{1/\theta} \\ &\sim -((1-q)^\theta+(1-q)^\theta)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Example (Clayton copula):

$$C_\theta^{CL}(u_1, u_2) = ((u_1)^{-\theta} + (u_2)^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 < \theta < \infty$$

对Clayton copula的下尾相依性, 有

$$\begin{aligned} \frac{C_\theta^{CL}(q,q)}{q} &= \frac{(2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{q} \\ &\to \lambda_l = 2^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

Example The copula $pC^{+} + (1-p)C^{\perp}$ 在$0 < p < 1$时具有上尾相依性和下尾相依性. 可以验证

$$\lambda_U = p, \lambda_L = p.$$

Archimedean copula

- 4.1. 二元Archimedean Copula
- 4.2. 多元Archimedean Copula
- 4.3. 非可交换Archimedean Copulas

Outline

二元Archimedean Copula

The Archimedean copula 定义为

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

这里ϕ 是一个从[0,1] 到 $[0, \infty]$的单调下降函数，满足 $\phi(0) = \infty, \phi(1) = 0$, 称其为copula的生成算子, 记$\phi^{-1}$为它的反函数.

对于Gumbel copula, $\phi(t) = (-\ln(t))^{\theta}$， 其中参数 $\theta \geq 1$;
对于Clayton copula, $\phi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$, 其中参数 $\theta > 0$.

Frank copula: 对于$\theta \in R$,

$$C_{\theta}^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta}\ln(1 + \frac{(exp(-\theta u_1) - 1)(exp(-\theta u_2) - 1)}{exp(-\theta) - 1}).$$

Generalized clayton copula: 对于$\theta \geq 0, \delta \geq 1$, 有

$$C_{\theta,\delta}^{GC} = \{((u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta})^{1/\delta} + 1\}^{-1/\theta}.$$

定义(pseudo-inverse)： 假设$\phi:[0,1]\to[0,\infty]$为连续和严格下降函数，满足$\phi(1)=0$和$\phi(0)\leq\infty$. 定义ϕ的定义域$[0,\infty]$的pseudo-inverse为

$$\phi^{[-1]}(t)=\phi^{-1}(t), 0\leq t\leq\phi(0)$$

特别的，

$$\phi^{[-1]}(t)=0, \phi(0)<t\leq\infty.$$

定理:令$\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ 为连续严格递减函数，满足$\phi(1) = 0$和$\phi^{[-1]}$如上定义. 则

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

为一copula函数当且仅当ϕ是convex的,

$$\phi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\phi(x_1) + (1-t)\phi(x_2), t \in [0,1].$$

如果$\phi(0) = \infty$, 则称生成算子ϕ 是严格的.

定义 一个连续的严格递减的convex 函数

$$\phi : [0,1] \to [0,\infty]$$

满足 $\phi(1) = 0$， 被称为Archimedean copula 的生成算子. 如果$\phi(0) = \infty$则它被称为严格生成算子。
例子: 考虑Clayton copula， 其中$\theta = -0.5$ 以及非严格生成算子$\phi(t) = -2(\sqrt{t} - 1)$. 则该copula函数可以写为

$$C(u_1, u_2) = (\max\{(u_1^{0.5} + u_2^{0.5} - 1), 0\})^2.$$

对于countermonotonicity copula, 它是一个具有非严格生成算子$\phi(t) = 1 - t$的Archimedean copula。

一些Archimedean copulas:

Copula	生成算子	参数范围	严格化	下界	上界
C_θ^{Gu}	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \geq 1$	*Yes*	Π	M
C_θ^{CL}	$(t^{-\theta} - 1)/\theta$	$\theta \geq -1$	$\theta \geq 0$	W	M
C_θ^{Fr}	$-\ln[(e^{-\theta t} - 1)/(e^{-\theta} - 1)]$	$\theta \in R$	*Yes*	W	M
$C_{\theta,\sigma}^{GC}$	$\theta^{-\delta}(t^{-\theta} - 1)^\delta$	$\theta \geq 0, \delta \geq 1$	*Yes*	N/A	N/A

命题:令X_1 和X_2为联系的随机变量，具有由算子ϕ生成的Archimedean copula C。则

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt.$$

其中，

$$D_1(\theta) = \theta^{-1} \int_0^{\theta} t/(exp(t) - 1)dt$$

$Copula$	ρ_τ	λ_u	λ_l
C_θ^{Gu}	1-1/θ	2-$2^{1/\theta}$	0
C_θ^{CL}	$\theta/(\theta+2)$	0	$2^{-1/\theta}, \theta > 0$
C_θ^{Fr}	1-4$\theta^{-1}(1 - D_1(\theta))$	0	0
$C_{\theta,\sigma}^{GC}$	$((2+\theta)\delta - 2)/((2+\theta)\delta)$	2-$2^{1/\delta}$	$2^{-1/(\theta\delta)}$

Outline

多元Archimedean copula

如果$\phi : [0,1] \to [0,1]$ 是一个严格的Archimedean copula 的生成算子, 则有对于任意的维数d函数

$$C(u_1, \cdots, u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d))$$

为copula当且仅当$\phi^{-1} : [0,\infty] \to [0,1]$ 为 **completely monotonic**. 一个下降函数$f(t)$在区间$[a,b]$上为**completely monotonic**，如果它满足

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0, k = 0, 1, 2, \cdots, t \in (a, b)$$

每一个从$[0,\infty]$ 到 [0,1]上的complete monotonic函数， 可以表示为Laplace-Stieltjes 变换的形式.

