# Value-at-Risk (b-1)

杨静平

北京大学数学科学学院金融数学系

2019年9月

# Outline

1. 基于VaR的投资组合风险分析
   - 投资组合的VaR
   - VaR工具
   - 举例
   - 适用于一般分布的VaR工具
   - 从VaR到风险管理

# 投资组合风险：分析方法

本章介绍VaR方法在投资组合风险中的系统应用。VaR清晰的说明了杠杆作用和投资组合分散化，并基于当前头寸提供一个风险度量标准。假设资产收益率是风险因子的线性函数，而线性因子服从多元正态分布。

- 使用头寸的信息和VaR构成要素的协方差矩阵来详细解释VaR的构成。
- 为了管理风险，需要分析什么因子能够降低风险。本章详细介绍了在控制投资组合风险时必需的一些VaR工具，其中包括 边际VaR,增量VaR和成分VaR等. 这些工具可以分析资产对整体风险的贡献度。
- 提供一个全球股票投资组合的VaR计算的完整的例子， 并对巴林银行带来毁灭性的交易头寸进行详细的VaR分析。

## 本章的安排

- 投资组合的VaR
- VaR工具
- 举例
- 适用于一般分布的VaR
- 从VaR到投资风险管理
- 小结

# Outline

# 投资组合的VaR

投资组合可以被定义为以某一基础货币表示的某些种类资产构成的头寸组合。如果这些头寸在整个选定的投资期内是固定的， 则投资组合的收益是其相关资产收益率的线性组合。

投资组合的单位资产在未来区间$[t, t+1]$ 的收益率可以表示为

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t+1}.$$

其中，$N$表示资产数目，$R_{i,t+1}$表示资产$i$在区间$[t, t+1]$的收益率，$w_i$为资产$i$的投资权重。

# 投资组合的VaR

投资组合在未来区间$[t, t+1]$ 的总的收益可以表示为

$$WR_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} x_i R_{i,t+1}.$$

有$x_i = W_i = w_i W$为在资产$i$上的投资额度， 其中$W$为投资的总额。

省略上面的角标$t+1$, 则上面的式子可以简写为

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_N \end{pmatrix} = w' R$$

这里$R_p$为投资组合的收益率。 则投资组合的投资收益可以表示为

$$WR_p = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i.$$

传统的均值-方差分析中各项资产的构成都是一种证券。而VaR把每项构成证券都当成一个风险因子， 把$w_i$看作是这种风险因子的线性敞口。有

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$$

方差为

$$Var(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \le N, j \le N, j > i} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

方差可以表示成矩阵的形式，

$$\sigma_p^2 = (w_1, \cdots, w_N) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_N \end{pmatrix}$$

记

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

则有

$$\sigma_p^2 W^2 = x' \sum x$$

以及

$$VaR_p = \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_p W = \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x' \sum x}$$

第$i$个个体的VaR为

$$VaR_i = \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_i |w_i| W.$$

当各个风险收益的方差为$\sigma^2$, 两两之间的相关系数为$\rho$时， 则有

$$\sigma_p^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho\right).$$

在收益率服从多元正态的假设下，

$$VaR_p = \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_p W = \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'\sum x}.$$

各个组成部分的风险为

$$VaR_i = \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_i|w_i|W$$

考虑两个个体的情况。当相关系数为0时， 有

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2}$$

当相关系数都为1时， 有

$$VaR_p = VaR_1 + VaR_2$$

上述原理在保险公司的偿付能力的确定中有很重要的应用。

# 例子

假设某投资组合由两种外国货币加拿大元(CAD)和欧元(EUR)构成，两种货币不相关， 并且相对于美元的波动性分别为5%和12%。 该投资组合分别投资200万美元的加拿大元和100万美元的欧元。 计算在95%水平下的VaR.

