课程名称：《风险管理的数学方法》

提交日期：2019 年 9 月 17 日

姓名：胡庆涛

学号：1901210003

BS 公式的推导及解释

$C^{BS}(s, S, r, \sigma, K, T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-s)}N(d_2)$

其中，$d_1 = \frac{ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-s}$

1 基本假设

1. 证券无限可分且可被做空
2. 市场无摩擦
3. 市场不存在无风险套利机会
4. 短期无风险利率 r 为常数，且对所有期限相同
5. 标的资产的交易连续, 且期限内不支付股息
6. 股票价格服从几何布朗运动（股票的不确定性满足对数正态分布）

   $dS = \mu S dt + \sigma S dz$

   μ 与 σ 均为常数

   其中，z 服从标准布朗运动，满足 $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$

$$lnS(T) \sim N[lnS(0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \quad \sigma^2 T]$$

2 推导思路 1：风险中性定价

- 证明对数正态分布的关系式

  设 S 服从对数正态分布，lnS 标准差为 ω, 则

$$E(max(S-K,0)) = E(S)N(d_1) - KN(d_2)$$

$d_1 = \frac{ln(E(S)/K)+\frac{\omega^2}{2}}{\omega}$

$d_2 = \frac{ln(E(S)/K)-\frac{\omega^2}{2}}{\omega}$

证明如下：

定义 $g(S)$ 为 S 的概率密度函数，则有：

$$E(max(S-K,0)) = \int_K^\infty (S-K)g(S)dS$$

而 lnS 服从正态分布，且标准差为 ω，均值为 $m = ln(E(S)) - \frac{\omega^2}{2}$

进行标准化，定义 $Q = \frac{lnS-m}{\omega}$

易知，$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-Q^2}{2}}$, 进行积分变换可得

$$\begin{aligned} E(max(S-K),0) &= \int_{(lnK-m)/\omega}^\infty (e^{Q\omega+m} - K)h(Q)dQ \qquad (1) \\ e^{Q\omega+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{z\pi}}e^{(-Q^2+2Q\omega+2m)}/2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{z\pi}}e^{(-(Q-\omega)^2+2Q\omega+2m+\omega^2)}/2 \\ &= \frac{e^{m+\omega^2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-(Q-\omega)^2/2} \\ &= e^{m+\omega^2/2}h(Q-\omega) \end{aligned}$$

故 (1) 式变为：

$$E(max(S-K),0) = \underbrace{e^{m+\omega^2}\int_{(lnK-m)/\omega}^\infty h(Q-\omega)dQ}_{①} - \underbrace{K\int_{(lnK-m)/\omega}^\infty h(Q)dQ}_{②}$$

定义 $N(x)$ 表示标准正态分布变量小于 x 的概率，则

①式中积分为 $N(\frac{ln(E(S)-K)+\omega^2/2}{\omega}) = N(d_1)$

②式积分为 $N(\frac{ln(E(S)-K)-\omega^2/2}{\omega}) = N(d_2)$

$$E(max(S-K,0)) = e^{m+\omega^2}N(d_1) - KN(d_2)$$

- 代入欧式看涨期权的情形

  时刻 T 到期，s 时刻股票价格为 S，不支付股息，期权的执行价格为 K，无风险利率为 r，股票价格

的波动率为 σ, 欧式看涨期权价格为:

$$C^{BS} = e^{-r(T-s)}E(max(S-K,0))$$

又因在 BS 假定及风险中性世界中，$E(S) = Se^{-r(T-s)}$，lnS 标准差为 $\sigma\sqrt{T}$，代入可得：

$$C^{BS}(s,S,r,\sigma,K,T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-s)}N(d_2)$$

其中，$d_1 = \frac{ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-s}$

- 公式解释

  可将 $N(d_2)$ 理解为风险中性世界中期权被行使的概率，$SN(d_1)e^{-r(T-s)}$ 是 $S > K$ 时为 S，其他情况为零的变量在风险中性世界中的期望值，故期权在 T 时刻的期望值等于：

$$SN(d_1)e^{-r(T-s)} - KN(d_2)$$

贴现到时刻 s 即为期权的定价公式。

3 推导思路 2：伊藤引理

- 推导对数正态分布

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \tag{2}$$

由伊藤引理，对于伊藤过程 $dx = a(t,x)dt + b(t,x)dz$

则对 G（x,t), 泰勒展开即得：

$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial z}bdz$

对于上式，令 $G = lnS$, 各项代入可得

$$dlnS = (\frac{\partial G}{\partial x}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial z}\sigma Sdz \tag{3}$$

整理得，$dlnS = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dz$

又 $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$，$\Delta t = T - s$

则有 $\Delta G = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$, 得 $\Delta G \sim N[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2\Delta t]$

而 $\Delta lnS = lnS_T - lnS_0$，则 $lnS_T \sim N[lnS_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2\Delta t]$

