总损失模型的近似计算

第4讲 2019年9月19日

从三个方面考虑总损失模型的近似计算

- 渐近(极限)分布（尾部分布）
- 个体与复合Poisson的近似
- 特殊的分布近似计算方法

1. 渐近分布（正态）-Poisson模型

- 定理1.7 若短期风险模型为Poisson聚合模型，则有如下的极限结果：

$$Z=\frac{S-\lambda E(X)}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\xrightarrow{d}N(0,1),\lambda\to\infty$$

- 当Poisson参数趋于无穷时，标准化的复合Poisson分布的渐近分布为标准正态分布，这是类似概率论中著名的中心极限定理的结论

渐近分布（正态）-负二项模型

- 定理1.8 若短期风险模型为负二项聚合模型，则当负二项分布的参数趋于无穷时，有：

$$Z=\frac{S-E(N)E(X)}{\sqrt{Var(S)}}\xrightarrow{d}N(0,1), r\to\infty$$

总损失尾部的渐近分布

- 总损失尾部的一般结论：Gamma

$$\bar{F}_S(x) \xrightarrow{d} \frac{cx^{\alpha}e^{-Rx}}{R\{\tau E[Xe^{RX}]\}^{\alpha+1}}, x \to \infty$$

- 总损失尾部的界

$$\frac{1-p_0}{\varphi_2 \bar{V}_2(0)} c_2(x) \le \bar{F}_S(x) \le \frac{1-p_0}{\varphi_1 \bar{V}_1(0)} c_1(x), x \ge 0$$

2. 用Poisson聚合模型近似个体模型

考虑很一般的个体模型

$$S = X_1 + \cdots + X_n,\ n > 0$$

$X_1, \ldots, X_n$ 独立，但不一定同分布

记 $X_i \sim f_{X_i}(x),\ X_i = I_i B_i,\ q_i = \Pr(X_i > 0)$

对应的聚合模型

$$S = \begin{cases} X_1^* + \cdots + X_N^*, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

$$N \sim Poisson(\lambda),\ X_i^* \sim f_{X^*}(x)$$

个体模型与Poisson聚合等价的方法一

- 保持相同的平均索赔次数

- 取 $\lambda=\sum_{i=1}^{n} q_i,\ f_{X^*}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\lambda} f_{B_i}(x)$

- 结果：

$$E[S^*]=E[S]$$

$$Var(S^*)=\sum_{i=1}^{n} q_i E(X_i^2)>Var(S)$$

- 近似模型是较为保守的估计。

- 基于Le Cam的分布间距离的定义：

$$d(F,G)=\sup_{A}\{|P_G(A)-P_F(A)|\}$$

- Gerber 1984, *Error Bounds for the Compound Poisson Approximation*, IME,3,191-194

$$d(F_S^{ind},F_S^{CP})\le\sum_{i=1}^{n}q_i^2$$

等价的方法二：保持相同的零点概率

- 取

$$e^{-\lambda} = \prod_{i=1}^{n}(1-q_i)$$

- 或

$$\lambda = -\sum_{i=1}^{n}\log(1-q_i) > \sum_{i=1}^{n}q_i$$

- 也是一种更为保守的模型

3. 其他近似总损失的方法：Gamma分布近似

定理1.9设S_k为负二项聚合模型，

索赔数变量的分布为：$NB(r, p(k))$，且有：

$$\frac{q(k)}{p(k)} = k\frac{q}{p}, k = 1, 2, \ldots$$

则有以下极限结果：

$$Z_k = \frac{S_k}{E[S_k]} \xrightarrow[k\to\infty]{d} Gamma(r, r)$$

背景：平均索赔次数较多，索赔量相对较集中

Gamma分布近似

- 考虑多参数的Gamma分布，可以提高近似的精度：

$$H(x;\alpha,\beta,x_0)=Gamma(x-x_0;\alpha,\beta)$$

- 上述分布的前三阶矩分别为：

$$E[S]=x_0+\frac{\alpha}{\beta},\mathrm{var}(S)=\frac{\alpha}{\beta^2},E[(S-E(S))^3]=\frac{2\alpha}{\beta^3}$$

Edgeworth近似

$$M_Z(t)=\exp(\frac{t^2}{2})\exp(a_3t^3+a_4t^4+\cdots)=\exp(\frac{t^2}{2})\{1+a_3t^3+a_4t^4+\frac{a_3^2}{2}t^6\cdots\}$$

$$\exp(\frac{t^2}{2})=M_\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}d\Phi(x)$$

$$t\exp(\frac{t^2}{2})=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\phi'(x)dx=M_{-\Phi'}(t)$$

$$t^k\exp(\frac{t^2}{2})=(-1)^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\phi^{(k)}(x)dx=M_{(-1)^k\Phi^{(k)}}(t)$$

综合上述，z的密度用正态分布的密度近似表示：

$$f_Z(x)\approx\phi(x)-a_3\phi^{(3)}(x)+a_4\phi^{(4)}(x)+\frac{a_3^2}{2}\phi^{(6)}(x)$$

Esscher近似

对一般的分布函数$F(x)$和某个常数h （可以为负值）考虑如下的变换：

$$F_{(X,h)}(x;h)=\frac{\int_0^x e^{hy}dF(y)}{M_X(h)},x>0$$

则$F_{(X,h)}(x;h)$仍然为分布函数，且其对应的矩母函数为：

$$M_{(X,h)}(t)=\frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$$

称上述变换为Esscher变换。

Esscher近似（续）

基于Esscher变换，

可以对总损失的某个点x的分布函数进行近似，方法如下：

1）选择h，满足：

$$E[S(h,x)]=\frac{M_S{}'(h)}{M_S(h)}=x;\text{对所有的}x$$

2）对$S(h,x)$用Edgeworth近似的两阶得到密度函数的近似：

$$f_{S(h,x)}(y)\approx\phi(z)-\frac{E\left[\left(S(h,x)-x\right)^3\right]}{6\left(Var\left(S(h,x)\right)\right)^{3/2}}\phi^{(3)}(z),z=\frac{y-x}{\left(Var\left(S(h,x)\right)\right)^{1/2}}$$

进而得到总损失S在x点的近似分布：

$$1-F_S(x)=M_S(h)\int_x^{+\infty}e^{-hy}f_{S(h,x)}(y)dy,F_S(x)=M_S(h)\int_{-\infty}^{x}e^{-hy}f_{S(h,x)}(y)dy$$

Esscher近似（续）

而两个近似公式的使用效果不同。对于$h>0$，一般采用以下拟合：

$$1-F_S(x)=M_S(h)\int_x^{+\infty}e^{-hy}f_{S(h,x)}(y)dy,$$

进一步，有：

$$1-F_S(x)\approx M_S(h)e^{-hx}\left\{E_0[u]-\frac{E\left[\left(S(h,x)-x\right)^3\right]}{6\left(Var\left(S(h,x)\right)\right)^{3/2}}E_3[u]\right\}$$

其中：$u=h\left(Var\left(S(h,x)\right)\right)^{1/2}$

$$E_k[u]=\int_0^{\infty}e^{-uz}\phi^{(k)}(z)dz,k=0,1,2,\ldots$$

$$E_0[u]=e^{-u^2/2}\left[1-\Phi(u)\right]$$

$$E_k[u]=-\phi^{(k-1)}(0)+uE_{k-1}[u]$$

作业与思考

- **作业：第一章习题：No.20/21/22**
- **思考：**
  - 总损失与个体损失在分布形态上的变化
  - 总损失模型的建模和分析方法
  - 聚合模型中N与X不独立的情况