连续时间破产理论-2

最大总损失与破产概率

第7讲 2019.10.17

定义辅助函数

$$\Psi_1(u,w)=E[w(U(T))\,|\,T<\infty]\psi(u)$$

1）当$w(x)\equiv 1$时，$\Psi_1(u,w)=\psi(u)$

2）对任意$h>0$，当$w(x)=I_{(-\infty,-h)}(x)$时

$$\Psi_1(u,w)=\Pr(U(T)<-h\,|\,T<\infty)\psi(u)$$

3）当$w(x)=e^{-Rx}$时，$\Psi_1(u,w)=e^{-Ru}$

定理2-2

$$\Psi_1'(u,w)=\frac{\lambda}{c}\Psi_1(u,w)-\frac{\lambda}{c}[\int_0^u \Psi_1(u-x,w)dF_X(x)+\int_u^\infty w(u-x)dF_X(x)]$$

$$\Psi_1(u,w)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi_1(u-x,w)[1-F_X(x)]dx+\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty w(u-x)[1-F_X(x)]dx$$

$$\Psi_1(0,w)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty w(-x)[1-F_X(x)]dx$$

推论2-1 $w(x) \equiv 1$

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}[\int_0^u \psi(u-x)dF_X(x) + (1 - F_X(u))]$$

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1-F_X(x)]dx + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1-F_X(x)]dx$$

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}E[X] = \frac{1}{1+\theta}$$

推论2-2

当$u=0$时，取：$w(x)=1_{[-y,0)}(x)$，$y>0$

直接应用定理，

有如下关于破产亏损量与破产时间的联合分布：

$$\Pr\left(-U(T)<y, T<\infty\right)=\frac{\lambda}{c}\int_0^y [1-F_X(x)]dx$$

$$=\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{E[X]}\int_0^y [1-F_X(x)]dx$$

推论2-2的说明

当初始盈余为0时，记

$$L_1 = -U(T) \big| T < \infty$$

则由推论，有

$$\Pr(L_1 < l) = \frac{\Pr(-U(T) < l, T < \infty)}{\Pr(T < \infty)} = \frac{1}{E[X]} \int_0^l [1 - F_X(x)] \, dx$$

以及

$$M_{L_1}(t) = \frac{1}{tE[X]} [M_X(t) - 1].$$

最大净损失与破产概率

- 从整个经营时间看破产问题
- 轨道的整体性变量
- 将过程问题转换为变量问题

问题的动机：
不破产意味着轨道永远非负
净损失永远低于初始盈余

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= \Pr(T = \infty) \\
&= \Pr(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) \\
&= \Pr(S(t) - ct \leq u, \forall t \geq 0) \\
&= \Pr(\max_{t\geq 0}[S(t) - ct] \leq u)
\end{aligned}
$$

定义盈余过程的“最大净损失”

$$L = \max_{t \geq 0}[S(t) - ct]$$

则L的分布函数为：

$$F_L(u) = \Pr(L \leq u) = \Phi(u) = 1 - \Psi(u) \quad \forall\ u \geq 0$$

即：

L在初始盈余点的分布（生存）函数为

盈余过程的生存（破产）概率。

利用“最大净损失”计算破产概率的表达式——定理2-3

$$\Phi(u)=\sum_{0}^{\infty}\Psi^{n}(0)\left[1-\Psi(0)\right]F_{L_1}^{*n}(u)$$

其中：$f_{L_1}(x)=\dfrac{1-F_X(x)}{E\left[X\right]},x\geq 0$

$$M_L(r)=\frac{\theta rE[X]}{1+(1+\theta)rE[X]-M_X(r)}$$

$$=\frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)rE[X]-M_X(r)}$$

定理证明

关键是证明

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$$

其中

$$N \sim G\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

$$\left\{ L_n = \widetilde{L}_n - \widetilde{L}_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots \right\} \text{ i.i.d.} \sim f_{L_1}(x)$$

