衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-11-18(初稿)

要求

阅读本课件. 完成本课件作业题 1-5. 要求解答在下次课前提交.

1 Down-and-in Digital (pay-at-hit)

我们在 Black-Scholes 框架下讨论问题. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 于是

$$S(T) = S(t)\exp\left(\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma B^Q(T-t)\right). \tag{1.0.1}$$

上式等价于

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{S(T)}{S(t)} = \frac{1}{\sigma}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T-t}+\frac{B^Q(T-t)}{\sqrt{T-t}}. \tag{1.0.2}$$

令:

$$x(T) = \frac{\ln\frac{S(T)}{S(t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \mu = \frac{1}{\sigma}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right). \tag{1.0.3}$$

则 x 可以表为

$$x(T) = \mu\sqrt{T-t}+y, \tag{1.0.4}$$

其中 y 是满足标准正态分布的随机变量. 令:

$$k = \frac{\ln\frac{H}{S(t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{1.0.5}$$

1.1 复习

首先回忆一下, 课件 2019-10-28.pdf 中的结果.

假设当前时刻 $t=0$, 对于任意给定 $a\neq 0$, 令

$$T_a = \inf\{t>0, B(t)=a\}.$$

称 T_a 为 $B(t)$ 到 a 的首达时.

引理 1.1 (反射原理)**.** *反射过程*

$$\widetilde{B}(t);=\begin{cases} B(t) & t<T_a \\ 2a-B(t) & t\geq T_a \end{cases}$$

与布朗运动$B(t)$ *分布相同.*

□

可以证明:

$$\Pr(T_a \le t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{1.1.1}$$

事实上, 不妨假设: $a < 0$. 于是

$$\begin{aligned}\Pr(T_a \le t) =& \Pr(T_a \le t, B(t) > a) + \Pr(T_a \le t, B(t) \le a) \\ =& 2\Pr(T_a \le t, B(t) \le a) \quad \text{(反射原理)} \\ =& 2\Pr(B(t) \le a) \\ =& \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy.\end{aligned}$$

对上式 t 求导即得

引理 1.2. *当 $a > 0$ 时, 首达时概率密度*

$$f_{T_a}(t) := \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

□

再结合(1.0.4)和(1.0.5), 可证 (细节略)

推论 1.3. *假设当前时刻为 t, $\tau > t$. 股价 S 在 $(\tau, \tau + d\tau)$ 内首达 k 的概率为*

$$\frac{\eta k}{\sqrt{2\pi(\tau - t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2}{2}(\tau - t) - \frac{k^2}{2(\tau - t)}\right) d\tau,$$

其中

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{如果 } S(t) < H \\ -1 & \text{如果 } S(t) > H. \end{cases}$$

□

1.2 Down-and-in Digital (pay-at-hit) 问题和求解

先回顾一下我们的问题. 假设: $S(t) > H$.

(1.1) 在 $[t, T]$ 上, 当 S 首次达到 H 时，期权的持有者立即获得 1 元现金 (pay-at-hit), 然后期权作废.

(1.2) 在 $[t, T]$ 上, 如果 S 始终没有到达 H, 那么该期权的持有者获得 0 元回报. 期权在 T 收盘后作废.

记该期权在 t 时的价格为 $\mathbb{V}(S, t, H, T)$. 以下求 $\mathbb{V}(S, t, H, T)$. 由 $\mathbb{V}$ 的定义和推论1.3知

