Introduction to CreditMetrics (第七章-第八章)

杨静平

北京大学数学科学学院金融数学系

2019年11月

Outline

1. 回收率
   - 估计回收率
   - 回收率的分布
2. 信用等级的相关性
   - 发现违约相关性的证据
   - 联合等级变化的直接估计
   - 通过bond spreads估计信用等级的相关性
   - 资产价值模型
   - 估计资产相关性

回收率

- 在违约发生的情况下的残余价值的估计是十分困难的。在银行确定发放一笔贷款或者投资者购买债券， 它确信信用个体将不会破产， 该合同将如期履约。
- 回收率具有很大的不确定性， 可以通过分布来建模，这一观点已被广泛接收。
- 本章我们不仅要讨论违约后的平均回收率的估计，同时要讨论回收率的不确定性的程度。

本章将按照如下章节来安排:

- (1)估计回收率的分布, 需要确定期望和标准差， 按照seniority level and exposure type来分类;
- (2)对于回收率的统计数据拟合实际分布，同时保证分布在0%到100%之间.

从不同的角度，基于如下的考虑来估计违约率：

- (1)债券的优先级 seniority ranking of debt;
- (2)工具的类型或用途instrument type or use
- (3)违约前的信用等级credit rating X-years before default
- (4)规模或信用个体的行业

历史回收率的最重要的特点是它的广泛的不确定性。

Outline

1. 回收率
   - 估计回收率
   - 回收率的分布
2. 信用等级的相关性
   - 发现违约相关性的证据
   - 联合等级变化的直接估计
   - 通过bond spreads估计信用等级的相关性
   - 资产价值模型
   - 估计资产相关性

估计回收率

在估计违约时的回收率时有许多实际的问题.
通常没有可以从市场中观测到的目标数值, 并且如果有可以获得的数据，则可能是在一个highly illiquid market.

是否最好的估计了回收率:

- (1)在违约公布后立即进行;
- (2)在一段合理的时间段内使得信息明确后，如一个月：
- (3)在所有的清算完成之后，通常需要几年的时间

一些研究讨论在违约公布后一个月时的回收率.

债券的回收率

- 对于bank facilities, 我们有两种最原始的回收率的研究，可以得到类似的估计(Asarnow and Edwards (95), and Carty and Lieberman (96)).
- A and E track 831 commerical and industrial loan defaults plus 89 structured loans
- C and L track 58 faults of loans with moody's credit ratings.

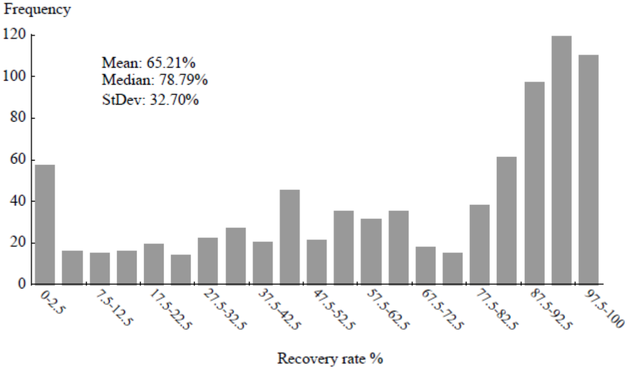
Table 7.1

Recovery statistics by seniority class

Par (face value) is $100.00.

	Carty & Lieberman [96a]			Altman & Kishore [96]		
Seniority Class	Number	Average	Std. Dev.	Number	Average	Std. Dev.
Senior Secured	115	$53.80	$26.86	85	$57.89	$22.99
Senior Unsecured	278	$51.13	$25.45	221	$47.65	$26.71
Senior Subordinated	196	$38.52	$23.81	177	$34.38	$25.08
Subordinated	226	$32.74	$20.18	214	$31.34	$22.42
Junior Subordinated	9	$17.09	$10.90	—	—	—

Chart 7.1
Distribution of bank facility recoveries



Source: Asarnow & Edwards [95]

- 一个在法律层面的关注是这的所有研究主要是根据美国的破产经验数据。
- 由于破产法和实务在不同的司法权下有差别，并且不清楚这方面的回收率的历史估计是否可以直接应用到全球范围内。

