衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-11-11(修改稿)

要求

阅读本课件. 完成课件 2019-10-28.pdf 中作业题 1-5, 以及本课件作业题 1-4. 要求解答在下次课前提交.

1 复习

2 多元正态分布复习

记 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 正定 (对称) 矩阵, $X \in \mathbb{R}^d$ 为 d 维随机向量是正态的, 记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu, A)$, 如果其概率密度为

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}|A|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathcal{T}}A^{-1}(x-\mu)\right),$$

其中 $|A|$ 为 A 的行列式, $\mathcal{T}$ 表示转置, A^{-1} 为 A 的逆矩阵. 注: 上式中, $\mu \in \mathbb{R}^d$.

定理 2.1. *沿用以上符号, 对任意 $m \times d$ 矩阵 $H \in \mathbb{R}^{m\times d}$, 则 HX 服从 m 维正态, $\mathcal{N}(H\mu, HAH^{\mathcal{T}})$.*

□

例子 2.2. 令

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}.$$

则 $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, A)$ 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

记 $H = (1 \quad \pm 1)$. 则 $X_1 \pm X_2 = H(X_1 \quad X_2)^{\mathcal{T}}$, $HAH^{\mathcal{T}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\rho\sigma_1\sigma_2$. 所以

$$X_1 \pm X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\rho\sigma_1\sigma_2) \tag{2.0.1}$$

□

例子 2.3. 假设: 股票 S_1 和 S_2 服从几何布朗运动

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dB_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{2.0.2}$$

由Itô引理可得

$$\frac{d\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}{\frac{S_2}{S_1}} = (\mu_2-\mu_1-\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)dt+\sigma_2 dB_2-\sigma_1 dB_1 \\ = (\mu_2-\mu_1-\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)dt+\sigma_2 y\sqrt{dt}-\sigma_1 x\sqrt{dt}, \tag{2.0.3}$$

其中, ρ 为 dB_1 和 dB_2 的相关系数, 也是 x 和 y 的相关系数, $x, y \sim \mathcal{N}(0,1)$. 由上例结论知, 存在 $z \sim \mathcal{N}(0,1)$ 使得

$$z\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2} = \sigma_2 y - \sigma_1 x,$$

或存在标准布朗运动B_3, 使得

$$B_3(t)\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2} = \sigma_2 B_2(t) - \sigma_1 B_1(t),$$

以上结论也可通过对等式(2.0.3)两边取平方来理解 (具体含义课上讲):

$$\left[\frac{d\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}{\frac{S_2}{S_1}}\right]^2 = (\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)dt.$$

□

作业题 1. 假设股票 S_1 和 S_2 无股息派发, 其服从几何布朗运动(2.0.2), $dB_1(t)dB_2(t) = \rho dt$.

(1) 记欧式衍生证券 $v(S_1, S_2, t, T)$, 其 Terminal payoff

$$v(S_1, S_2, T, T) = \max(S_1(T), S_2(T)).$$

求 $v(S_1, S_2, t, T)$.

(2) 记欧式衍生证券 $w(S_1, S_2, t, T)$, 其 Terminal payoff

$$w(S_1, S_2, T, T) = \min(S_1(T), S_2(T)).$$

求 $w(S_1, S_2, t, T)$.

□

3 赌球赔率

假设: A 和 B 两支足球队将要举行决赛 (比赛结果必须有一方胜, 不能出现平局).

赌博公司向公众开出如下赔率:

A 队胜的赔率为 1 赔 x_A; B 队胜的赔率为 1 赔 x_B.

其具体含义为, 对于前者, 1 赔 x_A 是指,

$$\text{顾客花 1 元买 A 队胜}\begin{cases}\text{赌博公司付给该顾客 } x_A \text{ 元现金,} & \text{如果结果 A 队胜}\\ \text{赌博公司不付给该顾客现金,} & \text{如果结果 A 队输;}\end{cases}$$

对于后者, 1 赔 x_B 是指

$$\text{顾客花 1 元买 B 队胜}\begin{cases}\text{赌博公司付给该顾客 } x_B \text{ 元现金}, & \text{如果结果 B 队胜}\\ \text{赌博公司不付给该顾客现金}, & \text{如果结果 B 队输}.\end{cases}$$

