# 衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-10-7 (初稿)

**要求**

阅读本课件. 完成所有作业题, 作业题 1-9 解答在下次课前提交.

## 1 关于以前的内容

例如：衍生证券持仓量, 标的为远期合约/期货. 衍生证券的避险作用. 平价公式

$$c(S,t,E,T)+e^{-r(T-t)}E=p(S,t,E,T)+e^{-q(T-t)}S(t)$$

的作用.

## 2 期权的基本性质

### 2.1 Put-call ratio

给定标的 $S$, 假设欧式看涨期权 $c$ 和看跌 $p$ 在交易所交易. Put-call ratio, 记为 $\mathrm{PCR}(S,t)$, 定义为

$$\mathrm{PCR}(S,t):=\frac{\sum\limits_{E>0,T>t}\left\{p(S,t,E,T)\text{ 的成交量}\right\}}{\sum\limits_{E>0,T>t}\left\{c(S,t,E,T)\text{ 的成交量}\right\}}. \tag{2.1.1}$$

也有人将 Put-call ratio 定义为

$$\mathrm{PCR}(S,t):=\frac{\sum\limits_{E>0,T>t}\left\{p(S,t,E,T)\text{ 的持仓量}\right\}}{\sum\limits_{E>0,T>t}\left\{c(S,t,E,T)\text{ 的持仓量}\right\}}.$$

我们采用式(2.1.1)中的定义.

*作业题* 1. 给定标的 $S$, 假设欧式看涨期权 $c$ 和看跌 $p$ 在交易所交易. 大约在 20 年前, 实证发现, 如果 $\mathrm{PCR}(S,t)\gg 1$, 那么在 $t$ 以后 $S$ 将下跌. 从你在本课程中学过的知识, 解释为什么会有这一规律? 在此规律被公开后, 这个规律就不太准确了. 为什么? 要求给出合理的理由.

□

### 2.2 期权的齐次性

记 $\widehat{S}$ 为函数 $S$(名称). 期权 $v \in \{c, p, \mathbb{C}, \mathbb{P}\}$ 可以写为 $v(\widehat{S}, S, t, E, T)$. 对任意正常数 $k$, $\widehat{kS}$ 表示将 $k$ 股捆成 1 股后新的股票.

**引理 2.1.**

$$F(\widehat{kS}, ks, t, T) = kF(\widehat{S}, s, t, T), \forall F \in \{For, Fut\}.$$

$$v(\widehat{kS}, kS, t, kE, T) = kv(\widehat{S}, S, t, E, T), \forall v \in \{c, p, \mathbb{C}, \mathbb{P}\}.$$

□

给定 $b > 0$, 在 $t - b$ 时, 我们预测在 $t$ 时, $S(t)$ 有不同可能的取值. 例如: $S(t)$ 可能等于 $s$ 或 $ks$ 或其他取值, 小写 $s$ 表示在 $t - b$ 时, $S(t)$ 的预测/ 预判值, 其中 $s \geq 0$. 若 $b = 0$, 则 $t$ 为当前时刻. 此时 $S(t)$ 是唯一确定的, 若将上式中的 $s$ 换成 $S(t)$, 则表示, 在当前时刻 $t$ 时, $S$ 有两个取值 $S(t)$ 和 $kS(t)$. 这在 $k \neq 1$ 时是不可能的.

**命题 2.2.** *假设股票 $S$ 连续股息派发, 其派发率为 $q \geq 0$. 给定 $s, k \geq 0$. 有*

1. $$F(\widehat{S}, ks, t, T) = kF(\widehat{S}, s, t, T), \quad \text{(在 } t \text{ 前预判)}, \forall F \in \{For, Fut\}.$$

2. $$v(\widehat{S}, ks, t, kE, T) = kv(\widehat{S}, s, t, E, T), \quad \text{(在 } t \text{ 前预判)}, \forall v \in \{c, p, \mathbb{C}, \mathbb{P}\}.$$

□

在不引起混淆的情形下, 有时我们将股票名称 $\widehat{S}$ 忽略不写.