$$\mathbb{V}(S, t, H, T) = \int_t^T e^{-r(\tau - t)} \frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau - t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2}{2}(\tau - t) - \frac{k^2}{2(\tau - t)}\right) d\tau. \tag{1.2.1}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(S,t,H,T) &= \int_t^T e^{-r(\tau-t)} \frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2}{2}(\tau-t) - \frac{k^2}{2(\tau-t)}\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2+2r}{2}(\tau-t) - \frac{k^2}{2(\tau-t)}\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{-ke^{\mu k + k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{2e^{\mu k + k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\frac{k}{\sqrt{\tau-t}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(S,t,H,T) &= \int_t^T e^{-r(\tau-t)} \frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2}{2}(\tau-t) - \frac{k^2}{2(\tau-t)}\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(\mu k - \frac{\mu^2+2r}{2}(\tau-t) - \frac{k^2}{2(\tau-t)}\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{-ke^{\mu k - k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\tau \\
&= \int_t^T \frac{2e^{\mu k - k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\frac{k}{\sqrt{\tau-t}}.
\end{aligned}
$$

将以上两式边边相加再除以 2 得:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(S,t,H,T) &= \int_t^T \frac{e^{\mu k + k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\frac{k}{\sqrt{\tau-t}} \\
&\quad + \int_t^T \frac{e^{\mu k - k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2\right) d\frac{k}{\sqrt{\tau-t}} \\
&= \int_t^T \frac{e^{\mu k + k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2} d\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right) \\
&\quad + \int_t^T \frac{e^{\mu k - k\sqrt{\mu^2+2r}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)^2} d\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{\tau-t} + \frac{k}{\sqrt{\tau-t}}\right)
\end{aligned}
$$

将上式写成解析解, 要用到

$$
N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,
$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S,t,H,T) =& e^{\mu k+k\sqrt{\mu^2+2r}}N\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{T-t}+\frac{k}{\sqrt{T-t}}\right)\\ &+e^{\mu k-k\sqrt{\mu^2+2r}}N\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{T-t}+\frac{k}{\sqrt{T-t}}\right)\\ =&\left(\frac{H}{S(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}(\mu+\sqrt{\mu^2+2r})}N\left(\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{T-t}+\frac{\ln\frac{H}{S}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\ &+\left(\frac{H}{S(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}(\mu-\sqrt{\mu^2+2r})}N\left(-\sqrt{\mu^2+2r}\sqrt{T-t}+\frac{\ln\frac{H}{S}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

例子 1.4. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 当前时刻为 t. 给定正常数 H, 已知: $S(t)>H$. 考虑一没有到期日的期权. 在未来股价 $S(\tau)$ 首次下达 H 时候, 该期权持有人获得现金 $e^{-\alpha(\tau-t)}$, 其中 α 为正常数. 问该期权在 t 时的价格.

参考公式(1.2.1), 所求期权在 t 时价格为

$$\int_t^T e^{-\alpha(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}\frac{-k}{\sqrt{2\pi(\tau-t)^3}}\exp\left(\mu k-\frac{\mu^2}{2}(\tau-t)-\frac{k^2}{2(\tau-t)}\right)d\tau.$$

在上式中, (1) $e^{-\alpha(\tau-t)}e^{-r(\tau-t)}$ 可写为 $e^{-(\alpha+r)(\tau-t)}$. (2) 被积函数的其他处都不显含 r. 所以, 可先将(1.2.2)中的 r 用 $(\alpha+r)$ 替代, 再取 $T\to+\infty$, 得到该期权在 t 时的价格为

$$\left(\frac{H}{S(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}\left(\mu+\sqrt{\mu^2+2(\alpha+r)}\right)}, \tag{1.2.3}$$

其中 μ 由式(1.0.3)给出,

$$\mu=\frac{1}{\sigma}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right).$$

以下是另一解法 (利用 Black-Scholes 方程). 要用 Black-Scholes 方程, 首先要考虑在 S 首达 H 前的动态对冲. 记首达时为 τ. 已知: t 是当前时刻. 取 $u\in[t,\tau)$.

