期权定价的数学模型和方法

Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing

姜礼尚 著

高等教育出版社
Higher Education Press

期权定价的
数学模型和方法

姜礼尚 著

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

期权是风险管理的核心工具。对期权定价理论作出杰出贡献的 Scholes 和 Merton 曾因此荣获 1997 年诺贝尔经济学奖。

本书从偏微分方程的观点和方法，对 Black-Scholes-Merton 的期权定价理论作了系统深入的阐述。一方面，从多个角度、多个层面阐明期权定价理论的基本思路；另一方面，充分利用偏微分方程理论和方法对期权理论作深入的定性和定量分析，其中特别对美式期权，与路径有关期权以及隐含波动率等重要问题，展开了深入的讨论。另外，本书对所涉及的现代数学内容，都有专节介绍，尽可能作到内容是自封的。

本书可用作应用数学、金融、保险、管理等专业研究生教材，也可供有关领域的研究人员和工作人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

期权定价的数学模型和方法 / 姜礼尚著．—北京：高等教育出版社，2003.1

ISBN 7-04-011995-1

Ⅰ．期…　Ⅱ．姜…　Ⅲ．期权-数学模型-研究

Ⅳ．F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 107399 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 1 月第 1 版
印　　张	21.5	印　　次	2003 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	33.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

序　言

去年我曾相继在美国 Iowa 大学数学系和同济大学应用数学系讲授“金融衍生物数学理论”的研究生课程。作者开设这门课的意图是明确的，希望用偏微分方程的观点和方法，对 Black-Scholes-Merton 的期权理论作一个系统且深入的阐述。

期权作为一种金融衍生产品，它的定价模型取决于原生资产价格的演化模型。在连续时间情形，原生资产价格演化可以通过一个随机微分方程来描述，从而在此基础上，作为它的衍生物 —— 期权的价格适合的是一个偏微分方程的定解问题。因此把偏微分方程作为工具，利用偏微分方程的理论和方法，建立各种期权定价的数学模型，导出期权的定价公式，对期权的价格结构作深入的定性分析，以及利用偏微分方程数值分析方法给出求期权价格的算法等，这是一个合乎情理的学习和研究期权定价理论的思路。本书正是沿着这个思路展开的。

本书作为一本应用数学专业的研究生教材，必须严格把握它的深度和广度。首先我们必须把本书的起点，即对先修课程的要求，尽可能放得低一点，对所涉及的现代数学的内容，尽可能做到是自封的。事实上，我们只要求读者具有高等微积分、线性代数、初等概率论以及数学物理方程的初步知识。而有关随机分析，偏微分方程数值解以及自由边界问题等方面的知识，本书都有专门章节给与介绍；其次，对于所有的数学论证，在严密性方面和具体证明的深度方面都作了适度处理，尽可能不引进比较深奥的概念，对一些比较难的证明，有的采取述而不证，有的只讲证明的大意和思路，而不究其严密性和细节，列出参考文献，给读者进一步学习和研究提供线索。此外对金融内容的选材方面，我们把全部注意力集中在能够通过 Δ- 对冲原理，建立偏微分方程模型的期权定价问题，以使得我们的论题尽可能集中，内容尽可能精炼。

本书的内容是这样安排的：除第 1 章和第 4 章介绍有关金融衍生产品的基本概念以及随机分析的基础知识以外，第 2 章，第 3 章以及第 5 章是全书的基本内容。在这三章中，我们除了讲述期权定价的数学模型和期权定价的算法和公式以外，从多个角度，多个层面，阐明 Black-Scholes-Merton 的期权定价理论的基本思路：基于市场无套利假设，通过 Δ- 对冲原理，把人们

引入一个风险中性世界，使得所有风险资产具有相同的期望回报率 —— 无风险利率，在那里期权作为一种未定权益，给出了一个独立于每个投资人风险偏好的“公平”价格。在连续时间情形，对于标准欧式期权这个定价公式就是著名的 Black-Scholes 公式。本书的第 6 章（包括第 7 章 §7.7 ）研究美式期权的定价理论。由于美式期权具有提前实施功能，因此持有人需要选取最佳的实施策略以取得满意的回报。这个问题在数学上表现为一类自由边界问题，在这里，自由边界就是美式期权的最佳实施边界。由于它是一个非线性问题，一般不可能得到解的明显表达式，因此定性的数学分析和定量的数值计算就显得尤为重要，它自然成为本书的重点和高潮，在那里偏微分方程理论和方法得到了充分的展示。第 7 ~ 9 章研究了多资产期权和各种与路径有关期权的定价模型和方法。在那里给出了一些新的偏微分方程定价模型以及相应求解方法。第 10 章作为本书的最后一章，我们研究了期权定价的反问题，即利用期权市场信息重构原生资产波动率 —— 隐含波动率问题。我们把它转化为一个最佳控制问题，并提出了一个适定的算法。

在本书的编写过程中，作者得到了很多方面的关心，支持和帮助。首先我要感谢同济大学应用数学系金融数学课题组的老师和研究生们，他（她）们不仅帮我校阅了书稿，并提出了很多有益的修改意见。其中，我特别要感谢我的两位研究生，罗俊和方凝，她们花了大量精力，本着一丝不苟、精益求精的态度，把本书打印出来。没有她们的辛勤劳动，本书是不可能如期付印的。

本书的出版得到了高教出版社张小萍同志的支持和帮助，并得到上海市学位委员会 2001 年度研究生教育专项经费的资助，在此一并表示感谢。

姜礼尚

2002 年 8 月于同济大学

目　录

第一章　风险管理与金融衍生物

本章作为全书的开篇，将对金融衍生物的一些基本概念、特性和定价原理作一个简明和直观的介绍，特别对本书研究的主要课题——期权定价问题给出一个明确的表述.

§1.1　风险和风险管理

风险 (risk)—— 结果的不确定性.

风险可以使人们意外获益, 风险亦可以使人们意外受损, 甚至带来灾难.

在金融市场、商品市场上，风险无处不在：资产风险（股票……），利率风险，货币风险（汇率），信用风险，商品风险等.

面对风险有两种截然不同的态度：

1. **回避风险**：将已判明的风险量化，并加以控制，即构造一个方案将已暴露的风险进行管理，把它转化为所希望的形式. 这里大致有两种方案可供选择：a. *用确定性来代替不确定性.* 也就是，在消除由于风险带来不利的可能的同时，宁愿放弃由于风险带来的意外获益的机会. b. *消除不利的风险的同时，保留可能意外获益的有利机会，为此宁愿付出一定代价.*

2. **承担风险**：甘愿用资金去冒险，从风险资产价格的频繁变化中，期望通过投资去获取风险利润. 希望从市场价格的变动中获取风险利润的行为称为 **投机** (speculation).

金融衍生物 (financial derivatives) 是一种风险管理的工具，它的价值依赖于其他更基本的 **原生资产**（或称 **标的资产**）(underlying assets) 的价格变化.

在金融市场, 商品市场有很多形式的金融衍生工具, 但 **远期合约** (forward contracts)，**期货** (futures) 和 **期权** (options) 是三种最基本的金融衍生工具. 如果把原生资产设定为股票，债券，汇率或商品等，那么为了对这些原生资产进行风险管理，相应的有：股票期货（期权），债券期货（期权），货币期货（期权）以及商品期货（期权）等.

利用金融衍生物对原生资产进行风险管理的基本策略是套期保值（或对冲 hedging），即交易者在现货市场和期货（权）市场同时构作两个数量相同、方向相反的头寸 (positions). 制定这个风险管理策略的出发点是：人们认为在一般情况下，现货远期价格和期货价格的变动方向和幅度基本一致，现（期）货市场的亏损可以用期（现）货市场的盈利来补偿，从而达到防止或减少因价格波动造成的损失，转移和分散价格波动所带来的风险.

