风险相依性的刻画–copula的基本理论

杨静平

北京大学数学科学学院金融数学系

2019年10月

Outline

- 1. 相关系数与因子模型
- 2. Copula 方法
- 3. 金融中的Copula 方法
- 4. 相依性度量
- 5. Archimedean copula

参考书目：

[1]John C. Hull (2010). 《风险管理与金融机构》第10章：相关系数与Copula函数

[2]J. McNeil, R. Frey and P. Embrechts (2005). Section 5: Copulas and dependence, in 《Quantitative Risk Management》.

[3]U. Cherubini, E. Duciano and W. Vecchiato(2004). Copula methods in Finance. Section 1.8: Copula methods in finance: a primer, Section 5: Estimation and calibration from Market data.

相关系数与因子模型

- 1.1 相关系数的定义
- 1.2 多元正态分布
- 1.3 t分布

Outline

相关系数的定义

变量V_1 和V_2的相关系数ρ定义为

$$\rho_{V_1,V_2} = \frac{E(V_1V_2) - E(V_1)E(V_2)}{\sqrt{Var(V_1)}\sqrt{Var(V_2)}}$$

股票市场收益率的相依性

假设股票X和股票Y在第i天结束时的价值分别为X_i和Y_i，则股票X和股票Y在第i天的收益率为

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}, y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}.$$

为计算$E(x_n y_n)$, 我们可以采用

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i} y_{n-i}$$

来估计$E(x_n y_n)$，采用 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{n-i}^2$ 来估计$E(x_n^2)$, 采用 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{n-i}^2$ 来估计$E(y_n^2)$.

可以考虑时间的远近对估计的影响。

假设$E(X_i) = 0, E(Y_i) = 0.$

- EMMA模型：

$$cov_n = \lambda cov_{n-1} + (1-\lambda) x_{n-1} y_{n-1}.$$

  λ越小，近期的权重越大。类似于非寿险中的信度理论。

- GARCH模型：

$$cov_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta cov_{n-1}.$$

统计估计中的协方差的一致性条件:

$$(w_1, w_2, \cdots, w_d) \sum (w_1, w_2, \cdots, w_d)^T \geq 0$$

Outline

多元正态分布

命题 对于二元正态随机变量(V_1, V_2)，这里

$$E(V_1) = \mu_1, var(V_1) = \sigma_1^2; E(V_2) = \mu_2, var(V_2) = \sigma_2^2;$$

并且V_1和V_2的相关系数为ρ. 则在变量$V_1 = v_1$的条件下，V_2的条件分布为正态分布，期望为

$$\mu_2 + \rho\sigma_2 \frac{v_1 - \mu_1}{\sigma_1},$$

标准差为

$$\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}.$$

正态分布的随机数的产生

正态分布随机数的产生：

- (1)近似方法：

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6.$$

其中，$R_i, i \geq 1$为[0，1]上均匀分布的随机数。

- (2)二元的情况：利用独立的正态随机数Z_1和Z_2，定义

$$\epsilon_1 = Z_1, \epsilon_2 = \rho Z_1 + Z_2\sqrt{1-\rho^2}$$

则(ϵ_1, ϵ_2)为二元正态随机变量，相关系数为ρ.

(3)n元的情况：利用独立的标准正态随机数$Z_i, i \leq n$, 定义

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} Z_k.$$

其中，

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}^2 = 1, i \leq n,$$

以及对所有的$j < i$, 有

$$\sum_{k=1}^{j} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \rho_{ij}.$$

(Cholesky decomposition)则$(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)$为$n$元正态分布，斜方差阵为$(\rho_{ij})_{n\times n}$.

给定相关系数矩阵 $(\rho_{ij})_{n\times n}$, 可以利用

$$\sum_{k=1}^{j} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \rho_{ij}, j < i$$

来求解$\alpha_{ik}, k \leq i$, 然后根据

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} Z_k$$

构造 $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$.