净损失轨道

定理2-3的证明

- 净损失的轨道，称首次超过前一个“纪录”为“破纪录”事件，第一个纪录为初值0
- 考虑两个随机变量
  - 破纪录的次数
  - 破纪录时的水平L
- 上述两个变量的分布
  - 几何分布：每次破纪录可以看做是从前一个记录点开始的初始盈余为零的一个新的性质完全相同的盈余过程的首次破产时刻
  - 索赔量分布：每次破纪录时的亏损量

最大总损失的矩母函数的意义

$$E\left[e^{rL}\middle|L>0\right]=\frac{\theta\left[M_X(r)-1\right]}{1+(1+\theta)rE[X]-M_X(r)}$$

其中的分母为调节系数方程，因此有：

$$1+(1+\theta)rE[X]-M_X(r)=(r-R)h(r),R\text{为调节系数}$$

定理2-3的应用——复合几何分布的递推计算

$$f_L(u) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2} f_{L_1}(u) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u f_{L_1}(y) f_L(u-y)\,dy$$

$$1-\psi(u) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2} F_{L_1}(u) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u f_{L_1}(y)\left[1-\psi(u-y)\right]dy$$

特别的：

$$X \sim Pareto(\alpha,\beta), F_X(x) = 1-\left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}，\quad E[X] = \frac{\beta}{\alpha-1}$$

$$f_{L_1}(x) = \frac{1}{E[X]}\left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^{\alpha}, L_1 \sim Pareto(\alpha-1,\beta)$$

数值计算

取 $\theta = 0.2; \alpha = 3, \beta = 1000, E[X] = 500$;

u	100	500	1000	5000	10,000	25,000
$\frac{u}{E[X]}$	0.2	1	2	10	20	50
$\phi(u)$	0.193	0.276	0.355	0.687	0.852	0.975
$\psi(u)$	0.807	0.724	0.645	0.313	0.148	0.025

$\frac{u}{E[X]}$		0.2	1	2	10	20	50
$\psi(u)$	Pareto	0.807	0.724	0.645	0.313	0.148	0.025
	指数		0.7054	0.5971	0.1574	0.0297	0.0002

破产概率的矩母函数表示

- **推论2-3：盈余过程破产概率的指数变换函数可表示为：**

$$r \geq 0$$

$$\int_0^\infty e^{ru} d[1-\psi(u)] = \frac{1}{1+\theta} \frac{\theta[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)rE[X]-M_X(r)}$$

