长期聚合风险模型的一般性质

第5讲 2019.10.08

背景说明

- 考虑风险状况随时间的变化（也可以解释为长期性long-term）
  - **实务：分析保单组、业务类或某个公司的经营过程；**
  - **概率工具：随机过程模型。**
- 适当简化和理想化，在一定程度上刻画了现实。
- 应用：
  - 公司的战略财务规划、风险管理；
  - 偿付能力分析。

长期聚合风险模型初步

- 连续时间
  - 现实意义:财务管理/风险分析
  - 概率模型：直观/工具丰富
- 离散时间
  - 接近现实
  - 概率模型或者工具不足

盈余过程的离散时间模型

- 称下面的随机变量序列为盈余序列：
- $U_n = u + cn - S_n, n = 0, 1, 2, \dots\dots$
- 其中： u表示最初的盈余（资本），c表示每期的收入，S_n表示n期的损失之和：
- $S_n = W_1 + \cdots + W_n$
- 一般假设：W_i相互独立（同分布），$c > E(W_1)$.

例 2-1

- 背景：
  - 初始盈余2个货币单位
  - 年保费收入3个货币单位，
  - 年损失量：两点分布（6个货币单位）
- 第二年底可能出现负盈余。
- 计算前两年内不破产的概率 。

连续时间模型

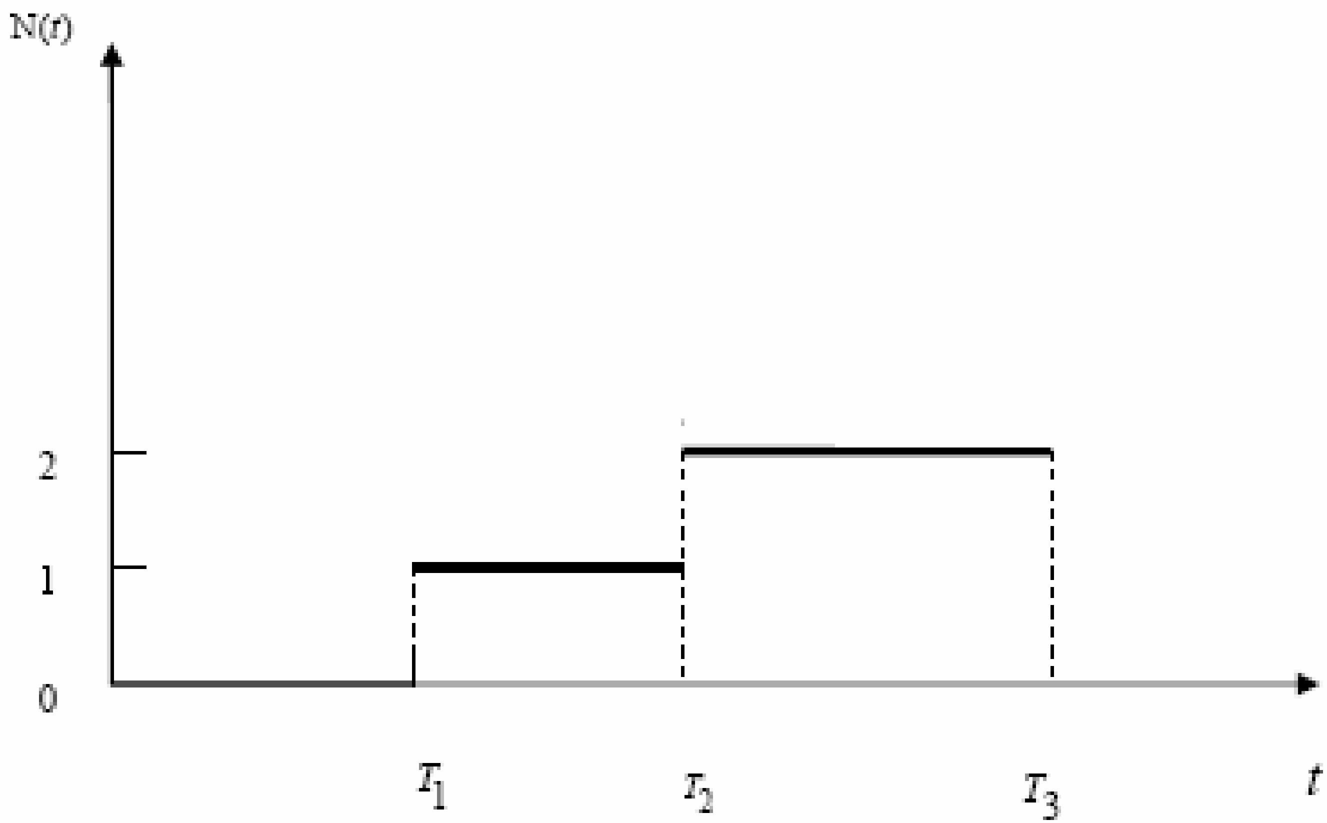
$$S(t)=\begin{cases} X_1+X_2+\cdots+X_{N(t)}, & N(t)>0 \\ 0, & N(t)=0 \end{cases}$$

