衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-10-28(初稿)

要求

阅读本课件.

1 Black-Scholes 方程的一个简单推广

假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为 q. 将几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q)dt + \sigma dB_t,$$

推广为

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu(t) - q(t))dt + \sigma(t)dB_t, \tag{1.0.1}$$

其中 $\mu(t)$，$q(t)$ 和 $\sigma(t)$ 都是时间 t 的确定函数 (非随机的). 我们同时假设利率也是时间 t 的确定函数 $r(t)$. 这些函数正如在微积分中的函数. 例如: 给定未来时刻 t, $r(t)$ 唯一确定.

对于欧式期权 V, 用 delta 对冲和无套利假定可得广义的 Black-Scholes 方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{1.0.2}$$

以下内容取自 Paul Wilmott on Quantitative Finance Vol 1-3, 2nd Ed pp.147-148.

令

$$\overline{S} = Se^{\alpha(t)}, \quad \overline{V} = Ve^{\beta(t)}, \quad \bar{t} = \gamma(t).$$

则方程(1.0.2)可化为

$$\gamma'(t)\frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\overline{S}^2\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial \overline{S}^2} + (r(t) - q(t) + \alpha'(t))\overline{S}\frac{\partial \overline{V}}{\partial \overline{S}} - (r(t) + \beta'(t))\overline{V} = 0.$$

取

$$\beta(t) = \int_t^T r(u)du, \quad \alpha(t) = \int_t^T (r(u) - q(u))du \tag{1.0.3}$$

$$\gamma(t) = \int_t^T \sigma^2(u)du \tag{1.0.4}$$

以上方程可化为

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2}\overline{S}^2\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial \overline{S}^2}.$$

这是个常系数方程. 而

$$\overline{V}=\overline{V}(\overline{S},\overline{t})=\overline{V}(Se^{\alpha(t)},\gamma(t)).$$

所以

$$V=e^{-\beta(t)}\overline{V}(Se^{\alpha(t)},\gamma(t)). \tag{1.0.5}$$

当 r, q 和 σ 都是常数时, 分别记为 r_c, q_c 和 σ_c, (1.0.5)中的 V 就是通常意义下的 Black-Scholes 方程的解, 记为 V_{BS}. 于是

$$V_{\mathrm{BS}}=e^{-r_c(T-t)}\overline{V}_{\mathrm{BS}}(Se^{(r_c-q_c)(T-t)},\sigma_c^2(T-t)),$$

其中, $\overline{V}_{\mathrm{BS}}$ 是与 $\overline{V}$ 对应的函数. 如果我们知道 V_{BS} 的函数形式, 那么也就知道了 V 的函数形式，具体做法如下. 取

$$\begin{cases}\beta(t)=&r_c(T-t)\\ \alpha(t)=&(r_c-q_c)(T-t)\\ \gamma(t)=&\sigma_c^2(T-t).\end{cases}$$

再由(1.0.3)和 (1.0.4)解得

$$\begin{cases}r_c=&\dfrac{1}{T-t}\displaystyle\int_t^T r(u)du\\ q_c=&\dfrac{1}{T-t}\displaystyle\int_t^T q(u)du\\ \sigma_c^2=&\dfrac{1}{T-t}\displaystyle\int_t^T \sigma^2(u)du.\end{cases}$$

例如: 欧式看涨期权 $c(S,t,E,T)$ 的解可表为

$$Se^{-\int_t^T q(u)du}N\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+\int_t^T(r(u)-q(u))du+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_t^T\sigma^2(u)du}}\right)$$
$$-Ee^{-\int_t^T r(u)du}N\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+\int_t^T(r(u)-q(u))du-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(u)du}{\sqrt{\int_t^T\sigma^2(u)du}}\right).$$

例子 1.1. 假设 S 无股息派发, 利率 r 为常数. 在 $t=0$ 时, 大家都用以下公式

$$c(S,t,E,T,\sigma)=SN(d_1)-e^{-rT}EN(d_2)$$

给出 c 的定价, 然而发现 $c(S,t,E,T,\sigma)$ 与市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$ 不相等. 于是可以计算隐含波动率 $\widetilde{\sigma}(S,E,t,T)$, 使得

$$\widetilde{c}(S,t,E,T)=c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma}(S,E,t,T)).$$

一个简单的想法是, 假设 σ 是时间的非随机函数 $\sigma(t)$. 由上段内容的讨论知:

$$\widetilde{\sigma}(S,E,t,T)=\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T\sigma^2(u)du.}$$

如果能够找到这样的非随机函数 $\sigma(t)$, 使得上式总是成立, 那么我们就能给出所有 $\widetilde{\sigma}(S,E,t,T)$. 进而可以得到市场价 $\widetilde{c}$. 注: 在实际市场中, 找到这样的 $\sigma(t)$ 机会很小.

□

例子 1.2. 假设上例中的非随机函数 $\sigma(t)$ 存在. 在 t 时, 我们从市场上得到 $\{\widetilde{c}(S,t,E,T_i)\}$, $0<T_1<T_2<\cdots<T_N<+\infty$. 由隐含波动率的定义, 对于市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T_i)$, 我们有隐含波动率

$$\widetilde{\sigma}(E/S,T_i-t)=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_i}\sigma^2(t)dt,\quad i=1,2,\ldots,N.$$

于是

$$\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_{i+1}-t)T_{i+1}-\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_i-t)T_i=\int_{T_i}^{T_{i+1}}\sigma^2(t)dt\geq 0.$$

所以,

$$\widetilde{\sigma}(E/S,T_{i+1}-t)\geq\sqrt{\frac{T_i}{T_{i+1}}}\widetilde{\sigma}(E/S,T_i-t).$$

