北京大学 PEKING UNIVERSITY 数学作业纸 科目

班级 金数19 姓名 马骏 编号 1901210006 第 页

6. 证明：均值为0的独立 $X_n$ 之和 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ 构成一个鞅。设 $E|X_k|<\infty$，$k=1,2\cdots$

证：$E(S_{n+1}\mid S_1=a_1, S_2=a_2,\cdots,S_n=a_n)$

$=E(S_{n+1}\mid S_n=a_n)$

$=E(S_n+X_{n+1}\mid S_n=a_n)$

$=a_n+E(X_{n+1}\mid S_n=a_n)=a_n$ 得证

$\because$ $X_n$ 之间相互独立

$\therefore$ $X_{n+1}$ 与 $S_n$ 独立

即 $E(X_{n+1}\mid S_n=a_n)$

$=E(X_{n+1})=0$

7. 证明带有独立增量的随机过程 $\{X(t), t=0,1,2\cdots\}$ 是马尔可夫过程

证：$\because$ $\{X(t)\}$ 带有独立增量，即 $X(i+1)-X(i)$ 与 $X(j+1)-X(j)$ 独立 $(i\neq j)$

$\therefore$ $\{X(t)\}$ 可表示为 $X(t)=\sum_{i=1}^{t}\Delta X(i)+X(0)$，其中 $\Delta X(i)=X(i)-X(i-1)$

即 $\Delta X(i)$ 之间相互独立。

$\therefore$ $Pr(X(t)\leqslant x\mid X(0)=x_0, X(1)=x_1,\cdots,X(t-1)=x_{t-1})$

$=Pr(X(t)\leqslant x\mid X(0)=x_0, \Delta X(1)+X(0)=x_1,\cdots,\sum_{i=1}^{t-1}\Delta X(i)+X(0)=x_{t-1})$

$=Pr(X(t)\leqslant x\mid X(t-1)=x_{t-1})$

2. 对于每个 $\lambda>0$，设 $X\sim P(\lambda)$，$\lambda$ 服从 $\Gamma$ 分布，试证明

$$Pr(X=k)=\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n},\ k=0,1\cdots$$

当 $n$ 是一个整数时，这是 $p=\frac{1}{2}$ 的负二项分布

解：依题意得 $Pr(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$f(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1}e^{-\lambda}, & \lambda\geq 0\\ 0, & \lambda<0\end{cases}$

$$\therefore Pr(X=k)=\int_0^{+\infty}Pr(X=k\mid\lambda)f(\lambda)\,d\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1}e^{-\lambda}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{k!\,\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\lambda^{k+n-1}e^{-2\lambda}\,d\lambda \overset{2\lambda=t}{=\!=}\frac{1}{k!\,\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n}\underset{t}{\underset{\uparrow}{\lambda}}^{k+n-1}e^{-t}\,dt$$

$$=\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n},\ k=0,1\cdots$$

又 $Pr(X=k)=\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\ k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n}=C_{k+n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n}$

∴当n为整数时，这是 $p=\frac{1}{2}$ 的负二项分布

8. 设 $X_1$ 和 $X_2$ 是在区间 $(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$ 上均匀分布的独立随机变量。证明 $X_1-X_2$ 的分布与θ无关，并求密度函数。

证：∵ $X_1\sim U(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$ ∴ $f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}1, & x_1\in(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})\\ 0, & else\end{cases}$

又 $X_1$ 和 $X_2$ 独立同分布 ∴ $f_{X_1,X_2}=\begin{cases}1, & x_1,x_2\in(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})\\ 0, & else\end{cases}$

① 当 $-1\le y\le 0$

∴ $Pr(X_1-X_2\le y)=\int_{\theta-\frac{1}{2}-y}^{\theta+\frac{1}{2}}dx_2\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{y+x_2}1\,dx_1=\frac{1}{2}y^2+y+\frac{1}{2}$

