布朗运动情形的破产模型

第9讲 2019.10.31

主要内容

- 布朗运动风险过程
- 布朗运动情形的破产概率
- 布朗运动与复合泊松盈余过程的近似

一、布朗运动风险过程

- 布朗运动的定义(三个特征)
  - 初值
  - 独立增量、平稳
  - 正态性:均值和方差为时间的线性函数
- 标准布朗运动
  - 均值为零
  - 方差为时间的线性函数
- 布朗运动的性质
  - 轨道连续
  - 处处不可微

布朗运动为盈余过程的极限

- 长期复合Poisson风险过程的跳跃次数增多（泊松参数增大）、跳跃的幅度减小（每次损失金额变量的期望减小）的极限情形为布朗运动。

$Z(t)=U(t)-u=ct-S(t)$为漂移项大于零的BM

考虑如下的参数关系

$$\mu=\frac{E[Z(t)]}{t}=c-\lambda E[X]=\theta\lambda E[X]$$

$$\sigma^2=\frac{Var[Z(t)]}{t}=\lambda E[X^2],\quad \lambda=\frac{\sigma^2}{E[X^2]}$$

定义极限参数

- 通过一个公共的参数将跳跃频率和跳跃程度的极限过程综合表现
- 并保证对应的布朗运动有相同的均值和方差
- 定义如下的比例变换
- 定义一个不变元Y

$$X = \alpha Y$$

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{E[Y^2]} \frac{1}{\alpha^2}$$

极限

$$\lambda = \frac{\sigma^2}{E[Y^2]} \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha \to 0 \Rightarrow$$

$$\lambda \to \infty, \quad E[X] \to 0, \ \lambda E[X] \to 0$$

严格的极限过程

$$\lim_{\alpha\to 0} M_{Z(t)}(r)=\exp(r\mu t+\frac{r^2}{2}\sigma^2 t)$$

$N(\mu t,\sigma^2 t)$的矩母函数

实际的解释：

业务量加大时，索赔频率加快，单位时间内的跳跃次数增加

相对于初始盈余，每次索赔的量充分的小

极限的证明

$$\frac{\log M_{z(t)}(r)}{t} = rc + \lambda[M_X(-r) - 1]$$

$$= r[\mu + \lambda E(X)] + \lambda[1 - rE(X) + \frac{r^2}{2!}E(X^2) + o(\alpha^2) - 1]$$

$$= \mu r + \frac{r^2}{2!}\lambda E(X^2) + \lambda \cdot o(\alpha^2)$$

$$= \mu r + \frac{\sigma^2}{2}r^2 + \lambda \cdot o(\alpha^2)$$

二、布朗运动的破产概率

- 考虑如下的盈余过程 $U(t)=u+W(t)$ $u>0$
- 净累积收益模型 $W(t)$ 是初值为零的布朗运动。$\mu>0$

$$\psi(u,\tau)=\Pr(T<\tau)=\Pr\{\min_{0<t<\tau}U(t)<0\}$$

$$=\Pr\{\min_{0<t<\tau}W(t)<-U(0)=-u\}$$

定理2-10

- 给定时间，上述盈余过程的有限时间的破产概率可表示为：

$$\psi(u,\tau)=\Phi(-\frac{u+\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}})+\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2}u)\Phi(-\frac{u-\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}})$$

$$=\Pr(U(\tau)\le 0)+\exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2}u)\Pr(U(\tau)\le \mu\tau)$$

证明

$$
\begin{aligned}
\psi(u,\tau) &= \Pr(T \le \tau) \\
&= \Pr(T \le \tau, U(\tau) \le 0) + \Pr(T \le \tau, U(\tau) > 0) \\
&= \Pr(U(\tau) \le 0) + \Pr(T < \tau, U(\tau) > 0)
\end{aligned}
$$

$$U(\tau) \sim N(u + \mu\tau, \sigma^2\tau)$$

$$\Pr(U(\tau) \le 0 \,|\, U(0) = u) = \Phi(-\frac{u + \mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}})$$