*作业题* 2. 给定常数 $\lambda \in [0, 1]$, 对于 $v \in \{c, p, \mathbb{C}, \mathbb{P}\}$, 证明对于 $\widehat{S}$ 有

$$v(S, t, \lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2, T) \leq \lambda v(S, t, E_1, T) + (1 - \lambda)v(S, t, E_2, T).$$

$$v(\lambda S_1 + (1 - \lambda)S_2, t, E, T) \leq \lambda v(S_1, t, E, T) + (1 - \lambda)vS_2, t, E, T).$$

期权的以上性质称为期权的凸性. [1]

□

## 3 期权交易策略简介

### 3.1 Butterfly spreads

投资组合

$$\Pi(t) := c(S, t, E_1, T) + c(S, t, E_2, T) - 2c\left(S, t, \frac{E_1 + E_2}{2}, T\right) \tag{3.1.1}$$

称为 Butterfly spread. 细节课上讲.

[1] 函数 $f(x)$ 是凸函数是指, 对任意 $x_1$ 和 $x_2$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \lambda \in (0, 1).$$

*作业题* 3. 对于欧式看跌期权, 我们也可以定义 Butterfly spread 如下:

$$\widetilde{\Pi(t)} := p(S,t,E_1,T) + p(S,t,E_2,T) - 2p\left(S,t,\frac{E_1+E_2}{2},T\right).$$

问: $\forall t \le T$, $\widetilde{\Pi(t)}$ 与式 (3.1.1)中的 $\Pi(t)$ 是否相等? 给出理由.

□

## 3.2 call/put spread

*作业题* 4 (bull spread). 对于标的 $S$, 构造投资组合

$$\Pi(S,t,v,E_1,E_2) := v(S,t,E_1,T) - v(S,t,E_2,T), \quad v \in \{c,p\}.$$

如果在 $t$ 时我们预测 $S(T) > S(t)$, 那么回答以下每个问题.

1. 找 $E_1$ 和 $E_2$, 使得当 $S(T) > S(t)$ 时, 有

$$\Pi(S,T,c,E_1,E_2) - \Pi(S,t,c,E_1,E_2) > 0.$$

   给出理由.

2. 找 $E_1$ 和 $E_2$, 使得当 $S(T) > S(t)$ 时, 有

$$\Pi(S,T,p,E_1,E_2) - \Pi(S,t,p,E_1,E_2) > 0.$$

   给出理由.

□

*作业题* 5 (bear spread). 对于标的 $S$, 构造投资组合

$$\Pi(S,t,v,E_1,E_2) := v(S,t,E_1,T) - v(S,t,E_2,T), \quad v \in \{c,p\}.$$

如果在 $t$ 时我们预测 $S(T) < S(t)$, 那么回答以下每个问题.

1. 找 $E_1$ 和 $E_2$, 使得当 $S(T) > S(t)$ 时, 有

$$\Pi(S,T,c,E_1,E_2) - \Pi(S,t,c,E_1,E_2) > 0.$$

   给出理由.

2. 找 $E_1$ 和 $E_2$, 使得当 $S(T) > S(t)$ 时, 有

$$\Pi(S,T,p,E_1,E_2) - \Pi(S,t,p,E_1,E_2) > 0.$$

   给出理由.

□

## 3.3 其他期权策略

给出参考书.

# 4 随机过程初步

**重要:** 这部分内容不严格.

## 4.1 布朗运动

称随机过程 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为布朗运动, 如果以下条件满足 (不严格)

1. 连续性: $B(t)$ 关于 $t$ 连续.
2. 增量独立性: 对任意 $s \leq t$, $B(t) - B(s)$ 与 $B(u)$ 独立, 其中: $u \leq s$.
3. 平稳性: 如果 $s \leq t$, 那么 $B(t) - B(s)$ 和 $B(t-s) - B(0)$ 具有相同的概率分布.

