衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-9-16

要求

阅读本课件. 完成所有作业题, 其中作业题 1-4 的解答在下次课前提交.

名词: 分股 (拆股) 和合股 (并股).
除非特别声明: 在本课程中我们假设: 不存在分股和并股的现象.

1 远期合约和期货

1.1 远期合约

- 一张远期合约 (forward contract) 是一张合约, 合约双方分别称为买方和卖方.
- 双方在当前 t 时, 约定在未来某个确定时刻 T, 买方以价格 E 买入一股股票 (或其它产品, 如: 农产品等) S (称为标的资产),
- 双方在签合约时候 E 和 T 已经确定, 要求在区间 $[t, T)$ 内, 双方无现金流.
- 以上 T 称为该合约的到期时刻 (到期日), E 称为该远期合约的价格.

注释 1.1. 从逻辑上讲, 以上最后一条提及"到期日"是一个区间, 而"到期时刻"是一个时间点. 约定: 此处提及的"到期日"是指合约最后一天的收盘时刻.

□

注释 1.2. 在远期合约中, T 和 E 在 t 时给定, 在本课程中, 我们约定: 标的资产 S 是可以买卖的 (可交易的). 远期合约的买卖双方在 (t, T) 无现金流. 但是不排除在 (t, T) 内其中任一方将合约转给第三方.

□

注释 1.3. 注意远期合约的价值和价格的区别. 远期合约在签约时 ($t = 0$ 时), 该合约价值为 0. 然而其价格 E 通常不为 t. 打个比方, 假设有人想让你将 10 万元现金从学校送到中关村某公司, 他给你 300 元现金作为回报. 如果你同意做此事, 那么你们就相当于签了一张合约. 这个合约的价值是 300 元, 而不是 10 万元.

□

以下用数学语言描述远期合约. 设当前时刻为 t. 给定未来某个时刻 T 和一标的资产 S. 现有 A 和 B 两人在 t 时签一张合约. 内容如下:

A 想在 T 时以价格 g (g 在 t 时已经确定) 买 1 份 S, 并且在 t 时 A 付给 B f 元现金 (如果 f 为负说明 B 付给 A).

注释 1.4. 在签约时 (t 时), $S(T)$ 不确定. 所以, $S(T)-g$ 也不确定. 例如: 在 T 时, 如果 S 的价格 $S(T)>g$, 那么 A 以价格 g 买 1 份 S 相当于 B 先给 A 现金 $S(T)-g$, 这样 A 就可以用 $S(T)=g+(S(T)-g)$ 买入 1 份 S 了.

易知: A 和 B 两人能否同意签下此合约, 取决于 g 和 f 选取. 即: 只有取 (g,f) 使得 A 和 B 双方都觉得"不吃亏", 合约才能签下. 此时的 (g,f) 被认为是合理的. 合理的意思是, 不存在无风险套利.

不妨假设: $\underline{S\text{ 无股息派发}}$.

情形一: 如果 $f>S(t)-ge^{-r(T-t)}$, 那么存在 $\epsilon>0$, 使得

$$f-\epsilon>S(t)-ge^{-r(T-t)}.$$

我们可以找到 A, 让他付给我们 $f-\epsilon(<f)$, 由利益最大化原则, A 肯定愿意"抛弃" B 转而跟我们签合约. 当收到 A 付给我们现金 $f-\epsilon$ 后, 我们立即向银行借现金 $ge^{-r(T-t)}$. 由于

$$f-\epsilon+ge^{-r(T-t)}>S(t),$$

我们有足够的现金买 1 股 $S(t)$. 于是买入 1 股 $S(t)$. 再将剩下的现金

$$b:=f-\epsilon+ge^{-r(T-t)}-S(t)>0$$

存入银行. 注: 以上操作的起始资金为 0.

一直持有这个投资组合到 T. 这个投资组合由以下三部分组成

1. 欠银行现金 $ge^{-r(T-t)}e^{r(T-t)}=g$.
2. 持有 1 股 S, 此时它的价值为 $S(T)$.
3. 银行存款 $be^{r(T-t)}$.

将股票 S 卖出, 得到现金 $S(T)$. 再还银行欠款 g. 我们有现金 $S(T)-g$. 根据合约, 在 T 时, 我们付给 A 的现金 $S(T)-g$. 完成合约内容.