② 当 $0<y<1$，$Pr(X_1-X_2\le y)=1-\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}-y}dx_2\int_{y+x_2}^{\theta+\frac{1}{2}}1\cdot dx_1=-\frac{1}{2}y^2+y+\frac{1}{2}$

∴ $F_{X_1-X_2}(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \frac{1}{2}y^2+y+\frac{1}{2}, & -1\le y<0\\ -\frac{1}{2}y^2+y+\frac{1}{2}, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$ ∴ $f_{X_1-X_2}(y)=\begin{cases}1+y, & -1\le y\le 0\\ 1-y, & 0<y<1\\ 0, & |y|\ge 1\end{cases}$

9. 设X非负，$F(x)=Pr(X\le x)$. 证明 $E(X)=\int_0^{\infty}(1-F(x))dx$

证：$E(X)=\int_0^{\infty}x\,dF(x)=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{x}dy\right)\cancel{dF(x)}f(x)dx$

$=\int_0^{\infty}dy\int_y^{+\infty}f(x)dx$

$=\int_0^{\infty}dy\cdot F(x)\Big|_y^{+\infty}$

$=\int_0^{\infty}[1-F(y)]dy$

$=\int_0^{\infty}[1-F(x)]dx$ 得证

4. $X \sim B(N,p)$，$p \sim Beta(r,s)$，求 $X$ 的分布，问此分布何时为 $x=0,1,\cdots,N$ 上的均匀分布

解：$Pr(X=k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$，

$$f(p) = \begin{cases} \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} p^{r-1}(1-p)^{s-1}, & 0<p<1 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\therefore Pr(X=k) = \int_0^1 \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} p^{r-1}(1-p)^{s-1} \times Pr(X=k|p)\,dp$$

$$= \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_0^1 p^{r-1}(1-p)^{s-1} \times C_N^k p^k (1-p)^{N-k}\,dp$$

$$= \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} C_N^k \int_0^1 p^{k+r-1}(1-p)^{N-k+s-1}\,dp$$

$$= C_N^k \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \times \frac{\Gamma(k+r)\Gamma(N-k+s)}{\Gamma(N+r+s)}$$

令 $Pr(X=k) = \frac{1}{N+1}$，即~~时 $r=s=1$~~ $Pr(X=k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(r+s-1)!}{(r-1)!(s-1)!} \times \frac{(k+r-1)!(N-k+s-1)!}{(N+r+s-1)!}$

得 $r = s = 1$

17. $X_n = \frac{k}{n}$，$k=1,2\cdots n$，取各值概率均为 $\frac{1}{n}$，求它的特征函数及 $n\to\infty$ 时的极限，然后求极限特征函数对应的随机变量。

解：$\varphi_n(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} Pr(X=\frac{k}{n}) \cdot e^{\frac{itk}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{itk}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{1-e^{it}}{e^{-\frac{it}{n}}-1}$

又 $\lim_{n\to\infty} n \times (e^{-\frac{it}{n}}-1) = -it$　$\therefore \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$

对于 $Y \sim U(0,1)$，$f(y) = \begin{cases} 1, & y\in(0,1) \\ 0, & else \end{cases}$　$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = \int_0^1 e^{ity}dy = \frac{e^{it}-1}{it}$

$\therefore$ 该极限特征函数对应 $U(0,1)$ 的随机变量

23.(a). X和Y独立. $Pr(X=i)=f(i)$, $Pr(Y=i)=g(i)$. $i=0,1,2\cdots$

假设 $Pr(X=k|X+Y=l)=\begin{cases} C_l^k p^k(1-p)^{l-k}, & 0\le k\le l \\ 0, & k>l \end{cases}$.