Cholesky 分解

如果A是实对称矩阵，是正定的，则A可以分解为

$$A = LL^T,$$

这里L 是一个下三角矩阵，对角元素是正的，L^T为L的转置。Cholesky 分解是唯一的。

可以利用递推的方法来计算。 对于$i = 1$， 定义$A_1 = A$.
在步i, 假设矩阵A_i具有下面的形式:

$$A_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,i} & b_i^T \\ 0 & b_i & B^{(i)} \end{pmatrix}$$

定义矩阵L_i如下：

$$L_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{i,i}} & 0 \\ 0 & b_i/\sqrt{a_{i,i}} & I_{n-i} \end{pmatrix}$$

这里

$$A_i = L_i A_{i+1} L_i^T.$$

其中，

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B^{(i)} - \frac{1}{a_{i,i}} b_i b_i^T \end{pmatrix}$$

则令

$$L = L_1 L_2 \cdots L_n$$

有

$$A = LL^T$$

Outline

正态因子模型

- 正态因子模型：

$$U_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i, i \le N$$

其中，$F, Z_i, i \le N$ 为独立的标准正态随机变量，$a_i \in [-1, 1], i \le N$.

- 多个因子的情况。如

$$U_i = a_{i,1} F_1 + a_{i,2} F_2 + \cdots + a_{i,m} F_m + (\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2}) Z_i, i \le N$$

其中，$F_i, i \le m, Z_j, j \le n$ 为独立的标准正态随机变量列。

上述模型已经广泛应用到信用风险管理中。

Copula 方法

- 2.1. 基本的介绍
- 2.2. Copulas的模拟
- 2.3. Copulas的性质
- 2.4. 完全相依性

Outline

基本的介绍

一个d-维的copula 为$[0,1]^d$上的分布函数，具有均匀[0,1]的边缘分布。

注意到

$$
\begin{aligned}
&P_C([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots[a_d,b_d])\\
&=\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_d}C(u_{1i_1},\cdots,u_{di_d})
\end{aligned}
$$

这里 $u_{j1}=a_j, u_{j2}=b_j, j\in\{1,2,\cdots,d\}$.

命题 令G为一分布函数，$G^{\leftarrow}$表示它的广义拟，

$$G^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : G(x) \geq y\}.$$

(a)如果U具有均匀[0，1]分布，则

$$P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x);$$

(b)如果Y具有连续分布函数G, 则$G(Y)$ 服从[0,1]上的均匀分布.

上一命题在随机模拟中具有重要应用. 我们可以先产生均匀[0,1]随机数， 然后使用$G^{\leftarrow}(U)$得到分布G的随机数.

例子 对于指数分布的随机变量Z，密度函数为$e^{-x}, x > 0$, 可以先生成均匀[0,1]的随机数U, 则$Z = -\ln(1-U)$ 为一个指数分布的随机数。

Sklar 定理： 令F 为具有边缘分布$F_1, \cdots, F_d$的联合分布函数. 则存在copula $C : [0,1]^d \to [0,1]$，使得对所有$x_1, \cdots, x_d$,有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_d(x_d)).$$

如果边缘分布是连续的, 则C是唯一的. 否则，C在区域

$$RanF_1 \times RanF_2 \times \cdots \times RanF_d,$$

上唯一确定，这里$RanF_i = F_i(\bar{R})$ 为函数F_i的值域. 反之，如果C 是一个copula，且$F_1, \cdots, F_d$为一维分布函数，则如上定义的分布函数F是一个具有边缘分布 $F_1, \cdots, F_d$的分布函数.

注意到

$$C(u_1, u_2, \cdots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \cdots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

定义(copula of F)：如果随机向量$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)'$ 具有联合分布函数F以及连续边缘分布 $F_1, \cdots, F_d$，则F的copula函数为$(F_1(X_1), F_2(X_2), \cdots, F_d(X_d))$的分布函数$C$.

当边缘分布是连续的情况下，copula 函数是唯一的：

$$C(u_1, u_2, \cdots, u_d) = P(F_1(X_1) \leq u_1, \cdots, F_d(X_d) \leq u_d).$$

当边缘分布不连续的情况下，copula 函数的性质：

例子 (离散分布): 令(X_1, X_2)具有二元Bernoulli 分布，满足

$$P(X_1=0, X_2=0)=\frac{1}{8}, P(X_1=1, X_2=1)=\frac{3}{8},$$

$$P(X_1=0, X_2=1)=\frac{2}{8}, P(X_1=1, X_2=0)=\frac{2}{8}.$$

则有$P(X_1=0)=P(X_2=0)=\frac{3}{8}$以及

$$C(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})=\frac{1}{8}.$$

在边缘变量严格增的变换下的copula的不变性.

命题: 令$(X_1, \cdots, X_d)$ 为一随机向量，具有连续边缘分布和copula C。令 $T_1, \cdots, T_d$ 为严格增函数. 则

$$(T_1(X_1), T_2(X_2), \cdots, T_d(X_d))$$

具有copula C.