得到的现金 $be^{r(T-t)}>0$. 实现无风险套利. 所以, $f\le S(t)-ge^{-r(T-t)}$. 情形二, 假设 $f<S(t)-ge^{-r(T-t)}$, 留作作业题.

作业题 1. 证明: 如果 $f<S(t)-ge^{-r(T-t)}$, 那么存在无风险套利.

□

于是, 当 S 无股息派发时,

$$f=S(t)-ge^{-r(T-t)}. \tag{1.1.1}$$

远期合约价格, 记为 $\mathrm{For}(S,t,T)$, 是使得 $f=0$ 后, 解出的 g. 例如: 对于无股息派发的股票 S, 由(1.1.1)有

$$\mathrm{For}(S,t,T)=e^{r(T-t)}S(t).$$

作业题 2. 假设: 股票 S 连续派发股息, 其股息派发率为常数 q. 沿用以上符号, 证明:

$$f=e^{-q(T-t)}S(t)-ge^{-r(T-t)}.$$

求远期合约的价格 $\mathrm{For}(S,t,T)$.

□

作业题 3. 假设: 股票 S 只在 $t_d \in (t, T)$ 派发股息, 其股息派发额为已知常数 D. 沿用以上符号, 证明:

$$f = S(t) - e^{-r(t_d - t)}D - ge^{-r(T-t)}.$$

求远期合约的价格 $\mathrm{For}(S, t, T)$.

□

例子 1.5. 给定无股息派发股票 S, 在当前 $(t = 0)$ 时, $S(0) = 100$ (元), 无风险利率 $r = 5\%$, $T = 1$(年), 于是

$$\mathrm{For}(S, 0, 1) = e^{r(1-0)}S(0) = e^{0.05\times(1-0)} \times 100 \approx 105.13.$$

设 A, B 双方在 $t = 0$ 时签这张远期合约. 此时这张合约的价值为 0 (双方无现金流, 且双方互不相欠), 但有承诺: 在 $T(= 1)$ 时, 卖方付给买方

$$S(T) - \mathrm{For}(S, 0, 1) \approx S(1) - 105.13(\text{元}).$$

注: 在当前时刻 $t = 0$ 时, $S(t > 0)$ 未知. 如果时隔半年 $(t = 0.5)$, $S(0.5) = 110$ 元, 那么此时远期合约的价格为

$$\begin{aligned}\mathrm{For}(S, 0.5, T) =&\mathrm{For}(110, 0.5, 1)\\ =&110e^{0.05\times(1-0.5)}\\ \approx&112.78(\text{元}).\end{aligned}$$

此时, 如果 C 和 D 签约, 那么, 他们双方此时无现金流, 远期合约的价值为 0, 在 $T(= 1)$ 时, C 和 D 中的卖方付给买方

$$S(1) - \mathrm{For}(S, 0.5, 1) \approx S(1) - 112.78(\text{元}).$$

利用公式(1.1.1), A 和 B 在 $t = 0$ 时签的合约到了 $t = 0.5$ 时的价值为

$$\begin{aligned}f =&S(0.5) - e^{-r(T-0.5)}\mathrm{For}(S, 0, 1)\\ =&110 - e^{-0.05\times(1-0.5)} \times 100e^{0.05\times(1-0)}\\ \approx&\underbrace{\boxed{7.47}}_{A\text{ 和 }B\text{ 在 }t=0\text{ 时签约此时合约价值不为 }0.}(\text{元}).\end{aligned}$$

术语: 在以上讨论中, A 方称为远期合约的买方 (long side), A 方持有的合约称为 long position; B 方称为卖方 (short side), B 方持有的合约称为 short side.

□

例子 1.6. S_1 和 S_2 为两只不同的股票, 但是碰巧在 t_0 时, $S_1(t_0) = S_2(t_0)$, 然而

$$\mathrm{For}(S_1, t_0, T) \neq \mathrm{For}(S_2, t_0, T).$$

例如: S_1 无股息派发, S_2 在 $t_d \in (t_0, T)$ 时的股息派发额为 $D > 0$. 如果 $S_1(t_0) = S_2(t_0)$, 那么

$$\mathrm{For}(S_1, t_0, T) = e^{r(T-t)}S(t_0)$$

然而

$$\mathrm{For}(S_2, t_0, T) = e^{r(T-t)}S(t_0) - De^{r(T-t_d)},$$

所以

$$\mathrm{For}(S_1, t_0, T) \neq \mathrm{For}(S_2, t_0, T).$$

理由是, 函数 For 的自变量除了 (S, t, T) 外, 还有股票的名称, 只不过我们在这里忽略没写.