证明 $f(i)=e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^i}{i!}$, $g(i)=e^{-\theta}\frac{\theta^i}{i!}$, 其中 $\lambda=\frac{p}{1-p}$. $\theta>0$任意

(b) 证明 $p$ 由 $G(\frac{1}{1-p})=\frac{1}{f(0)}$ 确定

证:(a)假设X的母函数为 $F(t)=E(t^X)$, Y的母函数为 $G(t)=E(t^Y)$

$Pr(Y=k|X+Y=l)=Pr(X=l-k|X+Y=l)=\begin{cases} C_l^k q^k p^{l-k}, & 0\le k\le l \\ 0, & k>l \end{cases}$

其中 $q=1-p$

设X+Y母函数为H(t),则 $F(t)=E(t^X)=E[E(t^X|X+Y=l)]$

$=E[\sum_{k=0}^{l} t^k\cdot C_l^k p^k q^{l-k}]$

$=E[(tp+q)^l]=H(tp+q)$ ①

同理 $G(t)=H(tq+p)$ ②

$\because$ X, Y相互独立 $\therefore H(t)=G(t)\cdot F(t)$ ③

另一方面, 令 $t=up+qv$

$\therefore F(t)\cdot G(t)=\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i}f(j)t^j\cdot g(i-j)t^{i-j})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}f(j)g(i-j)t^i$

$=\sum_{i=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{i}f(j)g(i-j)\cdot\sum_{k=0}^{i}C_i^k(up)^k\cdot(qv)^{i-k}]$

$=\sum_{i=0}^{\infty}[\sum_{j=0}^{i}f(j)g(i-j)\cdot Pr(X=k|X+Y=i)]\times u^k v^{i-k}$

$=\sum_{i=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{i}Pr(X+Y=i)\cdot Pr(X=k|X+Y=i)]\times u^k v^{i-k}$

$=\sum_{i=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{i}Pr(Y=i-k)\cdot p(X=k)]\times u^k\cdot v^{i-k}$

$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i}g(i-k)f(k)v^{i-k}u^k=F(u)\cdot G(v)$

故 $F(up+vq)\cdot G(up+vq)=F(u)\cdot G(v)$.

由①②, $F(u)\cdot G(v)=H(up+q)\cdot H(vq+p)$

又由③. $F(up+vq)\cdot G(up+vq)=H(up+vq)$

令 $up+q=\alpha+1$, $vq+p=\beta+1$, 则 $up+vq=\alpha+\beta+1$. 令 $\tilde{H}(x)=H(x+1)$

则 $\tilde{H}(\alpha+\beta)=H(\alpha+\beta+1)=H(\alpha+1)\cdot H(\beta+1)=\tilde{H}(\alpha)\cdot\tilde{H}(\beta)$

已知 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 唯一连续解为 $f(x)=e^{\lambda x}$

故 $H(x)=\tilde{H}(x-1)=e^{\lambda(x-1)}$ 为 Poisson$(\lambda)$ 的母函数

即 $X+Y\sim P(\lambda)$

故 $Pr(X=k)=\sum_{l=k}^{\infty}Pr(X=k|X+Y=l)\cancel{=\sum_{l=k}^{\infty}C_l^k p^k q^{l-k}}\times P(X+Y=l)$

$$=\sum_{l=k}^{\infty}C_l^k p^k q^{l-k}\cdot\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{l=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^{l-k}}{(l-k)!}\times\frac{(\lambda p)^k\cdot e^{-\lambda+\lambda q}}{k!}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$$

令 $\alpha=\frac{p}{1-p}$, $\theta=(1-p)\lambda$, 即 $Pr(X=k)=\frac{e^{-\alpha\theta}(\alpha\theta)^k}{k!}=f(k)$

同理 $g(k)=\frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}$

(b) $G(\frac{1}{q})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\theta}}{k!}\theta^k\cdot\frac{1}{q^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda q}}{k!}\cdot\lambda^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k\cdot e^{-\lambda q+\lambda}$

$$=e^{\lambda p}=e^{\alpha\theta}=\frac{1}{f(0)}$$

即 $G(\frac{1}{1-p})=\frac{1}{f(0)}$ 得证

7.28