Copulas 的Frechet 界:

定理: 对于每一copula $C(u_1, \cdots, u_d)$， 我们有界

$$\max\{\sum_{i=1}^{d} u_i + 1 - d, 0\} \leq C(u_1, u_2, \cdots, u_d) \leq \min\{u_1, \cdots, u_d\}$$

这里

$$M(u_1, \cdots, u_d) = \min\{u_1, \cdots, u_d\}$$

以及

$$W(u_1, \cdots, u_d) = \max\{\sum_{i=1}^{d} u_i + 1 - d, 0\}.$$

对于$d > 2$, Frechet 下界不是一个分布函数

考虑一个d-cube $[1/2, 1]^d \subset [0, 1]^d$. 对于$d > 2$,

$$
\begin{aligned}
P([1/2, 1]^d) = \quad & \max(1 + 1 + \cdots + 1 - d + 1, 0) \\
& -d \max(\frac{1}{2} + 1 + \cdots + 1 - d + 1, 0) \\
& +C_d^2 \max(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \cdots + 1 - d + 1, 0) - \cdots \\
& + \max(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} - d + 1, 0) = 1 - \frac{1}{2}d < 0
\end{aligned}
$$

这里应用到

$$
\begin{aligned}
& P_C([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_d, b_d]) \\
& = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_d} C(u_{1i_1}, \cdots, u_{di_d})
\end{aligned}
$$

其中$u_{j1} = a_j, u_{j2} = b_j, j \in \{1, 2, \cdots, d\}$.

Copulas 的例子

Copulas函数可以分为三类:

- 基本的copulas
- Implicit copulas
- Explicit copulas

基本的copulas

- 独立的copula $\Pi(u_1, \cdots, u_d) = \prod_{i=1}^{d} u_i$. 随机变量独立当且仅当它们的copula为独立copula.
- The comonotonicity copula $M(u_1, u_2, \cdots, u_d) = \min\{u_1, \cdots, u_d\}$. 随机变量 comonotonic 当且仅当他们的copula 为comonotonicity copula.
- The countermonotonicity copula 由下面的等式给出： $W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$. 两个随机变量 countermonotonic当且仅当他们的copula 为 countermonotonicity copula.

Implicit copulas:

假设$Y \sim N_d(\mu, \sum)$为Gaussian 随机向量, 则它的copula函数称为 **Gauss copula**. 并且

$$C_P^{Ga}(u_1, \cdots, u_d) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \cdots, \Phi^{-1}(u_d)).$$

二维情形下,

$$\begin{aligned} C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \\ & exp(\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Gaussian copula由它的所有二维边缘分布唯一确定。

t-copula:

$$C^t_{v,P}(u_1,\cdots,u_d)=t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1),\cdots,t_v^{-1}(u_d)).$$

其中t_v 是标准t分布的分布函数，$t_{v,P}$ 为向量$X\sim t_d(v,0,P)$的联合分布。

Explicit copulas

Gumbel copula:

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1,u_2)=exp\{-((-\ln u_1)^{\theta}+(-\ln u_2)^{\theta})^{1/\theta}\},1\leq\theta<\infty$$

如果$\theta=1$,可以得到独立copula; 当$\theta\to\infty$, 可以得到comonotonic copula.

Clayton copula:

$$C_\theta^{CL}(u_1, u_2) = ((u_1)^{-\theta} + (u_2)^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 < \theta < \infty$$

如果$\theta \to 0$, 得到独立copula; 如果$\theta \to \infty$, 得到comonotonic copula.
Meta distributions: 对于具有Gauss copula C_P^{Ga}的分布函数，称为**meta-Gaussian** 分布.
可以考虑 **Meta-t_ν** 分布 以及 **Meta-Clayton** 分布.

Outline

Copulas 和meta 分布的随机模拟

Gauss copula的模拟：

(1)生成$Z \sim N_d(0, P)$;

(2)计算$U = (\Phi(Z_1), \cdots, \Phi(Z_d))'$.

t copula的模拟：

(1)通过

$$(X_1, X_2, \cdots, X_d) = \frac{(Z_1, Z_2, \cdots, Z_d)}{\sqrt{W/v}}$$

生成$X \sim t_d(v, 0, P)$

(2)计算$U = (t_v(X_1), \cdots, t_v(X_d))'$.

例子 (各种copulas的比较):
考虑Gaussian copula, Gumbel copula, Clayton copula 和 t copula, 具有标准正态的边缘分布. 对于各个分布的相关系数近似等于0.70. 见Figure 5.3 和Figure 5.4.