□

2 期货

期货 (futures) 合约类似于远期合约, 但有区别. 期货合约要求

- 合约的买卖双方是通过交易所进行的, 他们通常要向交易所交保证金.
- 通常每天会有许多这样的交易.
- 交易所每天在收盘后按结算价对所有买卖者的帐户进行结算, 并将盈亏打入/挪出其帐户.

期货的价格是一个函数, 记为 $\mathrm{Fut}(S,t,T)$, 其中: S, t 和 T 的含义同前. 期货的机制如下:

1. $\mathrm{Fut}(S,T,T) = S(T)$;
2. 在 $t < T$ 时, 人们对 $S(T)$ 有不同的预期, 对 $S(T)$ 看涨的人就会在交易所寻找看跌的人签一张或多张合约. 并且在签合约的瞬间无现金流. 对 $S(T)$ 看涨方称为买方, 看跌方为卖方;
3. 交易所充当中间人/裁判员的角色. 为了避免买卖双方有违约的现象. 交易所要求他们交一定数量的保证金, 保证金通常由数学软件算出;
4. 设: t_i 是交易所在第 i 个交易日的收盘时间, $i = \ldots, -1, 0, \ldots, N$, $t_N = T$. 由于我们假设交易随时间连续进行, 所以, t_i 也是第 $i+1$ 日的开盘时刻, $i \leq N-1$. 假设某人在 $a \in (t_{i-1}, t_i]$ 时, 买入一张期货合约. 此时期货的价格为 $\mathrm{Fut}(S,a,T)$, 但是无现金流. 即, 期货的买卖一瞬间是不花钱的. 下面分两种情形讨论:
   (a) 如果他在 $b \in [a, t_i]$ 时平仓 (卖出该合约), 那么在 t_i 时, 交易所会在 t_i 时将现金
   $$\begin{aligned}&\mathrm{Fut}(S,t_i,T) - \mathrm{Fut}(S,a,T) - (\mathrm{Fut}(S,t_i,T) - \mathrm{Fut}(S,b,T))\\ &= \mathrm{Fut}(S,b,T) - \mathrm{Fut}(S,a,T)\end{aligned}$$
   存入他的帐户 (负数表示取出). 此情形包括 $i = N$. 当 $i = N$, 合约到期: 所有人必须平仓或交割. 交割的含义在课上介绍.
   (b) 如果他没在 $[a, t_i]$ 时平仓 $(i < N)$, 那么在 t_i 时, 交易所会将现金
   $$\mathrm{Fut}(S,t_i,T) - \mathrm{Fut}(S,a,T)$$
   存入他的帐户 (负数表示取出). 然后在下个交易日一开盘交易所为他新建一张价格为 $F(S,t_i,T)$ 看多合约.

□

记: $\Pi(t)$ 为一投资组合在 t 时的价值. 假设

$$t_0, t_1, \ldots, t_N = T$$

为交易所的收盘时刻. 回忆: 由于我们假设交易随时间连续进行, 所以, t_i 也是第 $i+1$ 日的开盘时刻, $i \leq N-1$.

假设当前时刻为 t_0, 这是第 1 个交易日的开盘时刻. 此交易日的交易时间区间是 $[t_0, t_1]$. 构造投资组合 A 如下.

在 t_0 时, 将现金 $\mathrm{For}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}$ 存入银行 $(t_N=T)$. 再买入 1 份远期合约 $\mathrm{For}(S,t_0,t_N)$. 此时, 投资组合 A 的价值

$$\Pi_A(t_0):=\mathrm{For}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}+0.$$

在上式中, 0 对应于远期合约在 t_0 时 (签约时) 的价值. 在 $(t_0,t_N]$ 内一直持有这个投资组合, 于是

$$\begin{aligned}\Pi_A(t_N)=&\mathrm{For}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}e^{r(t_N-t_0)}\\&+\mathrm{For}(S,t_N,t_N)-\mathrm{For}(S,t_0,t_N)\\=&\mathrm{For}(S,t_N,t_N)\\=&S(T).\end{aligned}$$

构造投资组合 B 如下.