以下假设利率 $r = 0$. 分别记 ω_A 和 ω_B 为事件 A 和 B 获胜. 易知: ω_A 和 ω_B 互斥. 记 ω_A 发生的概率为 p. 则 ω_B 发生的概率为 $1-p$. 顾客得到的回报期望为

$$\mathbb{E}[\text{顾客花 1 元买 A 队胜}] = x_A p + 0 \cdot (1-p) = x_A p. \tag{3.0.1}$$

$$\mathbb{E}[\text{顾客花 1 元买 B 队胜}] = x_B(1-p) + 0 \cdot p = x_B(1-p). \tag{3.0.2}$$

赌博公司考虑三件事情: (1) 以上期望值不能太小, 例如: 当 $x_A < 1$ 时, 没人会参与“花 1 元买 A 队胜”. 而且还存在同行之间的竞争; (2) 以上期望值不能太大, 否则公司可能亏损很多; (3) 公司盈利模式不是跟客户对赌, 而是收手续费. 所以公司取以上期望值都为 1. 这可看成“公平游戏”(客户花 1 元期望为 1 元). 于是

$$x_A = \frac{1}{p}, \quad x_B = \frac{1}{1-p}.$$

在赔率公布后, 公众按照以上赔率赌 A 或 B 胜. 经历了一段时间后 (仍在赛前), 赌博公司收到 M_A 元买 A 队胜, M_B 元买 B 队胜, 其中 M_A 和 M_B 的数值是公众投入的金额, 不受公司控制. 但公司担心: 如果 M_A 很大, 万一 A 队果真胜了, 那么公司将亏钱. 同样, M_B 很大也会导致公司将亏钱. 于是在收到投注金额 M_A 和 M_A 后, 公司每隔一段时间 (仍在赛前) 要调整赔率, 记为 x'_A 和 x'_B. 调整赔率准则: 公司盈利模式只是收手续费. 无论 A, B 两队谁胜, 公司承担风险最小. 具体做法如下: 求 x'_A 和 x'_B 使得

$$M_A x'_A = M_B x'_B = M_A + M_B.$$

于是

$$\begin{cases} x'_A = \dfrac{M_A + M_B}{M_A} \\ x'_B = \dfrac{M_A + M_B}{M_B}. \end{cases}$$

在实际操作中, 赌博公司公布的赔率会比公布的赔率略微低一些作为手续费. 对应于公式(3.0.1) 和(3.0.2)以及其后的讨论, 上式计算的赔率公式形式上可导出以下公式

$$1 = \mathbb{E}^Q[\text{顾客花 1 元买 A 队胜}] = x'_A p' + 0 \cdot (1-p') = x'_A p'$$

和

$$1 = \mathbb{E}^Q[\text{顾客花 1 元买 B 队胜}] = x'_B(1-p') + 0 \cdot p' = x'_A(1-p'),$$

其中, $\mathbb{E}^Q$ 是对应概率 p' 下的期望, 而 p' 对应将来要讲的 风险中性概率. 易知,

$$p' = \frac{M_A}{M_A + M_B}.$$

注: p' 不是真实 A 队获胜的概率. 以上 p 和 p' 都表示 A 队获胜的概率.

4 测度变换例子

假设: 今天在上课前教室门口有两个计数器. 首先将它们清零. 每进来一个男生计数器 A 加 1, 每进来一个女生计数器 B 加 1. 最终两个计数器都显示 20. 这样, 我们就得到结论: 共有 40 名学生, 男女生各占一半. 如果老师随机点名的话, 那么点到男女生的概率都是 50%.

如果我们改变计数器的计数方式: 每进来一个男生计数器 A 加 0.8, 每进来一个女生计数器 B 加 1.2. 最终两个计数器上的数组之和为

$$0.8 \times 20 + 1.2 \times 20 = 40.$$

如果老师随机点名, 那么点到男生和女生的概率分别为

$$\frac{0.8 \times 20}{40} = 40\% \text{ 和 } \frac{1.2 \times 20}{40} = 60\%.$$

一般地, 设男女生人数分别为 a 和 b, 计数器将每个男女生分别加 x 和 y, 以下条件必须满足:

$$xa + yb = a + b \text{（“归一化”）}.$$

如果 x 或 y 有一为 0 的话, 那么点到男女生的概率

$$\frac{xa}{a+b}, \quad \frac{yb}{a+b}$$

有一为 0. 这样男女生有一被点到的概率为 0 (失真了).