在 u 时, 股价 S 在未来时间区间 $[\tau,\tau+d\tau]$ 上首次到达 H 的概率记为

$$f(S,u,\tau)d\tau.$$

当 S 固定时, 由布朗运动的性质, $f(S,u,\tau)$ 只与 $\tau-u$ 有关. 所以 f 可写成 $f(S,\tau-u)$. 在 u 时, 合约的价格为

$$v_u:=\int_u^{+\infty}e^{-r(\tau-u)}e^{-\alpha(\tau-t)}f(S,\tau-u)d\tau, \tag{1.2.4}$$

上式积分中的 payoff 取 $e^{-\alpha(\tau-t)}$, 这是由于合约 v 在 t 时签订, v 的 payoff 形式由那时确定. 做变量替换 $z=\tau-u$, 上式积分可化为

$$v_u=e^{-\alpha(u-t)}\int_0^{+\infty}e^{-(r+\alpha)z}f(S,z)dz:=e^{-\alpha(u-t)}g(S),$$

其中

$$g(S) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+\alpha)z} f(S,z)dz.$$

将 $v_u = e^{-\alpha(u-t)} g(S)$ 代入 Black-Scholes 方程:

$$\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0$$

得

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 g''(S) + (r-q)Sg(S) - (r+\alpha)g(S) = 0,$$

令: $g(S) = S^\gamma$, 其中 γ 为待定常数. 则

$$\frac{\sigma^2}{2}\gamma(\gamma-1) + (r-q)\gamma - (r+\alpha) = 0.$$

即

$$\frac{\sigma^2}{2}\gamma^2 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\gamma - (r+\alpha) = 0.$$

解得

$$\begin{aligned}\gamma_\pm =& \frac{-\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma^2(r+\alpha)}}{\sigma^2} \\ =& \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2(r+\alpha)}}{\sigma}, \quad \mu = \frac{1}{\sigma}\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right).\end{aligned}$$

所以, $g(S)$ 的通解为 $g(S) = C_+ S^{\gamma_+} + C_- S^{\gamma_-}$, 其中 $C_\pm$ 为待定常数. 由题意, 当 $S \to +\infty$ 时, $g(S) \to 0$. 所以, $C_+ = 0$. 当 $S(\tau)$ 首达 H 时, $v_\tau = e^{-\alpha(\tau-t)}$. 所以, $g(S) = 1$. 即 $C_- H^{\gamma_-} = 1$, $C_- = H^{-\gamma_-}$. 这与(1.2.3)一致.

□

作业题 1. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 当前时刻为 t. 给定正常数 H, 已知: $S(t) < H$. 考虑一没有到期日的期权. 在未来股价 $S(\tau)$ 首次上达 H 时候, 该期权持有人获得现金 $e^{-\alpha(\tau-t)}$, 其中 α 为正常数. 应用求解 Black-Scholes 方法 (如前述), 给出该期权在 t 时的价格.

□

作业题 2. 阅读 onion.pdf 中, 第三部分 (Peeling onion). 详细写出 Onion options 和 Double-no-touch digital 期权的定义, 并且用无套利假定证明两者之间的关系 (需要提交解答).

建议有余力的同学阅读 onion.pdf 和 One-touch-afe.pdf 中的数学处理方式 (不需提交解答).

□

1.3 静态复制/对冲

除特别声明, 本节在 Black-Scholes 框架下讨论. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q.

记 c^d 和 $c^{a/n}$ 分别为 digital call 和 asset-or-nothing call, 其 terminal payoff 分别为

$$c^d(S,T,E,T)=\begin{cases}1 & S(T)\geq E\\ 0 & S(T)<E\end{cases}\tag{1.3.1}$$

和

$$c^{a/n}(S,T,E,T)=\begin{cases}S(T) & S(T)\geq E\\ 0 & S(T)<E.\end{cases}$$

以前证过

引理 1.5.

$$c^d(S,t,E,T)=e^{-r(T-t)}N(d_2),\tag{1.3.2}$$

$$c^{a/n}(S,t,E,T)=e^{-q(T-t)}S(t)N(d_1).$$

在动态对冲欧式期权 $c^d(S,t,E,T)$ 和 $c^{a/n}(S,t,E,T)$ 时, 存在 pin risk.