令G为一分布函数，满足 $G(0) = 0$以及

$$\hat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x), t \geq 0.$$

如果定义$\hat{G}(\infty) = 0$, 则 $\hat{G} : [0, \infty] \to [0, 1]$ 是一个连续的、严格单调下降函数， 具有complete monotonicity的性质.

M-维 Clayton copula

令$U_j = \psi_\theta(-\frac{\ln(Y_j)}{Y}), j \le m$, 这里 $Y, Y_j, j \le m$ 为独立的随机变量列, Y 的分布为$\Gamma(1/\theta)$ 且具有Laplace transform $\psi_\theta(z) = (z+1)^{-1/\theta}$. $Y_j, j \ge 1$ 为均匀[0,1]分布的随机变量列. 则有

$$P(U_1 \le u_1, \cdots, U_M \le u_M) = \psi_\theta(\psi_\theta^{-1}(u_1) + \cdots + \psi_\theta^{-1}(u_m)).$$

命题: 令G 为$[0,\infty)$的分布函数满足$G(0)=0$， Laplace-Stieltjes 变换为$\hat{G}$， 设定 $\hat{G}(\infty)=0$. 令V 为分布为G的随机变量，$U_1,\cdots,U_d$ 为一随机变量列，在给定的条件V下条件独立且具有条件分布函数$F_{U_i|V}(u|v)=exp(-v\hat{G}^{-1}(u))$, $u\in[0,1]$. 则

$$P(U_1\leq u_1,\cdots,U_n\leq u_n)=\hat{G}(\hat{G}^{-1}(u_1)+\cdots+\hat{G}^{-1}(u_d)),$$

$U=(U_1,\cdots,U_d)'$ 具有生成算子为$\phi=\hat{G}^{-1}$的Archimedean copula函数.

LT-Archimedean copulas的模拟

- (1)生成具有分布为G的变量V，满足G的Laplace-Stieltjies $\hat{G}$为所要求的生成算子ϕ的反函数；
- (2)生成独立的均匀变量列$X_1, \cdots, X_d$;
- (3)计算$U = (\hat{G}(-ln(X_1)/V), \cdots, \hat{G}(-ln(X_d)/V))$.

- 对于Clayton copula 可以生成gamma 变量$V \sim Ga(1/\theta, 1)$， $\theta > 0$. V的分布具有Laplace 变换$\hat{G}(t) = (1+t)^{-1/\theta}$.
- 对于Gumbel copula 我们生成正的平稳随机变量$V \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$， 其中 $\gamma = (cos(\pi/(2\theta)))^{\theta}, \theta > 0$. V的分布具有 Laplace 变化$\hat{G}(t) = exp(-t^{-1/\theta})$.
- 对于Frank copula， 生成离散 r.v. V， 概率函数满足$P(V = k) = (1 - exp(-\theta))^k/(k\theta), k = 1, 2, \cdots$ 其中$\theta > 0$.

Outline

非可交换的Archimedean Copulas

可以推广Archimedean类，使其是非可交换的。

非对成的二元copulas. 令C_θ为可交换的二元copula. 则 copulas $C_{\theta,\alpha,\beta}$ 可以通过如下方法得到

$$C_{\theta,\alpha,\beta}(u_1,u_2) = u_1^{1-\alpha} u_2^{1-\beta} C_\theta(u_1^\alpha, u_2^\beta), 0 \le u_1, u_2 \le 1.$$

Asymmetric bivariate Archimedean copula.

(1)生成随机向量(V_1, V_2)， 分布为C_θ;

(2)生成独立于V_1, V_2的两个独立的标准均匀分布的随机变量 $\tilde{U}_1$和$\tilde{U}_2$.

(3)计算

$$U_1 = \max\{V_1^{1/\alpha}, \tilde{U}_1^{1/(1-\alpha)}\}, U_2 = \max\{V_2^{1/\beta}, \tilde{U}_2^{1/(1-\beta)}\}.$$

LT-Archimedean copulas with p-factor structure. 令

$$C(u_1,\cdots,u_d)=E(exp(-V\sum_{i=1}^{d}\hat{G}^{-1}(u_i)))$$

其中，严格正的随机变量V具有Laplace-Stieltjes 变换$\hat{G}$. 对于$\mathbf{V}=(V_1,\cdots,V_p)'$， 具有独立的严格正的分量，矩阵$A\in R^{d\times p}$且$a_{ij}>0$,

$$C(u_1,\cdots,u_d)=E(exp(-\sum_{i=1}^{d}\mathbf{a_i}'\mathbf{V}\hat{G}_i^{-1}(u_i)))$$

这里$\mathbf{a_i}$ 为矩阵A的第ith row， $\hat{G}_i^{-1}$为严格正的变量$a_i'V$的laplace-Stieltjes变换。

使用

$$\sum_{i=1}^{d} \mathbf{a_i}'\mathbf{V}\hat{G}_i^{-1}(u_i) = \sum_{j=1}^{p} V_j \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\hat{G}_i^{-1}(u_i)$$

得到

$$\begin{aligned} & C(u_1, \cdots, u_d) \\ & = \prod_{j=1}^{p} E\left(exp(-V_j \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\hat{G}_i^{-1}(u_i))\right) \\ & = \prod_{j=1}^{p} \hat{G}_{V_j}(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\hat{G}_i^{-1}(u_i)). \end{aligned}$$

这里

$$\hat{G}_i(t) = \prod_{j=1}^{p} \hat{G}_{V_j}(a_{ij}t).$$