(1) 在 t_0 时, 将现金 $\mathrm{Fut}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}$ 存入银行. 再买入 $e^{-r(t_N-t_0)}$ 份 $\mathrm{Fut}(S,t_0,t_N)$. 在 t_0 时, 这个投资组合的价值

$$\Pi_B(t_0)=\mathrm{Fut}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}+0.$$

(b) 在当天收盘时 (t_1 时), 交易所会将现金

$$e^{-r(t_N-t_0)}(\mathrm{Fut}(S,t_1,t_N)-\mathrm{Fut}(S,t_0,t_N))$$

存入我们的帐户, 负数则表示取出.

(c) 我们用归纳法的思路, “重复”以上操作: 当 $i\le N-1$ 时, 在 t_i 时, 买入 $e^{-r(t_N-t_{i+1})}$ 份 $\mathrm{Fut}(S,t_i,t_N)$. 在当天收盘时 (t_{i+1} 时), 交易所会将现金

$$e^{-r(t_N-t_{i+1})}(\mathrm{Fut}(S,t_{i+1},t_N)-\mathrm{Fut}(S,t_i,t_N))$$

存入我们的帐户.

在 T 时,

$$\begin{aligned}\Pi_B(T)=&\mathrm{Fut}(S,t_0,t_N)e^{-r(t_N-t_0)}e^{r(t_N-t_0)}\\&+\sum_{i=0}^{N-1}e^{-r(t_N-t_{i+1})}(\mathrm{Fut}(S,t_{i+1},t_N)-\mathrm{Fut}(S,t_i,t_N))e^{r(t_N-t_{i+1})}\\=&S(T).\end{aligned}$$

于是

$$\Pi_A(T)=\Pi_B(T).$$

在 $[t_0,T]$ 上, 构造投资组合 A 和 B 需要的现金分别为 $\mathrm{For}(S,t_0,T)e^{-r(t_N-t_0)}$ 和 $\mathrm{Fut}(S,t_0,T)e^{-r(t_N-t_0)}$.

如果 $\mathrm{For}(S,t_0,T)>\mathrm{Fut}(S,t_0,T)$, 那么我们可以卖空投资组合 A 将得到的现金买入投资组合 B, 实现 (无风险) 套利. 反之亦然. 所以

$$\mathrm{For}(S,t_0,T)=\mathrm{Fut}(S,t_0,T).$$

问题 1. 买入一张价格为 $\mathrm{For}(S,t,T)$ 远期合约, 是否拥有价值为 $\mathrm{For}(S,t,T)$ 的资产? 买入一张价格为 $\mathrm{Fut}(S,t,T)$ 期货合约, 是否拥有价值为为 $\mathrm{Fut}(S,t,T)$ 的资产?

答案是否定的.

□

如果利率 r 不是常数, 以上关于远期合约和期货的定义也是合理的. 假设 r 是随机的, 那么

$$\mathrm{For}(S,t,T) \neq \mathrm{Fut}(S,t,T).$$

除非特别声明, 以下假设利率 r 为常数. 此时

$$\mathrm{For}(S,t,T) = \mathrm{Fut}(S,t,T).$$

因而我们可以用 $F(S,t,T)$ 既表示 $\mathrm{For}(S,t,T)$ 也表示 $\mathrm{Fut}(S,t,T)$.

除非特殊申明, 我们假设证券 S 在 $[t,T]$ 上无股息派发且无分股或配股等人为行为使得股价不连续.

作业题 4. 阅读 [Wil07, pp. 1-25]. 解答其中 pp. 24-25 中的 Exercises 1-6.

Cost of Carry: 现货 S 的持有者要支付额外的费用, 如: 仓库保管费等. 在数学上,

$$U \to -D \qquad u \to -q.$$

课上细讲.

2.0.1 期货的杠杆作用

课上讲.

标的不能被交易的远期合约/期货. 课上讲.

2.1 期货交易的理念

期货的价值发现功能. 课上讲.

3 期权

A call option is the right to buy a particular asset for an agreed amount at a specified time in the future.

A put option is the right to sell a particular asset for an agreed amount at a specified time in the future.

我在课上细讲期权的意思.

作业题 5. 阅读 [Wil07, pp. 27-46].

□

欧式与美式的区别.

一些名词:

- exercise price 或 strike price E;
- expiration date T;
- underlying asset S;
- payoff, terminal payoff;
- premium;
- intrinsic value(内蕴值);

- time value;
- ITM, ATM, OTM;
- writers of options.

