2019年秋季学期

论文讨论班

交易量与波动率的关系

非线性模型发展与脉络梳理

施燕北

2019年11月2日

STFIGARCH模型 (Koubaa & Slim，2019)

- **动因：**

①**非线性的存在：**由于市场摩擦的存在，不同类型交易者也会做出不同的决定。市场逐渐从一个瞬时状态转移最最后的稳态，这取决于市场参与者反应的速度和他们所做出的的决定的同时性程度。

*相比马尔科夫转换模型(Markov switching)优势： Markov switching是依靠一个隐藏的Markov链，不可观测；本模型基于市场上**可观测到的**随机变量。*

另外，当市场随着交易量水平(低于/高于门限值)从一个状态转换到另一个状态，模型的参数也是平滑改变的。因此，本模型体现了交易量的时变性。

②**长记忆性的**存在已经被证明：FIGARCH模型

Bollerslev and Jubinski (1999)，Fleming and Kirby (2011) 等人

研究框架

交易量预处理

去趋势：$V_t = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \mu_t$ → V'_t

去自相关性：ARMA → V''_t

去波动集聚性：GARCH → V'''_t

非预期交易量

收益率建模：GARCH-V模型

(Lamoureux and Lastrapes, 1990)

$$R_t = x_t' \varphi + \mu_t \quad \mu_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \mu_{t-p}^2 + \theta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \theta_q \sigma_{t-q}^2 + \beta V_t$$

将交易量分类

基于信息分类的GARCH-V模型

(Park, 2010)

交易量与收益率的非线性

TAR模型(突变)

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} I_t + \beta_1 r_{t-1}(1 - I_t) + \varepsilon_t$$

$$I_t = \begin{cases} 1, & x_t > c \\ 0, & x_t \le c \end{cases}$$

STAR模型(平稳转换)

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1 r_{t-1}) F(x_{t-d}) + \varepsilon_t$$

引入非对称性/非线性

TGARCH(1,1)模型(突变)

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \eta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_2 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \theta_0 V_t + \theta_1 V_{t-1}$$

$$d_t = \begin{cases} 1, \varepsilon_t < 0 \\ 0, \varepsilon_t \ge 0 \end{cases}$$

STR模型，平滑转换

$$y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 x_{t-1}) + (\alpha_0' + \alpha_1' y_{t-1} + \beta_1' x_{t-1}) F(s_t) + \varepsilon_t$$

长记忆性

FIGARCH模型

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{\beta(1)} + \left[1 - \frac{\Phi(L)}{\beta(L)}(1-L)^d\right]\varepsilon_t^2$$

体制转换

STFIGARCH模型

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta(1 - F(x_{t-s})) - \beta * F(x_{t-s})} + \left[1 - \frac{(1-\phi L)(1-L)^d}{1 - \beta(1 - F(x_{t-s}))L - \beta * F(x_{t-s})L}\right]\varepsilon_t^2$$

推广至交易量-波动率研究框架下

TAR vs STAR (McMillan, 2007)

TAR模型（突变）

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} I_t + \beta_1 r_{t-1}(1 - I_t) + \varepsilon_t$$

$$I_t = \begin{cases} 1, & x_t > c \\ 0, & x_t \le c \end{cases}$$

其中，转换变量x_t可以设定为（滞后）交易量或（滞后）交易量的变化量（MTAR）

STAR模型（平稳转换）

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1 r_{t-1}) F(x_{t-d}) + \varepsilon_t$$

- 转换函数
  - ✓ 对数形式 LSTAR
    $$F(x_{t-d}) = \left(1 + \exp\left(-\gamma(x_{t-d} - c)\right)\right)^{-1}$$
  - ✓ 指数形式 ESTAR
    $$F(x_{t-d}) = 1 - \exp\left(-\gamma(x_{t-d} - c)^2\right)$$
- 转换变量
  - ✓ 滞后交易量