金融衍生物定价以及利用套期保值对风险进行管理是本书研究的对象.

§1.2 远期合约与期货

远期合约 —— 在未来确定时间，以确定价格购（销）一定数量和质量的某原生资产的协议.

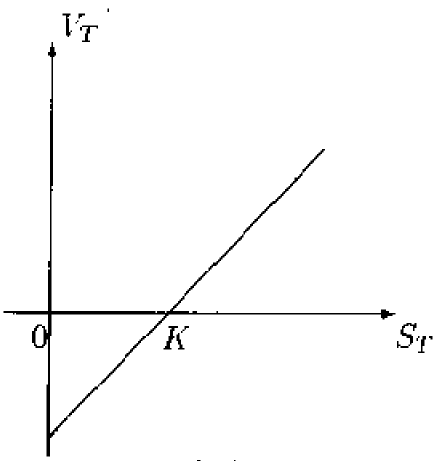
远期合约是一张用确定性来代替风险的协议.

合约的购人方称为 **多头** (long position)，销售方称为 **空头** (short position). 合约中标明的确定价格和确定时间称为 **交割价** (delivery price) 和 **交割日** (maturity).

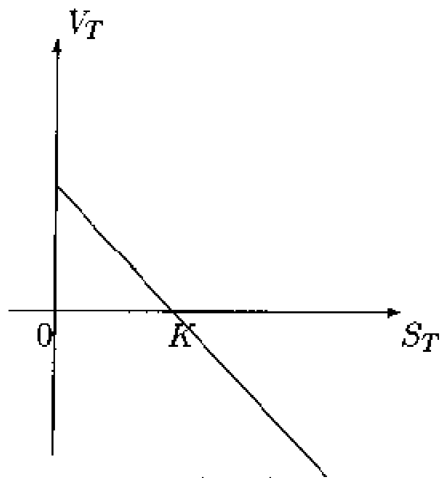
设 K—— 交割价格，T—— 交割日，则远期合约在交割日的 **收益** (payoff) V_T：

$$V_T = S_T - K, \quad (\text{多头方})$$
$$V_T = K - S_T, \quad (\text{空头方})$$

这里 S_T 表示原生资产在交割日 $t = T$ 的价格.



多头方



空头方

远期合约一般都在 场外交易（ over-the-counter，简写为 OTC ）.

期货 — 与远期合约相同也是一张在未来的确定时间，按确定价格购（销）一定数量和质量的原生资产的协议，但它是由远期合约逐步标准化而形成的．它们之间的区别在于：

a. 期货交易通常是在交易所进行，

b. 期货合约具有标准化条款，

c. 期货合约上的交割价格（期货价格）通常是由场内交易决定，它依赖于供求关系.

§1.3 期权

期权 —— 持有人在确定时间，按确定价格向出售方购（销）一定数量和质量的原生资产的协议，但他不承担必须购入（销售）的义务.

期权持有人具有按协议条款在确定时间实施这个协议的权利，但不负有必须实施这个协议的义务．在期权合约中，确定价格称为 **实施价格** (exercise price) 或 **敲定价格** (strike price)，确定日期称为 **到期日** (expiry date)，按期权合约规定执行购入或销售原生资产称为 **实施** (exercise).

期权按合约中购入和销售原生资产来划分：

看涨期权 (call option) 是一张在确定时间，按确定价格有权购入一定数量和质量的原生资产的合约.

看跌期权 (put option) 是一张在确定时间，按确定价格有权出售一定数量和质量的原生资产的合约.

期权按合约中有关实施的条款来划分：

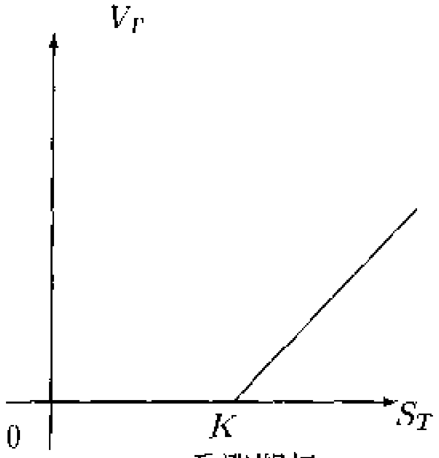
欧式期权 (European options) 只能在合约规定的到期日实施.

美式期权 (American options) 能在合约规定的到期日以前(包括到期日）任何一个工作日实施.

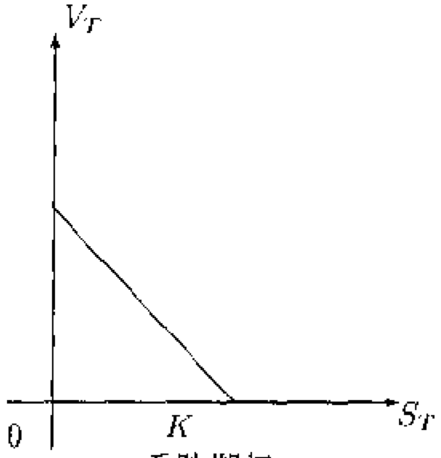
设 K—— 敲定价格， T — 到期日，则在到期日期权的收益（即期权的价值） V_T：

$$V_T = (S_T - K)^+, \qquad (\text{看涨期权})$$
$$V_T = (K - S_T)^+, \qquad (\text{看跌期权})$$

这里 S_T 表示原生资产在到期日 $t = T$ 的价格.



看涨期权



看跌期权

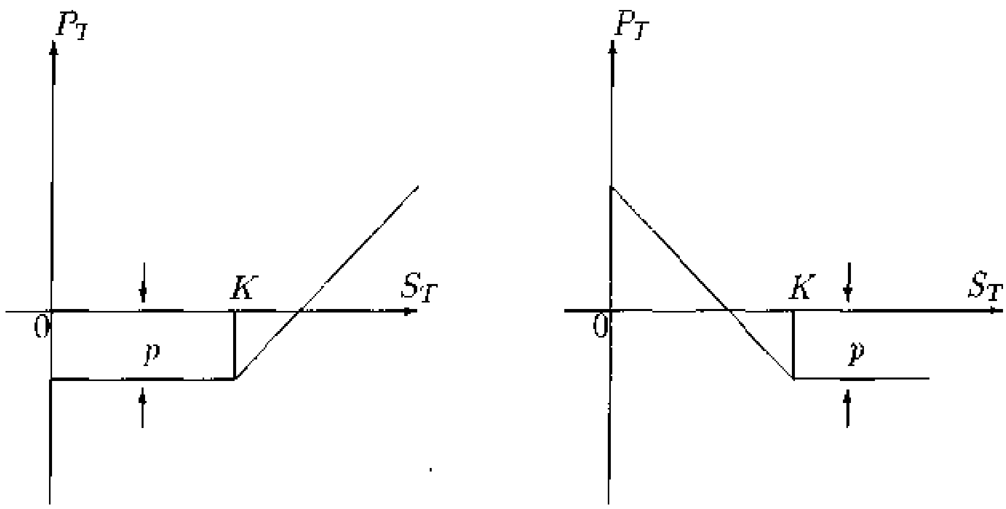
期权是一种未定权益 (contingent claim). 以看涨期权为例, 在未来的期权到期日若当原生资产价格 S_T 大于敲定价格 K , 则合约赋予期权持有人利用敲定价 K 购入原生资产的权利 (从而获得利益), 否则期权一文不值等于一张废纸. 因此期权定价本质上就是对这一类未定权益定价. 这件事的意义将远远超出衍生物证券定价的范围, 可以在很多其他领域如投资、保险等找到应用.