Outline

1. 回收率
   - 估计回收率
   - 回收率的分布
2. 信用等级的相关性
   - 发现违约相关性的证据
   - 联合等级变化的直接估计
   - 通过bond spreads估计信用等级的相关性
   - 资产价值模型
   - 估计资产相关性

回收率的分布

- 如果很好的刻画回收率，不仅需要考虑它们的期望，还要考虑他们的方差.
- 可以使用Beta distribution 拟合回收率的分布
- Beta(a,b) X, 其密度函数可以表示为

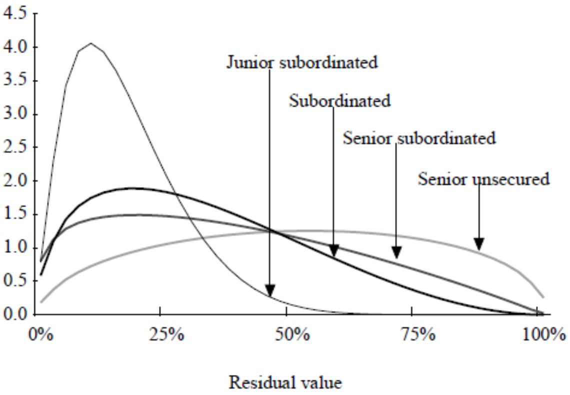
$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$$

矩

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}.$$

Chart 7.2

Example beta distributions for seniority classes



信用等级的相关性

- 市场风险可以通过相对小的组合分散，或通过流动性产品套期保值，信用风险在这方面比较复杂。
- 构建信用风险的Markowitz-类型的组合已经被广泛的讨论。
- 实际中估计违约相关性的困难。

本章讨论

- (1)历史的事实，支持我们关于信用相关性存在的论证;
- (2)研究直接从历史等级变化的数据对联合等级变化建模的可能性;
- (3)基于债券spread的观测历史研究债券相关性的估计问题;
- (4)提出一个模型，连接信用等级和违约的变化与资产价值变动之间的关系，不依靠历史等级的变化或债券价差的数据。
- (5)讨论资产价值模型的参数估计方法, 并且为此建立一个数据集合present a dataset for this purpose.

Outline

发现违约相关性的证据

- 在考虑违约相关性的建模之前，我们考查几种等级变化的历史数据来说明相关性是存在的。
- 首先需要通过一个大的公司群体来说明违约相关性的存在。
- 我们检查几家大的信用评级机构公布的多年的违约数据。
- 由于我们的研究是基于大量的观察，如果违约是不相关的，则我们观察到的违约率在不同年度之间是稳定的。

如下的公式被用于通过实际数据计算平均违约相关系数ρ:

$$\rho = \frac{N(\frac{\sigma^2}{\mu-\mu^2}) - 1}{N-1} \sim \frac{\sigma^2}{\mu-\mu^2}, N \to \infty.$$

对于N个公司的分组，具有相同的违约概率。 令X_i为违约的示性算子,期望为$\mu(X_1)$, 标准差为$\sigma(X_1)$。 根据实际数据，可以采用如下的估计:

$$\mu_{CrRt} = \mu(X_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N},$$

$$\sigma(X_i) = \sqrt{\mu_{CrRt}(1 - \mu_{CrRt})}$$

记

$$D = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

则有

$$\begin{aligned} Var(D) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \rho_{ij} \sigma(X_i)^2 \\ &= \sigma(X_i)^2 (N + \sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{N} \rho_{ij}) \\ &= \sigma(X_i)^2 (N + N(N-1) \frac{\sum_{i=1, j=1, i \neq j}^{N} \rho_{ij}}{N(N-1)}) \end{aligned}$$

可以定义平均的相关系数如下：

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{CrRt} &= \frac{\sum_{i=1,j=1,i\neq j}^{N}\rho_{ij}}{N(N-1)} \\ &= [2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\rho_{ij}]/(N^2-N)\end{aligned}$$

因此有

$$Var(\frac{D}{N}) = \sigma(X_i)^2 \frac{(1+(N-1)\bar{\rho}_{CrRt})}{N}$$

可以通过上式计算得到

$$\bar{\rho}_{CrRt} = [N(\sigma^2_{CrRt}/(\mu_{CrRt} - \mu^2_{CrRt})) - 1]/(N-1).$$