一些记号与说明:

- 欧式看涨
$$c(t), c(S,t,E,T), c(S,T-t,E)$$
- 欧式看跌
$$p(t), p(S,t,E,T), p(S,T-t,E)$$
- 美式看涨
$$\mathbb{C}(t), \mathbb{C}(S,t,E,T), \mathbb{C}(S,T-t,E)$$
- 美式看跌
$$\mathbb{P}(t), \mathbb{P}(S,t,E,T), \mathbb{P}(S,T-t,E).$$

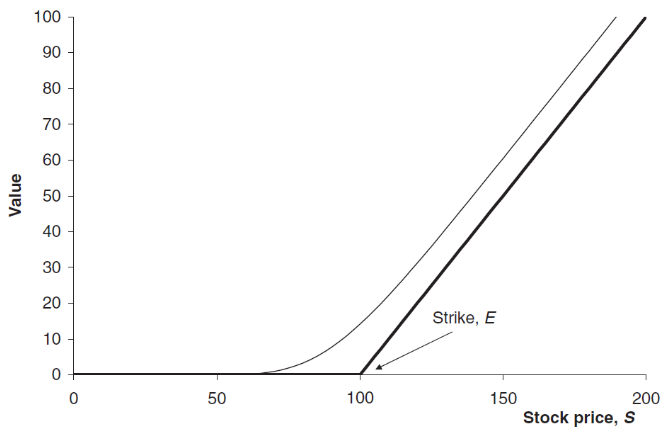

图 1: 看涨期权 payoff 图

除非特别声明, 今后假设利率 r 为正常数. 假设: 股票 S 连续股息派发, 其派发率为非负常数 q,

命题 3.1.

$$S(t) \geq \mathbb{C}(S,t,E,T) \geq c(S,t,E,T) \geq \max(e^{-q(T-t)}S(t) - e^{-r(T-t)}E, 0)$$
$$S(t) = \mathbb{C}(S,t,0,T), \quad c(S,t,0,T) = e^{-q(T-t)}S(t).$$
$$E \geq \mathbb{P}(S,t,E,T) \geq p(S,t,E,T) \geq \max(e^{-r(T-t)}E - e^{-q(T-t)}S(t), 0).$$

命题 3.2. *对于无股息派发的股票 S, 有*

$$\mathbb{C}(S,t,E,T) = c(S,t,E,T).$$

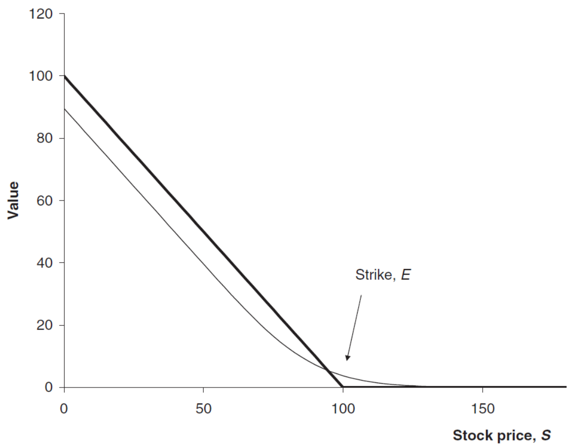

图 2: 看跌期权 payoff 图

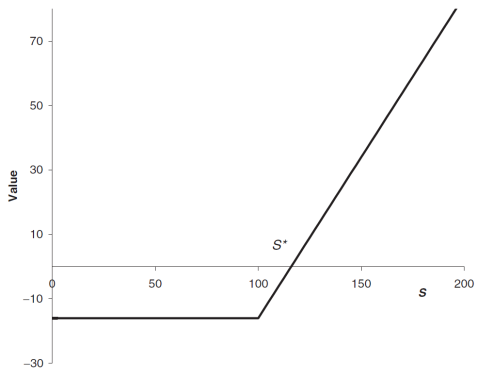

图 3: 看涨期权 profit 图

□

作业题 6 (不必提交). 阅读网页
http://finance.eastmoney.com/a/201909131236968924.html
今后我们将布置方差互换方面的习题.

□

预习 (下次打算布置的作业):
阅读 [Jos08] 中的第一章, 用 C++ 生成 100 条 S 在 $[0,T]$ 的路径.

参考文献

[Jos08] Mark Suresh Joshi. C++ design patterns and derivatives pricing. Cambridge University Press, second edition, 2008.

[Wil07] P. Wilmott. Paul Wilmott introduces quantitative finance. Wiley, 2007.