$$t\geq 0$$

计数随机过程$N(t)$

- 取值为非负整数，且初值为零；
- 样本轨道为阶梯形式，每次的变化为一个单位。
- 过程的刻画方法：
  - 方法一:直接的概率计算
  - 方法二:强度函数
  - 方法三:跳跃间隔

计数过程的样本轨道示意图



Poisson计数过程

- 基本：平稳、独立增量
- 分布性质：
  - 平稳分布为Poisson分布（常数参数）
  - 瞬间的变化强度为常数
  - 等待时间服从指数分布
- 背景：

$$\Pr\{N(t+\Delta t)=N(t)+1 \mid N(s),0<s\le t\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\Pr\{N(t+\Delta t)>N(t)+1 \mid N(s),0<s\le t\}=o(\Delta t)$$

复合Poisson过程$S(t)$

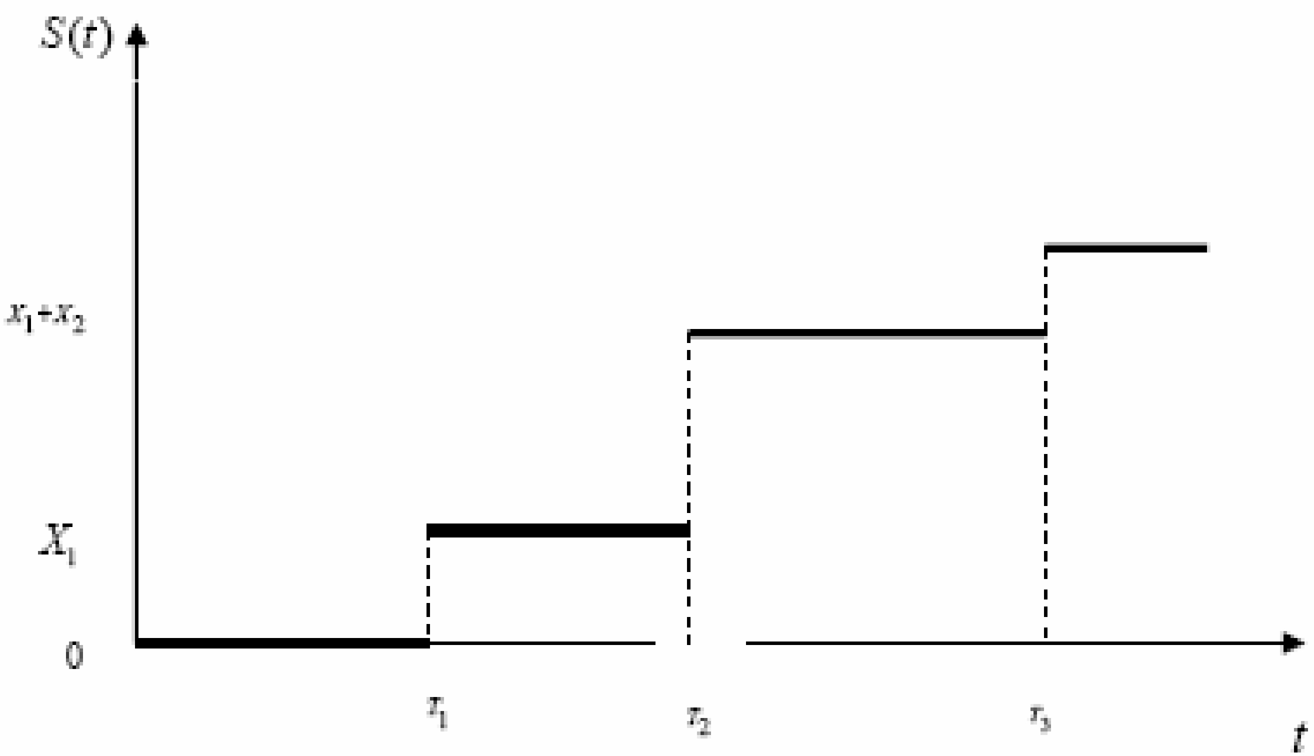
- 平稳、独立增量
- 分布性质：

$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$，其中 $N(t)$ 是强度为 λ 的Poisson过程。

