# 衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-10-21 (修改稿)

**要求**

阅读本课件. 完成所有作业题, 作业题 1,2,5,6,8,10,12,13,15 解答在 11 月 4 日课前提交.

名词: Black-Scholes 框架.

除非特别声明, 以下的讨论内容，都是在 Black-Scholes 框架下进行的, 并且利率 $r > 0$.

## 1 相关系数

### 1.1 复习

给定无股息派发股票 $S$. 假设其服从几何布朗运动

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t),$$

其中 $\mu$, $\sigma$ 为常数, $\sigma > 0$, $B(t)$ 为 (标准)布朗运动. 或将上式写为

$$d\ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB(t).$$

假设: $t \geq 0$. 易知, $\ln S(t) - \ln S(0)$ 是均值为 $(\mu - 0.5\sigma^2)t$, 方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布, 即

$$\ln S(t) - \ln S(0) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right).$$

**定义 1.1.** *称 $S(t)/S(0)$ 为对数正态分布.*

□

*作业题* 1. 由以前作业题结论

$$\mathbb{E}[S(t)|S(0) = s_0] = s_0 \exp(\mu t),$$

证明:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S(t)|S(0) = s_0) = s_0^2 e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

□

### 1.2 量纲问题

课上讲.

### 1.3 相关系数

给定两只无股息派发的股票 $S_1$ 和 $S_2$. 假设其服从几何布朗运动

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dB_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{1.3.1}$$

其中 $\mu_i$, $\sigma_i$ 为常数, $\sigma_i > 0$, $B_i(t)$ 为 (标准)布朗运动, $i = 1, 2$. 或将上式写为

$$d \ln S_i(t) = \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) dt + \sigma_i dB_i(t), \quad i = 1, 2.$$

假设当前时刻为 $t$. 此时 $B_i(t)$ 已知. 然而, 对任意 $u > t$, $B_i(u)$ 不确定. 但我们知道 $B_i(u) - B_i(t) \sim \mathcal{N}(0, u - t)$. 取 $u = t + dt > t$, 在 $t$ 时, $dB_i(t) = B_i(t + dt) - B_i(t)$ 也不确定. 计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[dB_1(t)dB_2(t)|\mathcal{F}_t] =& \mathbb{E}[x_t\sqrt{dt}y_t\sqrt{dt}|\mathcal{F}_t], \quad x_t, y_t \sim \mathcal{N}(0, 1)\\ =& \mathbb{E}[x_t y_t|\mathcal{F}_t]dt.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\rho_t :=& \frac{\mathbb{E}[dB_1(t)dB_2(t)|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[dB_1(t)|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}[dB_2(t)|\mathcal{F}_t]}{\sqrt{\mathbb{E}[dB_1^2(t)|\mathcal{F}_t]\mathbb{E}[dB_2^2(t)|\mathcal{F}_t]}}\\ =& \frac{\mathbb{E}[x_t y_t|\mathcal{F}_t]dt - 0}{\sqrt{\mathbb{E}[x_t^2]dt\mathbb{E}[y_t^2]dt}}\\ =& \mathbb{E}[x_t y_t|\mathcal{F}_t], \quad x_t, y_t \sim \mathcal{N}(0, 1).\end{aligned}$$

称上式中的 $\rho_t$ 为 $dB_1(t)$ 和 $dB_2(t)$ 的相关系数. 在本课程中, 我们采取以下假设

**假设 1.2.** *1. 相关系数 $\rho_t$ 与 $t$无关, 即 $\rho_t = \rho$ 为常数.*

*2. 随机变量 $(x_t, y_t)$ 是二维正态.*

□

易知: $\rho \in [-1, 1]$. 与 $(dB(t))^2 = dt$ 的理由类似, 我们有 $dB_1(t)dB_2(t) = \rho dt$.

*作业题* 2. 给定无股息派发股票 $S_1$ 和 $S_2$. 假设其服从几何布朗运动(1.3.1). 在 $t$ 时, $S_1(t) < S_2(t)$. 考虑一张没有到期日合约 $v$, 如果在 $t$ 以后的某个时刻 $\tau$, 首次有等式 $S_1(\tau) = S_2(\tau)$, 那么 $v$ 的持有者获得 1 元现金, 之后合约作废. 问: 在 $t$ 时, $v$ 等于多少?

□

## 2 希腊字母 (Greeks)

除了在 Wilmott 书上关于 Greeks 的讲述, 大家还可以去网上搜一下这方面资料, 例如:

http://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance) 也有一些在线期权定价计算器, 例如: http://www.soarcorp.com/black_scholes_calculator.jsp

要求大家阅读 Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance 书中 pp.183-200. 有些内容我在课上讲. 没有写在 ppt 上.

假设 $S$ 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 $q$. 记

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - q + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - q - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

**命题 2.1.**

$$e^{-q(T-t)} S N'(d_1) - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0.$$

*证明.* 直接计算

$$\begin{aligned}
& e^{-q(T-t)} S N'(d_1) - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \\
&= e^{-q(T-t)} S \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - E e^{-r(T-t)} \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-q(T-t)} S - E e^{-r(T-t)} \exp\left(\frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-q(T-t)} S - E e^{-r(T-t)} \exp\left(\ln \frac{S_t}{E} + (r-q)(T-t)\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

*作业题* 3 (此题解答不必提交). 在不参考以上证明前提下, 建议大家独立证明以上命题.

□

## 2.1 Delta (Δ)

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}.$$

**引理 2.2.**

$$\frac{\partial}{\partial S} c(S,t,E,T) = e^{-q(T-t)} N(d_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} p(S,t,E,T) = e^{-q(T-t)} (N(d_1) - 1).$$

*证明.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S} c(S,t,E,T) =& \frac{\partial}{\partial S} \left\{ e^{-q(T-t)} S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \right\} \\
=& e^{-q(T-t)} N(d_1) + e^{-q(T-t)} S N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} \\
& - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}.
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

由引理2.1 得证第一个等式. 引理中的第二个等式证明略去. □

*作业题* 4 (此题解答不必提交). 在不参考以上证明前提下, 建议大家独立证明以上命题.

□

我们以欧式看涨期权为例: 假设我们持有 1 份 $c(S,t,E,T)$, 为了对冲风险我们在市场上卖空 $e^{-q(T-t)}N(d_1)$ 股 $S$, 使得投资组合

$$\Pi(S,t) := c(S,t,E,T) - e^{-q(T-t)}N(d_1)S_t \tag{2.1.1}$$

在 $[t, t+\delta t]$ 上具有确定收益. 这种操作称为 Delta 对冲. 由于 $e^{-q(T-t)}N(d_1)$ 随时间 $t$ 变化而变化, 所以我们要不断调整 $S$ 的股数. 这个过程称为对公式(2.1.1)的 rehedging/rebalancing. 公式(2.1.1)中的 $\Pi$ 称为 delta-neutral position.