证明

$$\bigcup(\tau-)=\{U(t),0<t<\tau;U(\tau)<0\}$$

$$\{T\le\tau\}=\{T<\tau,U(\tau)<0\}\cup\{T<\tau,U(\tau)\ge 0\}$$

$$=\bigcup(\tau-)\cup\{T<\tau,U(\tau)\ge 0\}$$

$$\Pr(T\le\tau)=\int_{-\infty}^{0}\Pr(U(\tau)=x)[1+\frac{\Pr(B_x)}{\Pr(A_x)}]dx$$

$$\frac{\Pr(B_x)}{\Pr(A_x)}=\frac{\int_0^{\tau}\Pr(B_x\mid T=t)\Pr(T=t)dt}{\int_0^{\tau}\Pr(A_x\mid T=t)\Pr(T=t)dt}=\frac{\int_0^{\tau}\Pr(U(\tau)=-x\mid T=t)\Pr(T=t)dt}{\int_0^{\tau}\Pr(U(\tau)=x\mid T=t)\Pr(T=t)dt}$$

$$\forall x, 0 < T \le \tau$$

$$\Pr\{U(\tau) = x \mid T = t\}$$
$$= \Pr\{U(\tau) - U(t) = x \mid T = t\}$$
$$= \Pr\{U(\tau - t) = x \mid T = t\}$$

$$U(\tau - t) \mid T = t \sim N((\tau - t)\mu, (\tau - t)\sigma^2)$$

$$\frac{\Pr(B_x)}{\Pr(A_x)}=\frac{\int_0^{\tau}\Pr(U(\tau)=-x\,|\,T=t)\Pr(T=t)dt}{\int_0^{\tau}\Pr(U(\tau)=x\,|\,T=t)\Pr(T=t)dt}$$

$$=\frac{\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(-x-(\tau-t)\mu\right)^2}{2(\tau-t)\sigma^2}\right)\Pr(T=t)dt}{\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-(\tau-t)\mu\right)^2}{2(\tau-t)\sigma^2}\right)\Pr(T=t)dt}$$

$$=\exp\left(-\frac{(2x\mu)}{\sigma^2}\right)\frac{\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-(\tau-t)\mu\right)^2}{2(\tau-t)\sigma^2}\right)\Pr(T=t)dt}{\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-(\tau-t)\mu\right)^2}{2(\tau-t)\sigma^2}\right)\Pr(T=t)dt}$$

$$\Pr(T \le \tau) = \int_{-\infty}^{0} \Pr(U(\tau) = x)[1 + \frac{\Pr(B_x)}{\Pr(A_x)}]dx$$

$$= \Phi(-\frac{u+\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}) + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-(u+\mu\tau)\right)^2}{2\tau\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{2x\mu}{\sigma^2}\right) dx$$

$$= \Phi(-\frac{u+\mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}) + \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}u\right) \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-(u-\mu\tau)\right)^2}{2\tau\sigma^2}\right) dx$$

$$= \Phi(-\frac{u+\mu\tau}{\sqrt{\tau\sigma^2}}) + \exp\left(-\frac{2\mu}{\sigma^2}u\right) \Phi(-\frac{u-\mu\tau}{\sqrt{\tau\sigma^2}})$$

推论2-4 最终破产概率

$$\psi(u) = \exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2}u)$$

$$\psi(u) = \exp(-Ru)$$

推论2-5 （有限）破产时刻

$$T^* = T \mid T < \infty$$

$$\Pr(T^* \le \tau) = \frac{\Pr(T \le \tau)}{\Pr(T < \infty)} \qquad \tau > 0$$

$$f_{T^*}(\tau) = \frac{u}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{(u-\mu\tau)^2}{2\tau\sigma^2}\right)$$

逆高斯分布

三、布朗运动与复合泊松盈余过程的近似

用复合Poisson模型的参数近似表示的有限时间破产概率

$$\psi(u,\tau)\approx\Phi\left(-\frac{u+\theta\lambda E[X]\tau}{\sqrt{\lambda E[X^2]\tau}}\right)+\exp\left(-\frac{2\theta E[X]}{E[X^2]}u\right)\Phi\left(-\frac{u-\theta\lambda E[X]\tau}{\sqrt{\lambda E[X^2]\tau}}\right)$$

$$\psi(u)\approx\exp\left(-\theta\frac{2E[X]}{E[X^2]}u\right)$$

进而有，（有限）破产时刻的密度函数：

$$f_{T^*}(\tau) \approx \frac{u}{\sqrt{2\pi\lambda E[X^2]}} \tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{(u-\theta\tau\lambda E[X])^2}{2\tau\lambda E[X^2]}\right)$$

$$E(T^*) \approx \frac{u}{\mu} = \frac{u}{\theta\lambda E(X)}$$

思考

- 若盈余过程的随机项为Poisson与BM的独立和，破产问题有什么结论?
- Poisson跳过程与BM的连续过程在破产问题上的本质差异?
- 用本节的方法讨论对应的期权定价问题。
- 信用风险模型