其中组合的标准差σ_{CrRt} 和期望μ_{CrRt}根据实际数据估计给出。

- Moody's and S&P都有公开的违约统计数据，可以用来进行平均统计相关性的推断。
- Table 8.1是使用Moody最近的数据.
- 由于数据量少，所以结果的置信区间比较宽。

Table 8.1

Inferred default correlations with confidence levels

Credit rating category	Default rate μ	Standard deviation defaults σ	Implied default correlation ρ	Lower confidence $Pr\{\rho < X\} = 2.5\%$	Upper confidence $Pr\{\rho > X\} = 2.5\%$
Aa	0.03%	0.1%	0.33%	0.05%	1.45%
A	0.01%	0.1%	1.00%	0.15%	4.35%
baa	0.13%	0.3%	0.69%	0.29%	1.83%
ba	1.42%	1.4%	1.40%	0.79%	2.91%
B	7.62%	4.8%	3.27%	1.95%	6.47%

Source: Moody's 1970-1995 1-year default rates and volatilities (Carty & Lieberman [96a])

对于这种方法有四点说明:

- (1)违约率的标准差, σ, 是基于相对有限的样本，所以置信区间较大。
- (2)对于投资级别的the underlying periodic default rates 非正态分布，所以实际的置信区间将比得到的要宽。
- (3)平均违约率, μ, 是假设信用类别中的所有公司的违约率是常数，不随时间而改变。
- (4)the approach is sensitive to the proportion of recession versus growth years which-in the 25-year sample-may not be representative of the future.

- The inferred default correlations are all positive and -using the confidence interval technique discussed above-are all statistically greater than zero to at least the 97.5% level.
- 这表明违约事件的相关性是比较明显的，在风险评估中是无法忽略的。
- 实际上，我们不仅需要估计违约的相关性，还需要所有可能的信用等级的变化的可能性.

Outline

联合等级变化的直接估计

Perhaps the most direct way to estimate joint rating change likelihoods is to examine credit ratings time series across many firms which are synchronized （同步的） in time with each other.

We have done this with a sample of 1234 firms who have senior unsecured S&P credit ratings reported quarterly for as much as the last 40 quarters.

- 考虑所有公司的所有可能的两两相关性。
- 使用1234个公司的样本。
- Table 8.2 给出一个公司从BBB开始，另一个公司从single-A rating开始的数据.

Table 8.2

Historically tabulated joint credit quality co-movements

Firm starting in BBB	Firm starting in A							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	0	0	0	0	0	0	0	0
AA	0	15	1,105	54	4	0	0	0
A	0	978	44,523	2,812	414	224	0	0
BBB	0	12,436	621,477	40,584	5,075	2,507	0	0
BB	0	839	41,760	2,921	321	193	0	0
B	0	175	7,081	532	76	48	0	0
CCC	0	55	2,230	127	18	15	0	0
Default	0	29	981	67	7	0	0	0

The above table yields our non-parametric estimate of joint quality probabilities to be as in Table 8.3.

Table 8.3

Historically tabulated joint credit quality co-movement (%)

Firm starting in BBB	Firm starting in A							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	-	-	-	-	-	-	-	-
AA	-	0.00	0.14	0.01	0.00	-	-	-
A	-	0.12	5.64	0.36	0.05	0.03	-	-
BBB	-	1.57	78.70	5.14	0.64	0.32	-	-
BB	-	0.11	5.29	0.37	0.04	0.02	-	-
B	-	0.02	0.90	0.07	0.01	0.01	-	-
CCC	-	0.01	0.28	0.02	0.00	0.00	-	-
Default	-	0.00	0.12	0.01	0.00	-	-	-

我们强调这种论述只是说明了一种直接估计联合等级变化的可能性。这种方法的优势是不对考虑的过程做假设.