*注释* 2.3. 在数学上

$$\frac{\partial}{\partial S}\Pi(S,t) \neq 0.$$

然而在区间 $[t, t+\delta t)$ 内, 我们人为保持 $e^{-q(T-t)}N(d_1)$ 不变. 直到 $t+\delta t$ 时调整 $S$ 的股数. 所以, 在 $[t, t+\delta t)$ 内, 求上式的偏导数过程中, 保持 $e^{-q(T-t)}N(d_1)$ 不变. 相当于重新定义了偏导数: 将 $\Pi$ 看成 $\Pi(S,t,\Delta)$. 在这个意义下,

$$\frac{\partial}{\partial S}\Pi(S,t,\Delta) = \left(\frac{\partial}{\partial S}\Pi(S,t,\Delta)\right)_{t,\Delta} = 0.$$

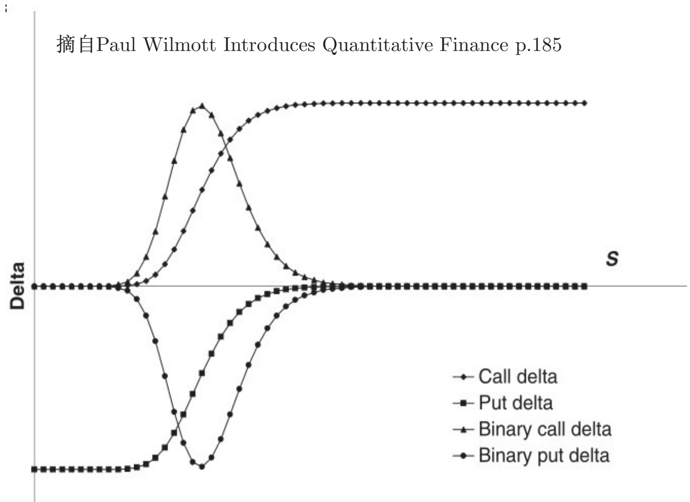
事实上

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-q(T-t)}N(d_1), \tag{2.1.2}$$

由(2.1.1), 有 $\Pi(S,t,\Delta) = c(S,t,E,T) - \Delta \cdot S_t$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}\Pi(S,t,\Delta) =& \frac{\partial}{\partial S}(c(S,t,E,T) - \Delta \cdot S_t)\\ =& \frac{\partial c}{\partial S} - \Delta\frac{\partial S}{\partial S}\\ =& \frac{\partial c}{\partial S} - \Delta\\ =& 0, \quad (\text{由}(2.1.2)).\end{aligned}$$

□



期权Delta示意图

图中 Call delta 和 Put delta 有一部分是凸函数, 有一部分是凹函数.

*作业题* 5. 分别求图中 Call delta 和 Put delta 凸函数和凹函数的连接点 (拐点) 和 Binary call/put delta 的极值.

□

**定义 2.4.** *一个市场称为是完备的, 如果其中的任意衍生产品可以通过买卖其标的资产和向银行存取款来复制 (理论意义下的复制).*

□

*注释* 2.5. 不是所有衍生产品都可以被用以上方式复制的. 例如: 标的为气温的衍生产品.

□

## 2.2 Gamma(Γ)

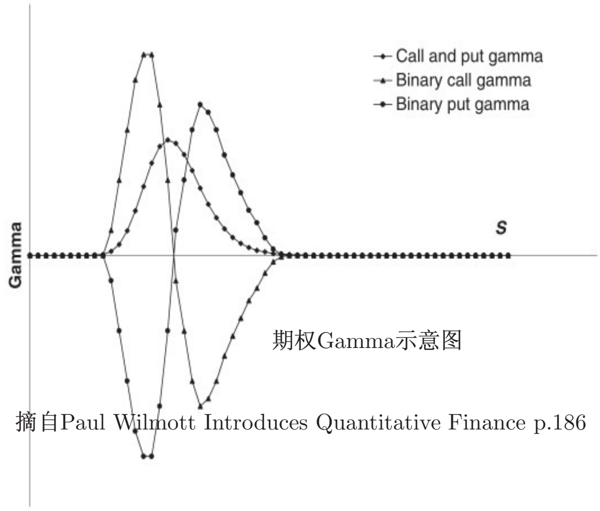
$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Gamma 是用来衡量 Delta 对冲关于其标的 $S$ 的敏感性.

**引理 2.6.**

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{e^{-q(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}.$$

□




期权Gamma示意图

摘自Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance p.186

*例子* 2.7 (期权的复制误差). 给定无股息派发股票 $S$. 假设欧式看涨期权 $c(S,0,E,T)$ 在市场上没有交易. 在 $t=0$ 时, 有人卖给你 1 张 $c$. 作为机构, 你买入这张合约, 并且在市场中通过买卖标的 $S$ 和向银行存贷款复制该期权. 复制操作的时间间隔 $\delta t$ 为 1 天. 由于 $\delta t$ 不等于 0, 这个复制有误差. 在 $t=0$ 时, 你跟你的客户签了一张合约. 作为买方你付给他 $c$ 元, 并且他承诺在 $T$ 时, 他付给你现金 $\max(S(T)-E,0)$. 于是你构造投资组合: 在 $t=0$ 时, 卖空

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}(S,0,E,T) = N(d_1)$$

份 $S(0)$. 由于

$$c(S,0,E,T) = SN(d_1) - e^{-rT}EN(d_2),$$

所以, 在买入 1 份 $c$ 和卖空 $N(d_1)$ 份 $S(0)$ 后, 再将 $e^{-rT}EN(d_2)$ 现金存入银行. 这个投资组合的价值

$$\Pi(0) = c(S,0,E,T) - SN(d_1) + e^{-rT}EN(d_2) = 0.$$

由于 $\delta t \neq 0$, 下一次调整仓位要在 $\delta t = 1$ 天以后, 为了估计 $\Pi$ 在 $t=\delta t^-$ 时的风险, 进行以下计算:

$$\Pi(\delta t^-) = c(S,\delta t,E,T) - S(\delta t)N(d_1) + e^{-rT}EN(d_2)e^{r\delta t}.$$

现计算我们仓位的盈亏:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P\&L}(\delta t^-)\\
&= \Pi(\delta t^-) - \Pi(0)\\
&= \delta c(S,0,E,T) - N(d_1)\delta S(0) + e^{-rT}EN(d_2)r\delta t\\
&= \frac{\partial c}{\partial t}(S,0,E,T)\delta t + \left(\underbrace{\frac{\partial c}{\partial S}(S,0,E,T) - N(d_1)}_{=0}\right)\delta S(0)\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,0,E,T)\delta S^2 + e^{-rT}EN(d_2)r\delta t
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\mathrm{P\&L}(\delta t^-)\\&=\frac{\partial c}{\partial t}(S,0,E,T)\delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,0,E,T)\delta S^2+e^{-rT}EN(d_2)r\delta t.\end{aligned}$$

利用 Black-Scholes 方程, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t}(S,0,E,T)\delta t\\&=-\frac{\sigma^2}{2}S^2(0)\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,0,E,T)\delta t+r\left(c(S,0,E,T)-S(0)\frac{\partial c}{\partial S}(S,0,E,T)\right)\delta t\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{P\&L}(\delta t^-)\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,0,E,T)(\delta S^2-\sigma^2S^2(0)\delta t)\\&=\frac{1}{2}\Gamma(S,0,E,T)(\delta S^2-\sigma^2S^2(0)\delta t).\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

在上式中, $\Gamma>0$. $\delta S^2$ 在 $\delta t$ 充分小时近似等于 $\sigma^2S^2(0)\delta t$. 以前我们都是在假设 $\delta t$ 充分小时忽略这种误差的. 然而在实际操作中, 我们要估计 $\delta t$ 为 1 天时的 $\mathrm{P\&L}(\delta t^-)$. 因此, 在 $t=0$ 时, 可以知道, 如果股价 $S(\delta t)$ 满足 $|\delta S|>\sigma S(0)\sqrt{\delta t}$ 时, 我们在 $\delta t^-$ 时是盈利的; 当 $|\delta S|=\sigma S(0)\sqrt{\delta t}$ 时, 我们不亏不赚; 当 $|\delta S|<\sigma S(0)\sqrt{\delta t}$ 时, 我们亏损.

□

式(2.2.1)表明: 如果 $\Gamma(S,0,E,T)=0$, 那么 $\mathrm{P\&L}(\delta t^-)=0$. 然而由引理2.6知: 上例中的 $\Gamma(S,0,E,T)\neq 0$. 请大家自己验证一下.