上式的讨论前提是, 假设非随机函数 $\sigma(t)$ 存在. 这个函数的一种简单形式可以拼凑成

$$\sigma(t)=\begin{cases}\widetilde{\sigma}(E/S,T_1-t), & t\leq T_1\\ \sqrt{\dfrac{\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_2-t)T_2-\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_1-t)T_1}{T_2-T_1}}, & T_1<t\leq T_2\\ \cdots & \\ \sqrt{\dfrac{\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_{i+1}-t)T_{i+1}-\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_i-t)T_1}{T_{i+1}-T_i}}, & T_i<t\leq T_{i+1}\\ \cdots & \\ \sqrt{\dfrac{\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_N-t)T_N-\widetilde{\sigma}^2(E/S,T_{N-1}-t)T_{N-1}}{T_N-T_{N-1}}}, & T_{N-1}<t\leq T_N.\end{cases}$$

上式通常称为 (隐含) 波动率的期限结构. 也有人取 $E=S_t$ (ATM), 将上式称为 (隐含) 波动率的期限结构.

□

在实际市场中, 为什么找到这样的 $\sigma(t)$ 机会很小, 不是上例已经构造出了 $\sigma(t)$ 了吗? 理由课上讲.

2 与路径相关的期权简介

2.1 一些布朗运动的性质

假设当前时刻 $t=0$, 对于任意给定 $a\neq 0$, 令

$$T_a=\inf\{t>0,B(t)=a\}.$$

称 T_a 为 $B(t)$ 到 a 的首达时.

引理 2.1 (反射原理). *反射过程*

$$\widetilde{B}(t);=\begin{cases}B(t) & t<T_a\\ 2a-B(t) & t\geq T_a\end{cases}$$

与布朗运动$B(t)$ 分布相同.

□

可以证明:

$$\Pr(T_a\leq t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \tag{2.1.1}$$

事实上, 不妨假设: $a<0$. 于是

$$\begin{aligned}\Pr(T_a\leq t)=&\Pr(T_a\leq t,B(t)>a)+\Pr(T_a\leq t,B(t)\leq a)\\ =&2\Pr(T_a\leq t,B(t)\leq a)\quad(\text{反射原理})\\ =&2\Pr(B(t)\leq a)\\ =&\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy.\end{aligned}$$

记:

$$M(t)=\max_{0\leq u\leq t}B(u).$$

它是布朗运动B 在 $[0,t]$ 上的最大值. 给定 $t>0$ 和 $z\in\mathbb{R}$. 假设当前时刻为 0. 我们来讨论 M 在未来 t 时落在区间 $[z,z+dz]$ 的概率. 显然当 $z<0$ 时, 此概率为 0. 而当 $z\geq 0$ 时,

$$\Pr(M(t)\in[z,z+dz])=\Pr(\max_{0\leq u\leq t}B(u)\in[z,z+dz])$$

易知:

$$\begin{aligned}\Pr(M(t)\in[z,z+dz])=&\frac{d}{dz}\Pr(T_z\leq t)dz\\ =&\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz.\end{aligned}$$

称 $M(t)$ 为极大过程. 它的密度函数 $f_{M(t)}(z)$ 为

$$1_{z\geq 0}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right)$$

作业题 1. 证明: $(B(t),M(t))$ 的联合密度函数 $f_{B(t),M(t)}(x,y)$ 为

$$1_{y\geq 0}1_{x\leq y}\frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right).$$

□

2.2 障碍期权 (Barrier Options) 简介

这类期权有较多种. 在这里我们只给出常见的几种. 我们的目的是通过讨论这类期权, 同学们可以了解研究期权的一些方法.

假设当前时刻为 t, 一个在 T 到期的 (Single)Barrier 期权，系指：以下两者之一.

- 给定边界函数 $H(t)$, 如果标的资产 S 在 $[t,T]$ 上首次达到 H 时，那么该期权作废同时期权的持有者可获得一定数额的资金回报 (rebate). 如果 S 没有达到事先给定的边界 H, 那么该期权的持有者在 T 时, 获得 Terminal Payoff. 如果期权是美式的话, 那么期权的持有者在期权没有到期时, 可以提前执行, 以获得 payoff.

- 给定边界函数 $H(t)$, 如果标的资产 S 在 $[t,T]$ 上首次达到 H 时，那么该期权被激活（“开始存在”), 同时期权的持有者付出一定数额的资金 (rebate) 给卖方并且在 T 时候, 期权持有人获得 Terminal Payoff, 期权的持有人获得回报为 0. 如果 S 在没有达到给定的边界 H, 那么该期权一直不生效. 如果期权是美式的话, 那么期权的持有者在期权被激活后, 可以提前执行, 以获得 payoff.

以上的前者称为 knock-out 期权; 后者称为 knock-in 期权. 现在举一个例子. 假设当前时刻为 t. 给定常数 $H < S(t)$. 定义以下 knock-out 期权 $c^{d/o}(S,t,T,E,H)$ (称为 down-and-out call): 如果在 $[t,T]$ 上, $S(t)$ 从未到达 H, 那么在 T 时,

$$c^{d/o}(S,T,T,E,H) = \max(S(T) - E, 0).$$

如果 $c^{d/o}$ 在 $[t,T]$ 上 S 一旦达到 H, 那么 $c^{d/o}$ 即刻作废 (假定 rebate 为 0). 这个期权称为欧式 knock-out 看涨期权. 现在定义欧式 knock-in 看涨期权 $c^{d/i}(S,t,T,E,H)$: 如果在 $[t,T]$ 上, $S(t)$ 从未到达 H, 那么此期权的 payoff 为 0. 如果在 $\tau \in [t,T]$ 时, S 首次达到 H, 那么 $c^{d/i}$ 即刻变成欧式看涨期权 $c(S,\tau,T,E)$. 易证:

$$c^{d/o}(S,t,T,E,H) + c^{d/i}(S,t,T,E,H) = c(S,t,T,E).$$

类似地, 我们可以定义欧式 up-and-out 和 up-and-in 看涨期权, 欧式 down-and-out 和 down-and-in 看跌期权以及欧式 up-and-out 和 up-and-in 看跌期权. 这些期权都有与上式类似的关系. 因而有时我们将以上的关系式简写为

$$\text{knock-out} + \text{knock-in} = \text{vanilla},$$

其中 vanilla 是指以前讲过的期权 c, $\mathbb{C}$, p 或 $\mathbb{P}$.

