衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-9-9

要求

阅读本文件中利率和股息派发部分. 完成作业题 1 和作业题 2(两题解答不必提交).

1 参考书

1. Paul Wilmott on Quantitative Finance 第二版，2006
2. Mark Joshi 写的 The Concepts and Practice of Mathematical Finance, 2nd Edition. Cambridge University Press; 2nd edition (November 17, 2008).
3. Mark Joshi 写的 C++ Design Patterns and Derivatives Pricing 第二版, Cambridge University Press 2008. 该书中的源代码可以在网上下载.
4. Paul Wilmott 写的 Frequently Asked Questions In Quantitative Finance (2009).
5. Mark Joshi 等人写的 Quant Job Interview Questions & Answers.

这个领域的参考书很多，例如应用性较强的为 John Hull 第七版或之后的版本. 注: 这个领域的参考书或参考文献出错是“常态”. 编程的重要性课上讲.

想了解国外量化方面的编程风格可以参考 http://quantlib.org

2 课程设置

- 先修课程
  - 数学类的数学分析, 高等代数和初等概率论
  - 具有编程的基础知识, 如: c/c++, vb. **重要：在本课程的学习过程中，要求大家不断提高编程能力．必须学习 c++．拒绝学习 c++ 不能通过考试.**. c++ 是一个庞大体系. 本课程只要求学习和会使用上述参考书 3 中涉及的 c++ 范围.
- 课程总成绩由以下三部分组成
  - 期末考试: 60%, 正在考虑是否用大作业的形式;
  - 期中项目 (project): 25% (包括编程, 对编程有一定要求);

- 平时作业, 课上提问和考勤: 15%.

助教信息: 蔡晓榕. 她全权负责平时成绩和期中考试的批阅和考勤. 她的联系方式由她在课上给出. 其他院系同学选修此课需要问教务.
关于大作业写作. 课上讲. 建议使用 LaTeX. 我指导的学生要求使用 LaTeX.

3 金融市场简介

交易所. OTC（Over The Counter, 场外交易市场，又称柜台交易市场）. 课上讲.

(1) 金融市场包容性巨大, 例如：没上过学的也可以炒股, 并且懂得无风险套利. (2) 运动员和体育理论专家的区别, (3) 要学好这门课, 首先不能有"功利"心态. 金融市场是最好的老师和裁判. 它不会关心你们是否通过考试等, (4) 其他.

4 基本假定

(1) 不存在任何形式与交易相关的费用, 如: 手续费、佣金和税收等;

(2) 无买卖价差;

(3) 买卖证券的数量无限可分, 如: 市场参与者对一只股票可以买 0.5 股, 0.01 股, 甚至 $10^{-10}\sqrt{2}$ 股;

(4) 证券价格随时间连续变化;

许多书或文献上是这样假定的. 如果我们持有一只股票, 那么我们持有这只股票的价值是随时间连续变化的. 这样就避免了配股和派发股息等人为使得股价不连续的因素. 如果我们持有一只股票, 那么我们持有这只股票的价值是随时间连续变化的. 这样就避免了配股和派发股息等人为使得股价不连续的因素.

(5) 交易可随时间连续进行;

(6) 可在一证券当前交易价买卖任意数量的该证券, 而且该证券的价格不会因此而改变;

(7) 无违约;

(8) 允许无约制卖空;

(9) 不存在无风险的套利机会;

(10) 投资者或投机者之间无信息优势;

(11) 投资者或投机者的行为受利益最大化驱使.

何为裸卖空? (i) 买卖双方签约时不需要借股票; (ii) 裸卖空的卖方平仓时必须到市场中买 (真实的) 股票还给裸卖空者的买方; (iii) 裸卖空合约本身并不要求裸卖空总股数小于股票发行的总股数; (iv) 上市公司高层或监管机构可以知道该公司的大小股东. 然而, 理论上他们不了解存在多少裸卖空合约.

大量的裸卖空卖方平仓可能会导致市场剧烈波动.

作业题 1. 浏览 Mark Joshi 写的 C++ Design Patterns and Derivatives Pricing 第二版, 了解 C++ 的重要性. 作业不必提交.

□

5 利率

假设在 t 时, 我们在银行里存 $M(t)$ 元, 那么在 $t+dt$ 时,

$$M(t+dt) = M(t) + \frac{dM}{dt}dt + \cdots.$$

令

$$r := \frac{dM(t)}{M(t)dt},$$

称 r 为利率. 在本课程中, 假设: 利率 r 为非负常数. 于是对任意常数 $\alpha > 0$,

$$M(t+\alpha) = M(t)e^{r\alpha} \geq M(t).$$

问题: 为什么假设利率 r 非负?

