有限时间破产概率+离散时间模型

第8讲 2019.10.22

有限时间破产概率

定理2-6（无初始盈余的情形）：有限时间生存概率

$$\phi(0,t)=\frac{1}{ct}\int_0^{ct}F_{s(t)}(x)dx$$

$$\Pr\{U(t)\in I;U(s)>0,\forall 0\le s<t\}$$

$$=\Pr\{U(t)\in I;U(s)<U(t),\forall 0\le s<t\}$$

$$=\frac{y}{ct}\Pr\{U(t)\in I\}$$

工具1：增量可交换过程的性质

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k,\ \ k = 1, \ldots, n$$

$$\Pr\{S_k > 0, k = 1, \ldots, n-1;\ \ S_n \in A\}$$

$$= \Pr\{S_k^* > 0, k = 1, \ldots, n-1;\ \ S_n^* \in A\}$$

$$= \Pr\{S_n > S_k, k = 1, \ldots, n-1;\ \ S_n \in A\}$$

其中：$S_k^* = S_\mathrm{k} - S_{n-\mathrm{k}}$ 与 S_k 同分布

工具-2

- **将轨道的计算转换为终点的计算（离散整数情形）**

设 $\{S_n, n = 0,1,\ldots\}$是 增量可交换的过程，
增量的取值为$\{1,0,-1,-2,\ldots\}$
则有：对$y > x$

$$\Pr\{S_n = y; S_k < y, k = 1,\ldots,n-1 | S_0 = x\}$$
$$= \frac{y-x}{n}\Pr\{S_n = y\}$$

有限时间破产概率（续）

定理2-7（一般初始盈余的情形）Seal公式

$$\phi(u,t)=F_{s(t)}(u+ct)-c\int_0^t \phi(0,t-s)f_{S(s)}(u+cs)ds, u\geq 0$$

$$\begin{aligned}\phi(u,t)&=\Pr\{U(t)\geq 0\}-\Pr\{U(t)\geq 0,\exists s<t,\ni U(s)=0\}\\&=F_{s(t)}(u+ct)-\int_0^t \phi(0,t-s)\{F_{S(s)}(u+cs+cds)-F_{S(s)}(u+cs)\}\end{aligned}$$

利用二元函数的特殊变换讨论定理2-6和2-7

- 定义：

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_1 x_1} e^{-z_2 x_2} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

$$\tilde{f}_0(z) = \tilde{f}(0, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(0, t)\, dt$$

- 定理2-8：

$$\frac{\partial \phi(u,t)}{\partial t} = c\frac{\partial \phi(u,t)}{\partial u} - \lambda \phi(u,t) + \lambda \int_0^u \phi(u-t,t)\, dF_x(x)$$

$$\frac{\partial \phi(u,t)}{\partial u} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi(u,t)}{\partial t} + \frac{\lambda}{c}\phi(u,t) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-t,t)\, dF_x(x)$$

离散时间破产模型的基本分析：方法的不规范性

- 给定时间单位（月、季度、半年、年）

$$S_0 = 0,$$

$$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n,\ n \geq 1$$

$$U_n = u + cn - S_n,\ n \geq 0$$

离散模型的基本性质-马氏性

- 总盈余为独立和

$$U_n = u + \sum_{1}^{n} (c - W_k)$$

$$U_n = U_{n-1} + (c - W_n) \qquad n = 1,2, \ldots$$

（时间）递推关系

$$\tilde{\varphi}(u,n) = \Pr\left(U_n > 0 \middle| U_{n-1} > 0\right) \cdot \tilde{\varphi}(u,n-1)$$

$$\tilde{\psi}(u,n) = \Pr\left(U_n \le 0 \middle| U_{n-1} > 0\right)$$
$$+\tilde{\psi}(u,n-1) \cdot \Pr\left(U_n > 0 \middle| U_{n-1} > 0\right)$$

关于时间的积分递推公式（有限时间情形）

- 不破产概率的积分方程

$$\widetilde{\varphi}(u,1)=\Pr(u+c-W_1>0)=F_W(u+c)$$

$$\widetilde{\varphi}(u,n)=\int_0^{u+c}\varphi(u+c-w,n-1)\,dF_W(w)\,,\;\; n\geq 1$$

