第1讲 个体风险模型

2019年9月9日

背景—个体风险与聚合风险

- **在金融机构的经营过程中，大多数情况下，保险公司或其他金融机构的业务或投资都会表现出组合方式的风险，所谓的组合方式，也就是将若干风险特征相对差异不大的风险标的通过某种自然的方式汇合在一起。**
  - 保险公司某个业务类的同质保单构成的组合，这种汇合可以是那些核保特征相近的保单的组合，也可以是同一类业务的保单组合；
  - 商业银行贷款业务中，相对同质的贷款构成的组合，对公业务中同一行业的贷款资产池、个人业务中风险特征相对一致的个人住房消费贷款组成的资产池。
  - 基金公司或资产管理公司在投资资产组合层面进行的收益和风险分析。
- **从概率论建模的角度看，这一类问题对应着随机变量和，以及随机变量之和的随机过程问题。组合的风险模型常常会表现出与单个风险不同的性质。**

个体风险模型：数学描述

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\Pr(X_i = 0) > 0 \qquad \Pr(X_i \geq 0) = 1$$

模型的背景可解释为：模型中的S表示在给定的周期（一年，半年，季度）内某给定的n个业务组合（portfolio）的总损失量，其中的各项表示风险个体的损失量（个体风险变量，individual risk）。

X的性质：

1）每个风险个体**的确存在损失不发生的概率**，

2）只考虑风险个体的**损失**，不考虑损失为负值（赢利）的情况。

个体风险变量的特点

$$X_i = I_i B_i$$

$$\Pr(I_i = 1) = 1 - \Pr(I_i = 0) \triangleq q_i$$

$$\Pr(B_i = 0) = 0$$

$$F_{X_i}(x) = (1 - q_i) + q_i F_{B_i}(x)$$

损失发生的概率小，但是损失金额可能会很大。

一般$q_i < 0.25$

个体风险变量的特点（续）

一般记

$$\mu_i = E(B_i), \ \sigma_i^2 = Var(B_i)$$

且假设I_i 与 B_i 独立，则

$$E(X_i) = \mu_i q_i, \ Var(X_i) = \mu_i^2 q_i (1 - q_i) + \sigma_i^2 q_i$$

例1-1

- 已知某一年定期寿险的身故保险责任如下：一般的身故赔偿为五万元，若因“意外”身故，则额外赔偿五万元。经过对历史数据的分析，已知：一年内“意外身故”的概率为0.5‰，非“意外身故”的概率为2‰。试分析该保险每份保单的损失变量的分布、均值和方差。

$\Pr(X_i = 10) = 0.0005$ $\Pr(X_i = 5) = 0.0020$ $\Pr(X_i = 0) = 0.9975$

考虑分解

$$\Pr(I_i = 1, B_i = 10) = 0.0005 \qquad \Pr(I_i = 1, B_i = 5) = 0.0020$$

$$q_i = \Pr(I_i = 1) = 0.0025$$

$$\Pr(B_i = 10) = \Pr(X_i = 10 | I_i = 1) = \frac{0.0005}{0.0025} = 0.2$$

$$\Pr(B_i = 5) = \Pr(X_i = 5 | I_i = 1) = \frac{0.0020}{0.0025} = 0.8$$

标的变量的**实际损失**和金融合约的**实际支付**的区别

- **在金融保险的实际经营中，出于经营者自身的考虑和市场的需求，金融产品（合同）的支付不等于标的风险的损失变量，而是进行某种变换：**
  - 在保险条款中的免赔额和保单限额，表明保单的承保责任对应于一定范围内的实际损失，并不是承保标的的所有损失都会有保险责任赔偿；
  - 在再保险合约中的自留额或分保限额等条款，更是明确了再保险公司对风险标的的部分责任；

标的变量的**实际损失**和金融合约的**实际支付**的区别

- 大多数金融衍生合约的支付（payoff）都是对标的资产（underlying assets）进行某种变换，有时这种变换还是非线性的或者不连续的，例如，只有当标的资产的价值落在合约所要求的范围内时，才会执行合约的交易。
- 这表明，我们可以进行两种建模：
  - 标的实际损失建模
  - 合约实际支付建模

以下两种合约支付的概率性质差异

- $Y^L = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X-d, & X > d \end{cases}$. $F_{Y^L}(x) = F_X(x+d), x \ge 0$

- $Y^P = \begin{cases} \text{无定义}, & X \le d \\ X-d, & X > d \end{cases}$. $F_{Y^P}(x) = \frac{F_X(x+d)-F_X(d)}{1-F_X(d)}, x \ge 0$