结论：证明了非线性的存在；平滑转换模型更符合市场，LSTAR模型的预测效果最好

转换函数的性质

$$F(x_{t-d}) = \left(1 + \exp\left(-\gamma(x_{t-d} - c)\right)\right)^{-1}$$

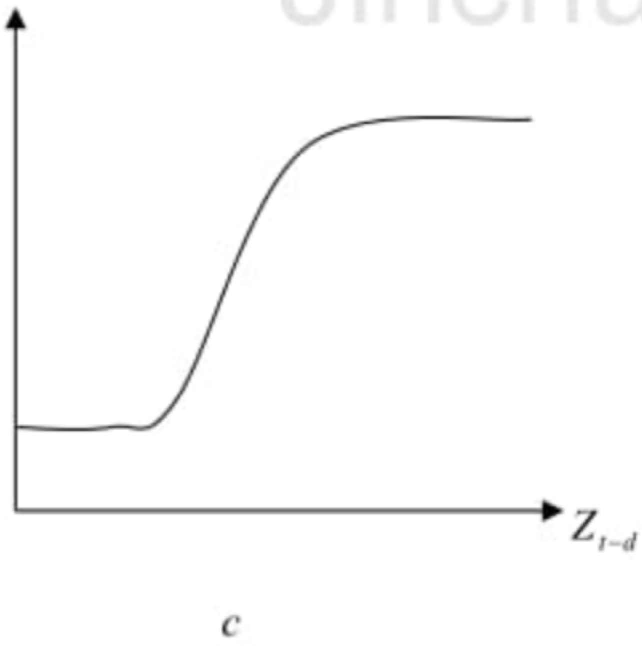

图 1：LSTAR 模型

$$F(x_{t-d}) = 1 - \exp(-\gamma(x_{t-d} - c)^2)$$

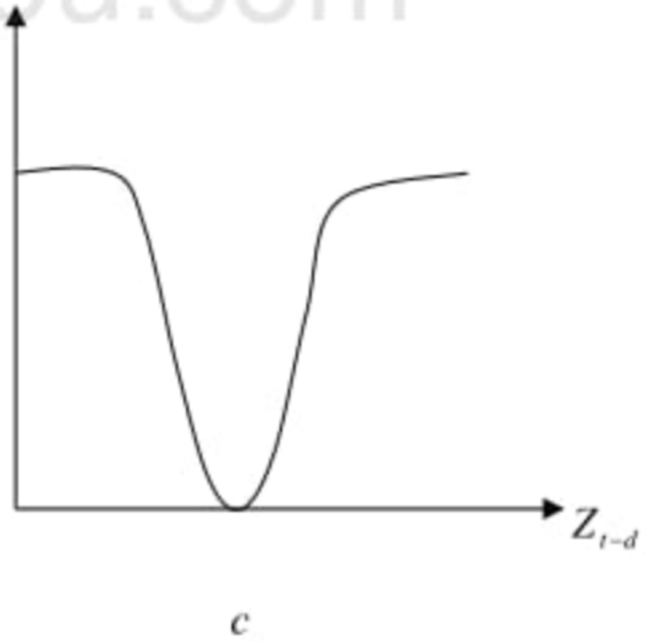

图 2：ESTAR 模型

STR vs TGARCH（ Jawadi and Ureche-Rangau, 2013）

■ **TGARCH(1,1)模型，突变**

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \eta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_2 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \theta_0 V_t + \theta_1 V_{t-1}$$

$$d_t = \begin{cases} 1, \varepsilon_t < 0 \\ 0, \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

刻画好消息和坏消息对波动率的冲击效果的不同

■ **STR模型，平滑转换**

$$y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 x_{t-1}) + (\alpha_0' + \alpha_1' y_{t-1} + \beta_1' x_{t-1}) F(s_t) + \varepsilon_t$$

其中， y_t波动率、x_t交易量、s_t转换变量
转换函数：对数形式、指数形式
转换变量s_t：交易量和波动率关系的变化量（基于VAR模型，下一周仔细看）

结论：STR模型的模型效果优于TARCH模型
低波动率regime时，交易量与波动率的的相关性很弱；高波动率regime时，交易量与波动率的关系增强。

STFIGARCH模型 (Kiliç, 2011； Koubaa & Slim，2019)

- **FIGARCH model，Baillie et al. (1996)**

$$\mathrm{r_t} = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{\beta(1)} + \left[1 - \frac{\Phi(L)}{\beta(L)}(1-L)^d\right]\varepsilon_t^2$$

其中，

$$\Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \phi_i L^i,$$

$$\beta(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i L^i,$$

$$0 < d < 1$$

- **STFIGARCH (Kiliç, 2011)**

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta\left(1 - F(x_{t-s})\right) - \beta * F(x_{t-s})} + \left[1 - \frac{(1-\phi L)(1-L)^d}{1 - \beta\left(1 - F(x_{t-s})\right)L - \beta * F(x_{t-s})L}\right]\varepsilon_t^2$$

转换函数

$$F(x_{t-d}) = \left(1 + \exp\left(-\gamma(x_{t-d} - c)\right)\right)^{-1}$$

转换变量：交易量

STFIGARCH模型

- **特点**(Kiliç, 2011)：

可以刻画在不同的regime转换时，波动率的平缓转换过程

可以刻画对正面和负面消息冲击的不同响应

允许门限非0

- **贡献**(Koubaa & Slim，2019)：

①具有实际意义：展示了如何使用交易行为（交易量）定义市场regime（波动率）

②历史文献研究的是**平均意义上**的相关性或因果关系，**本文研究要产生高/低的条件波动率需要多少交易量**

③相比TGARCH及其后续相关,平滑转换**允许门限非0**，**允许内生(?)**。

④对MDH模型的传统检验关注于是否将交易量纳入条件方差方程(e.g., Lamoureux and Lastrapes, 1990), 这与MDH及大部分假设交易量内生的市场微观交易模型**弱一致(?)** 。根据Fleming et al. (2006)，先验结论的有效性仍有疑问。本文引入交易量作为转换变量回避了这一设定偏差。

⑤适用于多数发达国家和新兴国家；仿照Girard and Biswas (2007), 将**交易量分解为预期部分和意外部分**。

⑥波动率的估计和预测都是投资决策、风险控制、衍生品定价和对冲的基本输入变量。设计了策略，效果好，能赚钱。

待完成任务

- STR模型中变量的选择 (Jawadi and Ureche-Rangau, 2013)
- FIGARCH模型及长记忆性的理解
- **STFIGARCH模型的进一步理解：允许参数内生、弱一致**
- TAR模型+两阶段门限托宾模型（Jawadi et al.， 2016) (可能不读)