Outline

1. 相关系数与因子模型
   - 相关系数的定义
   - 多元正态分布以及正态分布的随机数的产生
   - 正态因子模型
2. Copula 方法
   - 基本的介绍
   - Copulas 和meta 分布的随机模拟
   - Copulas的性质
   - 完全相依性
3. 金融中的Copula方法
   - 二维指数期权
   - Equity-linked products
   - Credit-linked products
   - 将Copula 函数应用于贷款组合

Copulas的性质

令X为一随机向量，具有多元生存函数$\bar{F}$, 边缘分布函数记为$F_1, F_2, \cdots, F_d$和边缘生存函数记为 $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \cdots, \bar{F}_d$. 则生存copula $\hat{C}$可以表示为

$$\bar{F}(x_1, \cdots, x_d) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \cdots, \bar{F}_d(x_d))$$

这里

$$C(u_1, u_2, \cdots, u_d) = P(U_1 \leq u_1, \cdots, U_d \leq u_d),$$

其中

$$\hat{C}(u_1, u_2, \cdots, u_d) = P(1 - U_1 \leq u_1, \cdots, 1 - U_d \leq u_d).$$

Copulas的生存函数:

$$\bar{C}(u_1, \cdots, u_d) = P(U_1 > u_1, \cdots, U_d > u_d).$$

注意到

$$\hat{C}(1-u_1, 1-u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$$

二维Pareto 分布的生存函数： 二维Pareto 分布的生存函数有下式给出：

$$\overline{F}(x_1, x_2) = (\frac{x_1 + k_1}{k_1} + \frac{x_2 + k_2}{k_2} - 1)^{-\alpha}$$

则生存copula为

$$\hat{C}(u, v) = (u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1)^{-\alpha}.$$

Radial symmetry 随机向量X关于a是radially symmetric， 如果$X-a=^d a-X$.
对于radially symmetric copula C, 有$C=\hat{C}$成立.

Copula的条件分布:

$$C_{U_2|U_1}(u_2|u_1)=\frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2),$$

这里偏导数几乎处处存在.

Copula 的密度函数.

可交换性

一个随机向量是可交换的， 如果对于$(1, 2, \cdots, d)$的任何一个重排$(\Pi(1), \cdots, \Pi(d))$有

$$(X_1, X_2, \cdots, X_d) =^d (X_{\Pi(1)}, \cdots, X_{\Pi(d)}).$$

如果(U_1, U_2)是可交换copula, 则有

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \leq u_2 | U_2 = u_1)$$

Outline

完全相依性

Comonotonicity: 称随机变量列$X_1, X_2, \ldots, X_d$为 comonotonic， 如果它们具有comonotonic copula $M(u_1, \cdots, u_d) = \min\{u_1, \cdots, u_d\}$.

保险和金融中的例子:

- 股票价格和它的看涨期权;
- 损失额和再保险人的赔付额;
- 目前的石油价格和石油公司的股票价格;
- 国际股票市场的股票价格.

Comonotonicity的应用:

- 衍生物的定价和套期保值;
- 风险管理: 风险度量和风险分担, 最优投资策略, 资金分配;
- 人寿保险和养老金.

See *An overview of comonotonicity and its applications in finance and insurance. Griselda Deelstra, Jan Dhaene and Michele Vanmasele (2010)*.

命题: (1)随机变量列$X_1, X_2, \ldots, X_d$ 为同单调当且仅当对于某随机变量列Z和递增函数$v_1, \cdots, v_d$有

$$(X_1, \cdots, X_d) =^d (v_1(Z), v_2(Z), \cdots, v_d(Z)).$$

(2)随机变量列X_1, X_2为反单调， 如果它们具有Frechet 下界：$W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$.
(3)令$X_1, \cdots, X_d$ 具有连续分布函数. 随机变量列 $X_1, X_2, \ldots, X_d$ 是comonotonic， 当且仅当对于每一对(i, j)有 $X_j = T_{ji}(X_i)$ 成立， 这里T_{ji}为某一递增变换.

金融中的Copula方法

Copula methods in Finance: 37-47.

- 3.1. 二维指数期权
- 3.2. Equity-linked products
- 3.3. Credit-linked products
- 3.4. Copula 函数应用于贷款组合

Outline

二维指数期权

考虑二维指数期权. 如果两支股票或指数高于或低于各自给定的敲定价格水平, 这种期权支付一个单位的货币.