这个计数器计数方式的改变对应于<u>测度变换</u>. 条件: $x, y > 0$ 对应于测度变换等价性.

4.1 Breeden-Litzenberger 公式

假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 无风险利率 r 为常数. 给定市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$, 假设

$$\widetilde{c}(S,0,E,T) = e^{-rT}\mathbb{E}^Q[\max(S_T - E, 0)|\mathcal{F}_0],$$

在测度 Q 下, 记 $\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)$ 为转移概率密:

$$(S_0, 0) \longrightarrow (S_T, T).$$

于是

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(S,0,E,T) =& e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} \max(S_T - E, 0)\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T \\ =& e^{-rT}\int_{E}^{+\infty} (S_T - E)\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T.\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial E} =& -e^{-rT}\int_{E}^{+\infty} \widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T \\ =& -e^{-rT}\widetilde{\text{Prob}}^Q(S_T > E)\end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial E^2} = e^{-rT}\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0).$$

命题 4.1 (Breeden-Litzenberger (1978))**.** *对任意 $E > 0$, 有*

$$\widetilde{g}^Q(E, T; S_0, 0) = e^{rT} \frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial E^2}(S, 0, E, T).$$

□

由 Put-call parity 知

推论 4.2. *对任意 $E > 0$, 有*

$$\widetilde{g}^Q(E, T; S_0, 0) = e^{rT} \frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial E^2}(S, 0, E, T).$$

□

注释 4.3. (1) 以上风险中性转移概率密度 $\widetilde{g}^Q$ 不是 $(0, S_0) \longrightarrow (T, E)$ 市场转移概率密度. 正如以前给出的关于赔率的设定并不是某球队的实际胜率. (2) 命题4.1和推论4.2并不要求 S 服从几何布朗运动.

□

例子 4.4. 在实际市场中, 我们只能找到有限多个 E. 在 $t = 0$ 时, 假设: 以下是市场全部期权数据,

$$\{\widetilde{c}(S, 0, E_i, T), \widetilde{p}(S, 0, E_j, T) \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\}.$$

对于这些市场数据, 可做多项式拟合: 找多项式 $h_c(x)$ 和 $h_p(x)$, 使得

$$h_c(E) = \widetilde{c}(S, 0, E, T) \quad \text{和} \quad h_p(E) = \widetilde{p}(S, 0, E, T).$$

多项式拟合不能保证 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 相等. 我们采用以下原则: 通常 OTM 的 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{p}$ 流动性较大, 其更能反映市场本质. 所以在 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 中取 OTM 的值作为 $\widetilde{g}^Q(E, T; S_0, 0)$ 的真实值. 云云.

□

例子 4.5. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S, 0, T)$, 其 terminal payoff $w(S, T, T) = 1$. 则

$$\begin{aligned} w(S, 0, T) =& e^{-rT} \widetilde{\mathbb{E}}^Q[1 | \mathcal{F}_0] \\ =& e^{-rT} \int_0^{+\infty} 1 \cdot \widetilde{g}^Q(S_T, T; S_0, 0) dS_T \\ =& e^{-rT}. \end{aligned}$$

这与无套利假定的结果一致. 这也从另一侧面证明了

$$\int_0^{+\infty} \widetilde{g}^Q(S_T, T; S_0, 0) dS_T = 1.$$

□

例子 4.6. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S,0,T)$, 其 terminal payoff $w(S,T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 则

$$\begin{aligned} w(S,0,T) =& e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^Q[f(S_T)|\mathcal{F}_0] \\ =& e^{-rT}\int_0^{+\infty} f(S_T)\cdot \widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T \\ =& e^{-rT}\int_0^{+\infty} f(E)\cdot \widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)dE \\ =& e^{-rT}\int_0^{+\infty} f(E)e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE \\ =& \int_0^{+\infty} f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

以上最后第二个积分由命题4.1得出, 给出了静态复制 $w(S,0,T)$ 的思路. 具体操作见下例.