离散情形

$$\widetilde{\varphi}(u,1)=\sum_{w\le u+c}\Pr(W=w)$$

$$\widetilde{\varphi}(u,n)=\sum_{w\le u+c}\widetilde{\varphi}(u+c-w,n-1)\Pr(W=w),\ \ n\ge 1$$

特殊分布的调节系数

- 年损失为复合Poisson+指数分布，有与连续模型相同的结论
- 年净盈余为正态分布

$$\widetilde{R} = \frac{2\left(c - EW\right)}{Var\left[W\right]}$$

年总损失为一阶自回归形式的情景

- 模型：

$$W_i = aW_{i-1} + Y_i,\ \ |a| < 1,\ i = 1, 2, \ldots,\quad W_0 = w$$

- 构造一个新的盈余过程（总损失为独立和）

$$\hat{u} = \hat{U}_0 = u - \frac{a}{1-a} w \quad \hat{U}_n = U_n - \frac{a}{1-a} w$$

$$\hat{U}_n = \hat{u} + cn - \hat{S}_n$$

$$\hat{S}_n = \sum_1^n \frac{Y_i}{1-a}$$

一阶自回归的破产概率

- 破产的定义

$$\widetilde{T}=\inf\left\{n:\widehat{U}_n<0\right\}=\inf\left\{n:U_n<\frac{a}{1-a}W_n\right\}$$

- 调节系数方程

$$c\widetilde{R}=\ln M_{\frac{Y_i}{1-a}}\left(\widetilde{R}\right)=\ln M_{Y_i}\left(\frac{\widetilde{R}}{1-a}\right)$$

- 破产概率 $$\widetilde{\psi}\left(\widehat{u},w\right)=\frac{e^{-\widetilde{R}\widehat{u}}}{E\left(e^{-\widetilde{R}\widehat{U}_{\widetilde{T}}}\middle|\widetilde{T}<\infty\right)},\ \widehat{u}\geq 0$$

一般的离散时间的盈余过程：保费收入+投资收入

- 基本模型：

$$U_n = u + \sum_{1}^{n}(P_k + C_k - W_k)$$

- 变换后的新过程

$$U_0^* = u,\ S_k^* = \begin{cases} 0, & U_{k-1}^* < 0 \\ S_k, & U_{k-1}^* \geq 0 \end{cases}$$

$$U_k^* = U_{k-1}^* + S_k^*$$

$$\widetilde{\varphi}(u,n) = \Pr(U_n^* \geq 0),\quad \widetilde{\psi}(u,n) = \Pr(U_n^* < 0)$$

三种破产概率的近似计算方法

- 随机模拟
- （离散化）递推算法
- （独立性）反演计算-FFT

随机模拟

- 生成每年总损失的随机变量
- 生成一个直至某年底的盈余轨道
- 反复上述过程，生成若干（上万个）轨道结果
- 计算上述生成的轨道中在给定的时间之前破产的比例

离散化递推算法-1

- 已知：
  - 前一年底非负盈余的分布
  - 已知前一年底盈余非负的条件下，当年出现破产的转移概率
- 递推计算本年度破产的概率

离散化递推算法-2

$$\widetilde{\psi}(u,n)=\widetilde{\psi}(u,n-1)+\Pr\left(U_{n-1}^{*}\geq 0,\ U_{n-1}^{*}+S_{n}^{*}<0\right)$$

$$=\widetilde{\psi}(u,n-1)+\sum_{j=1}^{m}\Pr\left(U_{n-1}^{*}+S_{n}^{*}<0|U_{n-1}^{*}=u_j\right)\Pr\left(U_{n-1}^{*}=u_j\right)$$

$$=\widetilde{\psi}(u,n-1)+\sum_{j=1}^{m}\Pr\left(u_j+S_{n}^{*}<0|U_{n-1}^{*}=u_j\right)f_j$$

$$=\widetilde{\psi}(u,n-1)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{S_{j,k}<-u_j}g_{j,k}f_j$$