□

我们再举个存在 pin risk 的例子.

例子 1.6. 假设 S 无股息派发, 且 $S(0)>H>E$. 已知

$$c^{d/o}(S,0,E,T,H)=v(S,0)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}v\left(\frac{H^2}{S},0\right).\tag{1.3.3}$$

其中

$$v(S,0)=S_0N(d_+(S_0))-e^{-rT}EN(d_-(S_0))$$

$$d_\pm(S_0)=\frac{\ln\frac{S(0)}{H}+(r\pm0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

课上讲过, 当 $S(T-\epsilon)$ 下落至 H 附近, $c^{d/o}$ 的对冲实际上就隐含了 pin risk. 以下用数学表述. 将 $v(S,0)$ 改写成

$$\begin{aligned}v(S,0)=&\underbrace{S_0N(d_+)-e^{-rT}HN(d_-)}_{=c(S,0,H,T)}+(H-E)\quad\underbrace{e^{-rT}N(d_-)}_{=c^d(S,0,H,T)\text{由}(1.3.2)}\\=&c(S,0,H,T)+(H-E)c^d(S,0,H,T).\end{aligned}$$

结合(1.3.3), 有

$$\begin{aligned}c^{d/o}(S,0,E,T,H)=&c(S,0,H,T)+(H-E)c^d(S,0,H,T)\\&-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}\left(c\left(\frac{H^2}{S},0,H,T\right)+(H-E)c^d\left(\frac{H^2}{S},0,H,T\right)\right)\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

由于对于普通欧式看涨期权 c, 不存在 pin risk, 所以我们只需讨论以下 Δ 是否存在 pin risk,

$$\frac{\partial}{\partial S}\left\{c^d(S,0,H,T)-\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha}c^d\left(\frac{H^2}{S},0,H,T\right)\right\}.$$

由(1.3.2),

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial S}\left\{c^d(S,0,H,T)-\left(\frac{H}{S}\right)^{\alpha}c^d\left(\frac{H^2}{S},0,H,T\right)\right\}\Bigg|_{S=S_0}\\
=&\frac{e^{rT}}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}}\left\{\exp(-0.5d_-^2(S_0))+\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}\exp(-0.5d_-^2(H/S_0))\right\}\\
&+\frac{\alpha}{S_0}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}c^d\left(\frac{H^2}{S},0,H,T\right)\\
=&\frac{e^{rT}}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}}\left\{\exp(-0.5d_-^2(S_0))+\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}\exp(-0.5d_-^2(H/S_0))\right\}\\
&+\frac{\alpha}{S_0}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}e^{-rT}N\left(d_-\left(\frac{H^2}{S_0}\right)\right).
\end{aligned}
$$

对于充分小 $\epsilon>0$,

$$
\begin{aligned}
&\text{讨论区间 } [T-\epsilon,T] \text{ 该期权的 pin risk}\\
\Longleftrightarrow\ &\text{讨论区间 } [0,T] \text{ 期权的 pin risk, 其中 } T>0 \text{ 充分小.}
\end{aligned}
$$

所以, 我们只需讨论, 当 T 为充分小正常数时, S_0 在 H 附近, 上式是否存在 pin risk. 注意到上式最后一项始终有限, 不存在 pin risk. 所以, 我们只需讨论

$$
\frac{e^{rT}}{S_0\sigma\sqrt{2\pi T}}\left\{\exp(-0.5d_-^2(S_0))+\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha}\exp(-0.5d_-^2(H/S_0))\right\} \tag{1.3.5}
$$

是否存在 pin risk.

□

作业题 3. 当 T 为充分小正常数时, S_0 在 H 附近, 证明(1.3.5)存在 pin risk.

