极值理论及在Value-at-Risk中的应用

杨静平

北京大学数学科学学院金融数学系

2019年10月

Outline

Outline

极值分布族

令$X_1, X_2, \cdots, X_n$为独立同分布的随机变量列，分布为F. 令

$$X_{1,n} \geq X_{2,n} \geq \cdots \geq X_{n,n}$$

为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的次序统计量.
金融中的次序统计量的使用：（1）股票价格数据；（2）期货数据；（3）利率数据。

假设存在一列$a_n, b_n, n \geq 1$ 使得当$n \to \infty$时，有

$$\frac{X_{1,n} - a_n}{b_n} \to^d G(x).$$

如果上面的极限分布存在，记为$F \in \mathcal{D}(G)$。G只有三种类型：$\alpha > 0$,

$$G_1(x;\alpha) = exp(-x^{-\alpha}), x > 0; G_1(x;\alpha) = 0, x \leq 0.$$
$$G_2(x;\alpha) = exp(-(-x)^{-\alpha}), x < 0; G_2(x;\alpha) = 1, x \geq 0.$$
$$G_3(x) = exp(-exp(-x)), x \in R$$

称G_1为**Frechet type**, G_2为**Weibull type**, G_3为 **Extreme value type**.
三种类型可以统一为下面的形式：

$$G(x;\theta) = e^{-(1+\frac{x}{\theta})^{-\theta}}, \quad 1 + x\theta^{-1} > 0.$$

例子： 记$F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$. 令$b_n = log(n), a_n = 1, n \geq 1$, 使得

$$P(\frac{X_{1,n} - b_n}{a_n} \leq z) \longrightarrow exp(-e^{-z}).$$

例子 令F 为分布$F(x) = 1 - x^{-1}, x > 1$. 则有

$$P(X_{1,n} \le nz) \longrightarrow exp(-1/z).$$

例子 令F为标准正态分布. 则有$\Phi \in \mathcal{D}(G_3)$，其中

$$a_n = \sqrt{2log(n)} - \frac{1}{2}\frac{log(4\pi log(n))}{\sqrt{2\log(n)}}, b_n = 1/\sqrt{2log(n)}$$

中项和边项的次序统计量的极限定理

定理 对于$0 < p < 1$，令F的密度存在，密度值在$F^{-1}(p)$点大于零。则对于$i = n - [np]$，当 $n \to \infty$时有

$$\sqrt{n}f(F^{-1}(p))\frac{X_{i:n} - F^{-1}(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \to^d N(0,1).$$

定理 令F具有绝对连续的密度函数。在一定的假设下，有当$i \to \infty, \frac{i}{n} \to 0$时，

$$(X_{i,n} - a_n)/b_n \to^d N(0,1),$$

其中

$$a_n = F^{-1}(1 - i/n), b_n = \sqrt{i}/\{nf(a_n)\}.$$

超过阀值部分的分布

令$X_1, X_2, \cdots, X_n$为iid 序列，分布为F. 定义

$$N_u = \sharp\{i : X_i > u, i \leq n\}.$$

定义

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$$

以及

$$\overline{F}_u(y) = 1 - F_u(y).$$

记对应的超出量为$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N_u}$.

Generalized Pareto distribution (GPD) 定义为

$$\overline{G}_{\epsilon,\beta}(x) = (1 + \frac{\epsilon x}{\beta})^{-1/\epsilon}, x \in D(\epsilon, \beta).$$

则有

$$\overline{F}_u(y) \sim \overline{G}_{\epsilon,\beta(u)}(y)$$

对于给定的u, ϵ 和$\beta(u)$ 可以通过超过门限值的数据来确定.

$$\hat{\overline{F}(u)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i > u)}{n} = \frac{N_u}{n}.$$

$$\hat{\overline{F}(u + y)} = \frac{N_u}{n}(1 + \hat{\epsilon}\frac{y}{\hat{\beta}})^{-1/\hat{\epsilon}}.$$

