衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-9-23 (修改稿, 以此稿为准)

要求

阅读本课件. 完成所有作业题 (1-6), 其解答在下次课前提交. 浏览我在课间给大家的 1G 文件.

名词: payoff, terminal payoff, 衍生证券的交割. 买卖挂单的种类简介.

1 继续讲上次没讲完的内容

2 关于远期合约, 期货和期权的解释

主要内容在课上讲.

2.1 关于买卖报价

存在两类证券的买卖报价:

(I 类) 股票的买卖报价: 存在买 1, 买 2, ..., 卖 1, 卖 2,... 我们在市场上看到的这些报价对应的挂单数目并不一定能反应市场上真正想买或想卖人的全部信息. 还存在手持现金想买股票, 或/和手持股票想卖的人. 但他们并没有在市场上挂出买卖单子.

(II 类) 外汇现货兑换率的买卖报价: 只存在买 1 和卖 1. 可以认为两者挂单数为充分大. 通常给出外汇现货买卖报价的是银行.

课上讲细节.

注释 2.1. 假设: (1)S 无股息派发, (2) 在 t 时, 某机构与客户签了一张卖出/卖空远期合约其价格为 $\mathrm{For}(S,t,T)$. 根据合约内容 (现金交割), 在 T 时, 该机构要支付

$$\Pi(T) := S(T) - \mathrm{For}(S,t,T)$$

现金给该客户. 在 $t < T$ 时, $S(T)$ 未知. 机构不想跟客户赌 $S(T)$ 的涨跌. 于是当该机构在 t 时签约的同时, 向银行借 $e^{-r(T-t)}\mathrm{For}(S,t,T)$, 再在市场上买入 1 股 $S(t)$. 由于 $\mathrm{For}(S,t,T) = e^{r(T-t)}S(t)$, 所以机构不花钱的. 持有这个投资组合到 T, 机构支付给客户现金 $\Pi(T)$, 完成合约. 问题: (1) 在 t 时, 机构要买入 1 股 $S(t)$, 而在实际市场上 $S(t)$ 存在成交价, 买 1, 买 2, ..., 卖 1, 卖 2, ... 机构应该如何操作? 例如: 机构应该在买 1 挂买单, 还是在卖 1 直接买入 S? 等等. (2) 机构如何赚钱?

$\square$

名词: 衍生证券的复制.

注释 2.2. 如果无买卖差价的假定成立, 那么在实际市场中, 成交量将趋于无穷大. 那么这个假定是否合理?

□

在本课程中, 除非特别声明, 我们假定证券无买卖差价.

3 一些命题的证明

课上讲.

4 平价公式 (put-call parity)

平价公式仅适用于欧式期权.

命题 4.1 (平价公式 (put-call parity)). *(1) 假设股票 S 无股息派发, 则*

$$c(S,t,E,T) + e^{-r(T-t)}E = p(S,t,E,T) + S(t).$$

(2) 假设股票 S 仅在 $t_d \in (t,T)$ 派发一次股息, 其派发额为 $D > 0$. 则

$$c(S,t,E,T) + e^{-r(T-t)}E = p(S,t,E,T) + S(t) - De^{-r(t_d-t)}.$$

(3) 假设股票 S 连续股息派发, 其派发率为 $q \geq 0$. 则

$$c(S,t,E,T) + e^{-r(T-t)}E = p(S,t,E,T) + e^{-q(T-t)}S(t).$$

课上证. □

命题 4.2. *(1) 假设股票 S 仅在 $t_d \in (t,T)$ 派发一次股息, 其派发额为 $D > 0$. 则*

$$S(t) - De^{-r(t_d-t)} - E \leq \mathbb{C}(S,t,E,T) - \mathbb{P}(S,t,E,T) \leq S(t) - e^{-r(T-t)}E.$$

(2) 假设股票 S 连续股息派发, 其派发率为 $q \geq 0$. 证明:

$$e^{-q(T-t)}S(t) - E \leq \mathbb{C}(S,t,E,T) - \mathbb{P}(S,t,E,T) \leq S(t) - e^{-r(T-t)}E.$$

□

作业题 1. 用无套利假定证明命题4.2

□

作业题 2. 用无套利假定证明:

$$\mathbb{C}(S,t,E,T) \geq \max(S(t) - E, 0)$$

和

$$\mathbb{P}(S,t,E,T) \geq \max(E - S(t), 0).$$

□

名词: (1) 一张衍生证券合约没有到期日是指 $T = +\infty$. 此处的 $+\infty$ 是伪无穷大. (2) 通常意义下的股票. 课上解释.