离散化递推算法-3

$$
\begin{aligned}
\Pr(U_n^* = x) &= \Pr(U_{n-1}^* \geq 0 \text{且} U_{n-1}^* + S_n = x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Pr(U_{n-1}^* \geq 0 \text{且} U_{n-1}^* + S_n = x \mid U_{n-1}^* = u_j) \Pr(U_{n-1}^* = u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Pr(u_j + S_n = x \mid U_{n-1}^* = u_j) f_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{S_{j,k} + u_j = x} g_{j,k} f_j
\end{aligned}
$$

反演计算-FFT

定义U_{k}^{**}为$U_{\mathrm{k}} > 0$的部分，所以有：$\Pr(U_{\mathrm{k}}^{**} > 0) = 1$
因此，在已知$U_{\mathrm{k}-1}^{**}$的下一时刻k的破产
完全是由当年的净收入S_{k}造成的
{时刻k破产}=$\{U_{\mathrm{k}-1}^{**} + S_{\mathrm{k}} < 0\}$

(1)利用特征函数分解得到：

$$E\left[e^{iz\left(U_{k-1}^{**}+S_k\right)}\right] = E\left[e^{izU_{k-1}^{**}}\right] \cdot E\left[e^{izS_k}\right] = \varphi_{1,k}(z)\,\varphi_{2,k}(z)$$

(2)利用特征函数$\varphi_{1,k}(z)\varphi_{2,k}(z)$反演密度函数

反演计算-FFT

$U_{\mathrm{k}-1}^{**}+S_{\mathrm{k}}$的密度为$\mathrm{f}_k(u)$

U_{k}^{**}的密度为$f_k^*(u)=\mathrm{f}_k(u)/(1-r_k)$

$r_k=\Pr(U_{\mathrm{k}-1}^{**}+S_{\mathrm{k}}<0)$

时刻k之前破产的概率为：

$$\widetilde{\psi}(u,k)=\widetilde{\psi}(u,k-1)+r_k\left[1-\widetilde{\psi}(u,k-1)\right]$$

例子

- 已知：初始盈余为2个货币单位，年初保费收入2.5，年初的任何盈余均以年利率10%累积，若没有损失发生，则下一年度有0.5的保费折扣。年损失（年底发生）为独立同分布的随机变量，损失量为0、2、4和6的概率分别为0.4、0.3、0.2和0.1. 计算前两年年底破产的概率。

例子-第一年底盈余的分布

$$U_1 = u + W_1$$

$$\Pr(U_1 = 4.5) = 0.4$$

$$\Pr(U_1 = 2.5) = 0.3$$

$$\Pr(U_1 = 0.5) = 0.2$$

$$\Pr(U_1 = -1.5) = 0.1$$

修正的盈余的分布

$$U_1^{**} = u + W_1, \ if \ u + W_1 > 0$$

$$\Pr\left(U_1^{**} = 4.5\right) = 0.4/0.9$$

$$\Pr\left(U_1^{**} = 2.5\right) = 0.3/0.9$$

$$\Pr\left(U_1^{**} = 0.5\right) = 0.2/0.9$$

$$\widetilde{\psi}(2,1) = \Pr\left(U_1 = -1.5\right) = 0.1 = r_1$$

净收入的分布

$$\Pr\left(S_2 = 2.5\right) = 0.4$$

$$\Pr\left(S_2 = -0.5\right) = 0.3$$

$$\Pr\left(S_2 = -1.5\right) = 0.2$$

$$\Pr\left(S_2 = -3.5\right) = 0.1$$

特征函数计算+反演分布

由已知分布得到

$$\varphi_{1,k}(z)=\frac{1}{9}\left[2x^{0.5}+3x^{2.5}+4x^{4.5}\right],$$

$$\varphi_{2,k}(z)=\frac{1}{10}\left[x^{-3.5}+2x^{-1.5}+3x^{0.5}+4x^{2.5}\right],$$

进而有

$$\varphi_{1,k}(z)\varphi_{2,k}(z)=\frac{1}{90}\left[2x^{-3}+7x^{-1}+16x+25x^{3}+24x^{5}+16x^{7}\right]$$

上面特征函数各项的系数即为概率密度，进而有：

$$r_2=\frac{2+7}{90}=0.1,\ \tilde{\psi}(2,2)=0.1+0.1(1-0.1)=0.19$$

作业与思考

- **习题2: No.16/17**