我们以下对 Barrier 期权做进一步说明. 对于一个 barrier 期权, 有可能存在两个上述的边界函数 H. 例如: 假设当前时刻为 t, 给定两个函数 H_1 和 H_2, 使得 $H_1(\lambda) > H_2(\lambda) > 0$ ($\lambda \in [t,T]$), 且 $H_2(t) < S(t) < H_1(t)$. 记: $\tau_i \in [t,T]$ 分别为 S 首次达到 H_i 的时刻 ($i = 1,2$), 即: $\tau_i > t$ 首次使得 $H_i(\tau_i) = S(\tau_i)$ ($i = 1,2$). 那么我们可以定义一个 Barrier 期权如下: 当 $\tau := \min(\tau_1,\tau_2) \le T$ 时, 这个期权作废, 并且期权的持有人获得一定数额的 rebate. 如果在 $[t,T]$ 上, S 既没有达到 H_1 也没有到达 H_2, 那么该期权的持有者在 T 时, 获得事先约定的方式的 Terminal Payoff. 这种期权属于欧式 Double Barrier 期权. 如: double barrier out call, 记为 $c^{db/o}(S,t,E,T,H_2,H_1)$; double barrier out put, 记为 $p^{db/o}(S,t,E,T,H_2,H_1)$. 类似地, 我们也可以定义 double barrier in call

和 double barrier in put 使得 knock-in 和 knock-out 之和等于 vanilla. Double barrier 期权还有很多种, 在这里就不详述了.

从上述对 Barrier 期权的解释可以看出, 这类期权实际上包括的范围很广. 例如: 对于 Double Barrier 期权来说, 我们还可以定义出其它类似的期权, 如: rebate 只在股价 S 先到达 H_1 然后到达 H_2 时才能实现等. 这类期权都统称为 Barrier 期权.

除非特别声明, 以下讨论在 Black-Scholes 框架下进行.

作业题 2. 假设 S 无股息派发, $v(S,t)$ 满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}+rS\frac{\partial v}{\partial S}-rv=0.$$

给定正常数 H, 求常数 α 使得

$$w(S,t):=\left(\frac{S}{H}\right)^\alpha v\left(\frac{H^2}{S},t\right)$$

也满足 Black-Scholes 方程. 要求写出详细过程.

□

定义 2.2. *一衍生证券的定价有解析表达式, 是指其可以由初等函数和 $N(x)$ 表示.*

□

作业题 3. 假设 S 无股息派发, H 为给定正常数. 当前时刻 $t=0$, $S(0)>H$. 考虑一个 $T>0$ 时到期的欧式期权 $w(S,t,E,T,H)$. 如果在时间区间 $[0,T]$ 上, 股价 S 不触及 H, 那么 $w(S,T,E,T,H)=\max(S_T-E,0)$, 否则 v 的持有者获得 0 元. 求 $w(S,0,E,T,H)$ 的解析表达式. 提示: 利用上题符号和结果, 并且计算

$$\begin{aligned}v(S,0)=&\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-0.5y^2}\max(S_T-E,0)dy\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{+\infty}e^{-0.5y^2}\left(\exp\left(-0.5\sigma^2T+\sigma y\sqrt{T}\right)S_0-\exp(-rT)E\right)dy\end{aligned}$$

其中

$$S_T=\exp\left(rT-0.5\sigma^2T+\sigma\sqrt{T}y\right),$$

$$d_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{\max(E,H)}+rT-0.5\sigma^2T\right).$$

□

上题中的 $w(S,t,E,T,H)$ 称为 down-and-out call. 记为 $c^{d/o}(S,t,E,T,H)$. 我们同样可以定义

- up-and-out call $c^{u/o}(S,t,E,T,H)$,
- down-and-out put $p^{d/o}(S,t,E,T,H)$,
- up-and-out put $p^{u/o}(S,t,E,T,H)$.

命题 2.3.

$$\lambda c^{d/o}(S,t,E,T,H,r,q)=c^{d/o}(\lambda S,t,\lambda E,T,\lambda H,r,q),\quad \lambda\geq 0.$$

□

命题 2.4.

$$c^{d/i}(S,t,E,T,H,r,q) = p^{u/i}\left(E,t,S,T,\frac{SE}{H},q,r\right), \tag{2.2.1}$$

$$c^{u/i}(S,t,E,T,H,r,q) = p^{d/i}\left(E,t,S,T,\frac{SE}{H},q,r\right),$$

$$c^{d/o}(S,t,E,T,H,r,q) = p^{u/o}\left(E,t,S,T,\frac{SE}{H},q,r\right)$$

和

$$c^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q) = p^{d/o}\left(E,t,S,T,\frac{SE}{H},q,r\right).$$

□

作业题 4. 证明公式(2.2.1).

□

以下用概率论方法定价障碍期权.

2.2.1 Down-and-in Digital 期权

给定常数 $H>0$, 假设当前股价 $S(t)>H$. 这种期权分为两种

(1) 在 $(t,T]$ 中, 如果股价 S 一旦达到 H, 那么期权持有者立即在该时刻获得 \$1 元. 然后该期权作废; 如果股价 S 在 $(t,T]$ 中从未达到 H, 那么期权持有者获得 \$0 元. 此类期权称为 pay-at-hit.