在Frechet 和 Gumbel 情形 ($\epsilon \geq 0$),

$$VaR_p \sim u + \frac{\beta}{\epsilon}((\frac{n}{N_u}(1-p))^{-\epsilon} - 1)$$

极值指标的统计估计

假设

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x), x > 0$$

其中，L是缓慢变化。则定义Hill 估计量

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = (\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} ln(X_{j,n}) - ln(X_{k,n}))^{-1}$$

使用Embrechets 的第六章： Statistical Methods for Extremal Events

Outline

Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布

两参数的分布函数：

$$
\begin{aligned}
G_{\xi,\beta}(y) &= 1-(1+\frac{\xi}{\beta}y)^{-1/\xi}, \xi \neq 0 \\
G_{\xi,\beta}(y) &= 1-exp(-y/\beta), \xi = 0
\end{aligned}
$$

这里$y \geq 0$.
其中，ξ 是分布的一个十分重要的形状参数，β 是一个附加的比例因子。
如果$\xi > 0$, 则$G_{\xi,\beta}$ 是普通的Pareto distribution的变化版本。$\xi = 0$ 对应着指数分布，$\xi < 0$ 为Pareto type II 型分布.
当$\xi > 0$时，GDP是重尾的. 在保险中，一些大索赔的类型的损失分布通常假设二阶矩是不存在的。

$$
\begin{aligned}
G_{1,1}(y) &= 1-(1+y)^{-1} \\
G_{1,2}(y) &= 1-(1+y/2)^{-1} \\
G_{0,1}(y) &= 1-exp(-y) \\
G_{-1,\beta}(y) &= \frac{y}{\beta}
\end{aligned}
$$

估计超出额的分布

对于门限为u的超额损失分布，记为

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$$

其中$0 \leq y < x_0 - u$, 这里$x_0 \leq \infty$ 为分布F的右尾端点. 则有

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

定理 对于一大类的分布族，我们可以找到$\beta(u)$ 满足

$$\lim_{u \to x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi,\beta(u)}(y)| = 0.$$

这样我们可以假设

$$F_u(y) = G_{\xi,\beta}(y).$$

则有对$x > u$, 有

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 - F(u))G_{\xi,\beta}(x - u) + F(u) \\ &= 1 - (1 - F(u))(1 - G_{\xi,\beta}(x - u)) \end{aligned}$$

以及得到估计量

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}(1 + \hat{\xi}\frac{x - u}{\hat{\beta}})^{-1/\hat{\xi}}.$$

下面省略$\hat{\xi}$和$\hat{\beta}$中的上标。
对于$q > F(u)$,

$$VAR_q = u + \frac{\beta}{\xi}[((\frac{n}{N_u})(1-q))^{-\xi} - 1]$$

我们有

$$ES_q = VAR_q + E[X - VAR_q | X > VAR_q]$$

GDP分布的性质：

$$
\begin{aligned}
& 1 - F_{VAR_{\mathbf{q}}}(y) \\
&= \frac{P(X > y | X > u)}{P(X > VaR_q | X > u)} \\
&= (1 + \xi \frac{y-u}{\beta})^{-1/\xi} / (1 + \xi \frac{VaR_q - u}{\beta})^{-1/\xi} \\
&= 1 - G_{\xi, \beta + \xi(VaR_{\mathbf{q}} - u)}(y).
\end{aligned}
$$

注意到

$$E[X - VAR_q | X > VAR_q] = [\beta + \xi(VAR_q - u)]/(1 - \xi)$$

所以有

$$\frac{ES_q}{VAR_q} = \frac{1}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1-\xi)VAR_q}.$$

这里

$$ES_q = VAR_q \frac{1}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1-\xi)}$$

应用

极端的市场风险:

$$X_t = -(log(S_t) - log(S_{t-1})) \sim \frac{S_{t-1} - S_t}{S_{t-1}}.$$

多维极值理论.

压力测试.