□

例子 1.7. 复制 Terminal payoff 为(1.3.1)的欧式期权 $c^d(S,0,E,T)$. 取 $\Delta E>0$ 充分小. 在 $t=0$ 时, 买入 $1/\Delta E$ 份 $c(S,0,E,T)$, 卖出入 $1/\Delta E$ 份 $c(S,0,E+\Delta E,T)$. 此时这个投资组合的价值为

$$
\Pi(0):=\frac{1}{\Delta E}(c(S,0,E,T)-c(S,0,E+\Delta E,T)).
$$

持有这个组合到 T,

$$
\begin{aligned}
\Pi(T)=&\frac{1}{\Delta E}(\max(S_T-E,0)-\max(S_T-E-\Delta E,0))\\
=&\begin{cases}1 & S_T\geq E+\Delta E\\ \frac{S_T-E}{\Delta E} & E\leq S_T<E+\Delta E\\ 0 & S_T\leq E.\end{cases}
\end{aligned}
$$

当 $E\leq S_T<E+\Delta E$ 时, $\Pi(T)\in[0,1)$. 由于 ΔE 充分小, 股价 S 从 $t=0$ 到 $t=T$ 发生此情形的概率可以忽略 (为什么?). 所以, $\Pi(0)\approx c^d(S,0,E,T)$. 由此, $\Pi(0)$ 复制了 $c^d(S,0,E,T)$, 并且整个复制过程在 $t=0$ 时完成. 这就规避了动态复制的 pin risk.

□

定义 1.8. *给定一 T 时到期的欧式衍生证券 $v(S,t,T)$, $t \leq T$. 假设 $v(S,t,T)$ 在市场上或交易所没有交易, 在当前时刻 $t=0$ 时, 如果存在投资组合 $\Pi(0)$ 满足以下条件*

1. $$\Pi(0) := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_i(0).$$
   其中, S_i 为在市场上可以买卖的证券, 如: 股票, 期权等, 常数 α_i 为持有 S_i 的份额, $\alpha_i < 0$ 表示卖空, $\forall i$.
2. *在时间区间 $(0,T)$ 内一直持有 Π (不操作).*
3. $\Pi(T) \approx v(S,T,T)$.

那么称投资组合 Π 是 $v(S,t,T)$ 的一个静态复制, 或静态对冲.

□

例子 1.9. 给定二次可微函数 $f(x)$ 和欧式期权 $v(S,t,T)$, 其 terminal payoff 为 $v(S,T,T)=f(S_T)$. 我们想在 $t=0$ 时, 买卖一系列欧式看涨期权 $c(S,0,E,T)$ 静态复制 $v(S,0,T)$. 只需找函数 $g(x)$, 使得

$$v(S,t,T) = \int_0^{+\infty} g(x) c(S,t,x,T) dx, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.3.6}$$

取 $t=T$, 上式化为

$$\begin{aligned} f(S_T) &= \int_0^{+\infty} g(x) \max(S_T - x, 0) dx \\ &= \int_0^{S_T} g(x)(S_T - x) dx. \end{aligned}$$

于是 $f'(S_T) = \int_0^{S_T} g(x)dx$, $f''(S_T) = g(S_T)$. 所以, $g(x) = f''(x)$. 注: 在公式(1.3.6)中, 如果 $g(x)$ 在有限多个点不连续, 但左右连续, 且在这些点的邻域内 $g(x)$ 有限, 那么(1.3.6)中的积分仍存在. 所以, 我们可以将 $f(x)$二次可微条件减弱, 细节略.

□

作业题 4. 给定二次可微函数 $f(x)$ 和欧式期权 $v(S,t,T)$, 其 terminal payoff 为 $v(S,T,T)=f(S_T)$. 参考上例做法. 在 $t=0$ 时, 如何买卖一系列欧式看跌期权 $p(S,0,E,T)$ 静态复制 $v(S,0,T)$.