然而，局限性是假设所有的公司如果具有相同的信用等级，则相关性是相同的。就是说两个银行的相关性和一个银行与一个石油公司的相关性是相同的。

下面我们讨论估计信用等级变化的可能性，我们基于个体公司的特点来考虑。

Outline

通过bond spreads估计信用等级的相关性

第二种估计信用等级变化相关性的方法是利用公司债券价格的历史数据。

直观上，债券价格的变化反映了信用质量的变化, 因此债券价格变化的相关性可以用来估计信用质量变化的相关性。

- 这样的方法有两方面的要求：充足的历史债券数据，以及将债券价格和信用事件联系的模型。
- 如果债券的历史数据可以得到，可以首先通过 bond spreads提取credit spreads，然后估计某种类型的信用相关性。
- 必须建立一个模型，联系spread movements 和 credit events.

风险债券的模型通常有三种状态变量:

- (1)首先是无风险利率;
- (2)第二是credit spread
- (3)第三是表明债券是否违约。

A typical approach (Duffee[95]) 是假设无风险利率和credit spread 独立变化，以及违约通过某定价模型与credit spread连接。
While an approach of this type is attractive because it is elegant and consistent with other models of risky assets, its biggest drawback is practical.
Bond spread data 是notoriously scarce, 特别是对于低信用质量的个体，使得在实际上估计bond spread correlations 不可行.

Outline

1. 回收率
   - 估计回收率
   - 回收率的分布

2. 信用等级的相关性
   - 发现违约相关性的证据
   - 联合等级变化的直接估计
   - 通过bond spreads估计信用等级的相关性
   - 资产价值模型
   - 估计资产相关性

资产价值模型

建立一种方法，对信用等级的增加、下降和违约建立模型.

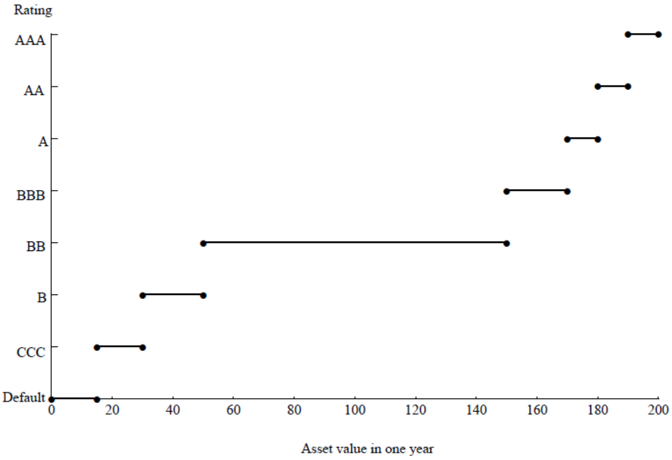
- (1)提出了一种过程， 该过程影响信用等级的变化。 这将建立事件之间的联系， 该过程易于理解和观测。
- (2)估计上面模型的参数. 如果第一部分的工作比较成功，这将较为容易，比直接估计联合等级变动的概率容易。

- 本节假设公司的资产价值是驱动其信用等级变化和违约的过程. 我们建立起资产过程和信用等级变化的联系，解释如何估计资产价值模型.
- 我们假设资产价值有一系列的水平值，用来确定在时间段末的公司的信用等级。
- 建立一年末的公司的资产价值和一年末的公司的信用级别之间的关联。

Chart 8.1 给出信用等级的变化，driven by underlying BB firm asset value.

Chart 8.1

Credit rating migration driven by underlying BB firm asset value



- 假设我们知道公司的资产阀值，我们只需要对公司的资产价值的变动进行建模， 用来确定其信用等级的变化。
- 假设资产价值的比例变化是服从正态分布 (returns, denoted as R), 期望为μ，标准差为σ.
- 这样我们可以建立资产收益的阀值Z_{Def}, Z_{CCC}, Z_{BB}. 如果$R < Z_{Def}$, 则认为信用个体将违约; 如果$Z_{Def} < R < Z_{CCC}$, 则信用个体将为CCC等级.