(2) 在 $(t,T]$ 中, 如果股价 S 达到 H, 那么期权持有者在 T 时获得 \$1 元; 如果股价 S 在 $(t,T]$ 中从未达到 H, 那么期权持有者获得 \$0 元. 此类期权称为 pay-at-expiry.

我们讨论第二种情形. 在此我建议同学们把注意力集中在我们用的方法上. 如果时间允许, 那么我们会在今后讨论第一种情形.

记: 该期权为 $V(S,t,H,T,r,q)$. 它满足

$$V(S,T,H,T,r,q) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } S \text{ 在 } (t,T] \text{ 中达到过 } H; \\ 0 & \text{如果 } S \text{ 在 } (t,T] \text{ 中没有达到 } H. \end{cases}$$

我们将 $V(S,t,H,T,r,q)$ 表成 $e^{-r(T-t)}(W_1+W_2)$ 的形式, 其中 W_1 是所有 t 到 T 路径满足 $S(T)\le H$ 的期望, 由于此类路径的 payoff 为 1, 所以 W_1 是所有满足 $S(T)\le H$ 的 payoff 部分. 而 W_2 也是一个期望, 它所对应的路径满足 (a)$S(T)>H$; (b)S 在 $(t,T]$ 中曾经达到过 H 的期望. 所以 W_2 对 payoff 部分有贡献. 现在我们来计算 W_1. 由于 S 满足几何高斯分布，所以 (以下等式皆在分部意义下成立)

$$S(T) = S(t)\exp\left(\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma B^Q(T-t)\right). \tag{2.2.2}$$

上式等价于

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{S(T)}{S(t)} = \frac{1}{\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-t}+\frac{B^Q(T-t)}{\sqrt{T-t}}. \tag{2.2.3}$$

令：

$$x(T)=\frac{\ln\frac{S(T)}{S(t)}}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad \mu=\frac{1}{\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2}). \tag{2.2.4}$$

则 x 可以表为

$$x(T)=\mu\sqrt{T-t}+y, \tag{2.2.5}$$

其中 y 是满足标准正态分布的随机变量. 令:

$$k=\frac{\ln\frac{H}{S(t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{2.2.6}$$

于是由 W_1 的定义知：

$$\begin{aligned}
W_1=&\mathbb{E}^Q\left(1;S(T)\le H\right)\\
=&\mathbb{E}^P\left(\frac{dQ}{dP};S(T)\le H\right)\\
&\quad(\text{ 其中: }\frac{dQ}{dP}=e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}\text{ 为 Radon-Nikodym 导数, 下同})\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k}e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k}e^{-\frac{1}{2}\left(x-\mu\sqrt{T-t}\right)^2}dx\\
=&N(k-\mu\sqrt{T-t})\\
=&N(-d_2)\quad\text{其中: }d_2=\frac{\ln\frac{S(t)}{H}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
\end{aligned}$$

由 W_2 的定义和反射原理知

$$\begin{aligned}
W_2=&\mathbb{E}^Q\left(1;S(T)\ge H\text{ 并且 }S\text{ 在 }(t,T]\text{ 中曾经到达 }H\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{(2k-x)^2}{2}}dx\\
=&\frac{e^{2\mu k\sqrt{T-t}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{k}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(2k-x+\mu\sqrt{T-t}\right)^2}dx\\
=&\frac{e^{2\mu k\sqrt{T-t}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k+\mu\sqrt{T-t}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\quad\text{其中: }z=2k-x+\mu\sqrt{T-t}\\
=&e^{2\mu k\sqrt{T-t}}N(k+\mu\sqrt{T-t})\\
=&\left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{2r-2q-\sigma^2}{\sigma^2}}N(-d_3)\quad\text{其中: }d_3=\frac{\ln\frac{S(t)}{H}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
\end{aligned}$$

因此

$$V(S,t,E,T,r,q)=e^{-r(T-t)}N(-d_2)+e^{-r(T-t)}\left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{2r-2q-\sigma^2}{\sigma^2}}N(-d_3).$$

2.2.2 Up-and-out call

此期权记为: $c^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q)$. 这个期权的定价只有在 $S(t)<H$ 时才有意义, 否则该期权作废. 下面分两种情形来计算 $c^{u/o}$: (1)$E<H$; (2)$E\geq H$. 现在假定 $E<H$. 与上一段类似我们有式 (2.2.2), (2.2.4), (2.2.5) 和 (2.2.6). 令:

$$h=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{E}{S(t)}. \tag{2.2.7}$$

于是

$$c^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q)=e^{-r(T-t)}(W_1-W_2),$$

其中 W_1 表示那些满足 $S(T)\leq H$ 的路径对 payoff: $\max(S(T)-E,0)$ 的贡献; W_2 表示那些在 $(t,T]$ 内曾经到达 H 并且满足 $S(T)\leq H$ 的 S 对 payoff: $\max(S(T)-E,0)$ 的贡献. 于是

$$\begin{aligned}
W_1=&\mathbb{E}^Q\left(\max(S(T)-E,0);0\leq S(T)\leq H\right)\\
=&\mathbb{E}^Q\left(S(T)-E;E\leq S(T)\leq H\right)\\
=&\mathbb{E}^P\left((S(T)-E)\frac{dQ}{dP};E\leq S(T)\leq H\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^k(S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}-E)e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
=&e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(N(d_1)-N(d_3)\right)-E(N(d_2)-N(d_4)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_h^k(S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}-E)e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{(2k-x)^2}{2}}dx\\
=&e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}}\left(N(d_6)-N(d_8)\right)\\
&-E\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}}e^{(r-q)(T-t)}\left(N(d_5)-N(d_7)\right).
\end{aligned}$$