□

例子 1.10. 在 $t=0$ 时, 我们要通过买卖一系列欧式看涨 c 和看跌 p 静态对冲(1.3.4)中的 $c^{d/o}$. 由例子1.7, 我们只需静态对冲

$$\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha} \left(c\left(\frac{H^2}{S}, 0, H, T\right) + (H-E) c^d \left(\frac{H^2}{S}, 0, H, T\right)\right) \tag{1.3.7}$$

即可. 计算其 Terminal payoff:

$$\left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha} \left(\max\left(\frac{H^2}{S_T} - H, 0\right) + (H-E) \mathbb{1}_{H^2/S_T \geq H}\right),$$

其中 $\mathbb{1}_x$ 是示性函数. 我们现在对上式中的

$$\left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha} \max\left(\frac{H^2}{S_T} - H, 0\right)$$

做静态对冲. 如果将例子1.9的 f 写成

$$f(x) = \left(\frac{H}{x}\right)^{\alpha} \max\left(\frac{H^2}{x} - H, 0\right),$$

那么 $f'(x)$ 在 $x = H$ 时<u>不连续</u>. 所以, 我们不能直接用例子1.9的方法. 现做变换

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha} \max\left(\frac{H^2}{S_T} - H, 0\right) \\
&= \left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha+1} \max\left(H - S_T, 0\right) \\
&= \left(\left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha+1} - 1\right) \max\left(H - S_T, 0\right) + \max\left(H - S_T, 0\right).
\end{aligned}$$

令

$$f(x) := \left(\left(\frac{H}{x}\right)^{\alpha+1} - 1\right) \max\left(H - x, 0\right).$$

将其看成为例子1.9中的 $f(x)$. 于是 $g(x) = f''(x)$ (在 $x = H$ 时, 在(1.3.6) 中取 $g(H) = f''(H^-)$). 因此在(1.3.7)中

$$\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\alpha} c\left(\frac{H^2}{S}, 0, H, T\right) = \int_0^{+\infty} g(x)c(S, 0, x, T)dx + p(S, 0, H, T).$$

□

作业题 5. 参考上例, 给出(1.3.7)中

$$\left(\frac{H}{S_T}\right)^{\alpha} (H - E)c^d\left(\frac{H^2}{S}, 0, H, T\right)$$

静态对冲的操作策略.

□

例子 1.11 (DEK 方法). 参考文献 [DEK94]. 这里只是简述. 假设: 集合

$$\{c(S, t, E, T) \mid E \geq 0, T \geq t\}$$

中的任一期权在市场上可以交易. 我们想通过买卖这些期权静态复制一个给定 up-and-out 看涨期权 $c^{u/o}(S, t, E, H, T)$.

注释 1.12. 在叙述例子前, 我先做一点说明: 文 [DEK94] 中的一些期权数值解好像和我算出的在小数点后两位有出入. 为了方便同学们阅读, 我采取如下约定: 凡是文中给出的期权数值, 我就直接引用. 还有一点必须说明的是, 从数学上讲, 我们沿用的文 [DEK94] 中的方法非常罗嗦. 事实上, 如果只是为了解决下例中的问题, 那么用线性代数, 将很快得到答案. 我之所以花些篇幅来叙述 [DEK94] 中的方法, 是因为这种" 修修补补" 的方法在处理具体问题时经常用到. 所以我在此想让同学们接触一下此方法.

$\square$

以下考虑一个 up-and-out 看涨期权的定价: $S(t)=100$, $E=100$, $H=120$, $T=1$(年), $r=10\%$/年, $q=5\%$/年, $\sigma=25\%$/年. 可以算出:

$$c^{u/o}(S=100,t=0,E=100,H=120,T=1)=0.656.$$

再由 vanilla 欧式看涨期权公式可以算得:

$$c(S=100,t=0,E=100,T=1)=11.434.$$

可见, up-and-out call 比 vanilla call 小很多.