如果存在 t_0, 使得 $S(t_0) = 0$, 那么我们认为该公司在 t_0 时破产, 并且认为当 $t \geq t_0$ 时, $S(t) \equiv 0$.

作业题 3 (某公司面试题). 假设: S 无股息派发. 在 t 时, $S(t) < H$, 其中 H 是给定正常数. 考虑一张没有到期日，标的为 S 的衍生证券 v, 如果在 t 以后的某个时刻 τ, 首次有等式 $S(\tau) = H$, 那么 v 的持有者获得 1 元现金, 之后合约作废. 问: 在 t 时, v 等于多少? 提示: 考虑作为机构的买方, 在买入 v 后, 你盈利方式要求: (1) 你不能与客户对赌. (2) 你的盈利只是收取手续费.

□

5 标的为远期合约/期货的平价公式

假设: 股票 S 连续股息派发, 其派发率为 $q \geq 0$. 则其对应的远期合约/期货的价格 $F(S,t,T) = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$. 给定常数 $T_1 \in [t,T]$. 可以定义 T_1 到期的期权 $v_F(F,t,E,T_1), \forall v \in \{c,p,\mathbb{C},\mathbb{P}\}$.

引理 5.1. *当 $T_1 = T$ 时, 有*

$$v(S,t,E,T) = v_F(F,t,E,T), \quad v \in \{c,p\}$$

课上证. □

注释 5.2. 由 $F(S,t,T) = S(t)e^{(r-q)(T-t)}$ 知:

$$v(S,t,E,T) = v_F(S(t)e^{(r-q)(T-t)},t,E,T), \quad v \in \{c,p\}.$$

如果 v 和 v_F 充分光滑, 那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(S,t,E,T) =& \frac{\partial v_F}{\partial F}(F,t,E,T)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial v_F}{\partial t}(F,t,E,T) \\ =& -(r-q)F\frac{\partial v_F}{\partial F} + \frac{\partial v_F}{\partial t}.\end{aligned}$$

对上述推导有疑问者, 请参看本课件的附录.

□

平价公式:

$$p_F(F,t,E,T) - c_F(F,t,E,T) = e^{-r(T-t)}(E-F).$$

当 $E = F$ 时, 称对应的 v_F 为 at-the-futures, $v \in \{c,p,\mathbb{C},\mathbb{P}\}$. 此时,

$$c_F(F,t,E,T) = p_F(F,t,E,T).$$

作业题 4. 给定连续股息派发股票 S, 其股息派发率为非负常数 q. 记 $F(S,t,T)$ 为标的为 S, T 时到期的期货合约, $c_F(F,t,E,T)$ 和 $p_F(F,t,E,T)$ 分别记为标的为 F, 敲定价为 E，T 时到期的欧式看涨和看跌期权.

回答以下每个问题.

1. 证明: 期货合约的 put-call parity 公式

$$c_F(F,t,E,T) - p_F(F,t,E,T) = e^{-r(T-t)}(F(S,t,T) - E).$$

2. 假设在 t 时, 股票 S 和它的期货 $F(S,t,T)$ 都涨停板. 此时你无法买入该股票和期货 F. 但是, 在期权市场无涨跌停板的限制. 交易者可以在任何时候买卖任意敲定价, 到期日为 T 的欧式看涨期权 c_F 和欧式看跌期权 p_F. 构造投资策略: 通过买卖一些期权c_F 和/或p_F和/或向银行存/贷款, 使得该策略等同于买入 1 份期货合约 F. 并且说明理由.