在以上两个公式中我们采用如下记号:

$$\begin{aligned}
d_1&=(\mu+\sigma)\sqrt{T-t}-h, & d_2&=\mu\sqrt{T-t}-h,\\
d_3&=(\mu+\sigma)\sqrt{T-t}-k, & d_4&=\mu\sqrt{T-t}-k,\\
d_5&=-\mu\sqrt{T-t}-k, & d_6&=-(\mu+\sigma)\sqrt{T-t}-k,\\
d_7&=-\mu\sqrt{T-t}-2k+h, & d_8&=-(\mu+\sigma)\sqrt{T-t}-2k+h.
\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
&c^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q)\\
&=e^{-q(T-t)}S(t)\left[N(d_1)-N(d_3)-\left(\frac{H}{S(t)}\right)^{2\frac{(r-q)}{\sigma^2}+1}\left(N(d_6)-N(d_8)\right)\right]\\
&\quad-Ee^{-r(T-t)}\left[N(d_2)-N(d_4)-\left(\frac{H}{S(t)}\right)^{2\frac{(r-q)}{\sigma^2}-1}\left(N(d_5)-N(d_7)\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

以下讨论 $E \geq H$ 的情形. 由于我们在本段开始时已经假设: $S(t) < H$, 所以 $E \geq H > S(t)$. 在这种情形下, 如果 $S(T)$ 要对 payoff: $\max(S(T)-E,0)$ 做贡献, S 在 $[t,T]$ 必须经过 H. 然而 $c^{u/o}$ 在 $S=H$ 时作废. 所以在这种情形下, $c^{u/o}(t)=0$.

2.2.3 Up-and-out put

记: $p^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q)$ 为 Up-and-out 看跌期权. 有了以上的基础, 为了简洁起见, 这里不多阐述, 只给出计算过程. 显然我们必须假定 $S(t) < H$, 否则该期权不存在. 当 $E \geq H$ 时,

$$p^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q) = e^{-r(T-t)}(W_1 - W_2),$$

其中

$$\begin{aligned} W_1 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} (E - S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}) e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ =& E(1-N(d_4)) - e^{(r-q)(T-t)}S(t)(1-N(d_3)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} (E - S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}) e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}} e^{-\frac{(2k-x)^2}{2}} dx \\ =& E\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} N(d_5) - e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} N(d_6). \end{aligned}$$

所以, 当 $E \geq H$ 时,

$$\begin{aligned} p^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q) =& e^{-r(T-t)}(W_1 - W_2) \\ =& e^{-r(T-t)}E\left(1 - N(d_4) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} N(d_5)\right) \\ & - e^{-q(T-t)}S(t)\left(1 - N(d_3) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} N(d_6)\right). \end{aligned}$$

当 $E < H$ 时,

$$p^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q) = e^{-r(T-t)}(W_3 - W_4),$$

其中

$$\begin{aligned} W_3 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} (E - S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}) e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ =& E(1-N(d_2)) - e^{(r-q)(T-t)}S(t)(1-N(d_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_4 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} (E - S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}}) e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}} e^{-\frac{(2k-x)^2}{2}} dx \\ =& E\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} N(d_7) - e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} N(d_8). \end{aligned}$$

所以当 $E < H$ 时,

$$\begin{aligned}p^{u/o}(S,t,E,T,H,r,q) =& e^{-r(T-t)}(W_3 - W_4)\\ =& e^{-r(T-t)}\, E\left(1 - N(d_2) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} N(d_7)\right)\\ &- e^{-q(T-t)}S(t)\left(1 - N(d_1) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} N(d_8)\right).\end{aligned}$$

2.2.4 Down-and-out call

由于这个期权的计算方法与前面的类似, 在此我只列出数学表达式. 以下假设 $E \leq H$.

$$c^{d/o}(S,t,E,T,H,r,q) = e^{-r(T-t)}(W_1 - W_2),$$

其中

$$\begin{aligned}W_1 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{+\infty}(S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}} - E)e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ =& e^{(r-q)(T-t)}S(t)N(d_3) - EN(d_4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_k^{+\infty}(S(t)e^{\sigma x\sqrt{T-t}} - E)e^{-\frac{1}{2}\mu^2(T-t)+\mu x\sqrt{T-t}}e^{-\frac{(2k-x)^2}{2}}dx\\ =& e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} N(-d_6) - E\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} N(-d_5)\\ =& e^{(r-q)(T-t)}S(t)\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} (1 - N(d_6)) - E\left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} (1 - N(d_5))\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}c^{d/o}(S,t,E,T,H,r,q) =& e^{-q(T-t)}S(t)\left(N(d_3) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2(\mu+\sigma)}{\sigma}} (1 - N(d_6))\right)\\ &- e^{-r(T-t)}E\left(N(d_4) - \left(\frac{H}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma}} (1 - N(d_5))\right).\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

当 $E > H$ 时, down-and-out call 的定价留作思考题.

作业题 5. 证明: 式 (2.2.9) 可写成

$$\begin{aligned}& c^{d/o}(S,t,E,T,H)\\ =& c\,(S,t,H,T,r,q) + (H-E)c^d\,(S,t,H,T,r,q)\\ &- \left(\frac{S}{H}\right)^{1-\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}\left(c\left(\frac{H^2}{S},t,H,T,r,q\right) + (H-E)c^d\left(\frac{H^2}{S},t,H,T,r,q\right)\right).\end{aligned}$$

并且给出上式的金融意义. 在以上公式中，$c^d((S,t,H,T,r,q)$ 表示一欧式的 digital, 它的 payoff 只跟 $S(T)$ 有关: 当 $S(T) \geq H$ 时, payoff 为 1; 否则为 0.