只要个体损失的分布（或矩母函数）已知，则上式右边的函数形式为已知的，据此可以反演破产概率的形式。

个体损失的分布为指数分布的线性组合

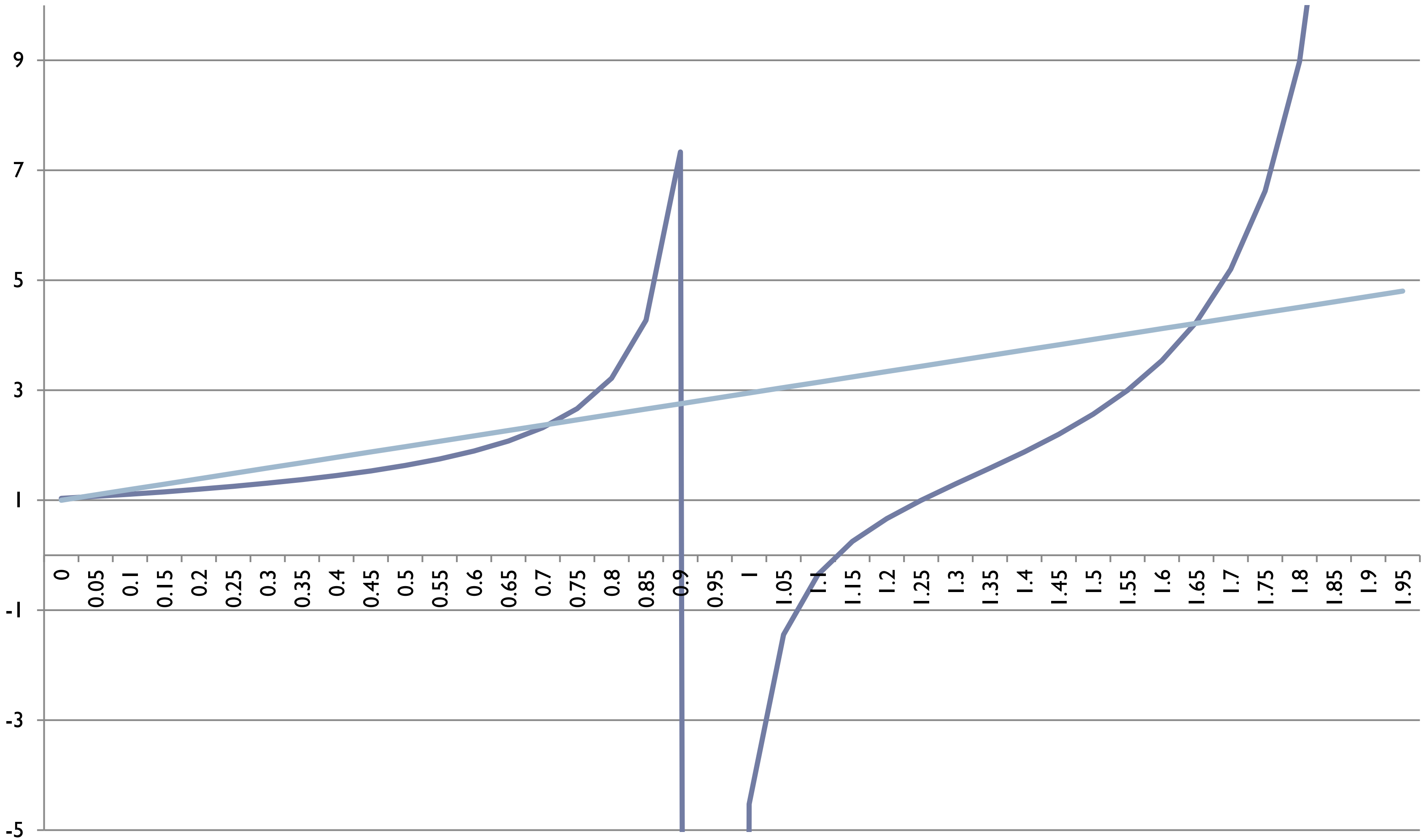
$$f_X(x)=c_1\beta_1e^{-\beta_1x}+c_2\beta_2e^{-\beta_2x},\quad c_1+c_2=1,\beta_2>\beta_1>0$$

$$E[X]=c_1\frac{1}{\beta_1}+c_2\frac{1}{\beta_2},\quad M_X(r)=\begin{cases}c_1\dfrac{\beta_1}{\beta_1-r}+c_2\dfrac{\beta_2}{\beta_2-r} & 0<r<\beta_1\\ c_2\dfrac{\beta_2}{\beta_2-r} & \beta_1<r<\beta_2\end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{ru}d[1-\psi(u)]\propto\frac{g_1(r)}{g_2(r)}$$

$$\int_0^\infty e^{ru}d[1-\psi(u)]=k_1\frac{\alpha_1}{\alpha_1-r}+k_2\frac{\alpha_2}{\alpha_2-r}\qquad \psi(u)=k_1e^{-\alpha_1u}+k_2e^{-\alpha_2u}$$

调节系数方程的解


9
7
5
3
1
-1
-3
-5
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05
1.1
1.15
1.2
1.25
1.3
1.35
1.4
1.45
1.5
1.55
1.6
1.65
1.7
1.75
1.8
1.85
1.9
1.95

作业与思考

- 第二章习题：15
- 思考：
  - 跳过程的轨道整体性质
  - 定理2-3可能的推广情况