课程名称：《衍生工具模型》
提交日期：2019年9月24日
姓名：胡庆涛
学号：1901210003

作业题 1

证明：如果 $f < S(t) - ge^{-r(T-t)}$ ， 那么存在无风险套利。

> 如果 $f < S(t) - ge^{-r(T-t)}$ ，那么存在 $\epsilon > 0$， 使得：
>
> $$f + \epsilon < S(t) - ge^{-r(T-t)}$$
>
> - 起始资金为零，我们借入一股 S,卖空获得现金 需在 T 时刻偿还 一股 S
> - 然后找到 B 付给他 $f + \epsilon$，由于利益最大化原则， 他肯定愿意跟我们签约，而因此我们需要在 T 时刻以价格 g 买入一份 S, 故我们需要在时刻 t 准备资金 $ge^{-r(T-t)}$,存入银行备用
> - 由于 $S(t) - (f + \epsilon) - ge^{-r(T-t)} > 0$, 因此我们有剩余现金存入银行：
>
> $$b := S(t) - (f + \epsilon) - ge^{-r(T-t)}$$
>
> 故而到 T 时刻，我们以价格 g 从 B 那里购得一份 S , 刚好偿还，而我们得到现金 $be^{r(T-t)} > 0$, 实现无风险套利。

作业题 2

假设：股票S连续派发股息，其股息派发率为常数q，沿用上述符号，证明:

$$f = e^{-q(T-t)}S(t) - ge^{-r(T-t)}$$

> 由连续股息派发定义知，在 t 时刻购入一份S, 持有至 T 时刻价值为：$S(T)e^{q(T-t)}$
>
> 【1】如果 $f > e^{-q(T-t)}S(t) - ge^{-r(T-t)}$， 那么存在 $\epsilon > 0$， 使得：
>
> $$f - \epsilon > e^{-q(T-t)}S(t) - ge^{-r(T-t)}$$
>
> - 起始资金为零
> - 然后找到 A 让他付 $f - \epsilon$，由于利益最大化原则，他肯定愿意跟我们签约， 我们收到 $f - \epsilon$ 后，，立即向银行借款 $ge^{-r(T-t)}$, 需在T 时刻偿还银行 g
>
> $$f - \epsilon + ge^{-r(T-t)} > e^{-q(T-t)}S(t)$$
>
> - 我们买入 $e^{-q(T-t)}$ 股 $S(t)$, 再将剩余现金存入银行：
>
> $$b := (f - \epsilon) + ge^{-r(T-t)} - e^{-q(T-t)}S(t)$$
>
> 持有该投资组合到 T， 由以下部分组成：
>
> 1. 欠银行现金：g
> 2. 持有 $e^{-r(T-t)}$ 股 S, 其价值为：$e^{-q(T-t)}S(T)e^{q(T-t)} = S(T)$
> 3. 银行存款：$be^{r(T-t)}$
>
> 将股票 S 卖出，得到现金 $S(T)$, 偿还银行贷款 g, 付给 A 现金 $S(T) - g$, 得到现金 $be^{r(T-t)}$， 实现无风险套利。
>
> 【2】如果 $f < e^{-q(T-t)}S(t) - ge^{-r(T-t)}$， 那么存在 $\epsilon > 0$， 使得：
>
> $$f + \epsilon < e^{-q(T-t)}S(t) - ge^{-r(T-t)}$$

- 起始资金为零，我们借入 $e^{-q(T-t)}$ 份S, 在 T 时刻偿还 $e^{-q(T-t)}$份及股息
- 然后找到 B 付给他 $f+\epsilon$ ，由于利益最大化原则， 他肯定愿意跟我们签约，而因此我们需要在 T 时刻以价格 g 买入一份 S, 故我们需要在时刻 t 准备资金 $ge^{-r(T-t)}$,存入银行备用
- 由于 $e^{-q(T-t)}S(t)-(f+\epsilon)-ge^{-r(T-t)}>0$, 因此我们有剩余现金存入银行：

$$b:=e^{-q(T-t)}S(t)-(f+\epsilon)-ge^{-r(T-t)}$$

故而到 T 时刻，我们以价格 g 从 B 那里购得一份 S , 刚好偿还借入的股票。 而我们得到现金 $be^{r(T-t)}>0$， 实现无风险套利。

远期价格：令$f=0$, 解得 g 的值即为远期合约价格 $For(S,t,T)=S(t)e^{(q+r)(T-t)}$

作业题 3

假设：股票 S 只在 $t(d)\in(t,T)$派发股息， 其股息派发额为已知常数 D， 沿用以上符号, 证明：

$$f=S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-ge^{-r(T-t)}$$

【1】如果 $f>S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-ge^{-r(T-t)}$， 那么存在 $\epsilon>0$， 使得：

$$f-\epsilon>S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-ge^{-r(T-t)}$$