则有

$$P(Default) = P(R < Z_{Def}) = \Phi(Z_{Def}/\sigma)$$

以及

$$P(CCC) = P(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC}/\sigma) - \Phi(Z_{Def}/\sigma).$$

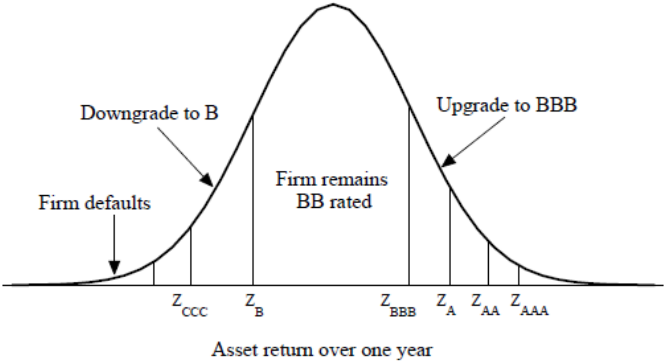
Table 8.4.
One year transition probabilities for a BB rated obligor

Rating	Probability from the transition matrix (%)(	Probability according to the asset value model
AAA	0.03	$1-\Phi(Z_{AA}/\sigma)$
AA	0.14	$\Phi(Z_{AA}/\sigma)-\Phi(Z_{A}/\sigma)$
A	0.67	$\Phi(Z_{A}/\sigma)-\Phi(Z_{BBB}/\sigma)$
BBB	7.73	$\Phi(Z_{BBB}/\sigma)-\Phi(Z_{BB}/\sigma)$
BB	80.53	$\Phi(Z_{BB}/\sigma)-\Phi(Z_{B}/\sigma)$
B	8.84	$\Phi(Z_{B}/\sigma)-\Phi(Z_{XXX}/\sigma)$
CCC	1.00	$\Phi(Z_{XXX}/\sigma)-\Phi(Z_{Def}/\sigma)$
Default	1.06	$\Phi(Z_{Def}/\sigma)$

The connection between asset returns and credit rating may be represented schematically as in Chart 8.2.

Chart 8.2

Distribution of asset returns with rating change thresholds



In order to complete the connection, we simply observe that the probabilities in the two columns of the Table must be equal.

$$Z_{Def} = \Phi^{-1}(1.06\%)\sigma = -2.30\sigma$$

Table 8.5
Threshold values for asset return for a BBB rated obligor

Threshold	Value
Z_{AA}	3.43σ
Z_{A}	2.93σ
Z_{BBB}	2.39σ
Z_{BB}	1.37σ
Z_{B}	-1.23σ
Z_{CCC}	-2.04σ
Z_{Def}	-2.30σ

下面讨论第二个信用个体，A rated. 假设这个信用个体的资产收益为R', 该个体的资产收益的标准差为σ', 资产收益的阀值为Z'_{Def} 和Z'_{CCC}.

Table 8.6

Transition probabilities and asset return thresholds for A rating

Rating	Probability	Threshold	Value
AAA	0.09%		
AA	2.27%	Z'_{AA}	$3.12\sigma'$
A	91.05%	Z'_{A}	$1.98\sigma'$
BBB	5.52%	Z'_{BBB}	$-1.51\sigma'$
BB	0.74%	Z'_{BB}	$-2.30\sigma'$
B	0.26%	Z'_{B}	$-2.72\sigma'$
CCC	0.01%	Z'_{CCC}	$-3.19\sigma'$
Default	0.06%	Z'_{Def}	$-3.24\sigma'$

为了刻画信用等级的联合变化，我们假设两个资产的收益是相关的，服从正态分布， 相关矩阵

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & (\sigma')^2 \end{pmatrix}.$$

则联合概率为

$$P(Z_B < R < Z_{BB}, Z'_{BBB} < R' < Z'_A)$$
$$= \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} \phi_{\sum}(x, y) dxdy.$$

其中$\phi_{\sum}$为二元正态分布的密度函数，相关系数矩阵为$\sum$.

下面的表给出了BB和A 信用个体的联合概率，相关系数为$\rho = 0.20$.