$$S(t+h)-S(t)\sim S(h)=\begin{cases} X_1+X_2+\cdots+X_{N(h)}, & N(h)>0 \\ 0, & N(h)=0 \end{cases}$$

$$S(h)\sim CP(\lambda h, f_X(x))$$

复合Poisson过程的样本轨道示意图



复合Poisson过程的基本特征量

$$E[S(t)] = \lambda t E[X]$$

$$Var[S(t)] = \lambda t E[X^2]$$

$$M_{S(t)}(z) = e^{\lambda t[M_X(z)-1]}$$

连续时间盈余（surplus）过程

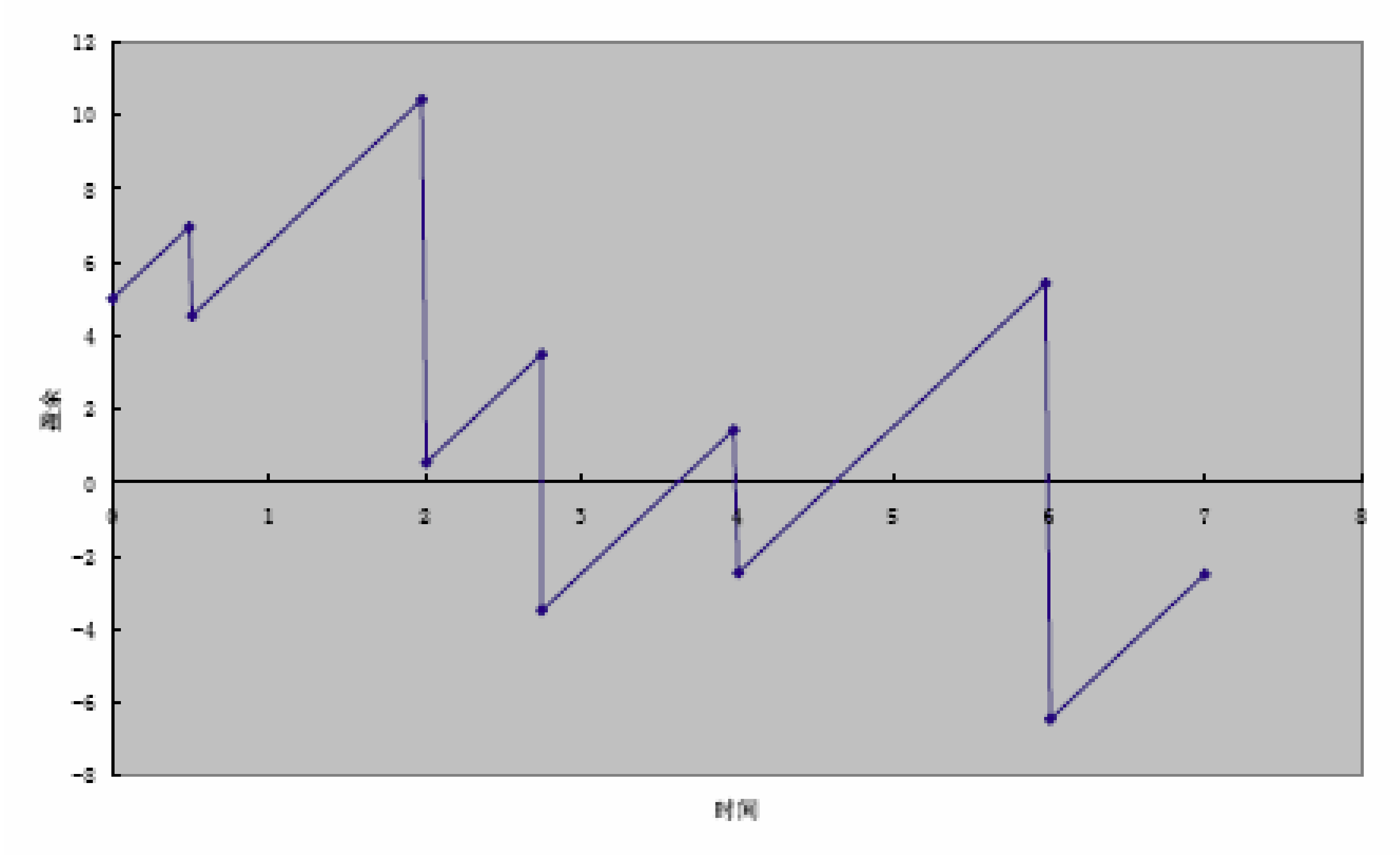
$$U(t) = u + ct - S(t), t \geq 0$$

- $u>0$表示最初的盈余
- $c>0$ 表示收入的增速
- $S(t)$表示截止t时刻的总损失
- 盈余的概念：收入扣除支出
- 期望意义上收入大于支出：$ct > E[S(t)]$

盈余过程的基本性质：

- 任意两次相连的损失事件的发生时刻之间，盈余以速率c线性增加。
- 盈余过程的增量仍然为盈余过程（初始盈余为零）。
- 只要收入大于平均损失，盈余过程的极限（时间趋向无穷）大于零（概率1）。

盈余过程的样本轨道示意图



盈余过程研究背景说明

- 盈余过程是风险理论研究的核心；
- 破产：出现负的盈余或者称之为亏损（**deficit**）。
- 盈余过程几乎处处收敛到+ ∞
- 破产问题只是定义上的考虑
- 盈余过程的研究可以推广到其他金融问题：信用、定价

围绕盈余过程的主要研究问题：破产

- 首次破产时刻 T（ruin time）。严格正的随机变量，为过程首达X轴的时刻。