*注释* 4.1. 以上关于布朗运动的定义不严格. 要模去零测集.

□

**定理 4.2.** *如果 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为布朗运动, 那么*

$$B(t) - B(0) \in \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t),$$

*其中: $\mu$ 和 $\sigma$ 为常数.*

□

**定义 4.3.** *布朗运动$\{B(t), t \geq 0\}$ 称为标准的, 如果 $B(0) = 0$, 而且 $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$. 即: 初始位置为 0, 而且 $\mu = 0, \sigma = 1$.*

□

*注释* 4.4. 在今后, 除非特殊声明, 凡是我们提及 布朗运动, 都假设它是标准布朗运动. 因此, 布朗运动$B(t)$ 的概率密度为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right).$$

□

*注释* 4.5. 布朗运动的定义有很多, 它们都是等价的. 如: 将 $B(t)$ 满足正态分布放到它的定义中. Levy 将标准布朗运动定义为 $B(0) = 0$, 并且满足 $B(t)$ 的连续性和上面命题中的鞅性质. 布朗运动不同的等价定义的讨论不是本课程的内容.

□

以下是 (标准)布朗运动的基本性质.

**命题 4.6.** *(标准)布朗运动$\{B(t), t \geq 0\}$ 有如下性质.*

*1.*
$$-B(t) \quad \text{和} \quad \widetilde{B}(t) := \begin{cases} tB\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

*都是布朗运动.*

*2.* *给定 $a > 0$,*
$$aB\left(\frac{t}{a^2}\right) \quad \text{和} \quad B(t+a) - B(t)$$

*皆为布朗运动.*

3. $\mathbb{E}(B(t)B(s)) = t \wedge s$, 其中: $t \wedge s := \min(t, s)$.
4. 对任意 $s, t$, $\mathbb{E}(B(t) - B(s)) = 0$, $\mathbb{E}((B(t) - B(s))^2) = |t - s|$.
5. 如果 $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$, 那么 $B(t_2) - B(s_2)$ 和 $B(t_1) - B(s_1)$ 相互独立.
6. $B(t)$ 关于时间 $t$ 不可微.
7. (鞅性质) 记: $B_0^s := \{B(u), 0 \le u \le s\}$. 假设: $t \ge s$, 则

$$\mathbb{E}(B(t)|B_0^s) = B(s), \quad \mathbb{E}([B(t) - B(s)]^2|B_0^s) = t - s.$$

□

在概率论中, 存在不同的意义下极限的定义, 通常它们不等价. 本课程重点讨论在均方收敛 (convergence in mean square) 意义下的极限. 即: 给定随机过程 $\{X_n\}$ 和随机变量 $X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X$ 是指以下 (1)-(3) 均满足: (1) $\mathbb{E}(X_n^2)$ 有限. (2) $\mathbb{E}(X^2)$ 有限. (3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}([X_n - X]^2) = 0$. 这种极限也称为在 $L^2$ 意义下的极限.

**命题 4.7.** *给定 $[0, t]$ 上的分划: $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{i_{m(n)}}^{(n)} = t$, 并且假设:*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_j (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) = 0.$$

*那么*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{t_{m(n)}-1} (B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)}))^2 = t, \quad \text{(均方收敛)}.$$

*证.* 由于

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left[\sum_{j=0}^{t_{m(n)}-1} \left(B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)})\right)^2 - t\right]^2\right) \\
=&\mathbb{E}\left(\left[\sum_{j=0}^{t_{m(n)}-1} \left\{\left(B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)})\right)^2 - (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})\right\}\right]^2\right) \\
&= \sum_{j=0}^{t_{m(n)}-1} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2 \mathbb{E}\left(\left(\frac{(B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)}))^2}{t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}} - 1\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=0}^{t_n-1} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2 \mathbb{E}([y^2 - 1]^2), \quad y \sim \mathcal{N}(0, 1) \\
&\le \max_j (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) t \mathbb{E}([y^2 - 1]^2).
\end{aligned}$$

所以, 让 $n \to +\infty$, 则由以上不等式可证命题. □

*问题* 4.8. 以上命题的几何意义是什么?