Table 8.7

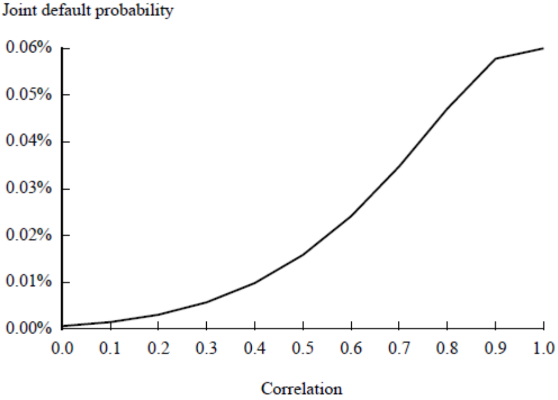
Joint rating change probabilities for BB and A rated obligors (%)

Rating of first company	Rating of second company								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def	Total
AAA	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03
AA	0.00	0.01	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
A	0.00	0.04	0.61	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67
BBB	0.02	0.35	7.10	0.20	0.02	0.01	0.00	0.00	7.69
BB	0.07	1.79	73.65	4.24	0.56	0.18	0.01	0.04	80.53
B	0.00	0.08	7.80	0.79	0.13	0.05	0.00	0.01	8.87
CCC	0.00	0.01	0.85	0.11	0.02	0.01	0.00	0.00	1.00
Def	0.00	0.01	0.90	0.13	0.02	0.01	0.00	0.00	1.07
Total	0.09	2.29	91.06	5.48	0.75	0.26	0.01	0.06	100

下面的表格中，我们给出资产相关性对于联合违约概率的影响。

Chart 8.3

Probability of joint defaults as a function of asset return correlation



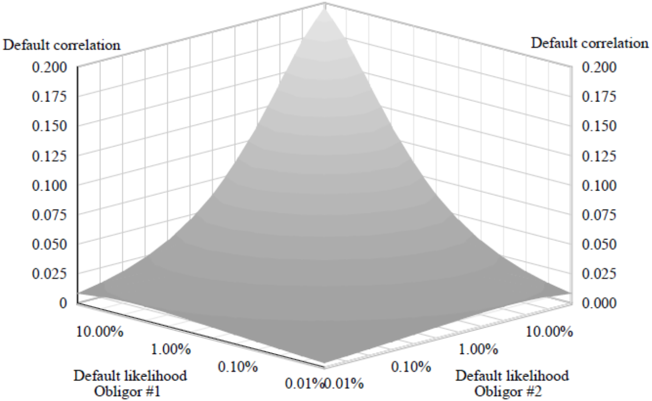
对于信用个体1和2， 违约相关指数可以如下来计算

$$\rho_D = \frac{p_{12} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}.$$

违约相关性是资产相关性的函数.

Chart 8.4

Translation of equity correlation to default correlation



- 在一个风险模型中我们忽略资产的波动性, but 我们需要建模的所有的波动性是通过每个信用个体的转移概率来刻画出来。
- 我们可以考虑标准化的资产收益.
- 时间段的问题。 One last comment is that it is a simple matter to adjust for different time horizons. For example, to perform this analysis for a six-month time horizon, the only change is that we use the six-month transition probabilities to calibrate the asset return thresholds.

Outline

估计资产相关性

- 一个基本的可观测的公司数据的来源是股权的收益。这里我们使用股权收益的相关性做为 资产收益相关性的proxy.
- 该方法的缺点是忽略了资产相关性和股权相关性的差异。 它比固定相关性下的更准确，基于可获得的数据 (关于credit spreads or actual joint rating 变化的数据).
- 许多信用个体的数据缺乏, 以及无法储存高数量的相关系数矩阵， make this approach untenable. 因此，我们考虑基于一系列指数的相关性以及通过指数之间的相关性来刻画信用个体之间的相关性。

得到信用个体的相关性，有两个步骤:

- (1)首先, 使用特殊国家的工业指数建立相关系数矩阵。我们获得的相关性的结果，例如， German chemical industry 与the united states insurance industry. 我们同时需要考虑每个指数的波动性.
- (2)其次，我们通过industry participation建立信用个体的影射。 例如, 一个公司有80% Germany 和20% United States, 以及 70% chemicals 和 30% finance, 导致56% participation in the German chemicals industry, 24% in German finance, 14% in American chemicals, and 6% in American finance.