### 2.2.1 GAMMA 对冲

*例子* 2.8. 假设 $S$ 无股息派发, 欧式看涨期权 $c(S,0,E,T)$ 在市场上没有交易. 在 $t$ 时, 我们构造投资组合

$$\Pi(S,t,T,\alpha,\beta):=c(S,t,E,T)-\alpha_tS(t)-\beta_tc(S,t,\widetilde{E},T),$$

其中 $\widetilde{E}$ 是自选的一个敲定价, 使得 $c(S,t,\widetilde{E},T)$ 在市场上流动性较大 (成交量较大). 通常取 $\widetilde{E}$ 在 $S(t)$ 附近. 取

$$\frac{\partial\Pi}{\partial S}=0\quad 和\quad\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}=0$$

有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial S}c(S,t,E,T)-\alpha_t-\beta_t\dfrac{\partial}{\partial S}c(S,t,\widetilde{E},T)=0\\[2mm]\dfrac{\partial^2}{\partial S^2}c(S,t,E,T)-\beta_t\dfrac{\partial^2}{\partial S^2}c(S,t,\widetilde{E},T)=0.\end{cases}$$

将上式写成希腊字母的形式:

$$\begin{cases}\Delta(S,t,E,T)-\alpha_t-\beta_t\Delta(S,t,\widetilde{E},T)=0\\\Gamma(S,t,E,T)-\beta_t\Gamma(S,t,\widetilde{E},T)=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha_t = \Delta(S,t,E,T) - \dfrac{\Gamma(S,t,E,T)}{\Gamma(S,t,\widetilde{E},T)}\Delta(S,t,\widetilde{E},T) \\ \beta_t = \dfrac{\Gamma(S,t,E,T)}{\Gamma(S,t,\widetilde{E},T)}. \end{cases}$$

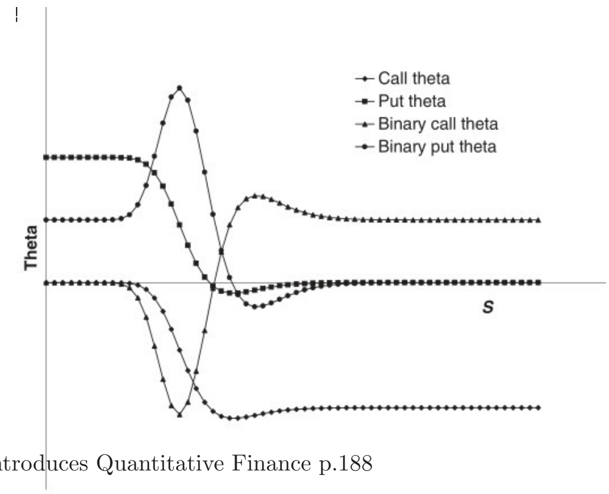
□

*作业题* 6. 假设 $S$ 无股息派发, 欧式看涨期权 $c(S,0,E,T)$ 在市场上没有交易. 并且假设 $c(S,t,\widetilde{E},T)$ 在市场上流动性较大 (成交量较大). 你如何通过买卖一定数量的 $S$ 和 $c(S,t,\widetilde{E},T)$ 对冲 $-c(S,t,E,T)$. 要求: (1) 写出具体的方法和理由. (2) 求 P&L$(\delta t^-)$.

□

## 2.3 Theta($\Theta$)

$$\Theta := \frac{\partial V}{\partial t}.$$




摘自Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance p.188

The thetas of a call, a put, a binary call and a binary put option.

**引理 2.9.**

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\sigma S e^{-q(T-t)} N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + qSN(d_1)e^{-q(T-t)} - rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\sigma S e^{-q(T-t)} N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}} - qSN(-d_1)e^{-q(T-t)} + rEe^{-r(T-t)}N(-d_2).$$

*证明.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} =& e^{-q(T-t)}SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t} \\ &+ qe^{-q(T-t)}SN(d_1) - re^{-r(T-t)}EN(d_2) \\ =& qe^{-q(T-t)}SN(d_1) - re^{-r(T-t)}EN(d_2) - \frac{\sigma e^{-q(T-t)}SN'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} \\ &+ \frac{\partial d_2}{\partial t}[\underbrace{e^{-q(T-t)}SN'(d_1) - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)}_{\text{由引理 2.1> 为 0}}].\end{aligned}$$

引理中的第二个等式证明略去. □

*作业题* 7 (此题解答不必提交). 在不参考以上证明前提下, 建议大家独立证明以上命题.

□

*作业题* 8. 假设: $q = 0$. 在以上引理中我们发现

$$\frac{\partial c}{\partial t} < 0.$$

用无套利假定证明上式.

□

## 2.4 Vega(zeta,kappa)

$$\text{Vega} := \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

**引理 2.10.**

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = e^{-q(T-t)}S\sqrt{T-t}N'(d_1).$$

*证明.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial \sigma} =& e^{-q(T-t)}SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ =& e^{-q(T-t)}\sqrt{T-t}SN'(d_1) \\ &+ \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}[\underbrace{e^{-q(T-t)}SN'(d_1) - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)}_{\text{由引理 2.1 为 0}}].\end{aligned}$$

引理中的第二个等式证明略去. □

*作业题* 9 (此题解答不必提交). 在不参考以上证明前提下, 建议大家独立证明以上命题.

□

## 2.5 隐含波动率的引入

由引理2.10, 知

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma}=\frac{\partial p}{\partial \sigma}=e^{-q(T-t)}S\sqrt{T-t}N'(d_1)>0.$$

所以, $c(S,t,E,T,\sigma)$ 关于 $\sigma$ 单调递增. 现固定 $(S,t,E,T)$, 定义

$$f(\sigma):=c(S,t,E,T,\sigma). \tag{2.5.1}$$

则 $f$ 是单调递增函数. 记 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$ 为 $c(S,t,E,T)$ 的市场价格. 现证明: $f^{-1}\widetilde{c}(S,t,E,T)$ ($(S,t,E,T)$ 固定) 存在. 只需证明 $f$ 的值域等于 $\widetilde{c}$ 的值域. 由无套利假定知: $\widetilde{c}$ 的值域为

$$[\max(e^{-q(T-t)}S_t-e^{-r(T-t)}E,0),e^{-q(T-t)}S_t].$$

而 $f$ 的上界为

$$\lim_{\sigma\to+\infty}c(S,t,E,T,\sigma)=\lim_{\sigma\to+\infty}\left\{e^{-q(T-t)}S_tN(d_1)-e^{-r(T-t)}EN(d_2)\right\},$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S_t}{E}+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}.$$

当 $\sigma\to+\infty$ 时, $d_1\to+\infty$, $d_2\to-\infty$. 由 $N(+\infty)=1$ 和 $N(-\infty)=0$ 知,

$$\lim_{\sigma\to+\infty}c(S,t,E,T,\sigma)=e^{-q(T-t)}S_t.$$

现在求 $f$ 的下界

$$\lim_{\sigma\to0^+}c(S,t,E,T,\sigma)=\lim_{\sigma\to0^+}\left\{e^{-q(T-t)}S_tN(d_1)-e^{-r(T-t)}EN(d_2)\right\}.$$

情形一: 当 $\ln\frac{S_t}{E}+(r-q)(T-t)>0$ 时,

$$\lim_{\sigma\to0^+}N(d_1)=N(+\infty)=1,\quad \lim_{\sigma\to0^+}N(d_2)=N(+\infty)=1.$$

于是

$$\lim_{\sigma\to0^+}c(S,t,E,T,\sigma)=e^{-q(T-t)}S_t-e^{-r(T-t)}E.$$

情形二: 当 $\ln\frac{S_t}{E}+(r-q)(T-t)=0$ 时, $e^{-q(T-t)}S_t-e^{-r(T-t)}E=0$. 而

$$\lim_{\sigma\to0^+}N(d_1)=N(0)=1/2,\quad \lim_{\sigma\to0^+}N(d_2)=N(0)=1/2.$$

则

$$\lim_{\sigma\to0^+}c(S,t,E,T,\sigma)=e^{-q(T-t)}S_t/2-e^{-r(T-t)}E/2=0.$$

情形三: 当 $\ln\frac{S_t}{E}+(r-q)(T-t)<0$ 时,

$$\lim_{\sigma\to0^+}N(d_1)=N(-\infty)=0,\quad \lim_{\sigma\to0^+}N(d_2)=N(-\infty)=0.$$

所以

$$\lim_{\sigma\to0^+}c(S,t,E,T,\sigma)=0.$$

综合以上三个情形的讨论知, $c(S,t,E,T,\sigma)$ 与 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$ 的上下界相同.