□

2.3 Breeden-Litzenberger 公式

假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 无风险利率 r 为常数. 给定市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$, 假设

$$\widetilde{c}(S,0,E,T)=e^{-rT}\mathbb{E}^{Q}[\max(S_T-E,0)|\mathcal{F}_0],$$

在测度 Q 下, 记 $\widetilde{g}^{Q}(S_T,T;S_0,0)$ 为转移概率密:

$$(S_0,0)\longrightarrow(S_T,T).$$

于是

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(S,0,E,T)=&e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(S_T-E,0)\widetilde{g}^{Q}(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&e^{-rT}\int_{E}^{+\infty}(S_T-E)\widetilde{g}^{Q}(S_T,T;S_0,0)dS_T.\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{c}}{\partial E}=&-e^{-rT}\int_{E}^{+\infty}\widetilde{g}^{Q}(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&-e^{-rT}\widetilde{\mathrm{Prob}}^{Q}(S_T>E)\end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}=e^{-rT}\widetilde{g}^{Q}(E,T;S_0,0).$$

命题 2.5 (Breeden-Litzenberger (1978))**.** *对任意 $E>0$, 有*

$$\widetilde{g}^{Q}(E,T;S_0,0)=e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T).$$

□

由 Put-call parity 知

推论 2.6. *对任意 $E>0$, 有*

$$\widetilde{g}^{Q}(E,T;S_0,0)=e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{p}}{\partial E^2}(S,0,E,T).$$

□

注释 2.7. (1) 以上风险中性转移概率密度 $\widetilde{g}^{Q}$ 不是 $(0,S_0)\longrightarrow(T,E)$ 市场转移概率密度. 正如以前给出的关于赔率的设定并不是某球队的实际胜率. (2) 命题2.5和推论2.6并不要求 S 服从几何布朗运动.

□

例子 2.8. 在实际市场中, 我们只能找到有限多个 E. 在 $t=0$ 时, 假设: 以下是市场全部期权数据,

$$\{\widetilde{c}(S,0,E_i,T),\widetilde{p}(S,0,E_j,T)\mid 1\le i\le N,1\le j\le M\}.$$

对于这些市场数据, 可做多项式拟合: 找多项式 $h_c(x)$ 和 $h_p(x)$, 使得

$$h_c(E)=\widetilde{c}(S,0,E,T)\quad 和\quad h_p(E)=\widetilde{p}(S,0,E,T).$$

多项式拟合不能保证 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 相等. 我们采用以下原则: 通常 OTM 的 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{p}$ 流动性较大, 其更能反映市场本质. 所以在 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 中取 OTM 的值作为 $\widetilde{g}^{Q}(E,T;S_0,0)$ 的真实值. 云云.

□

例子 2.9. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S,0,T)$, 其 terminal payoff $w(S,T,T)=1$. 则

$$\begin{aligned}w(S,0,T)=&e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^Q[1|\mathcal{F}_0]\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}1\cdot\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&e^{-rT}.\end{aligned}$$

这与无套利假定的结果一致. 这也从另一侧面证明了

$$\int_0^{+\infty}\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T=1.$$

□

例子 2.10. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S,0,T)$, 其 terminal payoff $w(S,T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 则

$$\begin{aligned}w(S,0,T)=&e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^Q[f(S_T)|\mathcal{F}_0]\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(S_T)\cdot\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(E)\cdot\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)dE\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(E)e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE\\=&\int_0^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

以上最后第二个积分由命题2.5得出, 给出了静态复制 $w(S,0,T)$ 的思路. 具体操作见下例.

□

例子 2.11. 回忆例子2.8最后一段的讨论. 在所有可交易的市场价

$$\{\widetilde{c}(S,0,E_i,T),\widetilde{p}(S,0,E_j,T)\mid 1\le i\le N,1\le j\le M\}$$

中, 假设: 存在一临界值 $\widetilde{E}$, 使得

$$E_1<E_2<\cdots\le\widetilde{E}<\cdots<E_N$$

并且满足

- 当 $E_i\ge\widetilde{E}$ 时, $\widetilde{c}(S,0,E_i,T)$ 的流动性较大;
- 当 $E_j<\widetilde{E}$ 时, $\widetilde{p}(S,0,E_j,T)$ 的流动性较大.

因而式(2.3.1)可改写为

$$\begin{aligned}w(S,0,T)=&\int_0^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE\\=&\underbrace{\int_0^{E_0}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{p}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE}_{\text{由由命题 2.5 和推论 2.6}}+\int_{E_0}^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE.\end{aligned}$$

注释 2.12. 转移概率密度 $\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)$ 的金融图像. 课上讲.

$\square$

回忆 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 分部积分上式可得 (细节略)

$$\begin{aligned} w(0,T) =& f(E)e^{-rT} + f'(E_0)(S_0 - E_0 e^{-rT}) \\ &+ \int_0^{E_0} f''(E)\widetilde{p}(S,0,E,T)dE + \int_{E_0}^{+\infty} f''(E)\widetilde{c}(S,0,E,T)dE. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

上式给出了静态复制 $w(t,T)$ 的方法.

$\square$

作业题 6. 由式(2.3.2), 给出静态复制 $w(t,T)$ 的操作细节.

$\square$

作业题 7. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 记 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为 S_T^2. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 给出 $w(0,T)$ 的解析表达式.
2. 假设 $\widetilde{c}(S,0,E,T)$ 的隐含波动率为 $\sqrt{E}$. 画出隐含波动率曲线的草图和 (隐含) 风险中性概率的草图. 给出静态对冲方法复制 $w(t,T)$.