- 考虑一个例子，假设一个产品基于Nikkei 225 ($X(t)$) 和S&P 指数 ($Y(t)$), 在某一到期日T支付一个单位，支付的条件是二者分别低于各自给定的水平K_{NKY}和K_{SP}. 这种指数看跌期权的价格为

$$DP = \exp\{-r(T-t)\}P(X(T) \leq K_{NKY}, Y(T) \leq K_{SP}).$$

- 上式可以写为

$$DP = \exp\{-r(T-t)\} \times C(P(X(T) \leq K_{NKY}), P(Y(T) \leq K_{SP})).$$

二维指数看涨期权

考虑二维指数期权的另一个例子. 支付一个单位的货币，如果Nikkei 225 ($X(t)$) 和S&P 指数($Y(t)$)分别高于各自给定的敲定水平。 这种指数看涨期权的价格为

$$DP = \exp\{-r(T-t)\}P(X(T) > K_{NKY}, Y(T) > K_{SP}).$$

上式可以写成

$$\begin{aligned} DP &= \exp\{-r(T-t)\} \\ &\hat{C}(P(X(T) > K_{NKY}), P(Y(T) > K_{SP})). \end{aligned}$$

这里$\hat{C}$称为生存copula,满足

$$\hat{C}(1-u, 1-v) = 1-u-v+C(u,v)$$

关于Nikkei 225 ($X(t)$) 和 S&P 指数的相关性假设:

(1)独立: $C(u,v) = \Pi(u,v)$

(2)完全相关: $C(u,v) = M(u,v)$

(3)完全负相关: $C(u,v) = W(u,v)$

(4)二维Frechet 相关:

$$C(u,v) = \alpha M(u,v) + (1-\alpha-\gamma)\Pi(u,v) + \gamma W(u,v)$$

(5)正态 copula 或 t copula.

Outline

1. 相关系数与因子模型
   - 相关系数的定义
   - 多元正态分布以及正态分布的随机数的产生
   - 正态因子模型
2. Copula 方法
   - 基本的介绍
   - Copulas 和meta 分布的随机模拟
   - Copulas的性质
   - 完全相依性
3. 金融中的Copula方法
   - 二维指数期权
   - Equity-linked products
   - Credit-linked products
   - 将Copula 函数应用于贷款组合

Equity-linked products

考虑rainbow option的简单情况，一个基于两个资产的最小值的看涨期权.

考虑一类 产品，Everest notes，在给定时刻T支付的息票T通过下面的方式来确定：

$$coupon(T) = \max[\min(\frac{S_{NKY}(T)}{S_{NKY}(0)}, \frac{S_{SP}(T)}{S_{SP}(0)}) - 1, 0].$$

假设$S_{NKY}(0) = S_{SP}(0) = 1$. 则这种产品的价格可以表示为

$$
\begin{aligned}
& Call[S_{NKY}(t), S_{SP}(t); K, T] \\
& = exp(-r(T-t))E[\max\{\min(S_{NKY}(T), S_{SP}(T)) - 1, 0\}|\mathcal{F}_t] \\
& = exp(-r(T-t)) \\
& \qquad \int_0^\infty P(S_{NKY}(T) > u+1, S_{SP}(T) > u+1|\mathcal{F}_t)du.
\end{aligned}
$$

上式可以简化为

$$
\begin{aligned}
& Call[S_{NKY}(t), S_{SP}(t); K, T] = exp(-r(T-t)) \\
& \times \int_{1}^{\infty} \hat{C}_t(P(S_{NKY}(T) > u), P(S_{SP}(T) > u))du,
\end{aligned}
$$

这里C_t是在$\mathcal{F}_t$下的$(S_{NKY}(T), S_{SP}(T))$的copula函数.

Outline

Credit-linked products

考虑first-to-default swap. 这种产品支付一个单位的货币，如果两个信用资产中至少有一个在时刻T之前违约。 则预计的支付额可以表示为

$$\begin{aligned} FTD &= \exp[-r(T-t)]P(\min\{\tau_1,\tau_2\} < T) \\ &= \exp[-r(T-t)][1-P(\min\{\tau_1,\tau_2\} \geq T)] \\ &= \exp[-r(T-t)][1-\hat{C}(P(\tau_1 > T), P(\tau_2) > T))]. \end{aligned}$$