**命题 2.11.** *对于式*(2.5.1)*中的* $f$，*有* $f^{-1}\widetilde{c}(S,t,E,T)$ *存在.*

□

记 $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)=f^{-1}\widetilde{c}(S,t,E,T)$, 称 $\widetilde{\sigma}$ 为隐含波动率. 如果 Black-Scholes 的理论正确, 那么 $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)$ 恒等于常数 $\sigma$. 然而, 实证发现, $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)\neq\sigma$. 我们称 $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)$ 为隐含波动率. 由隐含波动率的定义知, 如果知道了隐含波动率 $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)$ 的规律, 那么

$$c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})=\widetilde{c}(S,t,E,T).$$

这样, 我们就可以给出跟市场一致的欧式看涨期权的定价. 遗憾的是, 隐含波动率规律通常不易得到. 所以, 严格地讲, 和市场完全符合的 $c$ 的定价很难得到.

**命题 2.12.** *对任意常数* $\lambda>0$,

$$\widetilde{\sigma}(\lambda S,t,\lambda E,T)=\widetilde{\sigma}(S,t,E,T).$$

*证明.* 记: $\widetilde{\sigma_1}=f^{-1}\widetilde{c}(S,t,E,T)$, $\widetilde{\sigma_2}=f^{-1}\widetilde{c}(\lambda S,t,\lambda E,T)$. 则

$$\begin{aligned}c(\lambda S,t,\lambda E,T,\widetilde{\sigma_2})=&\lambda c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma_1}) \quad \text{(欧式看涨期权市场价格满足齐次性)}\\ =&c(\lambda S,t,\lambda E,T,\widetilde{\sigma_1}) \quad \text{(由 Black-Scholes 的解的性质得到)}.\end{aligned}$$

由于 $c$ 关于 $\sigma$ 单调递增, 所以, $\widetilde{\sigma_1}=\widetilde{\sigma_2}$. □

**推论 2.13.** *隐含波动率* $\widetilde{\sigma}$ *是* $(E/S,t,T)$ *的函数.*

□

*注释* 2.14. 在 Black-Scholes 的框架下, 变量 $t$ 可以被 $T-t$ 替换. 隐含波动率 $\widetilde{\sigma}$ 也被看成为自变量为 $(E/S,T-t)$ 的函数. 所以, 我们将 $\widetilde{\sigma}$ 的自变量写成 $(E/S,t,T)$ 或 $(E/S,T-t)$.

**定义 2.15.** *称* $\widetilde{\sigma}(E/S,t,T)$ *或* $\widetilde{\sigma}(E/S,T-t)$ *为隐含波动率曲面.*

□

*作业题* 10. 对于欧式看跌期权, 我们也可以做类似以上的讨论, 并且得到对应于欧式看跌期权的隐含波动率. 那么这个波动率和欧式看涨期权的是否相等? 为什么?

□

**命题 2.16.** *欧式看涨期权* $c(S,t,E,T)$ *和看跌期权* $p(S,t,E,T)$ *的隐含波动率都存在且相等.*

□

*例子* 2.17. 假设: 隐含波动率 $\widetilde{\sigma}(S,t,E,T)$ 是一个小于股价波动率 $\sigma$ 的常数. 于是市场交易价 $c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})$ 小于 (Black-Scholes) 理论价 $c(S,t,E,T,\sigma)$. 于是

$$\widetilde{c}(S,t,E,T)=c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})<c(S,t,E,T,\sigma)=c(S,t,E,T),\quad \widetilde{\sigma}<\sigma. \tag{2.5.2}$$

由隐含波动率的定义知

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(S,t,E,T)=&c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})\\ =&e^{-q(T-t)}S_tN\left(\frac{\ln\frac{S_t}{E}+\left(r-q+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T-t}}\right)\\ &-e^{-r(T-t)}EN\left(\frac{\ln\frac{S_t}{E}+\left(r-q-\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

由于我们假设 $\widetilde{\sigma}$ 为常数, $\widetilde{c}(S,t,E,T)$ 满足以下的 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}S^2\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}-r\widetilde{c}=0. \tag{2.5.4}$$

上式可以用(2.5.3)直接代入验证. 记

$$\widetilde{\Delta}(t):=\frac{\partial}{\partial S}c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma}).$$

在 $t=0$ 时, 买入 1 份 $\widetilde{c}(S,0,E,T)$, 同时卖出 $\widetilde{\Delta}(0)$ 份 $S(0)$, 再将 $\beta(0)$ 元放入银行使得

$$\Pi(0)=\widetilde{c}(S,0,E,T)-\widetilde{\Delta}(0)S(0)+\beta(0)=0. \tag{2.5.5}$$

在 $t=0+dt>0$ 时, 我们有盈利

$$\begin{aligned}
d\Pi(0)=&\Pi(dt)-\Pi(0)\\
=&d\widetilde{c}(S,0,E,T)-\widetilde{\Delta}(0)dS(0)-\widetilde{\Delta}(0)S(dt)qdt+r\beta(0)dt\\
=&d\widetilde{c}(S,0,E,T)-\widetilde{\Delta}(0)dS(0)-\widetilde{\Delta}(0)S(0)qdt-\underbrace{\widetilde{\Delta}(0)dS(0)qdt}_{\text{忽略}}\\
&+r(\underbrace{\widetilde{\Delta}(0)S(0)-\widetilde{c}(S,0,E,T)}_{=\beta(0)})dt\\
=&\left(\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}\right)dt+\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}dS-\widetilde{\Delta}(0)S(0)qdt\\
&-\widetilde{\Delta}(0)dS(0)+r(\widetilde{\Delta}(0)S(0)-\widetilde{c}(S,0,E,T))dt.
\end{aligned}$$

在以下推导中, 我们始终假设隐含波动 $\widetilde{\sigma}$ 为常数，

$$\begin{aligned}
d\Pi(0)=&\left(\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}\right)dt+\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}dS-\widetilde{\Delta}(0)S(0)qdt\\
&-\widetilde{\Delta}(0)dS(0)+r\widetilde{\Delta}(0)S(0)dt-\left(\underbrace{\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}S^2\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}}_{=r\widetilde{c}}\right)dt \quad (\text{由 } (2.5.4))\\
=&\left(\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}\right)dt+\left(\underbrace{\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}-\widetilde{\Delta}(0)}_{\text{取为 0 得到 }\widetilde{\Delta}(0)}\right)dS-\widetilde{\Delta}(0)S(0)qdt\\
&+r\widetilde{\Delta}(0)S(0)dt-\left(\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial t}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}S^2\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial \widetilde{c}}{\partial S}\right)dt\\
=&\frac{1}{2}(\sigma^2-\widetilde{\sigma}^2)S^2\frac{\partial^2 \widetilde{c}}{\partial S^2}dt\\
=&\frac{1}{2}(\sigma^2-\widetilde{\sigma}^2)S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})dt.
\end{aligned}$$

由于我们假设 $\widetilde{\sigma}$ 为常数, 所以利用(2.5.3), 得

$$d\Pi(0)=\frac{1}{2}(\sigma^2-\widetilde{\sigma}^2)S^2\frac{e^{-q(T-t)}}{\widetilde{\sigma}S\sqrt{T-t}}N\left(\frac{\ln\frac{S_t}{E}+\left(r-q+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T-t}}\right)dt.$$