□

作业题 5. 阅读 [Jos08] 中的第一章, 用 C++ 生成 100 条 S 在 $[0,T]$ 的路径. 要求提交源代码和运行结果.

□

作业题 6. 证明课件 2019-9-18.pdf 中命题 3.1 和命题 3.2.

□

6 附录: 偏导数复习

相关的参考资料有很多, 例如:
https://wenku.baidu.com/view/fe7b5e5f76c66137ee0619dd.html
https://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/multichainrule/
给定充分光滑函数 $f(x,y,t)$. 符号

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,t}$$

表示在 $f(x,y,t)$ 中将 y 和 t 看成为常数后, 对 f 关于 x 的导数. 通常上式简写为

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

在微积分中, 除非特别声明, 我们总是采用以下约定. **请牢记!**

约定 6.1. (微积分中的约定)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,t}$$

□

例子 6.2. 设 $x(t) = 2t$, $y(t) = 3t$, $f(x,y,t) = x + 2y + t$. 则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,t} = 1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t} = 2 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y} = 1.$$

如果某人让你计算

$$\frac{df}{dt},$$

那么这表示先将 $x(t) = 2t$, $y(t) = 3t$ 代入 $f(x,y,t)$,

$$f(x,y,t) = x + 2y + t = 2t + 2 \times 3t + t = 9t. \tag{6.0.1}$$

于是所求结果为 9. 或用链式法则 (chain rule)

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} = &\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,t}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t}\frac{dy}{dt} + 1\\ =&9.\end{aligned}$$

不能将

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y} \quad (= 1)$$

与

$$\frac{df}{dt} \quad (=9)$$

混淆.
注: 以上提及的

$$f(x,y,t) = x + 2y + t \tag{6.0.2}$$

可写成

$$f(x,y,t) = x_t + 2y_t + t \tag{6.0.3}$$

或

$$f(x,y,t) = x(t) + 2y(t) + t. \tag{6.0.4}$$

但是, 如果在讨论偏导数时, 我们一直用表达式(6.0.2)或 /和 (6.0.3), 但如果忽然将 $f(x,y,t)$ 改写成 (6.0.4)形式, 那么这表示我们可能 (但不是必须) 将 $f(x,y,t)$ 看成表达式(6.0.1).

□

例子 6.3. 考虑一只特殊的股票 $S(t) = 100e^{0.01t}$. 令 $g(S,t) = S(t) + h(t)$, 其中 $h(t)$ 可导.
注: 由于函数 $S(t)$ 只有一个自变量 t, 所以

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

但通常采用左边的表达形式.
　　于是

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} =& \frac{dS}{dt} + h'(t)\\ =& (100e^{0.01t})' + h'(t)\\ =& e^{0.01t} + h'(t).\end{aligned}$$

然而

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{S_t} = h'(t).$$

所以

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{S_t} \neq \frac{dg}{dt}.$$

由约定6.1, 上式左边简写为

$$\frac{\partial g}{\partial t}.$$

因此

$$\frac{\partial g}{\partial t} = h'(t) \neq e^{0.01t} + h'(t) = \frac{\partial S}{\partial t} + h'(t) = \frac{dg}{dt}.$$

即

$$\frac{\partial g}{\partial t} \neq \frac{dg}{dt}.$$

□

例子 6.4. 假设: $pV = RT$, 则

$$p = \frac{RT}{V}, \quad V = \frac{RT}{p}, \quad \text{和} \quad T = \frac{pV}{R},$$

其中 R 为常数. 于是

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V &= \left(\frac{-RT}{V^2}\right)\left(\frac{R}{p}\right)\left(\frac{V}{R}\right) \\ &= \frac{-RT}{pV} \\ &= -1, \quad (\text{因为已知: } pV = RT). \end{aligned} \tag{6.0.5}$$

由约定6.1, 将

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

简写为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right).$$

所以<u>不能</u>将 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 看成为 ∂f 除以 ∂x. 否则上式为 1. 但事实上, 上式为 -1 (见(6.0.5)).

□

参考文献

[Jos08] Mark Suresh Joshi. <u>C++ design patterns and derivatives pricing</u>. Cambridge University Press, second edition, 2008.