- 有上限的情形：

- $Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \ge L \end{cases}$. $F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x), & 0 \le x < L \\ 1, & x \ge L \end{cases}$

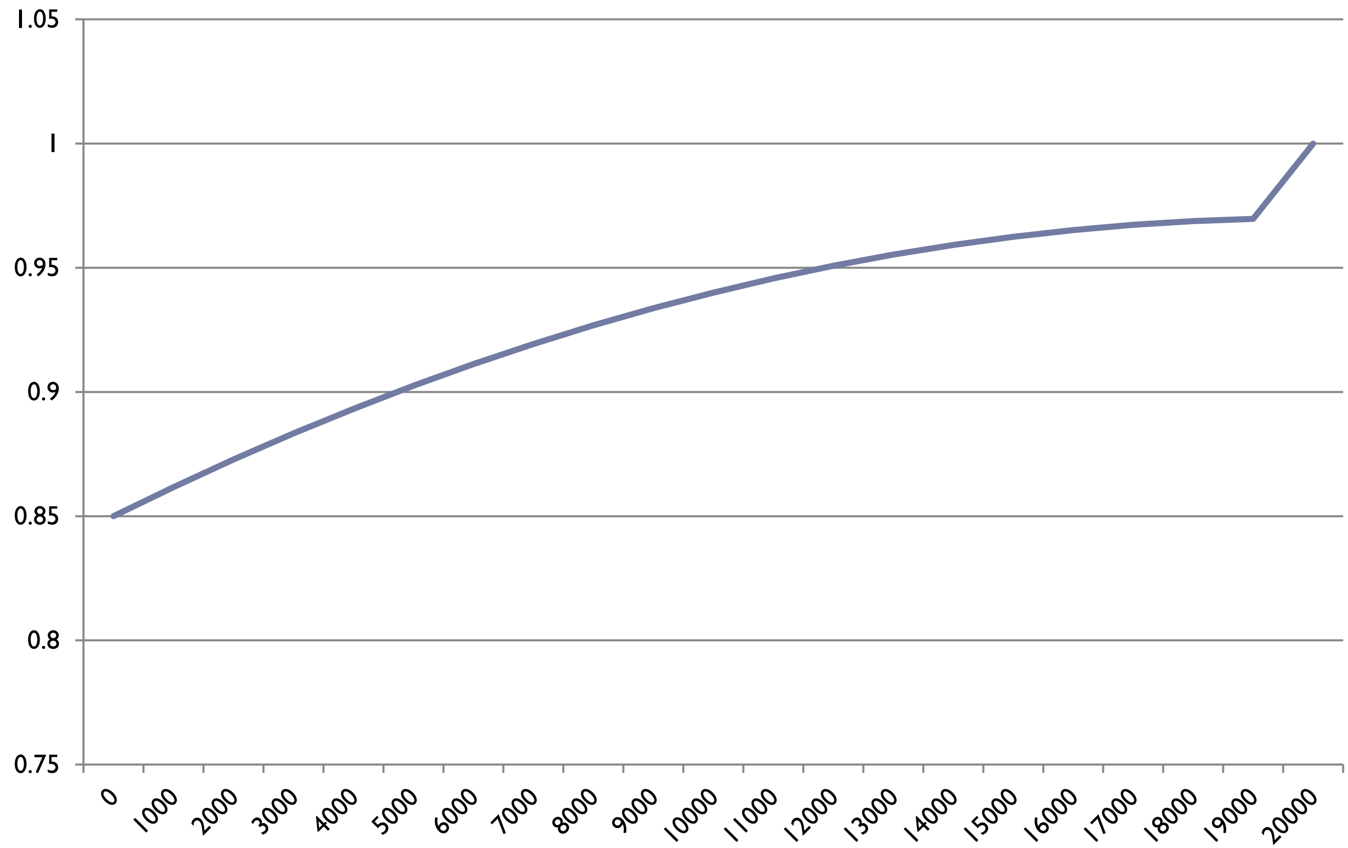
例1-2 损失为混合型

- 考虑财产（汽车）损失保险每年的损失量变量。假定每年最多有一次理赔，当保险事故发生时，250元以下的损失免赔，同时最高赔偿金额为20,000元。历史经验数据表明，理赔的发生概率为15%，在所有的赔偿中大约有20%的赔偿为20,000元，赔偿金额 在0与20,000之间的概率密度为（负）线性函数。试分析每份保单损失变量的分布和均值。