**引理 4.9.** *如果 $s \le t$, 那么*

$$\mathbb{E}(|B(t) - B(s)|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t-s}.$$

证明留作作业题. □

*作业题 6.* (1) 证明引理4.9

(2) 假设: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ 为 $[0,1]$ 区间上的一个分划:. 令:

$$f(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(|B(t_{i+1}) - B(t_i)|).$$

当 $n \to +\infty$ 并且满足 $\lim_{n\to+\infty} \max_i(t_{i+1} - t_i) = 0$ 时, 证明: $f(n)$ 不是有界的.

□

## 4.2 Itô积分

记: $dB(t) = B(t+dt) - B(t)$. 对于一连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 我们要定义积分: $\int_0^t f(B_s)dB_s$. 我们先对区间 $[0,t]$ 做分划: $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{i_{m(n)}}^{(n)} = t$. 并且假设: $\lim_{n\to+\infty} \max_j(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) = 0$. 此时, 我们不能在通常黎曼意义下定义此积分, 这是因为引理 4.9和作业题6(2) 意味着 $\sum_j \mathbb{E}(|B(t_{j+1}) - B(t_j)|)$ 将随着分割的加密而发散. 我们定义

$$\int_0^t f(B_s)dB_s := \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{i_{m(n)}-1} f(B_{t_j^{(n)}})(B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)})).$$

以上定义的积分称为Itô积分.

*注释 4.10.* 在以上极限中, $f$ 必须取对应区间的左端点.

□

*例子 4.11.* 证明: $\int_0^t BdB = (B^2(t) - t)/2$.

证明以上等式的关键是用到以下等式:

$$\begin{aligned} &B\left(\frac{it}{n}\right)\left(B\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - B\left(\frac{it}{n}\right)\right) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(B^2\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - B^2\left(\frac{it}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(B\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - B\left(\frac{it}{n}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

□

### 4.2.1 Box Algebra

首先我们来计算一下 $dB$, $dtdB$ 和 $dBdB$ 的期望和方差.

$$\mathbb{E}(dB) = 0, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(dB) = dt.$$

$$\mathbb{E}(dtdB) = 0, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(dtdB) = o(dt).$$

$$\mathbb{E}(dBdB) = dt, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(dBdB) = o(dt).$$

在均方收敛的意义下, 以上结果表明: $dB$ 是以 $dt$ 的速度收敛于 0, $dBdB$ 可以近似看成为 $dt$, 误差为 $o(dt)$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+j>0\\ i\geq 0\\ j\geq 0}} c_{ij}dt^i dB^j =& c_{01}dB + c_{10}dt + c_{02}dB^2 + o(dt)\\ =& c_{01}dB + c_{10}dt + c_{02}dt.\end{aligned}$$

因此, 在均方收敛的意义下上式的求和可以简化为在多项式环 $\mathbb{R}[dB, dt]$ 中模去等价关系: $dtdB \sim 0$, $dB^2 \sim dt$ 和 $dt^2 \sim 0$ (Box Algebra). 这里要注意一点: 虽然 $dB$ 是一个随机量, 但是在均方收敛意义下, $dBdB = dt$ 却被看成是一个确定量.

我们下面来推导Itô引理 (不严格).