为了取得这个未定权益所需要付出的代价称为 **期权金** (premium). 由于客户的需要是千变万化的, 因此金融机构为此设计出的金融产品 —— 期权亦是多种多样的, 每一种期权都需要定价. 期权定价就是本书需要讨论的主要内容. 考虑到期权金 p 的存在, 因此在期权到期日期权持有人的总收益 P_T 为

$$[\text{总收益}] = [\text{到期日期权的收益}] - [\text{期权金}],$$

即

$$P_T = (S_T - K)^+ - p, \qquad (\text{看涨期权})$$
$$P_T = (K - S_T)^+ - p. \qquad (\text{看跌期权})$$



§1.4 期权定价

期权作为一种衍生证券，它的定价决定于原生资产价格的变化．由于原生资产是一种风险资产，因此它的价格变化是随机的．由此产生的期权的价格变化亦必是随机的．但是一旦原生资产价格确定下来，那么作为它的衍生证券（期权）的价格亦将随之确定．这就是说，若在 t 时刻原生资产价格为 S_t，期权价格为 V_t，则存在函数 $V(S,t)$ 使得

$$V_t = V(S_t, t),$$

这里 $V(S,t)$ 是一个确定的二元函数，我们的任务就是通过建立偏微分方程模型去确定这个函数．

在期权的到期日期权的价值 V_T 是确定的，它就是期权的收益：

$$V_T = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K - S_T)^+. & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

期权定价问题 就是求 $V = V(S,t), (0 \le S < \infty, 0 \le t \le T)$，使得

$$V(S,T) = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K - S_T)^+. & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

特别是在期权生效日 $t = 0$，若股价为 S_0，问它的期权金

$$p = V(S_0, 0) = ?$$

因此期权定价问题是一个 **倒向问题**.

§1.5 交易者的类型

参与衍生证券市场交易的人群有以下三类:

1. **套期保值者** (hedger).

套期保值 (hedging) : 两面下注避免损失. 大多数生产商或贸易商参与衍生证券市场交易的目的是转移或减少现货市场的价格风险, 确保本身获取预期利润.

例 某中国公司 90 天以后要支付英国供应商一百万英镑. 该公司面临汇率变动的风险. 如汇率上扬, 则公司将增加支付成本, 从而直接影响它的预期利润. 若当天的汇率是 12.5 元 / 英镑. 估计到汇率有上扬的可能性, 该公司考虑以下套期保值的对策:

方案 1 购买一张远期合约保证在 90 天以后, 以 12 625 000 元购入一百万英镑从而锁定了支付英镑的人民币成本.

方案 2 购买一张看涨期权保证在 90 天以后, 以 12 500 000 元购入一百万英镑, 为此该公司付出期权金 (按 2% 计算) 250 000 元.

现把采取不同避险策略所产生的效果列表于下:

即期汇率 (元 / 镑)	90 天后汇率 (元 / 镑)	不采取套期保值	远期合约套期保值	购入看涨期权套期保值
12.5	上扬 13	1 300 万元	1 262.5 万元	1 275 万元
	下跌 12	1 200 万元	1 262.5 万元	1 275 万元

从这个例子可以看出: 该公司如不采取套期保值策略, 则当汇率上扬时就会增加支付成本, 影响公司的最终利润. 如采取签订远期合约, 就锁定了 90 天以后支付的成本. 但它在回避汇率上扬所带来的不利风险同时, 放弃了汇率可能下跌带来的意外获益的机会. 采取购人看涨期权, 公司可以防止汇率上扬带来的损失, 同时仍然可以从汇率下跌中获益, 但为此必须支付期权金.

2. **投机者** (speculator)

投机 (speculation) : 甘愿用资金去冒险, 不断地买进卖出衍生证券 (期货、期权), 希望从市场价格的经常变化中获取利润的行为.

投机者承担了价格变动所带来的风险，希望在交易中由于持有某种头寸（多头或空头），而获取风险利润.

投机的出现是套期保值业务存在的必要条件和业务发展的必然结果. 投机者恰好承担了套期保值者转嫁出去的价格变动风险，所以投机者是衍生证券市场风险的主要承担者，投机是衍生证券市场中不可缺少的润滑剂. 频繁的投机活动，活跃了市场，并使套期保值策略得以实施.

投资于期权与直接投资于原生资产相比具有 **高回报**、**高风险** 的特点. 其原因是：期权投资的 **杠杆作用** (leverage) 很大，投资人通过投入少量资金（支付期权金），而实际进行的是比它大十几倍甚至几十倍的原生资产的投机.

例 若某股票 4 月 30 日的股价为 666 元，考虑到该股票在 8 月份可能上扬，投资人可以采取两种投资策略：

A. 投资人在 4 月 30 日花费现金 666 000 买入 1000 股股票；

B. 投资人购入一张 8 月 22 日到期的看涨期权：以敲定价格 680 元购入 1000 股股票，假设为此投资人付出期权金 39 000 元.

现按这两种情形考察他的投资收益和 **回报** (return)（不考虑利率支付）.

情形 I 假如 8 月 22 日股价上扬到 730 元.

投资策略 A. 投资人在 8 月 22 日卖出的持有股票获得现金 730 000，它的回报率

$$回报 = \frac{730\ 000 - 666\ 000}{666\ 000} \times 100\% = 9.6\%;$$

投资策略 B. 投资人实施他持有的期权，所取得的收益是

$$收益 = 730\ 000 - 680\ 000 = 50\ 000元$$

$$回报 = \frac{50\ 000 - 39\ 000}{39\ 000} \times 100\% = 28.2\%.$$

情形 II 假如 8 月 22 日股价非但没有上扬，反而下跌到 660 元.

投资策略 A. 投资人的损失是

$$损失 = 666\ 000 - 660\ 000 = 6000元,$$

$$回报 = \frac{660\ 000 - 666\ 000}{666\ 000} \times 100\% = -0.9\%;$$

投资策略 B. 投资人的收益是

$$收益 = (660\ 000 - 680\ 000)^+ = 0,$$

投资人将失去全部投资 39 000 元，它的损失率是 100%.

3. **套利者** (arbitrageur)

套利 (arbitrage)：基于对同一类风险资产的观察，利用市场价格的差异，在不同的市场同时进行交易，获取瞬时无风险利益. 套利与投机不同：投机是基于对未来价格水平的 **预测**，以牟取利润，这是 **有风险的**. 套利是利用不同市场在价格联系上的差异的 **现实**，以套取利润，这是 **无风险的**.

套利机会不可能持久，因为套利机会一旦出现，那么随着套利者的参与，不同市场价格必将趋于平衡，机会就随之消失. 因此本书的全部讨论都建立在不存在套利机会的基础上，这在金融学上是合理的.

第二章 无套利原理

中国民间有句谚语“天上不掉馅饼”, 西方亦有一句谚语“ there's no such thing as a free lunch ” (世上没有免费的午餐). 这两句谚语在金融上的意思: 不承担风险就不存在瞬间获取利益的机会. 用一句金融术语, 即 不存在套利的机会.

无套利原理 (arbitrage-free principle) 是期权定价理论的基础. 虽然由于本章没有对原生资产价格的演化给出一个模型, 因此不可能对它的衍生物(期权)的价格给出定量的回答, 但是基于无套利原理仍然可以导出一系列期权定价的性质, 对期权定价给出十分深刻的定性刻画 ([30]).