设$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 表示分配到各种风险因子下的投资金额，单位以百万美元计，

$$\sum x = \begin{pmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0.12^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0144 \end{pmatrix}$$

投资组合的方差为

$$\mathbf{x}' \sum \mathbf{x} = (2,1) \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0144 \end{pmatrix} = 0.0244$$

所以组合的VaR为

$$VaR_p = 1.65 \times \sqrt{0.0244} \times 1000000 = 257738$$

各个头寸的VaR为

$$\begin{pmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.65 \times 0.05 \times 2000000 \\ 1.65 \times 0.12 \times 1000000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165000 \\ 198000 \end{pmatrix}$$

注意到

$$VaR_p < VaR_1 + VaR_2.$$

# Outline

1. 基于VaR的投资组合风险分析
   - 投资组合的VaR
   - VaR工具
   - 举例
   - 适用于一般分布的VaR工具
   - 从VaR到风险管理

# VaR工具

可以使用VaR方法进行更主动的风险管理。其中一个问题是应该改变哪个头寸来有效的修正VaR?
在实际交易中需要考虑交易成本的原因，投资组合的交易体现为增量交易。 VaR 工具包括边际VaR(marginal VaR)、 增量VaR (incremental VaR) 和 成分VaR (component VaR).

# 边际VaR： 评价单个个体对于投资组合的影响

边际VaR是当投资组合中的某项资产增加一单位敞口时，所引起的投资组合VaR的变化值，它是对该投资头寸的部分偏导。 刻画投资单个资产对投资组合的影响。

下面考虑$N$种证券组成的投资组合， 一个新的组合通过增加一个单位的证券$i$来得到。

有

$$\frac{\partial(W^2\sigma_p^2)}{\partial x_i} = 2x_i\sigma_i^2 + 2\sum_{j\leq N, j\neq i}^{N} x_j\sigma_{ij}$$
$$= 2cov(R_i, x_iR_i + \sum_{j\neq i}^{N} x_jR_j) = 2W \times cov(R_i, R_p)$$

因此，我们有

$$\frac{\partial(W\sigma_p)}{\partial x_i} = \frac{cov(R_i, R_p)}{\sigma_p}$$

以及

$$\frac{\partial VaR}{\partial x_i} = \Phi^{-1}(\alpha)\frac{cov(R_i, R_p)}{\sigma_p}.$$

边际VaR 定义为向量$(\Delta VaR_1, \cdots, \Delta VaR_N)$，其中

$$\Delta VaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i} = \Phi^{-1}(\alpha)\frac{cov(R_i, R_p)}{\sigma_p}.$$

边际VaR与beta有密切的关系。
边际VaR是有单位的。

$\beta$的值定义如下：

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_p)}{\sigma_p^2}.$$

其中， $\beta_i$ 是用来衡量某种证券对投资组合整体风险的贡献,也被称为证券$i$相对于投资组合$P$的系统风险。 可以通过下面的回归方程的$R_{p,t}$的系数

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{p,t} + \epsilon_{i,t}, t = 1, 2, \cdots, T$$

来得到。 实际上， 有

$$\beta = \frac{\sum w}{w' \sum w}$$

有下面的关系：

$$\Delta VaR_i = \frac{VaR}{W}\beta_i$$

Beta风险是资产定价模型中的基础。

假设投资者希望将总投资的额度降低100000个单位，需要选择降低边际VaR最大的部分。

# 增量VaR: 衡量某一项计划交易对投资组合$p$的整体影响

该新交易头寸使用 $a$ 来表示，它是我们考虑的风险因素的新增加的风险量。

在理论上，我们在初始阶段计算出组合的$VaR$值，记为$VaR_p$, 接着衡量另一个新的头寸$VaR_{p+a}$. 增量VaR定义为

$$\text{增量VaR} = VaR_{p+a} - VaR_p.$$

如果VaR值减少了， 说明新交易降低了风险，即是一种对冲风险；反之，新交易增加了风险。增量VaR是新头寸所引起的VaR值的变化。

假设一个机构有100000笔交易，他需要十分钟来计算VAR. 银行在一天的某个时点上已经计算得到了VaR. 如果客户想进行一笔新交易，通过增量VaR来衡量该交易对银行投资组合的影响需要10分种的时间。为了缩短计算是时间， 可以通过下面的近似方法来进行：

$$VaR_{p+a} = VaR_p + (\Delta VaR)' a + \cdots \sim VaR_p + (\Delta VaR)' a.$$

# 最小对冲

当该笔新交易只在一个风险因子上存在敞口，则投资组合的价值从原值$W$变为新值$W+a$, 其中$a$是在资产$i$上的投资金额. 则有

$$\sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2 = \sigma_p^2 W^2 + 2aW\sigma_{ip} + a^2\sigma_i^2$$