- 起始资金为零
- 然后找到 A 让他付 $f-\epsilon$，由于利益最大化原则，他肯定愿意跟我们签约， 我们收到 $f-\epsilon$ 后，，立即向银行借款 $e^{-r(t_d-t)}D+ge^{-r(T-t)}$

$$f-\epsilon+e^{-r(t_d-t)}D+ge^{-r(T-t)}>S(t)$$

- 我们买入 1 股 $S(t)$, 再将剩余现金存入银行：

$$b:=f-\epsilon+e^{-r(t_d-t)}D+ge^{-r(T-t)}-S(t)$$

- 在股息派发的 t_d 时刻，获得股息 D, 可用股息刚好偿还银行借款中的 $e^{-r(t_d-t)}D$ 部分，故现在仅需在 T 时刻还给银行 g 元。

在时刻 T， 投资组合由以下部分组成：

1. 欠银行现金：g
2. 持有 1 股 S, 其价值为: $S(T)$
3. 银行存款：$be^{r(T-t)}$

将股票 S 卖出，得到现金 $S(T)$, 偿还银行贷款 g，付给 A 现金 $S(T)-g$, 得到现金 $be^{r(T-t)}$， 实现无风险套利。

【2】如果 $f<S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-ge^{-r(T-t)}$， 那么存在 $\epsilon>0$， 使得：

$$f+\epsilon<S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-ge^{-r(T-t)}$$

- 起始资金为零，我们借入一股 S , 在 T 时刻需一并偿还 股息$e^{r(T-t_d)}D$，故我们需在 t 时刻准备资金 $e^{-r(t_d-t)}D$， 存入银行备用
- 然后找到 B 付给他 $f+\epsilon$ ，由于利益最大化原则， 他肯定愿意跟我们签约，而因此我们需要在 T 时刻以价格 g 买入一份 S, 故我们需要在时刻 t 准备资金 $ge^{-r(T-t)}$,存入银行备用
- 由于 $S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-(f+\epsilon)-ge^{-r(T-t)}>0$, 因此我们有剩余现金存入银行：

$$b:=S(t)-e^{-r(t_d-t)}D-(f+\epsilon)-ge^{-r(T-t)}$$

故而到 T 时刻，我们以价格 g 从 B 那里购得一份 S , 以及备用资金，一并还给股票贷方。而我们得到现金 $be^{r(T-t)}>0$， 实现无风险套利。

远期价格：令$f=0$, 解得 g 的值即为远期合约价格 $For(S,t,T)=S(t)e^{r(T-t)}+De^{r(T-t_d)}$

作业题 4

1、A company makes a three-for-one stock split. What effect does this have on the share price?

> 股票的总市值不变。设初始股数为 N，每股价值为 S。 而做完 $3-1$ 分股后，股票数量变为 $3N$ 份，故每股价格变为原来的 $1/3$。

2、A company whose stock price is currently S, pays out a dividend DS, where $0 \leq D \leq 1$. What is the price of the stock just after the dividend date?

> 股票价值不变。故派息日之后价格为 $S^{'} = S - DS = S(1-D)$

3、The dollar-sterling exchange rate (colloquially known as 'cable') is 1.83, £$1 = \$1.83$. The sterling-euro exchange rate is 1.41, £$1 = EUR1.41$. The dollar-euro exchange rate is 0.77, $\$1 = EUR0.77$. Is there an arbitrage, and if so, how does it work?

> - 用 1 英镑兑换 1.41 欧元
> - 拿 1.41 欧元兑换 $1.41/0.77 = 1.8312$ 美元
> - 再拿 1.8312 美元兑换 $1.8312/1.83 = 1.0006$英镑，实现 0.0006 的无风险利润

4、You put $\$1000$ in the bank at a continuously compounded rate of 5% for one year. At the end of this first year rates rise to 6%. You keep your money in the bank for another eighteen months. How much money do you now have in the bank including the accumulated, continuously compounded interest ?

> 第一年底拥有： $1000 \times e^{0.05 \times 1} = 1051.27$
>
> 再过18个月拥有： $1051.27 \times e^{0.06 \times 1.5} = 1150.27$

5、A spot exchange rate is currently 2.350. The one-month forward is 2.362. What is the one-month interest rate assuming there is no arbitrage?

> 在无套利情形下： $2.350 \times e^{r/12} = 2.362$, 解得 $r = 6.11\%$

6、A particular forward contract costs nothing to enter into at time t and obliges the holder to buy the asset for an amount F at expiry T. The asset pays a dividend DS at time t_d, where $0 \leq D \leq 1$ and $t \leq t_d \leq T$. Use an arbitrage argument to find the forward price F

> 记该资产在 t 时刻的价值为 $S(t)$, 远期空头在 t 时刻借入资金购买λ 份 $S(t)$, 则其在 $t(d)$ 时刻收到股息 $\lambda DS(t_d)$, 将股息继续用于购买 S, 可购买 (t_d), 其中 $S(t_d)(1-D)$ 为股息派发后的资产价格， 而其必须在 T 时刻持有 1 份资产，故有
>
> $$\lambda + \frac{\lambda DS(t_d)}{S(1-D)} = 1$$
>
> 则， $\lambda = 1 - D$
>
> 无套利情形下， $F = \lambda S(t) e^{r(T-t)} = (1-D)S(t)e^{r(T-t)}$