- 对期权价格使用伊藤引理，设期权价格为 C^{BS}, 则 $C^{BS} = f(S,t)$

$$dC^{BS} = (\frac{\partial C^{BS}}{\partial x}\mu S + \frac{\partial C^{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial C^{BS}}{\partial z}\sigma Sdz \tag{4}$$

- 利用股票和期权构建投资组合

$$\text{卖空 1 单位期权} \qquad \text{买入}\frac{\partial C^{BS}}{\partial S}\text{单位的股票}$$

则该组合价值为：$\Pi = -C^{BS} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial S}S$ 在时间间隔 Δt 内变化为：

$$\Delta\Pi = -\Delta C^{BS} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial S}\Delta S \tag{5}$$

由风险中性，可知 $\Delta\Pi = r\Delta t\Pi$ 将组合价值上式和 (4) 式代入 (5) 式得

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial t} + rS\frac{\partial C^{BS}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} = rC^{BS} \tag{6}$$

上式（6）即为 BS 公式的微分方程

该方程边界条件为：$t = T$时，$C^{BS} = max(S-K,0)$

求解可得：$C^{BS}(s,S,r,\sigma,K,T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-s)}N(d_2)$

其中, $d_1 = \frac{ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-s}$

4 希腊值的推导及解释

上述公式中 s 以年为单位计算，现将其进行转换，记作 $t\Delta$,t 以日历天计数，期权的在 t 天的价值为：

$$V_t = C^{BS}(t\Delta, S_{t,r_t,\sigma_t,K,T})$$

风险因子改变记为：

$$X_{t+1} = (lnS_{t+1} - lnS_t, r_{t+1} - r_t, \sigma_{t+1} - \sigma_t)$$

故损失的一阶近似为：

$$L^{\Delta}_{t+1} = -(C^{BS}_s\Delta + C^{BS}_S S_t X_{t+1,1} + C^{BS}_r X_{t+1,2} + C^{BS}_\sigma X_{t+1,3})$$

欧式看涨期权价格为：

$$C^{BS}(s,S,r,\sigma,K,T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-s)}N(d_2)$$

其中,$d_1 = \frac{ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-s}$

$N(x)$ 表示标准正态分布变量小于 x 的概率，故 $N^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned} N^{'}(d_1) &= N^{'}(d_2 + \sigma\sqrt{T-s}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp[-\frac{d_2^2}{2} - \sigma d_2\sqrt{T-s} - \frac{1}{2}\sigma^2](T-s) \\ &= N^{'}(d_2 exp[-\sigma d_2\sqrt{T-s} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-s)]) \end{aligned}$$

故有，

$$SN^{'}(d_1) = Ke^{-r(T-s)}N^{'}(d_2)$$

- 期权的 Delta

  期权的 Delta 定义为期权价格变动与标的资产价格变动的比率

  故对于欧式看涨期权

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial S} \\ &= N(d_1)\end{aligned}$$

- 期权的 Gamma

  期权的 Gamma 表示期权 Delta 随标的资产价格变化的比率，即期权价格关于标的资产价格的二阶导，度量期权价格与标的资产价格关系的曲率

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} \\ &= \frac{N^{'}(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-s}}\end{aligned}$$

- 期权的 Theta

  期权的 Theta 定义为期权价格变动随时间变化的比率

  故对于欧式看涨期权

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial s} \\ &= SN^{'}(d_1\frac{\partial d_1}{\partial s}) - rKe^{-r(T-s)N(d_2)} - Ke^{-r(T-s)}N^{'}(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial s} \\ &= -rKe^{-r(T-s)}N(d_2) + SN^{'}(d_1)(\frac{\partial d_1}{\partial s} - \frac{\partial d_2}{\partial s}) \\ &= -rKe^{-r(T-s)}N(d_2) + SN^{'}(d_1)\frac{\partial}{\partial s}(\sigma\sqrt{T-s}) \\ &= -rKe^{-r(T-s)}N(d_2) - SN^{'}(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-s}}\end{aligned}$$

  该公式 s 以年为单位，可进行转换计算天的 Theta。

- Delta、Theta 与 Gamma 的关系

  上文推导 BS 公式的微分方程时得到公式 (6) 如下：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + rS\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = rC^{BS}$$

  分别代入三个希腊值后可得

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = rC^{BS}$$

- 期权的 Rho

  期权的 Rho 定义为期权价格变动随利率变化的比率

  故对于欧式看涨期权

$$
\begin{aligned}
\varrho &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial r} \\
&= K(T-s)e^{-r(T-s)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

- 期权的 Vega

  期权的 Vega 定义为期权价格变动随资产波动率变化的比率

  故对于欧式看涨期权

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} \\
&= SN^{'}(d_1)\frac{\sqrt{T-s}}{2} + Ke^{-r(T-s)}N^{'}(d_2)\frac{\sqrt{T-s}}{2} \qquad = S\sqrt{T-s}N^{'}(d_1)
\end{aligned}
$$