□

例子 4.7. 回忆例子4.4最后一段的讨论. 在所有可交易的市场价

$$\{\widetilde{c}(S,0,E_i,T),\widetilde{p}(S,0,E_j,T)\mid 1\le i\le N, 1\le j\le M\}$$

中, 假设: 存在一临界值 $\widetilde{E}$, 使得

$$E_1 < E_2 < \cdots \le \widetilde{E} < \cdots < E_N$$

并且满足

- 当 $E_i \ge \widetilde{E}$ 时, $\widetilde{c}(S,0,E_i,T)$ 的流动性较大;
- 当 $E_j < \widetilde{E}$ 时, $\widetilde{p}(S,0,E_j,T)$ 的流动性较大.

因而式(4.1.1)可改写为

$$\begin{aligned} w(S,0,T) =& \int_0^{+\infty} f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE \\ =& \underbrace{\int_0^{E_0} f(E)\frac{\partial^2\widetilde{p}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE}_{\text{由由命题 4.1 和推论 4.2}} + \int_{E_0}^{+\infty} f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE. \end{aligned}$$

注释 4.8. 转移概率密度 $\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)$ 的金融图像. 课上讲.

□

回忆 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 分部积分上式可得 (细节略)

$$\begin{aligned} w(0,T) =& f(E)e^{-rT} + f'(E_0)(S_0 - E_0e^{-rT}) \\ &+ \int_0^{E_0} f''(E)\widetilde{p}(S,0,E,T)dE + \int_{E_0}^{+\infty} f''(E)\widetilde{c}(S,0,E,T)dE. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

上式给出了静态复制 $w(t,T)$ 的方法.

□

作业题 2. 由式(4.1.2), 给出静态复制 $w(t,T)$ 的操作细节.

□

作业题 3. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 记 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为 S_T^2. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 给出 $w(0,T)$ 的解析表达式.
2. 假设 $\tilde{c}(S,0,E,T)$ 的隐含波动率为 $\sqrt{E}$. 画出隐含波动率曲线的草图和 (隐含) 风险中性概率的草图. 给出静态对冲方法复制 $w(t,T)$.

□

作业题 4. 假设 S 无股息派发, 无风险利率 $r=0$, $H<E<S(0)$. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 证明
$$c^{d/o}(S,0,E,T,H)=c(S,0,E,T)-\frac{S(0)}{H}c\left(\frac{H^2}{S_0},0,E,T\right)$$
2. 假设 $\tilde{c}^{d/o}(S,0,E,T,H)$ 在市场上可以交易, 你能否利用 c 和/或 p 静态复制 $\tilde{c}^{d/o}$? 说明理由. 提示:
$$\frac{S_T}{H}\max\left(\frac{H^2}{S_T}-E,0\right)=\frac{E}{H}\max\left(\frac{H^2}{E}-S_T,0\right).$$

□

5 随机波动率简介

5.1 引言

为了方便起见, 除非特别声明, 假设 S 无股息派发. 回顾几何布朗运动定义
$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma dB_t, \tag{5.1.1}$$
其中 μ 和 σ 都是常数, 且 $\sigma>0$. 先将这个假定扩展: σ 为一随机过程 σ_t. 则将上式推广为
$$\frac{dS}{S}=\mu dt+\sigma_t dB_t, \tag{5.1.2}$$

将随机过程 σ_t 写成以下形式:
$$d\sigma=a(S,\sigma,t)dt+b(S,\sigma,t)dW_t, \tag{5.1.3}$$
其中 W_t 为一 (标准)布朗运动.

注释 5.1. 公式(5.1.2)和(5.1.3)中的布朗运动$B(t)$ 和 $W(t)$ 通常不是独立的. 定义
$$dB(t) \text{ 和 } dW(t) \text{ 的相关系数 } \rho:=\frac{\mathbb{E}[dB(t)dW(t)]-\mathbb{E}[dB(t)]\mathbb{E}[dW(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[dB^2(t)]\mathbb{E}[dW^2(t)]}}. \tag{5.1.4}$$

由布朗运动的定义知:

$$\mathbb{E}[dB(t)] = \mathbb{E}[dW(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[dB^2(t)] = \mathbb{E}[dW^2(t)] = dt.$$

于是

$$\mathbb{E}[dB(t)dW(t)] = \rho dt.$$

从逻辑上, ρ 是时间 t 的函数. 但我们假定ρ始终是常数. 细节在课上提及, 参考文件 shreve246-247.pdf 将发给大家.