对于投资经理来说，需要找出新交易的合适交易量从而令投资组合的风险达到最小。 对$a$求导，可得 $\frac{\partial \sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2}{\partial a} = 2W\sigma_{ip} + 2a\sigma_i^2$. 令上式等于0,得到最小方差头寸为

$$a^* = -W\beta_i \frac{\sigma_p^2}{\sigma_i^2}.$$

这是一个最小方差头寸，也被称为最小对冲。通过对某一资产追加投资，使得整体投资组合的风险最小。

**例子:** 回到前面带有两种货币的例子。 我们增加100000美元的加拿大元头寸. 有

$$\beta = W \times \frac{\sum x}{x' \sum x} = 3 \times \begin{pmatrix} 0.0050 \\ 0.0144 \end{pmatrix} / 0.0244 = \begin{pmatrix} 0.615 \\ 1.770 \end{pmatrix}$$

边际VaR为

$$\Delta VaR = \Phi^{-1}(\alpha)\left(\frac{cov(R_1, R_p)}{\sigma_p}, \frac{cov(R_2, R_p)}{\sigma_p}\right)' = \begin{pmatrix} 0.0528 \\ 0.1521 \end{pmatrix}$$

因此，近似计算得到的增量VaR为

$$\Delta VaR' \times a = \begin{pmatrix} 0.0528 & 0.1521 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 0 \end{pmatrix} = 528$$

$$\sigma_{p+a}^2 W_{p+a}^2 = (2.01, 1) \begin{pmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0.12^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.01 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算得到

$$VaR_{p+a} = 258267, VaR_p = 257738.$$

真实的增量VaR为

$$VaR_{p+a} - VaR_p = 529.$$

# 成分VaR: 投资组合VaR的一部分。

是指若该成分被删除掉，投资组合VaR值的近似变化量。成分VaR定义为

$$CVaR_i = (\Delta VaR_i)x_i = VaR \times \beta_i w_i$$

满足

$$CVaR_1 + CVaR_2 + \cdots + CVaR_N = VaR(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i) = VaR$$

利用 $CVaR_i = VaRw_i\beta_i = VaR_i\rho_i$ 可得成分$i$的VaR贡献率为

$$\frac{CVaR_i}{VaR} = w_i\beta_i.$$

**例子：** 回到前面两种货币的例子。 我们增加100000元的加拿大元头寸. 可以得到

$$\begin{pmatrix} CVaR_1 \\ CVaR_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0528 \times 200\text{万} \\ 0.1521 \times 100\text{万} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 105630 \\ 152108 \end{pmatrix} = VaR \begin{pmatrix} 41.0\% \\ 59.0\% \end{pmatrix}$$

因此有

$$\begin{pmatrix} CVaR_1/VaR \\ CVaR_2/VaR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1\beta_1 \\ w_2\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.667 \times 0.615 \\ 0.333 \times 1.770 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41.0\% \\ 59.0\% \end{pmatrix}$$

欧元的风险较大，两个头寸都没有起到对组合的对冲作用。

# 总结

由下图可以看出，欧元的边际VaR值为加拿大边际VaR值的3倍，因此削减欧元头寸将比削减同样的加拿大头寸更加有效。

对于前面的例子，有

| | $x_i$ | $VaR_i$ | $\Delta VaR_i$ | $CVAR_i$ | $CVAR_i/VAR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| CAD | 2 mill | 165000 | 0.0528 | 105630 | 41% |
| EUR | 1 mill | 198000 | 0.1521 | 152108 | 59.0% |
| Total | 3 mill | | | | |
| 未分散化的VaR | | 363000 | | | |
| 分散化的VaR | | | | 257738 | 100.0% |