§2.1 金融市场与无套利原理

考虑由无风险资产(国债) B 与 n 个风险资产(股票、期权……) $S_i(i=1,\cdots,n)$ 构成的金融市场. 它们的价格都是时间的 t 函数, 即 $B=B_t$ 和 $S_i=S_{it},(i=1,\cdots,n)$. 在时段 $[t_0,t_1]$ 内, 它们的收益是 $B_{t_1}-B_{t_0}$ 和 $S_{it_1}-S_{it_0}$, 它们的回报是 $\dfrac{B_{t_1}-B_{t_0}}{B_{t_0}}$ 和 $\dfrac{S_{it_1}-S_{it_0}}{S_{it_0}},(i=1,\cdots,n)$. 无风险资产与风险资产的基本区别在于: 如果在 $t=t_0$ 时刻, 考虑 $t=t_1$ 时刻投资的回报, 那么对于 无风险资产的回报是确定的, 而对于 风险资产的回报是不确定的, 它是一个随机变量.

一个投资者采取的 **投资策略** (investment strategy), 它表现为选取一个适当的 **投资组合** (portfolio)Φ:

$$\Phi=\alpha B+\sum_{i=1}^{n}\phi_i S_i,$$

其中 $\{\alpha,\phi_1,\cdots,\phi_n\}\in\mathbf{R}^{N+1}$.$\alpha,\phi_i(i=1,\cdots,n)$ 表示投资于该资产的份额. 我们有时也把 $\{\alpha,\phi_1,\cdots,\phi_n\}$ 称为投资策略.

从严格的意义上来讲, 这里 α 和 ϕ_i $(i=1,\cdots,n)$ 亦都是时间 t 的函数, 这说明投资者是随时在调整他的投资策略. 但是在两个相邻的交易日 $t=t_m$ 和 $t=t_{m+1}$ 之间, $\alpha,\phi_i,(i=1,\cdots,n)$ 都是不变的.

设 $V_t(\Phi)$ 是投资组合 Φ 在时刻 t 的值(或称 **财富** wealth，简写为 Φ_t)，即

$$\Phi_t = V_t(\Phi) = \alpha_t B_t + \sum_{i=1}^{n} \phi_{it} S_{it}.$$

设 $V_{t_{m+1}}(\Phi) - V_{t_m}(\Phi)$ 是投资组合 Φ 在投资策略 $\{\alpha_{t_m}, \phi_{1t_m}, \cdots, \phi_{nt_m}\}$ 下，在时段 $[t_m, t_{m+1}]$ 内获取的收益：

$$V_{t_{m+1}}(\Phi) - V_{t_m}(\Phi) = \alpha_{t_m}[B_{t_{m+1}} - B_{t_m}] + \sum_{i=1}^{n} \phi_{it_m}[S_{it_{m+1}} - S_{it_m}].$$

若在整个进行交易的 $[0,T]$ 时段内，投资人在决定投资策略 Φ 以后，没有加入新资金，也没有资金被消耗或抽走，则称整个交易过程是 **自融资的** (self-financing)，或称该投资策略 Φ 是自融资的.

定义 2.1 一个自融资投资策略 Φ 称为在 $[0,T]$ 内存在 **套利机会** (arbitrage opportunity)，如果存在 $T^* \in (0,T]$，使得当

$$V_0(\Phi) = 0,$$

有

$$V_{T^*}(\Phi) \geq 0,$$

且

$$\text{Prob}\{V_{T^*}(\Phi) > 0\} > 0,$$

这里 $\text{Prob}\{\omega\}$ 表示事件 ω 发生的 概率 (probability).

定义 2.2 若对于任意自融资投资策略 Φ 在任意时段 $[t_1, t_2] \subseteq [0,T]$ 内都不存在套利机会，那么称市场在时段 [0,T] 内是 **无套利的** (arbitrage-free).

定理 2.1 若市场在时段 [0,T] 内是无套利的，则对于任何两个投资组合 Φ_1 和 Φ_2 ，如果

$$V_T(\Phi_1) \geq V_T(\Phi_2), \tag{2.1.1}$$

以及

$$\text{Prob}\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} > 0 \tag{2.1.2}$$

成立，那么对于任意 $t \in [0,T)$ ，必有

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2). \tag{2.1.3}$$

证明 假如不然，存在 $t^* \in [0,T]$ ，使得

$$V_{t^*}(\Phi_1) \leq V_{t^*}(\Phi_2).$$

记

$$E = V_{t^*}(\Phi_2) - V_{t^*}(\Phi_1) \geq 0.$$

现在 $t = t^*$ 时形成投资组合

$$\Phi_c = \Phi_1 - \Phi_2 + \frac{E}{B_{t^*}}B,$$

其中 B 是无风险债券， $B_{t^*} = V_{t^*}(B)$. 易见

$$V_{t^*}(\Phi_c) = V_{t^*}(\Phi_1) - V_{t^*}(\Phi_2) + \frac{E}{B_{t^*}}V_{t^*}(B) = 0, \tag{2.1.4}$$

而在 $t = T$ 时刻，由于

$$V_T(\Phi_c) = V_T(\Phi_1) - V_T(\Phi_2) + \frac{E}{B_{t^*}}V_T(B),$$

设无风险利率为 r. 若不计复利，则

$$V_T(B) = V_{t^*}(B)[1 + r(T - t^*)] = B_{t^*}[1 + r(T - t^*)].$$

故由定理假设 (2.1.1),(2.1.2) 、知

$$V_T(\Phi_c) \geq E[1 + r(T - t^*)] \geq 0, \tag{2.1.5}$$

且

$$\text{Prob}\{V_T(\Phi_c) > 0\} \geq \text{Prob}\{V_T(\Phi_1) - V_T(\Phi_2) > 0\} > 0. \tag{2.1.6}$$

由 (2.1.4)—(2.1.6) ，根据定义 2.1 推得投资组合 Φ_c 在 $[t^*,T]$ 时段内存在套利机会. 从而与定理假设矛盾.

推论 2.1 若在 $[0,T]$ 内市场无套利，投资组合 Φ_1 与 Φ_2 有

$$V_T(\Phi_1) = V_T(\Phi_2),$$

那么对任意时刻 $t \in [0,T]$，必有

$$V_t(\Phi_1) = V_t(\Phi_2). \tag{2.1.7}$$

证明 考虑

$$\Phi_\epsilon = \Phi_1 - \Phi_2 + \epsilon B \qquad (\epsilon > 0),$$

由推论的假设

$$V_T(\Phi_\epsilon) = \epsilon V_T(B) > 0.$$

由定理 2.1，对任意 $t \in [0,T]$，有

$$V_t(\Phi_\epsilon) = V_t(\Phi_1) - V_t(\Phi_2) + \epsilon V_t(B) > 0.$$

即

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2) - \epsilon V_t(B).$$

令 $\epsilon \to 0$，得

$$V_t(\Phi_1) \geq V_t(\Phi_2).$$

同理可得

$$V_t(\Phi_1) \leq V_t(\Phi_2).$$

故对任意 $t \in [0,T]$，有

$$V_t(\Phi_1) = V_t(\Phi_2).$$

从而 (2.1.7) 成立.

§2.2 欧式期权定价估计及平价公式

基本假设

1. 市场不存在套利机会,
2. 证券交易不付交易费用（市场是无摩擦的）,
3. 无风险利率 r 是常数.

记号

S_t—— 风险资产价格（为简单计，以下都认为是股价），

c_t —— 欧式看涨股票期权价格，

p_t—— 欧式看跌股票期权价格，

C_t—— 美式看涨股票期权价格，

P_t—— 美式看涨股票期权价格，

K—— 期权的敲定价格，

T—— 期权的到期日，

r—— 无风险利率.