6 股息派发

上市公司将盈利以现金的形式发放给股民/股东, 这部分现金称为股息派发.
重要假设:
在本课程中, 在讨论问题时，假设股息派发的金额和派发时间事先是知道的.

6.1 离散股息派发

除非特殊声明以后采取以下约定.

假设当前时刻为 t, 公司将在 $t_d \in (t, T)$ 发给股民 D 元 /股. 我们约定D 在 t 时是已知常数，且 D 的金额是在 t_d 计的. 符号约定: t_d^- 和 t_d^+ 分别为股息派发前和后一瞬间. 数学上, 它们可以分别理解为左右极限.

命题 6.1.

$$S(t_d^-) = S(t_d^+) + D.$$

□

假设某人在 t_d^- 卖空 S, 再在 t_d^+ 买回 S. 由上式可知: $S(t_d^-) > S(t_d^+)$. 问: 他能否实现无风险套利?

6.2 连续股息派发

在任意时刻 t, 我们买入一股股票 $S(t)$. 在 $t+\delta t$ 时, 我们有资产回报

$$S(t+\delta t) + qS(t+\delta t)\delta t.$$

在本课程中假设上式中 $q \geq 0$ 为常数. 称 q 为股息派发率.

如果一股票具有以上性质, 那么该股票称为具有连续派发股息的股票. 再将上述资产回报全部买入该股票 $S(t+\delta t)$. 对给定常数 $A \geq 0$, 在区间 $[t, t+A]$ 反复进行这样的操作. 那么在 $t+A$ 时，我们得到的回报为

$$S(t+A)e^{qA}, \quad (\text{由 } e \text{ 的定义得}).$$

例子 6.2. 设: 在 t 时, 1 美元可以兑换 $S(t)$ 元人民币, 美元的利率为 q. 将美元看成一只股票: 1 美元相当于 1 股股票, 其价格为 $S(t)$. 我们在 t 时将 $S(t)$ 元人民币兑换 1 美元. 然后存入美元户头. 在 $t+A$ 时, 我们的美元户头有 e^{qA} 美元. 再将其换回人民币, 得到 $S(t+A)e^{qA}$ 元人民币.

□

7 例子

7.1 利率

课上讲

7.2 计数单位的改变 (测度变换)

假设: 今天在上课前教室门口有两个计数器. 首先将它们清零. 每进来一个男生计数器 A 加 1, 每进来一个女生计数器 B 加 1. 最终两个计数器都显示 20. 这样, 我们就得到结论: 共有 40 名学生, 男女生各占一半. 如果老师随机点名的话, 那么点到男女生的概率都是 50%.

如果我们改变计数器的计数方式: 每进来一个男生计数器 A 加 0.8, 每进来一个女生计数器 B 加 1.2. 最终两个计数器上的数之和为

$$0.8 \times 20 + 1.2 \times 20 = 40.$$

如果老师随机点名, 那么点到男生和女生的概率分别为

$$\frac{0.8 \times 20}{40} = 40\% \text{ 和 } \frac{1.2 \times 20}{40} = 60\%.$$

一般地, 设男女生人数分别为 a 和 b, 计数器将每个男女生分别加 x 和 y, 以下条件必须满足:

$$xa + yb = a + b \text{（“归一化”）}.$$

如果 x 或 y 有一为 0 的话, 那么点到男女生的概率

$$\frac{xa}{a+b} \quad \text{和} \quad \frac{yb}{a+b}$$

有一为 0. 这样男女生有一被点到的概率为 0 (失真了). 这个计数器计数方式改变对应于测度变换. 条件: $x, y > 0$ 对应于测度变换等价性.
无风险套利本意: 在时间区间 $[0, T]$ 我们做以下操作.

- 在 $t = 0$ 时, 我们“一无所有”. 即, 无现金, 无任何证券也不亏欠.
- 在 $\forall t \in [0, T]$ 时, 我们向银行借钱买卖任何证券. 注: 这里 t 可以是一个或多个不同时刻.
- 在 $t = T$ 时, 我们平仓: 将所有“头寸”兑换成现金. 这里“头寸”的意思在课上讲.

如果我们能确保在 T 时 (1) 不亏钱 (无风险), (2) 挣钱的概率大于 0(套利), 那么称以上过程完成了无风险套利操作. 问题: “挣钱的概率”是何意? 参见本课件的例子一章.

作业题 2. 下堂课课上提问题目: 叙述多元微积分中的链式法则 (chain rule). 被提问的同学要求在黑板上默写并解释. 其他同学和老师提问.

□