假设随机变量 $X(t)$ 满足

$$dX(t) = A(X,t)dB_t + G(X,t)dt. \tag{4.2.1}$$

将 $f(X+\Delta X, t+\Delta t)$ 泰勒展开:

$$f(X+\Delta X, t+\Delta t) = f(X,t) + \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\Delta X^2 + \cdots$$

将式 (4.2.1) 代入, 并在 Box Algebra 上化简得:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + G\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right)dt + A\frac{\partial f}{\partial X}dB, \quad (\text{Itô公式}). \tag{4.2.2}$$

式 (4.2.2) 称为Itô引理或Itô公式的微分表示.

*注释 4.12.* 我们引入 Box Algebra 只是为了计算方便: 它将高阶小量设为 0. 这样, 在书写上我们就不必在公式中放入 $o(\Delta t)$, $o(dt)$ 和 $o(\delta t)$ 等高阶小量. 所以, 当 $\Delta t \to 0$ 时, 如果一个结果映射到 Box Algebra 上成立, 那么它本身也成立.

□

作为Itô引理的一个应用, 我们可以容易地验证问题 4.11的结论: $\int_0^t BdB = (B^2(t) - t)/2$. 除特别声明, 以下假设股票 $S$无股息派发.

**定义 4.13.** *股价 $S(t)$ 服从几何布朗运动, 是指以下式子成立*

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \tag{4.2.3}$$

假设：式 (4.2.3) 中的 $\mu$ 和 $\sigma$ 皆为常数, 其中 $\sigma \geq 0$.

*注释 4.14.* 如果 $\sigma = 0$, 那么由无套利假定知: $\mu = r$. 如果 $\sigma < 0$, 那么可将 $\sigma dB_t$ 改写成 $(-\sigma)d(-B_t)$, $-B_t$ 仍是布朗运动, 将 $-\sigma$ 看成为(4.2.3)中的 $\sigma$. 所以, $\sigma > 0$ 对应于(4.2.3)非平凡情形.

□

**假设 4.15.** *除非特殊声明, 从现在起我们假定: 股价遵循几何布朗运动, 并且式 (4.2.3) 中的 $\mu$ 和 $\sigma$ 皆为常数, $\sigma > 0$.*

□

*例子 4.16.* 当 $S \neq 0$ 时, 求 $d(\ln S)$. 令式 (4.2.2) 中的 $f = \ln S$. 则易知:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB. \tag{4.2.4}$$

以上公式称 $\ln S$ 服从对数正态分布. 由 (4.2.3) 和 (4.2.4) 得:

$$d \ln S = \frac{dS}{S} - \frac{\sigma^2}{2} dt.$$

由上式可以看出, $d \ln S \neq dS/S$. 因此, Itô意义下的微分与数学分析中的不同.

□

对可微函数 $f(x), g(x)$, 在数学分析中我们有公式: $d(fg) = fdg + gdf$. 实际上, 在推导这个公式的时候, 我们舍去了 $dfdg$ 项. 这是因为它是高阶小量. 但是, 在我们的上下文中, 这一项不能忽略.

**命题 4.17.** *假设随机变量 $X$ 满足式(4.2.1). 则对可微函数 $f, g$, 有*

$$d\left(f(X)g(X)\right) = g(X)df(X) + f(X)dg(X) + df(X)dg(X).$$

□

例如:

$$\begin{aligned}
d(S^2) =& 2SdS + dSdS \\
=& 2S[S(\mu dt + \sigma dB)] + [S(\mu dt + \sigma dB)]^2 \text{ (将(4.2.3)代入)} \\
=& 2S[S(\mu dt + \sigma dB)] + S^2\mu^2 dt^2 + \sigma^2 dB^2 + 2S\mu dt \sigma dB \\
=& 2S^2 \left( \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma dB \right) + S^2\mu^2 dt^2 + 2S\mu dt\sigma dB \text{ (利用 } dB^2 = dt) \\
=& 2S^2 \left( \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB \right), \text{ (忽略高阶小量).}
\end{aligned}$$

大家可以用Itô公式(4.2.2)验证上式.