$$T = inf\{t: U(t) < 0\}$$

- 有限时间内破产的概率:

$$\psi(u;t) = Pr(T \le t|U(0) = u)，\quad t>0$$

围绕盈余过程的主要研究问题：破产概率

- 破产概率（ruin probability）：

$$\psi(u) = Pr(T < +\infty | U(0) = u)$$

- 问题的非平凡性：

$$Pr(T < +\infty | U(0) = u) < 1$$

且：$Pr\left(\lim_{n\to\infty} U(t) > 0\right) = 1$

盈余过程在首次破产时刻 T的性质

- $U(T\_) > 0, U(T) < 0$
- $N(T) = N(T\_) + 1$
- 当T给定时（在T时刻），

$$S(T) - S(T\_) \text{与} X \text{同分布}$$

调节系数与破产概率

调节系数为满足下面方程的正实数R

$$M_{S(t)}(R)=e^{ctR} \quad \text{或} \quad E\left[e^{-RU(t)}\right]=e^{-Ru}, \forall t\geq 0$$

复合Poisson情形调节系数与Poisson参数无关

$$cR=\lambda(M_X(R)-1)\Rightarrow 1+\frac{c}{\lambda}R=M_X(R)$$

$\Rightarrow$ 调节系数方程：

$$1+(1+\theta)E[X]R=M_X(R)$$

复合Poisson情形的调节系数性质

(1)显然$r=0$是方程的一个平凡解。

(2)若γ为$M_X(r)$定义域的上界，则有：$\lim\limits_{r\to\gamma} M_X(r)=+\infty$.