# Outline

一份关于全球投资组合的报告,$\sigma_p = 1.82\%$:

| 国家 | $w_i$ (%) | $w_i\sigma_i$ | $\beta_i$ | $w_i\beta_i$ | 最佳对冲 | 最佳对冲的波动性 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 日本 | 4.5 | 0.96% | 0.068 | 31.2 | -4.93 | 1.48% |
| 巴西 | 2.0 | 1.02% | 0.118 | 22.9 | -1.50 | 1.66% |
| 美国 | -7.0 | 0.89% | -0.019 | 13.6 | 3.80 | 1.75% |
| 泰国 | 2.0 | 0.55% | 0.052 | 10.2 | -2.30 | 1.71% |
| 英国 | -6.0 | 0.46% | 0.035 | 7.0 | 2.10 | 1.80% |
| 意大利 | 2.0 | 0.79% | -0.011 | 6.8 | -2.18 | 1.75% |
| 德国 | 2.0 | 0.35% | 0.019 | 3.7 | -2.06 | 1.79% |
| 法国 | -3.5 | 0.57% | -0.009 | 3.4 | 1.18 | 1.81% |
| 瑞士 | 2.5 | 0.39% | 0.011 | 2.6 | -1.45 | 1.81% |
| 加拿大 | 4.0 | 0.49% | 0.001 | 1.5 | -0.11 | 1.82% |
| 南非 | -1.0 | 0.20% | 0.008 | -0.7 | -0.65 | 1.82% |
| 澳大利亚 | -1.5 | 0.14% | 0.014 | -2.0 | -1.89 | 1.80% |
| 合计 | 0.0 | | | 100.0 | | |
| 单一风险 | | 6.91% | | | | |
| 分散风险 | 1.82% | | | | | |

若某项风险贡献率的头寸超过5%,则被称为热点。

- 该表显示日本和巴西两国的风险贡献率超过整体的5%
- 美国和英国只贡献了20%的风险。
- 该表表示日本有4.5%超权重的头寸应该被降低到较低的风险水平。最佳是下降4.93%, 流动性将从1.82%下降到1.48%。与之相比，加拿大4.00%的超权重头寸对投资组合风险只有较小的影响。

# 巴林银行事件：风险实例

巴林银行持有77亿美元的日经指数期货($i=2$)多头，同时持有160亿美元的日本市场债券空头($i=1$)。 日本股票收益和债券收益之间是负相关的。

根据股票市场数据，计算得到的月数据为 $\sigma_1 = 1.18\%, \sigma_2 = 5.83\%$. 相关系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.114 \\ -0.114 & 1 \end{pmatrix}$$

因此有协方差矩阵为

$$\sum = \begin{pmatrix} 0.000139 & -0.000078 \\ -0.000078 & 0.003397 \end{pmatrix}$$

每个头寸的VaR（单位为百万）分别为

$$VaR_1 = 16000 * 1.65 * \sqrt{0.000139} = 310.88,$$

$$VaR_2 = 7700 * 1.65 * \sqrt{0.003397} = 740.51.$$

边际VaR为

$$\Delta VaR = (-0.00920, 0.08935).$$

成分VaR为

$$CVaR = (147.15, 688.01).$$

在95%的置信水平下，VaR 值为83500万元（8.35亿元）。大部分的风险来源于日经指数，债券头寸没有起到对冲作用。里森的损失为13亿元。

# Outline

1. 基于VaR的投资组合风险分析
   - 投资组合的VaR
   - VaR工具
   - 举例
   - 适用于一般分布的VaR工具
   - 从VaR到风险管理

# 适用于一般分布的VaR工具

在正态分布假定下，已经得到了这些VAR工具的分析表达式。 下面考虑一般的情况。有投资组合的收益率为

$$R_p = f(w_1, \cdots, w_N) = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i.$$