由假设 $\sigma > \widetilde{\sigma}$ (2.5.2), 知 $d\Pi(0) > 0$. 因此在 $t = 0$ 时, 我们知道上述的对冲将会给我们带来在 $t = dt$ 时确定的 (正) 收入. 然后该如何操作? 在 $t = dt$ 时, 将所有的头寸平仓, 然后重复上述操作直到 $T$. 这样我们的总收入 (在 $t = 0$ 计, 注意贴现) 为

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \widetilde{\sigma}^2)\int_0^T e^{-rt}S^2\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial S^2}dt, \quad (\sigma > \widetilde{\sigma}, \text{ 且 } \widetilde{\sigma} \text{ 为常数}).$$

通常将上式中的 $\partial^2\widetilde{c}/\partial S^2$ 记为 $\widetilde{\Gamma}_t$. 于是上式可表示为

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \widetilde{\sigma}^2)\int_0^T e^{-rt}S^2\widetilde{\Gamma}_t dt, \quad (\sigma > \widetilde{\sigma}, \text{ 且 } \widetilde{\sigma} \text{ 为常数}).$$

这里要注意的是, 以上的积分是与路径相关的. 结论: 只要 $\widetilde{\sigma}$ 为小于 $\sigma$ 的常数, 我们就可以在每个时间间隔对冲隐含波动率产生的风险, 而且每一步操作的风险也可控 ($d\Pi$ 非随机). 问题: 既然上式大于 0, 是否存在套利机会? 答: 存在. 但是这是模型依赖的. 在实际操作中可能会有很多变数, 如: $\widetilde{\sigma}$ 为常数是在 $t = 0$ 时的假定. 在 $t > 0$ 时不能保证这个假定成立. 而且股价也不一定满足几何布朗运动.

同理, 当 $\sigma < \widetilde{\sigma}$, 且 $\widetilde{\sigma}$ 为常数时, 我们可以做类似的讨论.

□

### 2.5.1 隐含波动率的求解

不妨假设股票 $S$ 无股息派发. 已知

$$c(S,t,E,T,\sigma) = S_tN(d_1(\sigma)) - e^{-r(T-t)}EN(d_2(\sigma)), \tag{2.5.6}$$

给定市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$. 存在隐含波动率 $\widetilde{\sigma}(E/S,t,T)$, 使得

$$\widetilde{c}(S,t,E,T) = c\left(S,t,E,T,\widetilde{\sigma}\left(\frac{E}{S},t,T\right)\right),$$

其中上式右边可将(2.5.6)中的 $\sigma$ 替代为 $\widetilde{\sigma}(E/S,t,T)$ 获得. 以下将后者简写为 $\widetilde{\sigma}$. 由引理2.10, 知

$$\mathrm{Vega}_c(x) = \frac{\partial c}{\partial x} = SN'(d_1(x))\sqrt{T-t} > 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x) =& \frac{\partial}{\partial x}\left(SN'(d_1(x))\sqrt{T-t}\right)\\
=& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\exp(-0.5d_1^2(x))\sqrt{T-t}\right)\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\exp(-0.5d_1^2(x))\sqrt{T-t}(-d_1(x))\frac{\partial d_1(x)}{\partial x}\\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S\exp(-0.5d_1^2(x))\sqrt{T-t}(-d_1(x))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln\frac{S}{E} + (r+0.5x^2)(T-t)}{x\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

在上式中,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+(r+0.5x^2)(T-t)}{x\sqrt{T-t}}\right)=&\frac{x(T-t)x\sqrt{T-t}-\left(\ln\frac{S}{E}+(r+0.5x^2)(T-t)\right)\sqrt{T-t}}{x^2(T-t)}\\=&\frac{x(T-t)x-\left(\ln\frac{S}{E}+(r+0.5x^2)(T-t)\right)}{x^2\sqrt{T-t}}\\=&-\frac{d_2(x)}{x}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x)=&\frac{1}{x}Sd_1(x)d_2(x)N'(d_1(x))\sqrt{T-t}\\=&\frac{\sqrt{T-t}}{x}SN'(d_1(x))\left(\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+r(T-t)}{x\sqrt{T-t}}\right)^2-\frac{x^2(T-t)}{4}\right).\end{aligned}\tag{2.5.7}$$

找 $x_0>0$, 使得

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x_0)=0,$$

知

$$x_0=\sqrt{\left|\frac{2}{T-t}\left(\ln\frac{S}{E}+r(T-t)\right)\right|}.\tag{2.5.8}$$

联立(2.5.8)和(2.5.7), 得

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x)=\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4x^2}SN'(d_1(x))(x_0^4-x^4).\tag{2.5.9}$$

用 Newton-Raphson 方法, 可以得到 $\widetilde{\sigma}$ 的近似解. 先定义 (迭代) 序列

$$x_{n+1}:=x_n-\frac{c(S,t,E,T,x_n)-c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})}{\mathrm{Vega}_c(x_n)},\quad n\geq 0.\tag{2.5.10}$$

取式(2.5.8)中的 $x_0$ 作为初值, 现证明该迭代序列收敛. 事实上将上式改写为

$$\begin{aligned}x_{n+1}-\widetilde{\sigma}=&x_n-\widetilde{\sigma}-\frac{c(S,t,E,T,x_n)-c(S,t,E,T,\widetilde{\sigma})}{\mathrm{Vega}_c(x_n)}\\=&x_n-\widetilde{\sigma}-\frac{\mathrm{Vega}_c(x_n^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_n)}(x_n-\widetilde{\sigma})\quad(\text{中值定理})\\=&\left(1-\frac{\mathrm{Vega}_c(x_n^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_n)}\right)(x_n-\widetilde{\sigma}).\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

其中, $x_n^*$ 介于 $x_n$ 和 $\widetilde{\sigma}$ 之间. 当 $\widetilde{\sigma}<x_0^*<x_0$ 时, 则由式(2.5.9), 得

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x)>0,\quad x\in[\widetilde{\sigma},x_0].$$

于是

$$0<\ 1-\frac{\mathrm{Vega}_c(x_0^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_0)}<1,\quad 0<x_1-\widetilde{\sigma}<x_0-\widetilde{\sigma}.$$

再由数学归纳法, 可证

$$0 < \ 1 - \frac{\mathrm{Vega}_c(x_n^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_n)} < 1, \quad 0 < x_{n+1} - \widetilde{\sigma} < x_n - \widetilde{\sigma}.$$

因此, 迭代(2.5.10)收敛.

当 $x_0 < x_0^* < \widetilde{\sigma}$ 时, 则由式(2.5.9), 得

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Vega}_c(x) < 0, \quad x \in [x_0, \widetilde{\sigma}].$$

于是

$$0 < \ 1 - \frac{\mathrm{Vega}_c(x_0^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_0)} < 1, \quad 0 < \widetilde{\sigma} - x_1 < \widetilde{\sigma} - x_0.$$

再由数学归纳法, 可证

$$0 < \ 1 - \frac{\mathrm{Vega}_c(x_n^*)}{\mathrm{Vega}_c(x_n)} < 1, \quad 0 < \widetilde{\sigma} - x_{n+1} < \widetilde{\sigma} - x_n.$$

因此, 迭代(2.5.10)收敛.

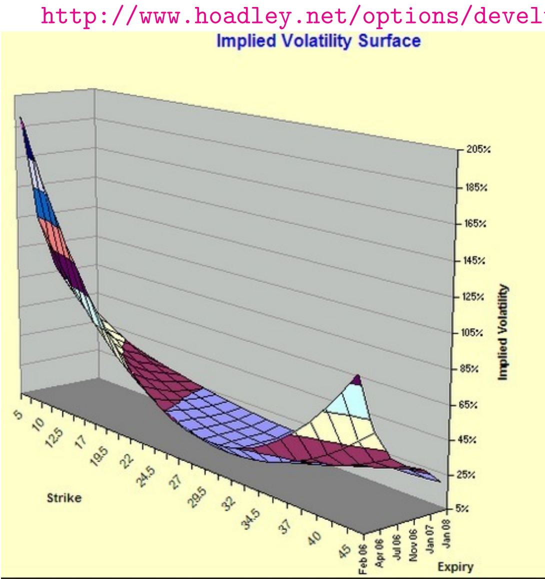
*作业题* 11. (此题不必提交) 阅读教材 Paul Wilmott Paul Wilmott introduces Quantitative Finance (第二版) 2007 pp. 191-194. 并且学习 p192 中的程序.