可以写为

$$\begin{aligned} FTD &= \exp[-r(T-t)]P(\min\{\tau_1,\tau_2\} < T) \\ &= \exp[-r(T-t)][P(\tau_1 < T) + P(\tau_2 < T) \\ &\quad -P(\tau_1 < T, \tau_2 < T)]. \end{aligned}$$

例子　考虑a first-to-default option written on a basket of two names, 信用评级分别为AA和BBB. 在该合同下，如果有信用个体在五年内违约，则卖产品的一方将支付 1 million euros 。The leverage figures of AA and BBB industrial companies were equal to 26.4% and 41%. 假设无风险利率水平为4%， 对于两个公司来说资产的波动性都为25%. 五年内违约的概率分别为0.69%和4.71%. 则有

$$\begin{aligned} FTD_{max} &= 1000000exp(-0.04 \times 5)(1 - \min\{1 - 0.0471, 1 - 0.00069\}) \\ &= 1000000exp(-0.04 \times 5) \times 0.0471 = 38562 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FTD_{\perp} &= 1000000exp(-0.04 \times 5)(1 - (1 - 0.0471)(1 - 0.00069)) \\ &= 1000000exp(-0.04 \times 5) \\ &\times[0.0069 + (1 - 0.0069) \times 0.0471] = 43945. \end{aligned}$$

假设Gaussian copula，相关系数为20%, 则有

$$\Phi_{0.20}(\Phi^{-1}(0.00069), \Phi^{-1}(0.0471)) = 0.00088636$$

因此

$$FTD_{Gaussian} = 1000000 \exp(-0.04 \times 5)$$
$$\times [0.0471 + 0.0069 - 0.00088636] = 43486.$$

例子 考虑一个5-year first-to-default option written on a basket of two names, 分别为Deusche Telecom 和Dresdner Bank. 面值分别为1 million euros. DT的违约概率为12.32%. 对于Dresdner,该资产的swap spread 对于5-year 债券为75bp. 使用相关系数为0.5的gaussian copula. 则可以得到first-to-default的价格. Dresdner's 违约概率可以通过下式来计算

$$1 - exp(-0.0075 * 5) = 0.0036806$$

则有

$$
\begin{aligned}
& C(Q_1(T), Q_2(T)|\mathcal{F}_t) \\
& = \Phi(\Phi^{-1}(0.036806), \Phi^{-1}(0.001232); 0.50) \\
& = \Phi(-1.788967169, -1.15926; 0.50) = 1.729\%
\end{aligned}
$$

则the first-to-default的价格为

$$
\begin{aligned}
FTD \quad & = 1000000 exp[-0.04 \times 5][0.03606 + 0.1232 - 0.01729] \\
& = 116240.
\end{aligned}
$$

Outline

将Copula 函数应用于贷款组合

假设一个贷款组合中涉及N个公司，定义$T_i(i \leq N)$为公司i的违约时间。定义Q_i为T_i的概率分布函数。违约时间定义为

$$T_i = Q_i^{-1}(\Phi(U_i)), i \leq N$$

其中，

$$U_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i, i \geq 1.$$

其中,$F, Z_i, i \geq 1$为独立的标准正态随机变量列。
定义在到期日T前，对$X \in (0,1)$, $WCRD(T, X)$满足

$$P(P(T_i < T|F) < WCRD(T, X)) = X.$$

假设Q_i都等于Q，相关系数为ρ,a_i都相等。则

$$P(T_i < T|F) = \Phi(\frac{\Phi^{-1}(Q(T)) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}})$$

$$\begin{aligned}
&P(P(T_i < T|F) < WCRD(T,X)) \\
&= P(\Phi(\frac{\Phi^{-1}(Q(T)) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}) < WCRD(T,X)) \\
&= P(F > \Phi^{-1}(1-X)) = X
\end{aligned}$$

根据

$$\Phi^{-1}(1-X)=-\Phi^{-1}(X).$$

则有

$$WCRD(T,X)=\Phi(\frac{\Phi^{-1}(Q(T))+\sqrt{\rho}\Phi^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}).$$

假设某组合的风险暴露为L, 赎回率为R，则有

$$VaR(T,X)=L\times(1-R)WCDR(T,X).$$

例子 一家银行持有价值为1亿美元的零售贷款，每个贷款的年违约概率为2%，平均赎回率为8%. 则对于$X = 0.999$，有

$$WCDR(1, 0.999) = \Phi(\frac{\Phi^{-1}(0.02) + \sqrt{0.1}\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-0.1}}) = 0.128$$

以及$VaR_{0.999} = 513$万美元。