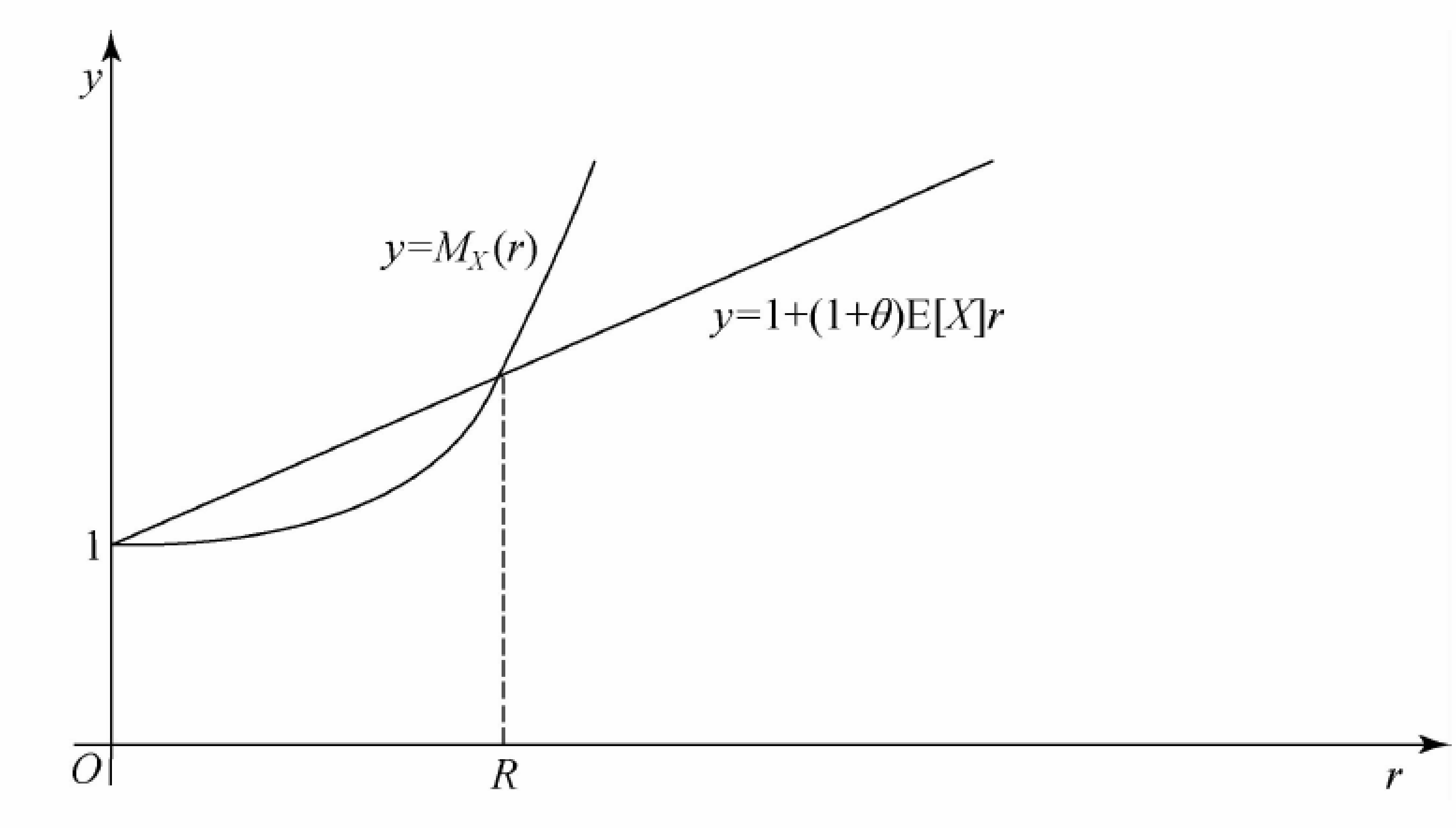
(3)由$M_X'(r)=E\left[Xe^{rX}\right]>0, r\geq 0,$可知方程的右边为严格单增的函数，而且：

$$M_X'(0)=E[X]<(1+\theta)E[X]=\frac{c}{\lambda},$$

这表明，方程左边直线的斜率小于右边曲线在原点的斜率。

(4)由$M_X''(r)=E\left[X^2e^{rX}\right]>0, r\geq 0,$可知方程的右边为严格凹函数。

复合Poisson情形的调节系数



复合Poisson情形的调节系数例子

指数分布：$R=\dfrac{\theta}{1+\theta}\beta$

Gamma分布：$\left(\dfrac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha}=1+\dfrac{\alpha}{\beta}(1+\theta)r$

复合Poisson情形调节系数的界

$$\frac{1}{k}\ln\theta < R \le 2\theta\frac{E(X)}{E(X^2)}$$

其中k为X的取值上界。

一般的收入过程

$$U(t)=u+B(t)-S(t)$$

调节系数方程：

$$rB(t)=\lambda t(M_X(r)-1),\forall t\geq 0,r>0$$

结论：

若调节系数方程的解存在，则$B(t)$为t的线性函数。

定理2-1 调节系数表示的破产概率

若盈余过程的总损失过程为复合Poisson过程，

则可以得到盈余过程破产概率$\psi(u)$的以下表达式：

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}\mid T<\infty)},u\geq 0$$

其中R为调节系数。

作业与思考

- 作业：第二章练习第1-4题
- 思考：
  - 随机过程与随机变量的本质差异
  - 回忆随机过程课程中的首达时计算方法
  - 如何生成盈余过程的轨道？