下面我们想通过在 $t=0$ 时买卖一些 vanilla call 来复制

$$c^{u/o}(S=100,t=0,E=100,H=120,T=1).$$

首先, 我们买入一张 $c(S=100,t=0,E=100,T=1)$. 由于股价 S 是一个随机量, 所以当 t 经过一个无穷小量 $\delta>0$ 后, $S(\delta)$ 可能到达 120. 此时 $c^{u/o}$ 作废, 而

$$c(S=120,t=\delta,E=100,T=1)\approx c(S=120,t=0,E=100,T=1)=25.610.$$

由此可见, 用 c 作为 $c^{u/o}$ 的近似误差较大. 为此我们卖 x 张

$$c(S=100,t=0,E=120,T=1)$$

使得

$$\begin{aligned}xc(S=120,t=0,E=120,T=1)=&c(S=120,t=0,E=100,T=1)\\=&25.610.\end{aligned}$$

可以算出: $c(S=120,t=0,E=120,T=1)=13.721$. 所以, $x=1.866$. 这样, 通过买 1 张 $c(S=100,t=0,E=100)$ 和卖 1.866 张 $c(S=100,t=0,E=120)$, 将股价 $S(\delta)=120$ 的情形的 c 和 $c^{u/o}$ 认同. 同时, 如果股价在时间区间 $[0,1]$ 上从没到达 $H=120$, 那么这个投资组合的 Terminal payoff 和 $c^{u/o}$ 的相同. 所以

$$\begin{aligned}\Pi_1(t=0,S=100)=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-1.866c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\:=&11.434-1.866\times 4.610\\=&2.832\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

是 $c^{u/o}$ 的一个近似. 但是这个近似还可以进一步改进. 回忆一下我们刚才的做法: 利用 $c^{u/o}$ 在 $t\approx 0$ 和 $t=1$ 的某些表现行为来构造一个 c 的投资组合 (1.3.8), 使得这个组合成为 $c^{u/o}$ 的一个近似. 现在取 $t=0.75$(年)(即: 9 个月). 这时, 我们可以算出

$$\Pi_1(t=0.75,S=120)=21.322-1.866\times 6.635=8.941.$$

然而, $c^{u/o}(S=120,t=0.75)=0$. 为了让我们的复制在 $S(t=0.75)=120$ 时与 $c^{u/o}$ 一致, 我们要卖 y 张

$$c(S=100,t=0,E=120,T=1)$$

使得

$$yc(S=120,t=0.75,E=120,T=1)=\Pi_1(t=0.75,S=120)=8.941.$$

可以算出: $c(S=120,t=0.75,E=120,T=1)=6.635$. 所以, $y=1.348$. 这样, 我们构造如下的投资组合:

$$\begin{aligned}\Pi_2(t=0,S=100):=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-1.866c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\&-1.348c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\=&11.434-3.214\times4.610\\=&-3.383.\end{aligned}\tag{1.3.9}$$

细心的同学也许发现了一个问题: Π_2 将起点值改变了, 即:

$$\begin{aligned}\Pi_2(t=0,S=120)=&c(S=120,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=120,t=0,E=120,T=1)\\=&25.610-3.214\times13.721\\=&-18.489\neq0.\end{aligned}$$

所以, 我们还必须将这个值抹去: 买入 z 张

$$c(S=100,t=0,E=120,T=0.75),$$

使得

$$zc(S=120,t=0,E=120,T=0.75)=|\Pi_2(t=0,S=120)|.$$

由于 $c(S=120,t=0,E=120,T=0.75)=12.053$, 所以, $z=1.534$. 现在构造第三个投资组合:

$$\begin{aligned}\Pi_3(t=0,S=100):=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\&+1.534c(S=100,t=0,E=120,T=0.75)\\=&11.434-3.214\times4.610+1.534\times3.364\\=&1.778.\end{aligned}$$