假设我们知道公司的资产的相关性，我们只需要对公司资产价值的变化建模来刻画它的信用评级的变化。

- In Section 8.5.1, we discuss the data we provide and the methodology which goes into its construction, we present an example to describe the methods by which the user specifies the weightings for individual obligors and arrives at individual obligor correlations.
- The last subsection is a generalization of this example.

Data

- 我们前面提到，我们提供了各个国家的行业界的相关性矩阵。
- 本节中我们介绍我们构建这种矩阵的方法。
- 在Table 8.8, 我们列出我们提供数据的国家, 以及每个国家中我们使用的行业指数.

Table 8.8

Countries and respective index families

Country	Index family	Country	Index family
Australia	ASX	Mexico	Mexican SE
Austria		New Zealand	
Belgium		Norway	Oslo SE
Canada	Toronto SE	Philippines	Philippine SE
Finland	Helsinki SE	Poland	
France	SBF	Portugal	
Germany	CDAX	Singapore	All-Singapore
Greece	Athens SE	South Africa	
Hong Kong	Hang Seng	Spain	
Indonesia		Sweden	Stockholm SE
Italy	Milan SE	Switzerland	SPI
Japan	Topix	Thailand	SET
Korea	Korea SE	United Kingdom	FT-SE-A
Malaysia	KLSE	United States	S&P

- 在Table 8.9中，我们列出我们在一个或多个国家提供指数的行业。
- 我们开始时使用Standard & Poor使用的美国的主要的行业， 然后eliminate groups which appear redundant.例如，我们发现Health Care 和 Pharmaceuticals 的指数超过98%,然后我们把这两个群体合为一个群体，reasoning that the two indices essentially explain the same movements in the market.

Table 8.9

Industry groupings with codes

Grouping	Code	Grouping	Code
General country index	GNRL	Insurance	INSU
Automobiles	AUTO	Machinery	MACH
Banking & finance	BFIN	Manufacturing	MANU
Broadcasting & media	BMED	Metals Mining	MMIN
Chemicals	CHEM	Oil & gas – refining & marketing	OGAS
Construction & building materials	CSTR	Paper & forest products	PAPR
Electronics	ELCS	Publishing	PUBL
Energy	ENRG	Technology	TECH
Entertainment	ENMT	Telecommunications	TCOM
Food	FOOD	Textiles	TXTL
Health care & pharmaceuticals	HCAR	Transportation	TRAN
Hotels	HOTE	Utilities	UTIL

最后， 选择那些我们至少可以有三年数据的指数, 最后得到152 country-industry 指数, 28 country 指数, 19 世界范围内的industry indices, and 6 地区指数. 可得到country-industry pairs的数据在table 8.10中给出.

Table 8.10
Country-industry index availability

Country	GNRL	AUTO	BFIN	BMED	CHEM	CSTR	ELCS	ENRG	ENMT	FOOD	HCAR	HOTE	INSU	MACH	MANU	MMIN	OGAS	PAPR	PUBL	TECH	TCOM	TXTL	TRAN
Australia	X		X	X	X	X		X		X			X					X					X
Austria	X																						
Belgium	X																						
Canada	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X			X			X				X
Finland	X		X										X			X		X					
France	X	X	X			X		X		X													
Germany	X	X	X		X	X							X	X				X				X	X
Greece	X		X										X										
Hong Kong	X		X																				
Indonesia	X																						
Italy	X		X		X					X						X		X					
Japan	X		X	X	X	X	X	X		X	X		X	X		X	X	X				X	X
Korea	X		X		X	X				X			X	X		X		X				X	X
Malaysia	X		X													X							
Mexico	X					X										X							X
New Zealand	X																						
Norway	X		X										X										
Philippines	X															X	X						
Poland	X																						
Portugal	X																						
Singapore	X		X									X											
South Africa	X		X													X							
Spain	X																						
Sweden	X		X		X	X												X					
Switzerland	X		X		X	X	X																
Thailand	X		X		X	X	X	X		X	X	X	X	X		X		X	X	X		X	X

对于每个指数，考虑上190周收益，计算每个收益序列的均值和标准差. 使用$R_t^{(k)}$来表示第k^{th}个指数在第t^{th} 周的收益。我们可以计算这个指数的平均的周收益为

$$\overline{R}^{(k)} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^{(k)},$$