损失的密度函数和赔付的分布函数

- $q_i = 0.15$，$Pr(B = 20000) = 0.2$
- $f_B(x) = c\left(1 - \frac{x}{20000}\right)$，$0 \le x < 2000$
- $F_X(x) =$

$$\begin{cases} 0.85 + 0.12\left[1 - \left(1 - \frac{x}{20000}\right)^2\right], & 0 \le x < 2000 \\ 1, & x \ge 20000 \end{cases}$$


1.05
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
11000
12000
13000
14000
15000
16000
17000
18000
19000
20000

总损失变量分布的计算

- 卷积直接计算
- 随机变量的生成函数为工具
- 利用中心极限定理进行近似计算

常用的随机变量生成函数

- 矩母函数

$$\boldsymbol{M_S(t) := E\left(e^{tS}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t), t \geq 0}$$

- 拉普拉斯函数

$$\boldsymbol{L_S(t) := E\left(e^{-tS}\right) = \prod_{i=1}^{n} L_{X_i}(t), t \geq 0}$$

- 概率生成函数

$$\boldsymbol{P_S(t) := E\left(t^{S}\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(t), t \geq 0}$$

指数分布：

$$X_i \sim \exp(\beta), \quad f_{X_i}(x) = \beta e^{-\beta x}, x \geq 0$$

$$M_{X_i}(t) = \frac{\beta}{\beta - t} = \frac{1}{1 - tE[X_i]}$$

$$M_S(t) = \prod_{1}^{n} M_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n$$

正态分布

- 若

$$X_i \sim N\left(\mu_i, {\sigma_i}^2\right)$$

- 则有：

$$M_S(t) = e^{t\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}{\sigma_i}^2}$$

$$S \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}{\sigma_i}^2\right)$$

Gamma分布

- 若

$$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$$

- 则有：

$$M_S(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

$$S \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$

具体应用-基于组合的定价

- 现有由1800个合同组成的保单组合，均为保险期限一年的合同，保险金额为1个货币单位或两个货币单位，具体的分布情况见表。试用正态分布近似总损失，回答以下问题：1）计算该保单组合的总损失的95％上分位点。2）若每个保单以其损失数学期望的一定比例收取保费，保险公司希望收取的总保费应保证总损失不超过保费收入的概率大于95%，试给出保费值。

组	索赔发生概率 q_k	赔 偿 金 额（单位化）	组内保单数
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500
合计			1800

$$\Pr\{S-(1+\theta)E[S]\leq 0\}\leq 0.95$$

$$\theta = 16.45\%$$

结论：若以16.45%的比例在平均损失（数学期望）的基础上收取附加费，则有95%的把握保证总损失不超过收入186.32（个货币单位）。

例1-5 2500份机动车辆保险合同。

损失分布

$$f_{B_i}(x;\lambda_i,L_i)=\lambda_i e^{-\lambda_i x},\quad 0\le x<L_i,$$

$$\Pr(B_i=L_i)=e^{-\lambda_i L_i},$$

$$\mu_i=E(B_i)=\frac{1-e^{-\lambda_i L_i}}{\lambda_i},$$

$$Var(B_i)=\frac{1-2\lambda_i L_i e^{-\lambda_i L_i}-e^{-2\lambda_i L_i}}{\lambda_i^2}$$

$$\theta=18.46\%$$

例1-6 再保险-风险再分配

- 现有16000份1年期人寿保险（死亡概率均为2%）合同的保单组合。公司考虑到自身的资本状况和风险容忍水平，希望对上述保单组合按照以下原则安排再保险：对每份保单均考虑溢额再保险（将超过自留额部分的损失进行再保，stop-loss），并假设再保险保费为再保险平均损失的2.5%。若希望所设计的再保险使得自留的总损失与再保险保费（与自留额有关）的总和超过8,250,000元的概率尽可能的小，试用正态分布近似计算最优的自留额。

$$S_I=\sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{n_k} I_j(b_k \wedge d)$$

$$p=\Pr(S_I+\text{再保险保费}>825)$$

自留额	平均自留损失	自留损失方差	再保险费（2.5%平均剩余损失）	总损失概率
2	480	784.0	275.0	0.00621
3	570	1225.0	162.5	0.00415
4	610	1499.4	112.5	0.00402
5	650	2587.2	62.5	0.01360

为什么自留额增大后保险公司自留部分出现大损失的概率也会增加？

作业和思考

- **作业：**
  - **P.39，习题1:1-8**
- **思考：**
  - 概念：风险/损失
  - 方法：风险pool汇总（加和）之后的概率性质的变化
  - 应用：风险汇总后性质（不）变化的示例。