**定理 4.18** (Itô引理的积分形式)**.** *给定连续函数 $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 假设: $f(t,x)$ 关于 $t$ 的导数存在且连续 $\forall t > 0$, 并且 $f(t,x)$ 关于 $x$ 的二阶导数存在且连续 $\forall x \in \mathbb{R}$. 则以下式子成立*

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds.$$

□

*例子 4.19.* 令: $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ 且 $F(0) = 0$. 则函数 $f(x) = F'(x)$ 满足

$$\int_0^t f(B_s) dB_s = F(B_s) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s) ds.$$

令: $F(x) = x^2/2$. 则容易验证: $\int_0^t BdB = (B^2(t) - t)/2$.

□

**定理 4.20.** *股价 $S$ 满足*

$$S(t) = S(0) \exp\left( \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B(t) \right).$$

*证明.* 令: $f(t,x)=x_0\exp((\mu-\sigma^2/2)t+\sigma x)$. 运用定理4.18可证:

$$df(t,B_t)=f(t,B_t)(\mu dt+\sigma dB_t).$$

因此 $f(t,B_t)$ 服从几何布朗运动(4.2.3). 现在我们来证唯一性, 即: 如果 $X_t:=g(t.B_t)$ 也是几何布朗运动并且 $g(0,0)=g(0,B_0)=x_0$, 那么 $f(t,B_t)=g(t,B_t)$. 令: $Z_t=\exp((-\mu+\sigma^2/2)t-\sigma B_t)$. 易证: $d(X_tZ_t)=0$: 在 Box Algebra 上有

$$\begin{aligned}d(X_tZ_t)=&X_tdZ_t+Z_tdX_t+dX_tdZ_t\\=&X_tZ_t((-\mu+\sigma^2)dt-\sigma dB_t)+X_tZ_t(\mu dt+\sigma dB_t)-X_tZ_t\sigma^2dt\\=&0.\end{aligned}$$

于是, $X_tZ_t=X_0Z_0=x_0$. 所以, $X_t=x_0\exp((\mu-\sigma^2/2)t+\sigma x)=f(t,B_t)$. 最后, 将 $f(t,B_t)$ 看成 $S_t$ 得证. □

*注释* 4.21. 以上定理的证明不能直接将: $f(x)=\ln x$ 代入Itô引理的积分形式, 这是因为 $f''(0)$ 不存在. 通常我们假设股价 $S$ 大于 0. 因为股价为 0 的情形通常是平凡的.

□

*例子* 4.22. 假设: 股票 $S$ 连续派发股息, 其派发率为常数 $q>0$. 如果投资者在 $t$ 时持有 1 股 $S(t)$, 那么在 $t+\Delta t$ 时, 他的投资总价值为 $e^{q\Delta t}S(t+\Delta t)$. 这笔投资的收益率应该服从几何布朗运动:

$$\frac{e^{q\Delta t}S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}=\mu\Delta t+\sigma\Delta B(t),\quad (\text{假设: } \Delta t \text{ 充分小}).$$

这是因为 $S(t)$ 可以被看成一只新的股票: 它在 $t$ 时价格为 $S(t)$, 而在 $t+\Delta t$ 时为 $e^{q\Delta t}S(t+\Delta t)$. 这只新的股票无股息派发, 即: 将原股票的股息吸收到新股票的价格中. 如果要将股价为 0 的情形也考虑在内, 那么我们可以将上式推广为

$$e^{q\Delta t}S(t+\Delta t)-S(t)=S(t)(\mu\Delta t+\sigma\Delta B(t)),\quad (\text{假设: } \Delta t \text{ 充分小}).\qquad (4.2.5)$$

现在化简上式左边并忽略高阶小量得:

$$\begin{aligned}e^{q\Delta t}S(t+\Delta t)-S(t)=&(1+q\Delta t)(S(t)+\Delta S(t))-S(t)\\=&qS(t)\Delta t+\Delta S(t).\end{aligned}$$