定理 2.2 对于欧式期权价格，以下的估计式成立：

$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ < c_t < S_t, \tag{2.2.1}$$

$$(Ke^{-r(T-t)} - S_t)^+ < p_t < Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.2.2}$$

证明 先证 c_t 的下界估计. 在时刻 $t=0$ 构造两个投资组合：

Φ_1 是一张欧式看涨股票期权以及把现金 Ke^{-rT} 存在银行（相当买一张金额相同的无风险债券）；

Φ_2 是一张股票.

众所周知，如考虑复利，对于一张在 $t=0$ 时刻面值为 Ke^{-rT} 的无风险债券 B（或把它作为现金存入银行），若它的利率为 r，则它在 t 时刻的值 B_t 适合常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dB_t}{dt} = rB_t, & (t \geq 0) \\ B_t|_{t=0} = Ke^{-rT}. \end{cases}$$

它的解是

$$B_t = Ke^{-r(T-t)}.$$

因此

$$\begin{aligned} V_T(\Phi_1) &= V_T(c) + V_T(Ke^{-rT}) \\ &= (S_T - K)^+ + (Ke^{-rT})e^{rT} \\ &= (S_T - K)^+ + K \\ &= \begin{cases} S_T, & S_T \geq K, \\ K, & S_T < K; \end{cases} \end{aligned}$$

而 $V_T(\Phi_2) = S_T$ ，故在 $t = T$ 时,

$$V_T(\Phi_1) \geq V_T(\Phi_2),$$

且

$$\mathrm{Prob}\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} = \mathrm{Prob}\{K - S_T > 0\} > 0.$$

故由定理 2.1 ，对于任意 $t \in [0, T]$,

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2),$$

即

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} > S_t. \tag{2.2.3}$$

此外在 t 时刻考虑一张欧式看涨股票期权 c ，由于

$$V_T(c) = (S_T - K)^+ \geq 0,$$

而

$$\mathrm{Prob}\{V_T(c) > 0\} = \mathrm{Prob}\{S_T - K > 0\} > 0,$$

故由定理 2.1 ，当 $t < T$ 时,

$$V_t(c) > 0;$$

即

$$c_t > 0. \tag{2.2.4}$$

由不等式 (2.2.3),(2.2.4) 立得 (2.2.1) 中关于 c_t 的下界估计. 在 (2.2.1),(2.2.2) 中，有关 c_t ， p_t 的其他估计，证明相仿. 读者可以作为习题，自己完成.

定理 2.3 看涨 — 看跌期权的平价公式 (call-put parity)

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t. \tag{2.2.5}$$

证明 在 $t = 0$ 时刻构造两个投资组合:

$$\Phi_1 = c + Ke^{-rT},$$
$$\Phi_2 = p + S.$$

考虑它们在 $t=T$ 时刻的值

$$\begin{aligned}V_T(\Phi_1) &= V_T(c)+V_T(Ke^{-rT})\\ &= (S_T-K)^+ + K = \max\{K, S_T\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_T(\Phi_2) &= V_T(p)+V_T(S)\\ &= (K-S_T)^+ + S_T = \max\{K, S_T\}.\end{aligned}$$

故

$$V_T(\Phi_1)=V_T(\Phi_2).$$

由推论 2.1 推得

$$V_t(\Phi_1)=V_t(\Phi_2), \qquad (t<T)$$

即 (2.2.5) 成立.

这个公式非常重要. 它表明对于两张具有相同有效期, 相同敲定价格的欧式看涨和看跌期权, 只要知道其中任意一张期权的价格, 那么由 (2.2.5) 可以得到另一张期权的价格.

§2.3 美式期权定价估计及提前实施

美式期权具有提前实施条款. 在什么情况下考虑提前实施呢? 以美式看涨期权为例, 如果

$$C_t > (S_t-K)^+,$$

即在 t 时刻, 期权的价值大于实施所带来的收益, 很显然在这个情况下提前实施是不明智的.

那么有没有可能 $C_t < (S_t-K)^+$ 呢? 回答是否定的. 事实上我们有下面的结果:

定理 2.4 若市场是无套利的, 则对一切 $t\in[0,T]$ 有

$$C_t \geq (S_t-K)^+, \tag{2.3.1}$$

$$P_t \geq (K-S_t)^+. \tag{2.3.2}$$

证明 以美式看涨期权为例. 假如不然, 即存在 $t\in[0,T]$ 时刻

$$C_t < S_t - K, \tag{2.3.3}$$

（因为 $C_t > 0$，故 (2.3.3) 右端的正部符号可以去掉.）那么投资人可以在 t 时刻购入一张美式看涨期权，花费现金 C_t，然后立即实施这张期权，即付出 K 购入股票 S，并把它拿到现货市场出售，得款 S_t. 这样由 (2.3.3) 在 t 时刻它的现金流 $S_t - C_t - K > 0$，即投资人瞬时获得无风险利益（即套利）. 根据市场是无套利的假设，这是不可能的，即 (2.3.1) 成立.

同理可证 (2.3.2).

对于具有相同有效期 T 和相同敲定价格 K 的美式和欧式期权，由于美式期权具有提前实施条款，因此它的获益机会必定不会小于欧式期权的获益机会，因此

$$C_t \geq c_t, \tag{2.3.4}$$

$$P_t \geq p_t. \tag{2.3.5}$$

即美式期权的定价总是不低于欧式期权的定价.

定理 2.5 若股票 S 不付红利，则

$$C_t = c_t,$$

即"提前实施"条款对于不付红利的美式股票期权是没有意义的.

证明 由 (2.3.4),(2.2.1)，对于任意 $0 \leq t < T$ 有

$$C_t \geq c_t > (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S_t - K)^+.$$

这表明提前实施是不明智的.

但是定理 2.5 对于美式看跌期权以及对支付红利的美式看涨期权都不成立！事实上，对于美式看跌股票期权，如果股价下跌到一定程度，提前实施是必要的，否则将蒙受损失.

举例来说，若在时刻 t，

$$S_t < K(1 - e^{-r(T-t)}),$$

那么持有人必须提前实施. 因为持有人在期权到期日的收益在任何情况下一定不会超过 K. 但若在 t 时刻提前实施，当时获益

$$K - S_t > K - K(1 - e^{-r(T-t)}) = Ke^{-r(T-t)},$$

把这个收益存入银行，它在 $t=T$ 的总收入将超过 K.

同样对于支付红利的美式看涨期权，如果股价上涨到相当程度，提前实施亦是必要的，否则将蒙受损失．事实上，若在 t 时刻股价充分大，那么若在 t 时刻实施期权，即以敲定价格 K 购买一份股票，把它与在期权的到期日 $t=T$ 以敲定价格 K 购买一份股票相比较，其差别在于投资人必须为筹借资金 K 而多付了利息 $K(e^{r(T-t)}-1)$. 但若考虑红利，由于红利率 $q>0$, 因此当股价充分大时，由股票带来的红利收益足以抵消并超过由于筹措资金 K 所支付的利息，所以提前实施是有利的.

对于美式期权不存在类似于定理 2.3 的平价公式，但存在下面的估计式.

定理 2.6　*若 C,P 分别是没有红利的美式看涨和看跌期权，则*

$$S_t-K<C_t-P_t\le S_t-Ke^{-r(T-t)}. \tag{2.3.6}$$

证明　由 (2.3.5),(2.2.5) 以及定理 2.5，我们有

$$P_t\ge p_t=c_t+Ke^{-r(T-t)}-S_t=C_t+Ke^{-r(T-t)}-S_t,$$

即不等式 (2.3.6) 右边部分成立.