其中T为190，周收益的标准差为

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t^{(k)} - \overline{R}^{(k)})^2}$$

因此

$$COV(k,l) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t^{(k)} - \overline{R}^{(k)})(R_t^{(l)} - \overline{R}^{(l)})$$

周收益的相关系数矩阵为

$$\rho_{k,l} = \frac{COV(k,l)}{\sigma_k \sigma_l}.$$

- 注意到我们的波动率和相关系数的计算与RiskMetrics的计算是有差异的，我们 将每个时间序列的收益给予相等的权重。
- 目的是我们感兴趣于计算可以应用的长期的相关结构。
- 我们计算的相关系数是基于历史的周收益。其中蕴含着如下的假设： 周相关性可以用来刻画CreditMetrics模型中的季度或年度相关性。

信用相关性-例子

计算country-industry pairs相关性的例子:

- 赋予每个信用个体权重，按照its participation in countries and industries, 并且标明how much of the obligor's equity movements are not explained by the relevant indices.
- 把每个信用个体的标准化的收益表示为returns on the indices and a company-specific component的加权平均.
- 使用权重以及指数之间的相关性来计算信用个体之间的相关性。

由于信用个体的股票价格变化的数额无法通过相关的指数来解释，我们考虑 firm-specific, or idiosyncratic, risk.

我们通过例子来解释。

- 考虑ABC和XYZ两个公司。
- 假设我们确定ABC 只属于美国的chemicals industry, 并且它的股权收益的90%由the united states chemicals index 解释，10% 是基于其自身确定.
- 假设XYZ公司占German insurance的75%，占German Banking and Finance的25%，其中自身波动性的解释为20%。

Table 8.11

Volatilities and correlations for country-industry pairs

Index	Volatility	Correlations		
		U.S. Chemicals	Germany Insurance	Germany Banking
U.S.: Chemicals	2.03%	1.00	0.16	0.08
Germany: Insurance	2.09%	0.16	1.00	0.34
Germany: Banking	1.25%	0.08	0.34	1.00

令$r^{(USCm)}$ 和 $\hat{r}^{ABC}$ 为两个独立的标准正态随机变量，分别代表US chemical index 和ABC's firm specific 的标准收益. 这样我们可以将ABC's standardized return 表示为

$$r^{ABC} = w_1 r^{(USCm)} + w_2 \hat{r}^{ABC}.$$

由于90% of ABC's volatility 可以通过该指数来解释，因此令$w_1 = 0.90$. 则

$$w_1 = 0.90, w_2 = \sqrt{1 - w_1^2} = 0.44$$

对于XYZ company, 我们先计算指数的波动性

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= (0.75^2\sigma_{DeIn}^2 + 0.25^2\delta_{DeBa}^2 \\ &+2\times 0.75\times 0.25\rho(DeIn, DeBa)\delta_{DeIn}\delta_{DeBa})^{0.5} = 0.017.\end{aligned}$$

则在German insurance index上的权重为

$$0.8\frac{0.75\times\sigma_{DeIn}}{\hat{\sigma}} = 0.74$$

在German banking index上的权重为

$$0.8\frac{0.25\times\sigma_{DeBa}}{\hat{\sigma}} = 0.15$$

最后, 个体部分的权重为

$$\sqrt{1-0.8^2} = 0.6$$

可以得到

$$r^{ABC}=0.90r^{(USCm)}+0.44\hat{r}^{(ABC)}$$

以及

$$r^{XYZ}=0.74r^{(DeIn)}+0.15r^{(DeBa)}+0.6\hat{r}^{(XYZ)}$$

因此有

$$\begin{aligned}\rho(ABC,XYZ) \quad &= 0.90\times 0.74\rho(USCm,DeIn)\\ &+0.90\times 0.15\rho(USCm,DeBa)=0.11\end{aligned}$$

信用个体相关性-推广

现在假设我们有n不同的公司，基于m个指数, 假设我们希望计算这些公司的股权相关性。我们需要得到一个相关阵 $\overline{C}$, 其中考虑指数以及个体的成分. 这样我们可以生成一个 $(m+n)\times n$ 的矩阵W, 所有公司的相关系数矩阵为

$$W'\overline{C}W$$