□

综上所述, 波动率模型满足

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} =\mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d\sigma =a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t, \\ \rho dt =\mathbb{E}[dB_t dW_t]. \end{cases} \tag{5.1.5}$$

假设 S 无股息派发. 记 $v(S,t,T)$ 为一欧式衍生证券. 利用 Δ 对冲可以得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0. \tag{5.1.6}$$

在假设(5.1.5)下, 从数学角度看, 以上方程与以前的 Black-Scholes 方程起了本质改变: 方程(5.1.6)的系数 σ 关于 t 是随机的. 求解 $v(S,t,T)$ 就变为求解含随机系数的偏微分方程. 很难. 一个解决办法是, 将 v 看成 $v(S,t,T,\sigma)$.

以下以 $c(S,t,E,T,\sigma)$ 为例, 在假设(5.1.5)下给出 c 满足的偏微分方程. 由Itô引理

$$\begin{aligned} dc(S,t,E,T,\sigma) =&\frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial S}dS + \frac{\partial c}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt \\ &+ \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}dt + \sigma bS\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial\sigma}dt. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

如果用以前的 Δ 对冲 $c - \Delta S$, 那么

$$dc(S,t,E,T,\sigma) - \Delta dS$$

仍是随机的. 引入另外一个可交易的 $c_1 = c(S,t,E_1,T_1,\sigma)$, $T_1 \geq T$. 构造投资组合

$$\begin{aligned} \Pi(t) :=&c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c_1 \\ =&c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c(S,t,E_1,T_1,\sigma). \end{aligned}$$

利用(5.1.7)得

$$\begin{aligned} d\Pi(t) = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial\sigma^2} + \sigma bS\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial\sigma}\right)dt \\ &- \Delta_1\left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c_1}{\partial\sigma^2} + \sigma bS\rho\frac{\partial^2 c_1}{\partial S\partial\sigma}\right)dt \\ &+ \left(\frac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta\right)dS + \left(\frac{\partial c}{\partial\sigma} - \Delta_1\frac{\partial c_1}{\partial\sigma}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta = 0 \\ \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} = 0. \end{cases} \tag{5.1.8}$$

消去 $d\Pi(t)$ 的随机项. 上式解得

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{\partial c}{\partial S} - \dfrac{\partial c}{\partial \sigma}\dfrac{\partial c_1}{\partial S} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\ \Delta_1 = \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma}\ . \end{cases} \tag{5.1.9}$$

取以上 Δ 和 Δ_1 后,

$$\begin{aligned} d\Pi(t) = & \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\ & - \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma}\right) dt. \end{aligned}$$

由无套利假定得 $d\Pi(t) = r\Pi(t)dt = r(c - \Delta S - \Delta_1 c_1)dt$. 于是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} - rc \\ & \quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} - rc_1\right) + r\Delta S = 0. \end{aligned}$$

再由(5.1.9), 得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc\right) \Big/ \frac{\partial c}{\partial \sigma} \\ & = \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c_1}{\partial S} - rc_1\right) \Big/ \frac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\ & =: -\phi(S, \sigma, t). \end{aligned}$$

上式第一个等号左边含 (E, T) 不含 (E_1, T_1), 右边含 (E_1, T_1) 不含 (E, T). 所以该等号左右两边都与 (E, E_1, T, T_1) 无关. 于是

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc + \phi(S, \sigma, t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} = 0. \tag{5.1.10}$$

上式是 c 满足的带随机波动率的 Black-Scholes 方程.

回忆公式(5.1.3), 记

$$\begin{aligned} \mu_c :=& \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + a(S, \sigma, t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) \\ \sigma_{c,S} :=& \frac{\sigma S}{c}\frac{\partial c}{\partial S} \\ \sigma_{c,\sigma} :=& \frac{b(S, \sigma, t)}{c}\frac{\partial c}{\partial \sigma} \\ \sigma_c :=& \sqrt{\sigma_{c,S}^2 + \sigma_{c,\sigma}^2 + 2\rho \sigma_{c,S}\sigma_c}. \end{aligned}$$

定理 5.2.

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{c,S}}{\sigma_c}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) + \frac{\sigma_{c,\sigma}}{\sigma_c}\left(\frac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}\right). \tag{5.1.11}$$

□

作业题 5. 证明公式(5.1.11).