为了证明不等式 (2.3.6) 的左边部分，在 t 时刻，构造两个投资组合

$$\Phi_1=C+K,$$

$$\Phi_2=P+S.$$

若在时段 $[t,T]$ 上，美式看跌期权 P 不提前实施，那么

$$V_T(\Phi_1)=(S_T-K)^++Ke^{r(T-t)},$$
$$V_T(\Phi_2)=(K-S_T)^++S_T.$$

故当 $K\ge S_T$ 时，

$$V_T(\Phi_1)=Ke^{r(T-t)}>K=V_T(\Phi_2).$$

当 $K<S_T$ 时，

$$V_T(\Phi_1)=S_T+K(e^{r(T-t)}-1)>S_T=V_T(\Phi_2).$$

即

$$\mathrm{Prob}\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} = 1. \tag{2.3.7}$$

若在 $\tau(t<\tau<T)$ 时刻提前实施美式看跌期权 P，则

$$V_\tau(\Phi_1) = C_\tau + Ke^{r(\tau-t)},$$

$$V_\tau(\Phi_2) = (K-S_\tau)^+ + S_\tau.$$

由于定理 2.5 以及 (2.2.1)，

$$V_\tau(\Phi_1) > (S_\tau - K)^+ + Ke^{r(\tau-t)} \geq V_\tau(\Phi_2),$$

故

$$\mathrm{Prob}\{V_\tau(\Phi_1) > V_\tau(\Phi_2)\} = 1. \tag{2.3.8}$$

由无套利原理及定理 2.1 推得：在时刻 t 必有

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2),$$

即

$$C_t + K > P_t + S_t.$$

从而不等式 (2.3.6) 左边部分成立.

§2.4 期权定价对敲定价格的依赖关系

期权定价依赖于敲定价格的变化，基于无套利原理，它们之间存在一些重要的关系. 为讨论简单起见，在这一节中，我们假定作为原生资产——股票是不付红利的.

定理 2.7 设 $c_t(K)$ 是敲定价格为 K 的欧式看涨期权的价格，则对于两张具有相同到期日的欧式期权 $c(K_1)$ 和 $c(K_2)$，当 $K_1 > K_2$ 时，

$$0 \leq c_t(K_2) - c_t(K_1) \leq K_1 - K_2. \tag{2.4.1}$$

这个定理的金融意义是明显的，即到期日相同的两张看涨欧式期权，敲定价愈大，合约留给持有人的获利空间愈小，因此价格愈低；但它们之间的差价不可能超过二个不同敲定价的差.

证明 我们只证不等式 (2.4.1) 右边部分. 它的左边部分的证明留给读者.

在 t 时刻构造两个投资组合:

$$\Phi_1 = c(K_1) + K_1,$$

$$\Phi_2 = c(K_2) + K_2.$$

在期权到期日 $t = T$,

$$\begin{aligned}
V_T(\Phi_1) &= c_T(K_1) + K_1 e^{r(T-t)} = (S_T - K_1)^+ + K_1 e^{r(T-t)}, \\
V_T(\Phi_2) &= (S_T - K_2)^+ + K_2 e^{r(T-t)}.
\end{aligned}$$

分三种情形讨论:

1. 当 $S_T > K_1$ 时,

$$\begin{aligned}
V_T(\Phi_1) &= S_T + K_1(e^{r(T-t)} - 1) \\
&> S_T + K_2(e^{r(T-t)} - 1) \\
&= V_T(\Phi_2);
\end{aligned}$$

2. 当 $K_2 < S_T < K_1$ 时,

$$\begin{aligned}
&V_T(\Phi_1) = K_1 e^{r(T-t)}, \\
&V_T(\Phi_2) = S_T + K_2(e^{r(T-t)} - 1),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
V_T(\Phi_1) - V_T(\Phi_2) &= (K_1 - K_2)e^{r(T-t)} + (K_2 - S_T) \\
&> (K_1 - K_2)(e^{r(T-t)} - 1) > 0;
\end{aligned}$$

3. 当 $S_T < K_2$ 时,

$$V_T(\Phi_1) = K_1 e^{r(T-t)} > K_2 e^{r(T-t)} = V_T(\Phi_2).$$

因此, 在 $t = T$ 时刻,

$$\mathrm{Prob}\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} = 1.$$

从而由定理 2.1 立得：对于任意 $t < T$ 有

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2),$$

即不等式 (2.4.1) 的右边成立.

定理 2.8 对于具有相同到期日的欧式看跌期权，若 $K_1 > K_2$，则

$$0 \le p_t(K_1) - p_t(K_2) \le K_1 - K_2. \tag{2.4.2}$$

定理 2.9 欧式看涨（跌）期权的价格 $c_t(K)$ $(p_t(K))$ 是 K 的凸函数，即设 $K_1 > K_2$，

$$K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2, \qquad (0 \le \lambda \le 1) \tag{2.4.3}$$

则有

$$c_t(K_\lambda) \le \lambda c_t(K_1) + (1-\lambda)c_t(K_2), \tag{2.4.4}$$

$$p_t(K_\lambda) \le \lambda p_t(K_1) + (1-\lambda)p_t(K_2). \tag{2.4.5}$$

证明 我们只证明 (2.4.4)，不等式 (2.4.5) 的证明留给读者. 在 t 时刻 $(t < T)$ 构造两个投资组合

$$\Phi_1 = \lambda c(K_1) + (1-\lambda)c(K_2),$$

$$\Phi_2 = c(K_\lambda).$$

在期权的到期日 $t = T$,

$$V_T(\Phi_1) = \lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)^+,$$

$$V_T(\Phi_2) = (S_T - K_\lambda)^+.$$

分四种情形讨论：

1. 当 $S_T \ge K_1$ 时,

$$V_T(\Phi_1) = S_T - K_\lambda = V_T(\Phi_2);$$

2. 当 $K_\lambda \le S_T < K_1$ 时，

$$V_T(\Phi_1) = (1-\lambda)(S_T - K_2),$$
$$V_T(\Phi_2) = (S_T - K_\lambda) = \lambda(S_T - K_1) + (1-\lambda)(S_T - K_2),$$

故

$$V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2);$$

3. 当 $K_2 < S_T < K_\lambda$ 时，

$$V_T(\Phi_1) = (1-\lambda)(S_T - K_2),$$
$$V_T(\Phi_2) = 0,$$

故

$$V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2);$$

4. 当 $S_T < K_2$ 时，

$$V_T(\Phi_1) = V_T(\Phi_2) = 0.$$

故在 $t = T$ 时刻，

$$V_T(\Phi_1) \ge V_T(\Phi_2),$$

而

$$\text{Prob}\{V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)\} = \text{Prob}\{K_2 < S_T < K_1\} > 0.$$

故由无套利原理及定理 2.1 立得

$$V_t(\Phi_1) > V_t(\Phi_2),$$

即 (2.4.4) 成立.

定理 2.10 欧式看涨（跌）期权的价格 c_t (p_t) 是原生资产价格 S_t 和敲定价 K 的齐一次函数. 即对任意 $\alpha > 0$，有

$$c_t(\alpha S_t, \alpha K) = \alpha c_t(S_t, K), \tag{2.4.6}$$

$$p_t(\alpha S_t, \alpha K) = \alpha p_t(S_t, K). \tag{2.4.7}$$

这个定理的金融意义是显然的. 考虑 α 张欧式股票期权, 每张期权在到期日以敲定价 K 购买一份股票; 以及考虑一张欧式股票期权, 它在到期日以敲定价 αK 购买 α 份股票; 两者的价格必相等.

这个定理的证明留给读者.

定理 2.7—2.10 的结论对于美式期权同时成立. 读者可以试着加以论证.