□

这部分上堂课讲过一些. 现在上几张图

隐含波动率曲面示意图, 摘自

http://www.hoadley.net/options/develtoolslatestversion.htm



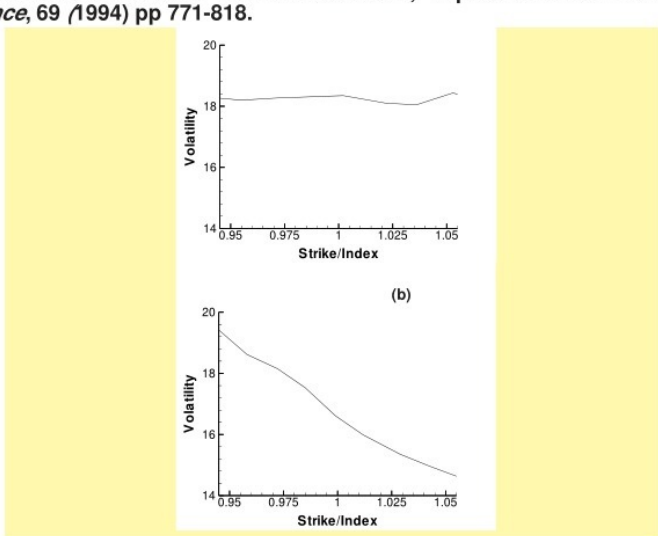

下图示意 1987 年股灾前后的隐含波动率.

摘自 E.Derman 文章 TRADING VOLATILITY AS AN ASSET CLASS

http://www.emanuelderman.com/media/gaim-trading_volatility.pdf

1987 年股灾前后的隐含波动率示意图.

**Representative implied volatility skews of S&P 500 options. (a) Pre-crash. (b) Post-crash. Data taken from M. Rubinstein, "Implied Binomial Trees" *J. of Finance*, 69 (1994) pp 771-818.**



实证表明: $\widetilde{\sigma} \neq \sigma$. 理由?

(1) 在实际市场中, 股价不一定服从几何布朗运动.

(2) 投机.

(3) 市场心理.

(4) Leverage effect.

以上 (2) 和 (3) 经常会使得隐含波动率曲线 $(E/S, \widetilde{\sigma})$ 产生微笑. 一个重要因素是 Put-call parity. 课上细讲. (4) 站在公司的角度 (会计公式):

$$\text{公司的总值} = \text{总股数} \times \text{每股股价} + \text{公司债务}.$$

写成公式形式

$$V(\text{公司的总值}) = M(\text{总股数}) \cdot S(\text{每股股价}) + D(\text{公司债务}).$$

如果股价 $S \to S + \delta S$, 为简单起见, 假设 $D$ 保持不变, 则

$$\begin{aligned}
\sigma_V^2 :=& \mathbb{E}\left(\frac{M\delta S}{MS+D}\right)^2 - \left(\mathbb{E}\left(\frac{M\delta S}{MS+D}\right)\right)^2 \\
=& \left(\frac{MS}{MS+D}\right)^2 \left\{\mathbb{E}\left(\frac{\delta S}{S}\right)^2 - \left(\mathbb{E}\left(\frac{\delta S}{S}\right)\right)^2\right\} \\
=& \left(\frac{MS}{MS+D}\right)^2 \sigma_S^2 = \left(\frac{MS}{V}\right)^2 \sigma_S^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_S = \mathbb{E}\left(\frac{\delta S}{S}\right)^2 - \left(\mathbb{E}\left(\frac{\delta S}{S}\right)\right)^2.$$

假设: $D = 20$ 亿元, $S = 15$ 元, $M = 5$ 亿股, $\sigma_V = 30\%$. 则

$$\begin{aligned}
\sigma_S =& \left(\frac{V}{MS}\right)\sigma_V \\
=& \left(\frac{5\times 15 + 20}{5 \times 15}\right) \times 30\% \\
=& 38\%
\end{aligned}$$

如果股价 $S \to 0.6S$, 而 $\sigma_V$ 和 $D$ 都不变. 则

$$\begin{aligned}
\sigma_S =& \left(\frac{5\times 15 \times 0.6 + 20}{5 \times 0.6 \times 15}\right) \times 30\% \\
=& 43\%
\end{aligned}$$

所以, 当 $S$ 变化时, 尽管 $\sigma_V$ 不变, $\sigma_S$ 会改变.

我们假定股价 $S$ 服从几何布朗运动. 等价于 $MS$ 服从几何布朗运动. 然而似乎 $V$ 也应服从几何布朗运动. 这样

$$\frac{dV}{V} = \mu_M dt + \sigma_V dB_t^V$$

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dB_t^S$$

是否能同时成立, 而且 $\sigma_V$ 和 $\sigma_S$ 皆为常数? 上面的例子说明: 答案是否定的: 当假定 $\sigma_V$ 为常数时, $\sigma_S$ 则不是. 在隐含波动率曲线中, 有两个点人们常提及: (1)At-the-money 的隐含波动率, 即: 当 $E/S = 1$ 时的隐含波动率. (2) At-the-money forward 的隐含波动率, 即: 当 $E/F = e^{-r(T-t)}E/S = 1$ 时的隐含波动率.

Volatility Smile, Reverse Skew (Volatility Smirk), Forward Skew

*作业题* 12. 在网上找 Volatility Smile, Reverse Skew (Volatility Smirk), Forward Skew 的图形. 提交你搜到的图 (每种提交 1-2 个即可, 不必过多), 参考网址: http://www.theoptionsguide.com/volatility-smile.aspx

□

*作业题* 13 (Brenner& Subrahmanyam (1994)). 当 $S(t) = Ee^{-(r-q)(T-t)}$(At-the-money forward) 时, 经常会有人提及以下近似

$$c(S, t, E, T) \approx 0.4S(t)e^{-q(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}.$$

为什么? 要求说明理由.

□

## 2.6 Rho($\rho$)

$$\rho := \frac{\partial V}{\partial r}.$$

**引理 2.18.**

$$\frac{\partial c}{\partial r} = e^{-r(T-t)}E(T-t)N(d_2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -e^{-r(T-t)}E(T-t)N(-d_2).$$

*证明.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial r} =& e^{-q(T-t)}SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} \\ &+ e^{-r(T-t)}(T-t)EN(d_2) \\ =& \frac{\partial d_2}{\partial r}\underbrace{[e^{-q(T-t)}SN'(d_1) - e^{-r(T-t)}EN'(d_2)]}_{\text{由引理 2.1 为 0}} \\ &+ e^{-r(T-t)}(T-t)EN(d_2).\end{aligned}$$

引理中的第二个等式证明略去. □

*作业题* 14 (此题解答不必提交). 在不参考以上证明前提下, 建议大家独立证明以上命题.