分位数和ETL

尾部分布和密度函数分别为

$$F(x) = 1 - \frac{N_u}{n}[1 + \frac{\xi}{\beta}(x-u)]^{-1/\xi},$$

密度函数为

$$f(x) = \frac{N_u}{N}\frac{1}{\beta}[1 + \frac{\xi}{\beta}(x-u)]^{-1/\xi-1}.$$

可以使用不同的方法估计参数β和ξ.

令$F(y) = q$, 可以求解得到

$$\widehat{VaR} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\{[(n/N_u)(1-q)]^{-\xi} - 1\}.$$

且

$$\widehat{ETL} = \frac{\widehat{VaR}}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}.$$

	95%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
EVT					
oneday	0.9	1.5	1.7	2.5	3.0
Tendays	1.6	2.5	3.0	4.3	5.1
Normal					
oneday	1.0	1.4	1.6	1.9	2.0
Tendays	3.2	4.5	4.9	5.9	6.3

时间聚合

对于EVT，乘数参数按照T^{ϵ}的速度在成长。
厚尾现象被时间累计抵消。

Outline

1. 极值理论介绍
   - 极值分布族
   - Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布
   - 极值理论在风险管理中的应用领域
2. 极值理论在Value-at-risk 估计中的应用
   - 风险管理的需要
   - VaR的非参数估计
   - 正态假设下的具有一个资产的VaR
   - 在Pareto尾分布假设下的VaR的估计
3. 衍生品的VaR的计算问题
   - 基本原理
   - 资产组合的VaR
   - 选择持有期和置信区间
   - VaR 和风险管理

极值理论在风险管理中的应用领域

令$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布的随机变量，分布$F(x) = P(X_1 \leq x)$未知. 可以考虑

- 金融资产的日收益、或组合损失或收益的日收益
- 高频或低频的收益
- 操作风险
- 灾害保险的索赔
- 信用损失

Outline

1. 极值理论介绍
   - 极值分布族
   - Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布
   - 极值理论在风险管理中的应用领域
2. 极值理论在Value-at-risk 估计中的应用
   - 风险管理的需要
   - VaR的非参数估计
   - 正态假设下的具有一个资产的VaR
   - 在Pareto尾分布假设下的VaR的估计
3. 衍生品的VaR的计算问题
   - 基本原理
   - 资产组合的VaR
   - 选择持有期和置信区间
   - VaR 和风险管理

风险管理的需要

VaR 被广泛应用， 由两个参数： $1-\alpha$ 和T。
$VaR(\alpha, T)$ with $\alpha = 0.01$.

Outline

VaR的非参数估计

假设历史样本有n个收益数据$R_1, R_2, \cdots, R_n$， 经验分位数函数定义为

$$F_n^{-1}(\alpha)$$

则有

$$VaR(\alpha) = -SF_n^{-1}(\alpha)$$

利用统计估计理论进行讨论。

Outline

1. 极值理论介绍
   - 极值分布族
   - Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布
   - 极值理论在风险管理中的应用领域
2. 极值理论在Value-at-risk 估计中的应用
   - 风险管理的需要
   - VaR的非参数估计
   - 正态假设下的具有一个资产的VaR
   - 在Pareto尾分布假设下的VaR的估计
3. 衍生品的VaR的计算问题
   - 基本原理
   - 资产组合的VaR
   - 选择持有期和置信区间
   - VaR 和风险管理

正态假设下的具有一个资产的VaR

例子: $S=20000$. 做为$N(\mu,\sigma^2)$ 分布的α-分位数, $VaR(\alpha)$ 可以通过如下方式来估计：

$$VaR(\alpha)=-S\times\{\overline{X}+\Phi^{-1}(\alpha)s\}.$$

在$\overline{X}=-3.107\times10^{-4}, s=0.0151$时， 概率分布的0.05-分位点可以通过如下的方式来估计：

$$-3.107\times10^{-4}-1.645*0.0151=-0.0236,$$

其中， VaR(0.05)的参数估计为 $0.0326\times20000=471$.