作为这一章的小结, 我们归纳以下几个要点:

1. 这一章中有关期权定价的分析, 我们对原生资产 (如股票) 价格的运行没有建立任何模型, 而只假设市场是无套利的.

2. 利用无套利原理, 推导期权定价在它的有效期内的性质, 本质上是倒向的, 即首先验证在到期日 $t=T$ 时刻期权定价的性质, 然后通过无套利原理去推断它在整个有效期内 $(0\le t<T)$ 期权的性质, 这一点与我们在第一章中所指出的"期权定价是一个倒向问题"的阐述是一致的.

3. 如果不建立原生资产价格运行的模型, 对于期权定价的讨论只可能是定性的、无法定量. 也就是说, 如果要给衍生物—— 期权定价, 必须要进一步给出原生资产价格演化的具体模型.

习题

1. 试证明估计式 (2.2.1) 的上界估计以及估计式 (2.2.2).

2. 试证明定理 2.8.

3. 试证明欧式看跌期权价格 $p_t(K)$ 是 K 的凸函数.

4. 试证明定理 2.10.

5. 设 $C_t(S,K), P_t(S,K)$ 分别是具有相同终止期的美式看涨和看跌期权定价. S_t 是原生资产价格, K 是敲定价格, 试证明对一切 $\alpha>0$, 有

(a) $C_t(S,K)\ge (S-K)^+$;

(b) $P_t(\alpha S,\alpha K)=\alpha P_t(S,K)$;

(直接证明!)

(c) 当 $K_2>K_1$ 时,

$$0\le P_t(S,K_2)-P_t(S,K_1)\le (K_2-K_1)e^{-r(T-t)};$$

(d) 当 $S_1 > S_2$ 时,

$$P_t(S_2, K) - P_t(S_1, K) \geq 0;$$

(e) 对一切 λ: $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$P_t(S, K_\lambda) \leq \lambda P_t(S, K_1) + (1-\lambda) P_t(S, K_2),$$

其中 $K_1, K_2 > 0$, $K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda) K_2$.

(f) 对一切 λ: $0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$P_t(S_\lambda, K) \leq \lambda P_t(S_1, K) + (1-\lambda) P_t(S_2, K),$$

其中 $S_1, S_2 > 0$, $S_\lambda = \lambda S_1 + (1-\lambda) S_2$.

(注意: (b)—(f) 对美式看涨期权同样成立，不必证明

6. 设 c_t、p_t 和 C_t、P_t 分别是终止期为 T 的欧式看涨、看跌股票期权和美式看涨、看跌股票期权定价，若在 (T_0, T) 期间某一天 $(T_0 > 0)$, 公司将按每股支付红利 D, 试证明当 $0 \leq t \leq T_0$ 时有:

(a) 平价公式:

$$c_t + D + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t;$$

(b) 估计式:

$$S_t - D - K < C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)};$$

(c) 单调性关系式: 若 $D_1 > D_2$, 则

$$\begin{aligned} c_t(D_1) &< c_t(D_2), \\ p_t(D_1) &> c_t(D_2), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} C_t(D_1) &< C_t(D_2), \\ P_t(D_1) &> P_t(D_2). \end{aligned}$$

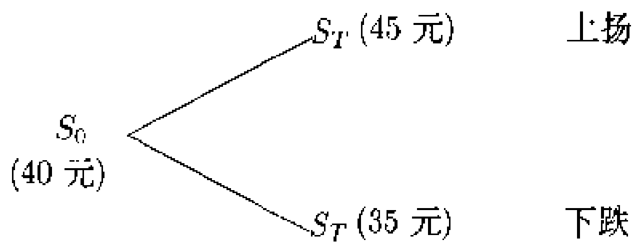
第三章　期权定价的离散模型 —— 二叉树方法

假设原生资产（如股票，汇率，……）的价格运行以二叉树形式进行．本章的任务是基于无套利原理计算它的衍生物——期权的价格以及研究它的性质．

期权定价的二叉树方法 (binomial tree methods) 的关键是通过 Δ – 对冲原理，把人们引入风险中性世界，从而给出风险中性的定价公式．为了说清楚这一章的基本思路，先举一个例子．

§3.1　一个例子

假设作为原生资产的股票在 $t = 0$ 时刻的价格是 40 元，一个月以后（ $t = T$ 时刻），它有二种可能：上扬到 45 元或下跌到 35 元：



在 $t = 0$ 时刻，购买一张一个月到期，敲定价格为 40 元的看涨期权，如果在 $[0, T]$ 时段内存款年利率为 12%，问期权金为多少？

根据看涨期权在到期日 $(t = T)$ 的收益

$$c_T = (S_T - K)^+,$$

在 $t = T$ 时刻，期权价值相应地亦有两种可能：如果 S 上扬，$c_T = (45-40)^+ = 5$ 元；如果 S 下跌，$c_T = (35 - 40)^+ = 0$ 元．

构造投资组合

$$\Phi = S - 2c.$$

对于这个投资组合，它在 $t=T$ 时的值为：

如果 S 上扬，

$$V_T(\Phi)=45-2\times 5=35\text{元};$$

如果 S 下跌，

$$V_T(\Phi)=35-2\times 0=35\text{元}.$$

即投资组合 Φ 在未来 $t=T$ 时刻，不管 S 上扬还是下跌，它具确定的值 $V_T(\Phi)=35$元.

假设无风险利率为 12%，那么如果在初始时刻 ($t=0$)，把 $B=\frac{35}{1+0.01}$ 元存在银行，在一个月以后，它的收益为

$$V_T(B)=\frac{35}{1+0.01}\times(1+\frac{1}{12}\times 12\%)=35\text{元}.$$

因此 $V_T(B)=V_T(\Phi)$，根据无套利原理及推论 2.1，推得

$$V_0(B)=V_0(\Phi).$$

即

$$S_0-2c_0=B_0=\frac{35}{1+0.01}=34.65\text{元}$$

$$c_0=\frac{40-34.65}{2}=2.695\text{元}.$$

这表明投资人为了购买这张股票期权，需要付出 2.695 元.

如果我们仔细分析一下这个例子，不难发现：

(1) 由 S 和 c 形成适当的投资组合 Φ，使得它是无风险的，这就是对冲 (hedging) 的思想.

(2) 求得的期权价格 $c_0=2.695$ 元与每个投资人对未来股价的期望无关.

§3.2 单时段 — 双状态模型

关于风险资产（股票，汇率，……）价格的变化规律的研究，先从最简单的模型 —— **单时段 — 双状态模型** (one period and two-state model) 开始. 以它为基础，我们讨论要如何通过无套利原理，求出它的衍生物 —— 期权的价格.

假设市场由两个资产组成：风险资产 S 和无风险资产 B.

单时段 (one period) 是指交易只在时段 $[0,T]$ 的初始时间 $t=0$ 以及终止时间 $t=T$ 进行.