□

Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0$$

可以改写为

$$\Theta + \frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma + (r-q)S\Delta - rv = 0.$$

例如: 对于欧式看涨期权 $c$, 有

$$\Theta_c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma_c + (r-q)S\Delta_c - rc = 0,$$

于是, 形式上, $c$ 可以写成

$$c = \frac{1}{r}\left(\Theta_c + \frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma_c + (r-q)S\Delta_c\right).$$

同理,

$$p = \frac{1}{r}\left(\Theta_p + \frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma_p + (r-q)S\Delta_p\right).$$

*注释* 2.19. 在通过自融资复制期权 $v_t$ 时, 我们构造投资组合

$$\Pi(t) := -v_t + \alpha_t S + \beta_t = 0. \tag{2.6.1}$$

要求 $\alpha_t$ 在区间 $[t, t+dt)$ 保持不变. 而且在此区间内对冲掉 $v_t$ 的随机性, 即: 选取合适的 $\alpha_t$ 使得

$$d\Pi(t) = -dv_t + \alpha_t dS_t + r\beta_t dt. \tag{2.6.2}$$

为确定值, 再由无套利假定知: $d\Pi(t) = 0$. 然而对(2.6.1)直接求微分得

$$\begin{aligned}
d\Pi(t) =& -dv_t + d(\alpha_t S_t) + d\beta_t \\
=& -dv_t + \alpha_t dS_t + S_t d\alpha_t + d\alpha_t dS_t + d\beta_t \\
=& -dv_t + \alpha_t dS_t + (S_t + dS_t)d\alpha_t + d\beta_t \\
=& -dv_t + \alpha_t dS_t + S_{t+dt}d\alpha_t + d\beta_t.
\end{aligned}$$

要使得上式和公式(2.6.2)一致, 要求

$$r\beta_t dt = S_{t+dt}d\alpha_t + d\beta_t. \tag{2.6.3}$$

公式(2.6.3)左边: $r\beta_t dt$ 是在 $t$ 时向银行存贷款 $\beta_t$ 元, 在 $t+dt$ 时的利息收益/贷款. 公式(2.6.3)右边: $S_{t+dt}d\alpha_t$ 和 $d\beta_t$ 分别表示在 $t+\delta t$ 时, $-v$ 的复制者将手中在 $t$ 时买入的 $\alpha_t$ 股 $S$ 和银行的存贷款 $\beta_t$ 换成 $\alpha_{t+dt}$ 股 $S$ 和 $\beta_{t+dt}$, 以便在 $[t+dt, t+2dt]$ 复制 $-v$. 整个过程是自融资的. 结论: 我们在复制 $-v$ 操作中使用的 $d\Pi(t)$ 和数学上的微分 $d\Pi(t)$ 是一致的. 上述投资组合 $\Pi(t)$ 是自融资的充要条件为公式(2.6.3)成立.

□

## 2.7 Greeks 例题

*例子* 2.20. 假设 $S$ 无股息派发, 当前时刻为 0. 记 $v(S,t,T)$ 为在 $T(>t)$ 到期的欧式衍生证券. 其 Terminal payoff $v(S,T,T) = 0$. 在任一区间 $(t, t+\delta t) \subset [0,T]$ 内, $v$ 的持有者获得现金 $k(S,t)\delta t$, 其中 $\delta t$ 是小量, $k(S,t) > 0$, $\forall S, t$. 回答以下每个问题.

1. 用自融资方法, 证明:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+rS\frac{\partial}{\partial S}-r\right)v(S,t,T)+k(S,t)=0.$$

2. 用无套利假定证明: $v(S,t,T)>0,\ \forall t\in[0,T)$.

3. 进而证明:

$$\frac{\partial c}{\partial\sigma}=\frac{\partial p}{\partial\sigma}>0.$$

解答概要: 构造投资组合

$$\Pi(t)=v(S,t,T)-\Delta_t S_t+\underbrace{(\Delta_t S_t-v(S,t,T))}_{\text{现金存入银行}},$$

$$\Pi(t+\delta t)=v(S,t+\delta t,T)-\Delta_t S_{t+\delta t}+k(S,t)\delta t+(\Delta_t S_t-v(S,t,T))e^{r\delta t}.$$

于是

$$\begin{aligned}\delta\Pi(t)=&\delta v(S,t,T)-\Delta\delta S_t+k(S,t)\delta t+r(\Delta_t S_t-v(S,t,T))\delta t\\=&\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}+k(S,t)\right)\delta t+\left(\frac{\partial v}{\partial S}-\Delta_t\right)\delta S\\&+r(\Delta_t S_t-v(S,t,T))\delta t.\end{aligned}$$

令

$$\Delta_t=\frac{\partial v}{\partial S}$$

消去随机项, 第一部分得证. 假设 $v(S,t,T)\le 0$, 则 $v$ 的持有者在 $t$ 时买入时无需资金, 然而在任一区间 $(t,t+\delta t)\subset[0,T]$ 内, 他获得无风险的正收益. 而且在 $T$ 时无现金流. 第二部分得证. 对题中第一部分给出的方程两边求关于 $\sigma$ 偏导数, 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+rS\frac{\partial}{\partial S}-r\right)\frac{\partial c}{\partial\sigma}+\sigma S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=0.$$

由于 $c$ 是凸函数, 上式最后一项为正. 令

$$k(S,t)=\sigma S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

则由题中的第二部分知

$$\frac{\partial c}{\partial\sigma}>0.$$

再由平价公式完成第三部分证明.

□

*作业题* 15. Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance pp.201-202. 1-15 题.

□

# 3 Ornstein-Ulhenbeck 过程

Ornstein-Ulhenbeck 过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是以下方程的解

$$\begin{cases} dX_t = & -aX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = & b, \end{cases}$$

其中, $a$, $b$ 和 $\sigma$ 为给定常数, $a, \sigma > 0$.

解答: 令 $Y_t = X_t e^{at}$. 则

$$\begin{aligned} dY_t =& e^{at} dX_t + ae^{at} X_t dt + dX_t de^{at} \\ =& e^{at} dX_t + ae^{at} X_t dt + o(dt). \end{aligned}$$

忽略上式中的 $o(dt)$ 后, 有

$$\begin{aligned} Y_t - Y_0 &= \int_0^t e^{au} dX_u + \int_0^t ae^{au} X_u du \\ &= \int_0^t e^{au}(-aX_u du + \sigma dB_u) + \int_0^t ae^{au} X_u du \\ &= \int_0^t e^{au} \sigma dB_u. \end{aligned}$$

由 $Y_t$ 的定义, 有

$$X_t = be^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{au} \sigma dB_u.$$

而

$$\mathbb{E}(X_t) = be^{-at} + \sigma e^{-at} \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{au} \sigma dB_u\right) = be^{-at}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t) =& \mathbb{E}\Big\{ (X_t - \mathbb{E}(X_t))^2 \Big\} \\ =& \mathbb{E}\Big\{ \left( be^{-at} + e^{-at} \int_0^t e^{au} \sigma dB_u - be^{-at} \right)^2 \Big\} \\ =& \mathbb{E}\Big\{ \left( e^{-at} \int_0^t e^{au} \sigma dB_u \right)^2 \Big\} \\ =& \mathbb{E}\Big\{ e^{-2at} \left( \int_0^t e^{au} \sigma dB_u \right)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t) =& \mathbb{E}\Big\{ e^{-2at} \left( \int_0^t e^{2au} \sigma^2 du \right) \Big\} \\ =& e^{-2at} \sigma^2 \frac{e^{2at} - 1}{2a} \\ =& \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \end{aligned}$$

# 4 附录

## 4.1 例题

这是以前给学生的, 打字错误难免, 望见谅.

*例子* 4.1. 假设金融市场满足在推导Black-Scholes方程时所有假定. 给定股票 $S$ 无股息派发. 课上讲过, 欧式看涨期权 $c(S,t,E,T)$ 满足 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc=0. \tag{4.1.1}$$

但市场上 $c$ 的交易价格 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$ 与 $c(S,t,E,T)$ 不相等. 问: 你如何从市场上套利? 要求写出套利过程.

建议先独立解题, 实在解不出再翻页看答案.

*解答.* (例子4.1) 假设 $\widetilde{c}_t > c_t$. 其中, $\widetilde{c}_t$ 在市场上可以买卖, 而 $c_t$ 是 Black-Scholes 方程(4.1.1)的解:

$$c_t = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}EN(d_2).$$

注: 此时 $c_t$ 只是一个数, 并不是可以买卖的期权价格.