将上式代入 (4.2.5) 左边并且化简得,

$$\Delta S_t=S_t((\mu-q)\Delta t+\sigma\Delta B(t)).$$

有时我们将以下式子:

$$dS_t=S_t((\mu-q)dt+\sigma dB(t))$$

表示股息派发率为 $q$ 的关于股价的几何布朗运动. 由上式可得

$$d\ln S_t=\left(\mu-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dB_t.$$

上式两边取Itô积分:

$$S_t=S_0\exp\left(\left(\mu-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t\right).$$

如果 $S_0=0$, 那么 $S_t=0$, $\forall t\geq 0$.

□

*作业题* 7. 回答以下每个问题.

(1.1) 证明对常数 $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[e^{\lambda B(t)}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

(1.2) 求 $d(B^3)$.

(1.3) 设 $dS = S(\mu dt + \sigma dB)$, 其中 $\mu$ 和 $\sigma$ 为常数. 求: $d(\cos S)$, $d(\sin S)$ 和 $d(S^\alpha)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为常数. 并且证明:
$$\mathbb{E}\left[S(t) \mid S(0)\right] = S(0)e^{\mu t}.$$

□

记
$$\mathcal{F}_t := \{在\ t\ 和\ t\ 以前所有市场信息\}.$$
在我们的上下文中, $\mathcal{F}_t$ 等价于
$$在\ t\ 和\ t\ 以前\ 布朗运动 B\ 的轨迹\}.$$

**定义 4.23.** *给定一随机过程* $M_t$, *满足* $\mathbb{E}[|M_t|]$ *有限,* $\forall t$. *称* $M_t$ *为鞅, 如果对任意* $u \le t$, *有*
$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_u] = M_u.$$

□

*作业题* 8. 假设: $u \le t$. 证明:

(1) $\mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathcal{F}_u] = B_u^2 - u$.

(2)
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\middle|\mathcal{F}_u\right] = \exp\left(\sigma B_u - \frac{\sigma^2}{2}u\right)$$

□

*作业题* 9. (Siegel's paradox) 假设当前时刻为 $t = 0$, $T = 1$, 在任意 $t$ 时, 1 美元 $=S(t)$ 日元. 美元和日元利率分别为正常数 $r_a$ 和 $r_j$, 假设 $S$ 服从几何布朗运动:
$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - r_a)dt + \sigma dB_t. \tag{4.2.6}$$

求
$$\mathbb{E}[S_1|\mathcal{F}_0] \quad 和 \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{S_1}\middle|\mathcal{F}_0\right].$$

证明:
$$\mathbb{E}[S_1|\mathcal{F}_0]\mathbb{E}\left[\frac{1}{S_1}\middle|\mathcal{F}_0\right] = e^{\sigma^2} > 1. \tag{4.2.7}$$

□

*注释* 4.24. 作业题9之所以称为 paradox (“悖论”), 是因为公式(4.2.7)有背于人们的直觉. 例如某人预测, 在 $T = 1$(1 年后), 1 美元 =100 日元, 同时 1 日元 =100 美元. 这似乎是不可能的. 但是从逻辑上, 这是可能的. 因为

$$\begin{cases} 100 = & \mathbb{E}[S_1|\mathcal{F}_0] \\ 100 = & \mathbb{E}\left[\frac{1}{S_1}\middle|\mathcal{F}_0\right] = \frac{e^{\sigma^2}}{\mathbb{E}[S_1|\mathcal{F}_0]}, \quad (\text{由}(4.2.7)), \end{cases}$$

所以, $e^{\sigma^2} = 100^2$, 即, $\sigma = \sqrt{2\ln 100}$. 关键: 存在Itô引理.

□

*作业题* 10 (此题解答不必提交). 浏览参考文献 [Fon05].

□

# 参考文献

[Fon05] George A Fontanills. The Options Course: High Profit and Low Stress Trading Methods, volume 226. John Wiley & Sons, 2005.