□

在公式(5.1.11)中,

$\dfrac{\mu_c - r}{\sigma_c}$, $\dfrac{\mu - r}{\sigma}$ 和 $\dfrac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}$ 分别是 c, S 和 σ 的 Sharpe 比率.

回忆公式(5.1.3)

$$d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t.$$

在建立波动率模型时, 关键是通过实际市场对于 σ 的假设. 在实际应用中通常假设 $a(S,\sigma,t) = \alpha(m-\sigma)$ (均值反转). 课上讲. 当取 $b(S,\sigma,t)$ 为常数时上式可能会导致 $\sigma < 0$.

5.1.1 波动率模型的一些例子

记 m, α 和 β 为非负常数, W_t 为一 (标准)布朗运动. 随机过程 σ_t 可能的形式:

(1) 形式 1

$$d\sigma = \alpha(m-\sigma)dt + \beta dW_t. \tag{5.1.12}$$

(2) 形式 2

$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta dW_t. \tag{5.1.13}$$

(3) 形式 3

$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta\sigma^2 dW_t. \tag{5.1.14}$$

(4) 形式 4 (Heston (1993) 模型)

$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta|\sigma|dW_t. \tag{5.1.15}$$

(5) 其他扩展形式.

注释 5.3. 公式(5.1.12)和(5.1.13)可能导致 $\sigma < 0$. 而在公式(5.1.14)和(5.1.15)中的 σ 总是非负. 以下重点讨论 Heston 模型(5.1.15).

□

Heston 模型(5.1.15)通常写为

$$d(V) = \alpha(m-V)dt + \beta\sqrt{V}dW_t, \tag{5.1.16}$$

其中 $V = \sigma^2$.

在文献中较常见的是 Heston 模型. 现将其综述如下.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d(V_t) = \alpha(m-V_t)dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t, \\ \sigma_t = \sqrt{V_t} \\ \rho dt = \mathbb{E}[dB(t)dW(t)], \\ \text{其中}\alpha, m, \beta\text{非负}. \end{cases} \tag{5.1.17}$$

6 在金融工程中一种确定期权市场价格的方法

为了叙述简单起见, 我们假设无风险利率 r 为常数, S 是一个标的, 不一定保证其可以买卖. 记 $F(S,t,T)$ 为期货/远期合约的价格, $v_F(F,t,T)$ 为标的为 F 的欧式看涨衍生证券, 其 terminal payoff 为 $\max(F_T-E,0)$.

我们需要给出 $v_F(F,t,T)$ 的市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 的估计.

我们采用以下思路/步骤.

1. 忽略 F 是否服从几何布朗运动.
2. 固定 σ 以外的变量, 直接定义映射
$$g(\sigma):=e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma))-EN(d_2(\sigma)).$$
3. 由于 $g'>0$，所以 g 是 1-1 的. 如果 g 的值域与市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 的值域相同, 那么对于给定市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$, 存在唯一的 $\widetilde{\sigma}$, 使得
$$\widetilde{v}_F(F,t,T)=e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\widetilde{\sigma}))-EN(d_2(\widetilde{\sigma})). \tag{6.0.1}$$
4. 式(6.0.1)中的 $\widetilde{\sigma}$ 称为 $v_F(F,t,T)$ 隐含波动率.
5. 假设
$$dF=G(F,\sigma_t)dB_t \tag{6.0.2}$$
和/或
$$d\sigma_t=K(F,\sigma_t)dW_t$$
找函数 $G(F,\sigma_t)$ 和/或 $K(F,\sigma_t)$. 给出 $v_F(F,t,T)$ 的定价公式, 记为 $w(F,t,T)$.
6. 让
$$w(F,t,T)=e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma))-EN(d_2(\sigma))$$
解出 σ(如果解存在). 记这个解为 $\sigma_w(F,t,T)$.
7. 如果走运, 我们找到合适的的 $G(F,\sigma_t)$ 和/或 $K(F,\sigma_t)$, 使得
$$\sigma_w(F,t,T)\approx\widetilde{\sigma}(F,t,T),\quad \forall t,$$
那么我们就能很好的把握市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 了.

□

注释 6.1. 在选取公式(6.0.2)中的 $G(F,\sigma_t)$ 时, 有时不必确保 $F>0$. 例如: 有时可以选择 $dF=\sigma_t dB_t$. 此时, 只需要将原来的 F 改成以障碍为 $F=0$ 的障碍期权即可.

□