记

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = VaR(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i)$$

所以有

$$f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

利用欧拉定理，有

$$f(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$$

$$VaR = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial VaR}{\partial w_i} w_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial VaR}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^{N} (\triangle VaR_i) \times x_i$$

上面结果对于一般的分布也是成立的。在正态分布假设下， 有

$$\Delta VaR_i = \beta_i \Phi^{-1}(\alpha)\sigma_p.$$

上面的结果对于Elliptical distribution也成立。在这种情况下， $\Delta VaR_i$ 可以通过样本的$\beta$系数估计得到。

下面考虑另外的情况。假设已经得到收益率的多元分布函数,并且无法使用 Elliptical distribution来逼近。此时可以使用观测值$R_p^*$来估计VaR. 风险管理者已经得出收益率$R_{p,1}, \cdots, R_{p,T}$ 的分布， 则有

$$R_p^* = \sum_{i=1}^{N} E(R_i | R_p = R_p^*) w_i$$

# Outline

# 从风险度量到风险管理

为了使投资组合达到额度限制的要求， 首先削减具有最大边际VaR值的头寸。 如果某个投资组合需要满仓，那些具有最低边际VaR值的头寸就应该首先增加。 这个过程可以反复进行一直到投资组合的风险达到最小。在这一点上，所有的 边际VaR,或者投资组合的$\beta$值一定是相等的，即

$$\triangle VAR_i = \frac{VAR}{W} \times \beta_i = c$$

# 两个货币组合的例子：

| 资产 | $w_i$ | $\triangle VAR_i$ | 调整$w_i$ | 调整$\triangle VAR_i$ | 调整$\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 加拿大元 | 66.67% | 0.0528 | 85.21% | 0.0762 | 1.0000 |
| 欧元 | 33.33% | 0.1521 | 14.79% | 0.0762 | 1.0000 |
| 总计 | 100.00% | | 100.00% | | |
| 分散化VAR | 257738 | | 228462 | | |
| 标准差 | 15.62% | | 13.85% | | |

# 从风险管理到投资组合管理

考虑投资组合的期望收益率及其风险。投资组合经理的任务是选择一个期望收益率和风险最佳配置的投资组合。 因此，我们可以从风险管理应用过度到投资组合管理。

定义$E_p$为投资组合的期望收益率。这是组合内各构成头寸期望收益率的线性组合， 即

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} w_i E_i$$

夏普比率定义为

$$SP_p = \frac{E_p}{\sigma_p}$$

我们希望增加投资组合的期望收益率，从而让组合获得最高的夏普比率。 在最优处有

$$\frac{E_i}{\triangle VAR_i} = \frac{E_i}{\beta_i} = c$$

假设$E_1 = 8.00\%, E_2 = 5.00\%$.

| 资产 | $E_i$ | $w_i$ | $\beta_i$ | $E_i/\beta_i$ | 调整$w_i$ | 调整$\beta_i$ | 调整$E_i/\beta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 加拿大元 | 8.00% | 66.67% | 0.615 | 0.1301 | 90.21% | 1.038 | 0.0771 |
| 欧元 | 5.00% | 33.33% | 1.770 | 0.0282 | 9.79% | 0.649 | 0.0771 |
| 总计 | | 100.00% | | 100.00% | | | |
| 分散化VaR | | 257738 | | | 230720 | | |
| 标准差 | | 15.62% | | | 13.98% | | |
| 期望收益率 | 7.00% | | | 7.71% | | | |
| 夏普比率 | | 0.448 | | | 0.551 | | |

最早的头寸CAD的Shape ratio 0.448，以及$E_1/\beta_1 = 0.1301, E_2/\beta_2 = 0.0282$. 这表明应该增加CAD的头寸。从最后的结果来看， CAD的比重调整到了90.21%.

$$0.1562 \times 1.65 = 0.25773.$$

以及有

$$0.07/0.1562 = 0.448$$