Outline

在Pareto尾分布假设下的VaR的估计

假设收益分布具有Pareto尾分布,

$$P(R \leq -x) = L(x)x^{-\gamma}, x > 0.$$

这里$L(x)$是一个缓变函数, 满足

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1 \text{ as } x \to \infty.$$

则可以得到下面的近似公式:

$$VaR(\alpha) \sim VaR(\alpha_0)(\frac{\alpha_0}{\alpha})^{1/\gamma}.$$

上面的等式可以用来估计，其中$VaR(\alpha_0)$可以使用一非参数估计，指数α 可以通过Hill 估计来得到. 与正态分布的比较。

估计尾指标

令

$$R_{(1)} \leq R_{(2)} \leq \cdots \leq R_{(n)}$$

为$R_1, R_2, \cdots, R_n$的次序统计量. 则我们可以估计

$$\log P(R \leq R_{(k)}) \sim log(k/n).$$

可以证明 $P(R_i = R_{(k)}) = \frac{1}{n}$.

这样可以得到

$$\log(k/n) \sim \log(L) - \gamma \log(-R_{(k)}).$$

对于一个小比例的样本$m < n$, 比如说$m = 0.10n$, 如果我们拟合点$\{(log(k/n), \log(-R_{(k)}), k \leq m\}$，我们应该看到这些点近似的落在一条直线上。可以通过最小二乘来拟合 这些点， 然后减到斜度估计γ. 我们称该估计量为尾指标的回归估计量。

假设Parato 尾下的参数估计

在假设Parato 尾下，可以使用Hill 估计量, 这里

$$\hat{\alpha}_{Hill}(c) = \frac{n(c)}{\sum_{X_i > c} \log(X_i/c)}$$

其中， $n(c)$ 是X_i中超过c的次数. 通过Hill布点,使用 在0.01和0.03之间的50个均匀分别的c值， $n(0.01) = 226, n(0.03) = 16$
可以使用下面的估计：

$$VaR(\alpha) \sim VaR(\alpha_0)(\frac{\alpha_0}{\alpha})^{1/\gamma}$$

上述估计量称为半参数估计量.

衍生品的VaR的计算问题

Let $C(S, T, t, K, \sigma, r)$ be the price of an option as a function of the price of the underlying asset S, the expiration time T, the current time t, the exercise price K, the volatility σ, and the risk-free rate r.

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial S} C(S, T, t, K, \sigma, r)$$

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} C(S, T, t, K, \sigma, r)$$

$$Rho = \frac{\partial}{\partial r} C(S, T, t, K, \sigma, r)$$

$$Vega = \frac{\partial}{\partial \sigma} C(S, T, t, K, \sigma, r)$$

Outline

1. 极值理论介绍
   - 极值分布族
   - Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布
   - 极值理论在风险管理中的应用领域
2. 极值理论在Value-at-risk 估计中的应用
   - 风险管理的需要
   - VaR的非参数估计
   - 正态假设下的具有一个资产的VaR
   - 在Pareto尾分布假设下的VaR的估计
3. 衍生品的VaR的计算问题
   - 基本原理
   - 资产组合的VaR
   - 选择持有期和置信区间
   - VaR 和风险管理

基本原理

根据

$$\text{期权价格的变化} \sim \Delta \times \text{资产价格的变化}$$

则有

$$P_t^{option} - P_{t-1}^{option} = \Delta(P_t^{asset} - P_{t-1}^{asset}).$$

Let

$$L = \Delta \frac{P_{t-1}^{asset}}{P_{t-1}^{option}}$$

所以

$$\text{期权的收益} \sim L \times \text{资产的收益}$$

假设除了股票, 还拥有基于该股票的衍生品. 可以估计该衍生品的VaR, 基于先估计资产的VaR, 然后使用

$$\text{期权的收益率} \sim L \times \text{资产的收益率},$$

这里

$$L = \Delta \frac{P_{t-1}^{asset}}{P_{t-1}^{option}}$$

以及P_{t-1}^{asset} 和P_{t-1}^{option} 为资产和期权在时间t上的价格.

$$\text{衍生品的VaR} = L \times \text{资产的}VaR$$

这里 Δ 为期权价格相对于S的敏感性，定义为

$$\Delta = \frac{\partial C(S, T, t, K, \sigma, r)}{\partial S}.$$

假设衍生品的持有时间以及置信度水平是相同的.