在 $t$ 时构造投资组合: 起始资金为 0. 在市场上卖空 1 份 $\widetilde{c}_t$, 买入 $\partial c/\partial S$ 股 $S$, 将现金

$$c_t - \frac{\partial c}{\partial S}S$$

存入银行. 于是

$$\Pi(t) := -\widetilde{c}_t + \frac{\partial c}{\partial S}S + \left(c_t - \frac{\partial c}{\partial S}S\right) = -\widetilde{c}_t + c_t < 0.$$

由于起始资金为 0, $\Pi(t) < 0$ 说明: 在构造这个投资组合后, 我们有额外现金"放到口袋中". 于是

$$\Pi(t+\delta t) = -\widetilde{c}_{t+\delta t} + \frac{\partial c}{\partial S}S_{t+\delta t} + \left(c_t - \frac{\partial c}{\partial S}S\right)e^{r\delta t}. \tag{4.1.2}$$

由课上讲的自融资推导 Black-Scholes 方程过程知, 上式最后一项

$$\left(c_t - \frac{\partial c}{\partial S}S\right)e^{r\delta t} = \left(c_{t+\delta t} - \frac{\partial c}{\partial S}S_{t+\delta t}\right),$$

事实上, 上式用Itô引理化简后就是 Black-Scholes 方程(4.1.1). 于是. $\Pi(t+\delta t) = -\widetilde{c}_{t+\delta t} + c_{t+\delta t}$. 再由归纳法从 $T$ 往回倒推, 可实现套利.

假设 $\widetilde{c}_t < c_t$. 请大家自行完成 (略).

□

*例子* 4.2. [1]本题要求在 Black-Scholes 框架下解答. 给定股票 $S$ 连续股息派发, 其股息派发率为常数 $q$, 股价 $S$ 服从几何布朗运动,

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - q)dt + \sigma dB_t,$$

其中, $\mu$ 和 $\sigma$ 为常数, 且 $\sigma > 0$. $B_t$ 是 (标准)布朗运动. 另外还已知

- $r - q = \sigma^2/2$,
- 当前时刻 $t = 0$, $S(0) \le E$, 其中 $E$ 为给定正常数.

令

$$M[t_1, t_2] := \max_{t_1 \le \tau \le t_2} S(\tau).$$

记 $v(S, t, E, T)$ 为一欧式期权, 其 Terminal payoff 为

$$v(S, T, E, T) = \max(M[0, T] - E, 0).$$

回答以下每个问题.

1. 证明:
$$v(S, 0, E, T) = 2c(S, 0, E, T),$$
其中等式右边的 $c$ 是欧式看涨期权.

2. 记: $w(S, t, E, T)$ 为一期权, 如果存在 $\tau \in [0, T]$, 使得 $S(\tau) \ge E$, 那么在 $T$ 时, $w$ 的持有人得到 1 元现金, 否则得到 0 元. 记: $c^d(S, t, E, T)$ 为一欧式期权, 其 Terminal payoff
$$c^d(S, T, E, T) = \begin{cases} 1 & S(T) \ge E \\ 0 & S(T) < E. \end{cases}$$
证明: $w(S, 0, E, T) \approx 2c^d(S, 0, E, T)$.

建议先独立解题, 实在解不出再翻页看答案.

[1]以前考题, 后来得知有学生在某著名投行面试时, 也被问及此题

*解答.* (例子4.2)

第一问解答.

在 $t=0$ 时, 我们买入 1 份 $v$, 为了复制 $v$ 我们卖空 2 份 $c(S,0,E,T)$. 如果在 $[0,T]$ 上, $S$ 始终没有超过 $E$, 那么我们卖空的 call 的 Terminal payoff 为 0. 这和 $v$ 的相同. 如果在 $\tau\in[0,T)$ 时, $S(\tau)=E$, 同时在 $\tau+d\tau$ 时, $S(\tau+d\tau)=M[0,\tau+d\tau]>E$, 那么我们先平仓, 再买 1 份 $v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)$, 同时卖空 2 份 $c(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)$. 此时, 我们的投资组合的价值为

$$\Pi(\tau+d\tau)=v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)-2c(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T). \quad (4.1.3)$$

注意到: $S(\tau)=E$ 和 $S(\tau+d\tau)=M[0,\tau+d\tau]>E$, 则

$$\begin{aligned}v(S,T,E,T)=&v(S,T,S(\tau),T) \quad (\text{由于 } E=S(\tau))\\ =&\max(M[0,T]-S(\tau),0)\\ =&M[0,T]-S(\tau) \quad (\text{由于 } S(\tau+d\tau)>S(\tau))\\ =&\underbrace{M[0,T]-S(\tau+d\tau)}_{\geq 0}+\underbrace{S(\tau+d\tau)-S(\tau)}_{>0}.\end{aligned}$$

所以

$$v(S,\tau+d\tau,E,T)=v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)+e^{-r(T-\tau-d\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau)).$$

现在计算一下在 $\tau+d\tau$ 时以上所有期权买卖的现金流: 期权 $v$ 方面收益为

$$\begin{aligned}&v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)-v(S,\tau+d\tau,E,T)\\ &=v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)-v(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)\\ &\qquad -e^{-r(T-\tau-d\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau))\\ &=-e^{-r(T-\tau-d\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau))\\ &=-e^{-r(T-\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau)) \quad (\text{忽略高阶小量}).\end{aligned}$$

这部分是在 $\tau+d\tau$ 时, 我们调整 $v$ 得到的现金. 欧式看涨期权方面的现金流为

$$\begin{aligned}&-2c(S,\tau+d\tau,S(\tau+d\tau),T)+2c(S,\tau+d\tau,S(\tau),T) \quad (\text{ 卖空 } c \text{ 所得})\\ &=-\frac{\partial c}{\partial E}\Big|_{E=S(\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau))\\ &=2e^{-r(T-\tau)}N\left(d_2\Big|_{E=S(\tau)}\right)(S(\tau+d\tau)-S(\tau))\\ &=2e^{-r(T-\tau)}N(0)(S(\tau+d\tau)-S(\tau)) \quad (\text{由于 } r-q=\sigma^2/2).\\ &=e^{-r(T-\tau)}(S(\tau+d\tau)-S(\tau)).\end{aligned}$$

这是在 $\tau+d\tau$ 时, 我们调整欧式看涨期权时得到的现金. 这样以上两部分的现金流的代数和为 0. 此时, 我们的投资组合 (4.1.3) 又回到了 $\tau$ 时的形式: 此时, 只需取 $E=S(\tau+d\tau)$. 重复这样的操作直到 $T$, 在复制 $v(S,0,E,T)$ 的整个过程中, 我们总共花费现金 $2c(S,0,E,T)$, 并且在每次调整仓位时无现金流. 得证.

第二问解答.

构造以下投资组合

$$\Pi(t) := \frac{1}{\Delta E}(2c(S,t,E,T) - 2c(S,t,E+\Delta E,T)).$$

易知: 当 $\Delta E$ 充分小时, $\Pi(t) \approx 2c^d(S,t,E,T)$. 其中 $c^d$ 是欧式 digital 看涨期权, 它是路径无关的, 并且它的 terminal payoff 为

$$c^d(S,T,E,T) = \begin{cases} 1 & S(T) \geq E \\ 0 & S(T) < E. \end{cases}$$

由第一问知: $\Pi(t)$ 是两个 $v$ 之差的 $1/\Delta E$ 倍. 它的 Terminal payoff 为

$$\frac{1}{\Delta E}\{\max(M[t,T] - E, 0) - \max(M[t,T] - E - \Delta E, 0)\}.$$

当 $\Delta E$ 充分小时, 上式与 $v$ 的 Terminal payoff 近似相同. 所以, 当 $r - q = \sigma^2/2$ 时, $v$ 可以看成 2 倍的 $c^d$.

□

*注释 4.3.* 本题假设 $S(0) \leq E$. 问: 如果 $S(0) > E$, 那么所证的结论为何?

□