$\square$

作业题 8. 假设 S 无股息派发, 无风险利率 $r=0$, $H<E<S(0)$. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 证明
$$c^{d/o}(S,0,E,T,H) = c(S,0,E,T) - \frac{S(0)}{H} c\left(\frac{H^2}{S_0}, 0, E, T\right)$$
2. 假设 $\widetilde{c}^{d/o}(S,0,E,T,H)$ 在市场上可以交易, 你能否利用 c 和/或 p 静态复制 $\widetilde{c}^{d/o}$? 说明理由. 提示:
$$\frac{S_T}{H}\max\left(\frac{H^2}{S_T} - E, 0\right) = \frac{E}{H}\max\left(\frac{H^2}{E} - S_T, 0\right).$$

$\square$

3 随机波动率简介

3.1 引言

为了方便起见, 除非特别声明, 假设 S 无股息派发. 回顾几何布朗运动定义

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB_t, \tag{3.1.1}$$

其中 μ 和 σ 都是常数, 且 $\sigma>0$. 先将这个假定扩展: σ 为一随机过程 σ_t. 则将上式推广为

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \tag{3.1.2}$$

将随机过程 σ_t 写成以下形式:

$$d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t, \tag{3.1.3}$$

其中 W_t 为一 (标准)布朗运动.

注释 3.1. 公式(3.1.2)和(3.1.3)中的布朗运动$B(t)$ 和 $W(t)$ 通常不是独立的. 定义

$$dB(t) \text{ 和 } dW(t) \text{ 的相关系数 } \rho := \frac{\mathbb{E}[dB(t)dW(t)] - \mathbb{E}[dB(t)]\mathbb{E}[dW(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[dB^2(t)]\mathbb{E}[dW^2(t)]}}. \tag{3.1.4}$$

由布朗运动的定义知:

$$\mathbb{E}[dB(t)] = \mathbb{E}[dW(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[dB^2(t)] = \mathbb{E}[dW^2(t)] = dt.$$

于是

$$\mathbb{E}[dB(t)dW(t)] = \rho dt.$$

从逻辑上, ρ 是时间 t 的函数. 但我们<u>假定ρ始终是常数</u>. 细节在课上提及, 参考文件 shreve246-247.pdf 将发给大家.

□

综上所述, 波动率模型满足

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t, \\ \rho dt = \mathbb{E}[dB_t dW_t]. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

假设 S 无股息派发. 记 $v(S,t,T)$ 为一欧式衍生证券. 利用 Δ 对冲可以得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0. \tag{3.1.6}$$

在假设(3.1.5)下, 从数学角度看, 以上方程与以前的<u>Black-Scholes</u> 方程起了本质改变: 方程(3.1.6)的系数 σ 关于 t 是随机的. 求解 $v(S,t,T)$ 就变为求解含随机系数的偏微分方程. 很难. 一个解决办法是, 将 v 看成 $v(S,t,T,\sigma)$.

以下以 $c(S,t,E,T,\sigma)$ 为例, 在假设(3.1.5)下给出 c 满足的偏微分方程. 由Itô引理

$$\begin{aligned} dc(S,t,E,T,\sigma) =& \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial S}dS + \frac{\partial c}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt \\ &+ \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}dt + \sigma bS\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial\sigma}dt. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

如果用以前的 Δ 对冲 $c - \Delta S$, 那么

$$dc(S,t,E,T,\sigma) - \Delta dS$$

仍是随机的. 引入另外一个可交易的 $c_1 = c(S,t,E_1,T_1,\sigma)$, $T_1 \geq T$. 构造投资组合

$$\begin{aligned} \Pi(t) :=& c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c_1 \\ =& c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c(S,t,E_1,T_1,\sigma). \end{aligned}$$

利用(3.1.7)得

$$
\begin{aligned}
d\Pi(t) = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\
&- \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\
&+ \left(\frac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta\right) dS + \left(\frac{\partial c}{\partial \sigma} - \Delta_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma}\right) d\sigma.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta = 0 \\
\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} = 0.
\end{cases}
\tag{3.1.8}
$$

消去 $d\Pi(t)$ 的随机项. 上式解得

$$
\begin{cases}
\Delta = \dfrac{\partial c}{\partial S} - \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} \dfrac{\partial c_1}{\partial S} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\
\Delta_1 = \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma}\ .
\end{cases}
\tag{3.1.9}
$$

取以上 Δ 和 Δ_1 后,

$$
\begin{aligned}
d\Pi(t) = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\
&- \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma}\right) dt.
\end{aligned}
$$

由无套利假定得 $d\Pi(t) = r\Pi(t)dt = r(c - \Delta S - \Delta_1 c_1)dt$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} - rc \\
&\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} - rc_1\right) + r\Delta S = 0.
\end{aligned}
$$

再由(3.1.9), 得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc\right) \Big/ \frac{\partial c}{\partial \sigma} \\
&= \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c_1}{\partial S} - rc_1\right) \Big/ \frac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\
&=: -\phi(S, \sigma, t).
\end{aligned}
$$

上式第一个等号左边含 (E, T) 不含 (E_1, T_1), 右边含 (E_1, T_1) 不含 (E, T). 所以该等号左右两边都与 (E, E_1, T, T_1) 无关. 于是

$$
\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc + \phi(S, \sigma, t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} = 0. \tag{3.1.10}
$$

上式是 c 满足的带随机波动率的 Black-Scholes 方程.

回忆公式(3.1.3), 记

$$\mu_c := \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S\frac{\partial c}{\partial S} + a(S,\sigma,t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial \sigma}\right)$$
$$\sigma_{c,S} := \frac{\sigma S}{c}\frac{\partial c}{\partial S}$$
$$\sigma_{c,\sigma} := \frac{b(S,\sigma,t)}{c}\frac{\partial c}{\partial \sigma}$$
$$\sigma_c := \sqrt{\sigma_{c,S}^2 + \sigma_{c,\sigma}^2 + 2\rho\sigma_{c,S}\sigma_c}.$$

定理 3.2.