Outline

资产组合的VaR

在考虑资产组合的VaR时，基于正态分布假设下的参数估计方法是一种很有用的方法，我们这里采用这样的方法。
当资产组合中包括股票、债券期权和外汇头寸时，估计VaR变得很复杂。 我们考虑两个比较简单的例子:
(1)股票和该股票的期权的组合
(2)股票和其他股票期权的组合

股票的组合

考虑股票的组合，均值和方差以及协方差可以直接从样本的收益中估计出来。使用

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mu_P$$

以及

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sigma_P^2$$

我们可以得到估计$\hat{\mu}_P, \hat{\sigma}_P^2$, 然后通过下式估计VaR：

$$VaR_P = -\{\hat{\mu}_P + \Phi^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}_P\}S,$$

其中S是最初投资的额度;

股票和该股票的期权的组合

假设一个组合，包含一支股票和该股票的期权的组合， 权重分别为w和 $1-w$. 令R^{stock}为该股票的收益率，

$$wR + (1-w)LR = \{w + (1-w)L\}R$$

这里L为期权的leverage，因此组合的预计收益为

$$E(wR + (1-w)LR) = \{w + (1-w)L\}\mu^{stock}$$

并且

$$VaR^{portfolio} = \{w + (1-w)L\}VaR^{stock}.$$

股票和其他股票期权的组合

令$\hat{\mu}_1^{stock}, \hat{\mu}_2^{stock}$为两支股票的预期收益， $\hat{\sigma}_1^{stock}, \hat{\sigma}_2^{stock}$ 为收益的标准差. 则有

$$\mu_P = w\mu_1^{stock} + (1-w)L_2(\mu_2^{stock})$$

$$\sigma_P = \{w^2(\sigma_1^{stock})^2 + (1-w)^2 L_2^2(\sigma_2^{stock})^2 + 2w(1-w)L_2(\sigma_{1,2}^{stock})\}^{1/2}.$$

这样通过估计参数可以得到

$$VaR_P = -\{\hat{\mu}_P + \Phi^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}_P\}S$$

Outline

选择持有期和置信区间

持有期和置信水平的选择是彼此独立的。假设$\hat{\mu}_P^{M,day}$ 和 $\hat{\sigma}_P^{M,day}$ 为估计的一天的收益率的期望和方差。 假设每天的收益率是相互独立的，则有

$$\hat{\mu}_P^{Mdays} = M\hat{\mu}_P^{1day}, \hat{\sigma}_P^{Mdays} = \sqrt{M}\hat{\sigma}_P^{1day}.$$

则有VaR可以通过如下方式来估计：

$$VaR_P = -\{M\hat{\mu}_P^{1day} + \sqrt{M}\Phi^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}_P^{1day}\}S,$$

其中S 是最初投资的额度;

Outline

1. 极值理论介绍
   - 极值分布族
   - Generalized Pareto Distribution 广义帕累托分布
   - 极值理论在风险管理中的应用领域
2. 极值理论在Value-at-risk 估计中的应用
   - 风险管理的需要
   - VaR的非参数估计
   - 正态假设下的具有一个资产的VaR
   - 在Pareto尾分布假设下的VaR的估计
3. 衍生品的VaR的计算问题
   - 基本原理
   - 资产组合的VaR
   - 选择持有期和置信区间
   - VaR 和风险管理

VaR 和风险管理

一个严重的问题是VaR不鼓励分散化， VaR不满足次可加性.