当 $S=H=120$ 时, 这个投资组合在 $t=0,0.75,1$ 三个时间点上同 $c^{u/o}$ 一致. 现在我们来构造投资组合使得 t 在 $0,0.5,0.75,1$ 同 $c^{u/o}$ 都一致. 先计算 $\Pi_3(S=120,t=0.5)$:

$$\begin{aligned}\Pi_3(t=0.5,S=120)=&c(S=120,t=0.5,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=120,t=0.5,E=120,T=1)\\&+1.534c(S=120,t=0.5,E=120,T=0.75)\\=&22.767-3.214\times9.538+1.534\times6.635\\=&2.290.\end{aligned}$$

现在将这个量抹去: 卖 u 张

$$c(S=100,t=0,E=120,T=0.75),$$

使得使得

$$uc(S=120,t=0.5,E=120,T=0.75)=\Pi_3(t=0.5,S=120).$$

即:

$$6.635u=2.290,$$

得: $u=0.345$. 所以,

$$\begin{aligned}\Pi_4(t=0,S=100)=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\&+1.534c(S=100,t=0,E=120,T=0.75)\\&-0.345c(S=100,t=0,E=120,T=0.75)\\=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\&+1.189c(S=100,t=0,E=120,T=0.75).\end{aligned}$$

这个投资组合又会影响到起点, 即:

$$\begin{aligned}\Pi_4(t=0,S=120):=&c(S=120,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=120,t=0,E=120,T=1)\\&+1.189c(S=120,t=0,E=120,T=0.75)\\=&25.610-3.214\times 13.721+1.189\times 12.053\\=&-4.158\neq 0.\end{aligned}$$

现在将这个量抹去: 买进 w 张

$$c(S=100,t=0,E=120,T=0.5)=1.903,$$

使得

$$wc(S=120,t=0,E=120,T=0.5)=|\Pi_4(t=0,S=120)|,$$

即:

$$9.497w=4.158.$$

所以, $w=0.438$. 于是, 当 $S=H=120$ 时, 以下的投资组合使得 t 在 $0,0.5,0.75,1$ 同 $c^{u/o}$ 都一致:

$$\begin{aligned}\Pi_5(t=0,S=100)=&c(S=100,t=0,E=100,T=1)\\&-3.214c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\&+1.189c(S=100,t=0,E=120,T=0.75)\\&+0.438c(S=100,t=0,E=120,T=0.5)\\=&11.434-3.214\times 4.610+1.189\times 3.364+0.438\times 1.903\\=&1.451.\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

注释 1.13. 如果不采用 [DEK94] 的现成结果, 那么以上的数值在 1.35 左右. 原则上我们可以继续添加时间参考点来改进复制精度. 但是, 在实际应用中, 随着添加越来越多的期权, 交易费也在不断增加.

以下用线性代数方法求静态对冲中看涨期权的头寸:

$$\begin{aligned}\Pi(0) :=& c(S=100,t=0,E=100,T=1)-x_1c(S=100,t=0,E=120,T=1)\\ &-x_2c(S=100,t=0,E=120,T=0.75)\\ &-x_3c(S=100,t=0,E=120,T=0.5)\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

使得

$$\begin{cases} c(120,0.75,100,1)-x_1c(120,0.75,120,1) & =0\\ c(120,0.5,100,1)-x_1c(120,0.5,120,1)-x_2c(120,0.5,120,0.75) & =0\\ c(120,0,100,1)-x_1c(120,0,120,1)-x_2c(120,0,120,0.75)-x_3c(120,0,120,0.5) & =0.\end{cases}$$

解得 $x_1=3.214, x_2=-1.189, x_3=-0.438$. 将解代入(1.3.11), 计算得到的 $\Pi(0)$ 与 (1.3.10)一致.

□

作业题 6. 阅读文献 [DEK94] 中的对应本例内容.

□

2 关于期中考试试题解答

课上讲.

参考文献

[DEK94] E. Derman, D. Ergener, and I. Kani. Static options replication. May 1994. Goldman Sachs.