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{c,S}}{\sigma_c}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) + \frac{\sigma_{c,\sigma}}{\sigma_c}\left(\frac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}\right). \tag{3.1.11}$$

□

作业题 9. 证明公式(3.1.11).

□

在公式(3.1.11)中,

$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c}$, $\frac{\mu - r}{\sigma}$ 和 $\frac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}$ 分别是 c, S 和 σ 的 Sharpe 比率.

回忆公式(3.1.3)

$$d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t.$$

在建立波动率模型时, 关键是通过实际市场对于 σ 的假设. 在实际应用中通常假设 $a(S,\sigma,t) = \alpha(m-\sigma)$ (均值反转). 课上讲. 当取 $b(S,\sigma,t)$ 为常数时上式可能会导致 $\sigma < 0$.

3.1.1 波动率模型的一些例子

记 m, α 和 β 为非负常数, W_t 为一 (标准)布朗运动. 随机过程 σ_t 可能的形式:

(1) 形式 1
$$d\sigma = \alpha(m-\sigma)dt + \beta dW_t. \tag{3.1.12}$$

(2) 形式 2
$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta dW_t. \tag{3.1.13}$$

(3) 形式 3
$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta\sigma^2 dW_t. \tag{3.1.14}$$

(4) 形式 4 (Heston (1993) 模型)
$$d(\sigma^2) = \alpha(m-\sigma^2)dt + \beta|\sigma| dW_t. \tag{3.1.15}$$

(5) 其他扩展形式.

注释 3.3. 公式(3.1.12)和(3.1.13)可能导致 $\sigma < 0$. 而在公式(3.1.14)和(3.1.15)中的 σ 总是非负. 以下重点讨论 Heston 模型(3.1.15).

□

Heston 模型(3.1.15)通常写为

$$d(V) = \alpha(m - V)dt + \beta\sqrt{V}dW_t, \tag{3.1.16}$$

其中 $V = \sigma^2$.

在文献中较常见的是 Heston 模型. 现将其综述如下.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d(V_t) = \alpha(m - V_t)dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t, \\ \sigma_t = \sqrt{V_t} \\ \rho dt = \mathbb{E}[dB(t)dW(t)], \\ \text{其中}\alpha, m, \beta\text{非负}. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

4 在金融工程中一种确定期权市场价格的方法

为了叙述简单起见, 我们假设无风险利率 r 为常数, S 是一个标的, 不一定保证其可以买卖. 记 $F(S,t,T)$ 为期货/远期合约的价格, $v_F(F,t,T)$ 为标的为 F 的欧式看涨衍生证券, 其 terminal payoff 为 $\max(F_T - E, 0)$.

我们需要给出 $v_F(F,t,T)$ 的市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 的估计.

我们采用以下思路/步骤.

1. 忽略 F 是否服从几何布朗运动.

2. 固定 σ 以外的变量, 直接定义映射

$$g(\sigma) := e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma)) - EN(d_2(\sigma)).$$

3. 由于 $g' > 0$，所以 g 是 1-1 的. 如果 g 的值域与市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 的值域相同, 那么对于给定市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$, 存在唯一的 $\widetilde{\sigma}$, 使得

$$\widetilde{v}_F(F,t,T) = e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\widetilde{\sigma})) - EN(d_2(\widetilde{\sigma})). \tag{4.0.1}$$

4. 式(4.0.1)中的 $\widetilde{\sigma}$ 称为 $v_F(F,t,T)$ 隐含波动率.

5. 假设

$$dF = G(F, \sigma_t)dB_t \tag{4.0.2}$$

和/或

$$d\sigma_t = K(F, \sigma_t)dW_t$$

找函数 $G(F,\sigma_t)$ 和/或 $K(F,\sigma_t)$. 给出 $v_F(F,t,T)$ 的定价公式, 记为 $w(F,t,T)$.

6. 让

$$w(F,t,T) = e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma)) - EN(d_2(\sigma))$$

解出 σ(如果解存在). 记这个解为 $\sigma_w(F,t,T)$.

7. 如果走运, 我们找到合适的的 $G(F,\sigma_t)$ 和/或 $K(F,\sigma_t)$, 使得

$$\sigma_w(F,t,T) \approx \widetilde{\sigma}(F,t,T), \quad \forall t,$$

那么我们就能很好的把握市场价 $\widetilde{v}_F(F,t,T)$ 了.

□

注释 4.1. 在选取公式(4.0.2)中的 $G(F,\sigma_t)$ 时, 有时不必确保 $F>0$. 例如: 有时可以选择 $dF=\sigma_t dB_t$. 此时, 只需要将原来的 F 改成以障碍为 $F=0$ 的障碍期权即可.

□

5 关于期中考试

1. 考试形式: 闭卷.
2. 考试时间: 2019 年 11 月 4 日 15:10-18:00.
3. 考试地点: 二教 311
4. 考试内容:
   (1) 课件 2019-10-21.pdf 课件附录 (第 22 页及之后) 中的所有题目. 要求用自己的方式详细推导, 不能照抄解答.
   (2) 附件 Jim.Gatheralbarrier.pdf 中第 51 页中所有公式详细的推导过程. 关于"详细的推导过程"的定义将在课上讲.
   (3) 某些希腊字母公式 (wilmottp229.pdf) 的详细推导.
5. 期中考试不设补考. 期中考试占总成绩的 25%. 缺席者按 0 分计.

从现在起, 我和助教不回答 Jim.Gatheralbarrier.pdf 和课件 2019-10-21.pdf 附录中的内容.

参考文献

[Jos08] Mark S. Joshi. The Concepts and Practice of Mathematical Finance (Mathematics, Finance and Risk). Cambridge University Press, second edition, 2008.