双状态 (two-state) 是指风险资产 S 在未来 $t=T$ 时刻的值 S_T 只有两种可能： S_T^u 和 S_T^d，且

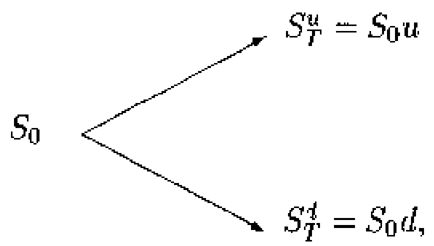
$$0<\mathrm{Prob}\{S_T=S_T^u\},\mathrm{Prob}\{S_T=S_T^d\}<1,$$

以及

$$\mathrm{Prob}\{S_T=S_T^u\}+\mathrm{Prob}\{S_T=S_T^d\}=1.$$

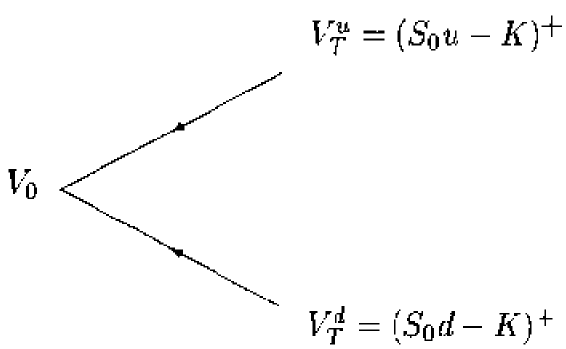
我们的问题是：假如在 $t=0$ 时风险资产 S 的价格为 S_0，预期在 $t=T$ 时刻，它的价格可能为 $S_T^u=S_0u$，以及 $S_T^d=S_0d,(u>d)$. 现投资人在 $t=0$ 时购买一张到期日为 T，敲定价格为 K 的欧式看涨期权 V. 如果在 $[0,T]$ 时段内无风险资产 B 的收益率为无风险利率 r，即 $B_T=\rho B_0,\rho=1+rT,(B_0,B_T$ 分别表示 B 在 $t=0,T$ 时刻的值)，问该期权的价格 $V_0=?$

根据题意



$$B_0\to B_T=B_0\rho.$$

在 $t=T$ 时刻，看涨期权的价格为 $V_T=(S_T-K)^+$，即



为表述方便，我们把风险资产视作股票，则股票期权价格 V_t 是个随机变量．卖出一张期权，出售方必然面临风险．为了回避这个风险，出售方要采取适当策略对风险进行控制，即买进适当份额的股票与它对冲，记这个份额为 Δ ，这就是 Δ- 对冲的思想．

定义 3.1　对于给定的期权 V，在相反方向交易 Δ 份额的原生资产 S，使得构成的投资组合 Π：

$$\Pi = V - \Delta S, \tag{3.2.1}$$

是无风险的，这称为 **Δ-对冲**(Δ-hedging).

利用 Δ- 对冲技巧，我们来给出期权定价．

假设存在 Δ，使得 Π 是无风险的．即在 $t = T$ 时刻，

$$\Pi_T = V_T - \Delta S_T \tag{3.2.2}$$

是无风险的．

根据无风险债券的定义， Π 的投资增长率为无风险利率 r，为它原投资数的 ρ 倍，即

$$\Pi_T = \rho\Pi_0, \tag{3.2.3}$$

其中 $\rho = (1 + rT)$（ r 是无风险利率，不计复利），它是固定常数．

因此由 (3.2.2),(3.2.3)，得

$$V_T - \Delta S_T = \rho\Pi_0. \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) 是一个方程组，因为 V_T, S_T 都是随机变量，在 $t = T$ 时刻，它有两种可能值．由 (3.2.1)，等式 (3.2.4) 可改写为

$$V_T^u - \Delta S_0 u = \rho(V_0 - \Delta S_0),$$

$$V_T^d - \Delta S_0 d = \rho(V_0 - \Delta S_0),$$

这里 Δ 与 V_0 是需要寻求的未知量．解之得到

$$\Delta = \frac{V_T^u - V_T^d}{S_0(u-d)},$$

以及

$$\begin{aligned} V_0 = &\ \frac{1}{\rho}\Pi_T + \Delta S_0 \\ = &\ \frac{1}{\rho}\{\frac{\rho-d}{u-d}V_T^u + \frac{u-\rho}{u-d}V_T^d\}. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

设

$$d < \rho < u. \tag{3.2.6}$$

定义新 概率测度 (probability measure)Q：

$$\begin{aligned} q_u &= \mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^u\} = \frac{\rho - d}{u - d}, \\ q_d &= \mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^d\} = \frac{u - \rho}{u - d}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

在假设 (3.2.6) 下，易见

$$0 < q_u, q_d < 1,$$

和

$$q_u + q_d = 1.$$

从而 (3.2.5) 可改写为

$$V_0 = \frac{1}{\rho} E^{\mathrm{Q}}(V_T), \tag{3.2.8}$$

这里 $E^{\mathrm{Q}}(V_T)$ 表示在概率测度 Q 下，随机变量 V_T 的 数学期望 (expectation).

定义 3.2 设 U 是某一个风险资产， B 是无风险资产， $\frac{U_t}{B_t}$ 称为在 t 时刻风险资产 U 的 **贴现价格** (discounted price) 或称 **相对价格** (related price).

由于 B 是无风险资产， $B_T = \rho B_0$. 因此 (3.2.8) 可改写为

$$\frac{V_0}{B_0} = E^{\mathrm{Q}}\left(\frac{V_T}{B_T}\right).$$

至此我们证明了：

定理 3.1 *在概率测度 Q 下，期权的贴现价格是期权到期日的期权贴现值的数学期望．即*

$$\frac{V_0}{B_0} = \begin{cases} E^{\mathrm{Q}}\left(\frac{(S_T - K)^+}{B_T}\right), & \text{(看涨期权)} \\ E^{\mathrm{Q}}\left(\frac{(K - S_T)^+}{B_T}\right), & \text{(看跌期权)} \end{cases} \tag{3.2.9}$$

附注 为了考察概率测度 Q 的意义，取风险资产为原生资产 S，考虑 $E^{Q}(\frac{S_T}{B_T})$，简单计算表明

$$\begin{aligned}E^{Q}(\frac{S_T}{B_T}) &= \frac{1}{\rho B_0}(q_u S_T^u + q_d S_T^d)\\ &= \frac{1}{\rho B_0}(\frac{\rho-d}{u-d}S_0 u + \frac{u-\rho}{u-d}S_0 d)\\ &= \frac{S_0}{B_0}\frac{u\rho - du + ud - \rho d}{\rho(u-d)}\\ &= \frac{S_0}{B_0},\end{aligned}$$

即

$$\frac{E^{Q}(S_T)-S_0}{S_0} = \frac{\frac{B_T}{B_0}S_0 - S_0}{S_0} = \frac{B_T - B_0}{B_0}.$$

这表明在概率测度 Q 下，风险资产 S 在 $t=T$ 时刻的期望回报与无风险证券的回报相同. 我们把具有这个性质的金融市场称为 **风险中性世界** (risk-neutral world). 在这样的世界里，所有投资者对风险不要求补偿，所有证券的预期收益率都是无风险利率.

从而我们把由 (3.2.7) 定义的概率测度 Q 称为 **风险中性测度**. 在风险中性测度意义下给出的期权定价称为 **风险中性价格**.

附注 在这一节中我们是通过 Δ- 对冲技巧导出了期权的风险中性定价. 在一些教程中，人们利用复制技巧建立期权定价公式.

定义 3.3 在由风险资产 S 和无风险资产 B 组成的市场中，如果存在一个投资组合

$$\Phi = \alpha S + \beta B$$

(其中 α, β 是常数)，使得当 $t=T$ 时，投资组合 Φ 的值与期权 V 的值相同 (请注意：它们都是随机变量)，即

$$\alpha S_T + \beta B_T = V_T,$$

那么 Φ 称为是 **期权 V 的复制** (replicating).

如果投资组合 Φ 是期权 V 的复制，那么期权的价格定义为

$$V_0 = \Phi_0 = \alpha S_0 + \beta B_0.$$

由复制导出的期权定价公式与用 Δ- 对冲技巧导出的期权定价公式是一致的.

从期权定价公式 (3.2.9)，可以看出为了定义风险中性测度 (3.2.7)，条件 (3.2.6) 是十分关键的. 事实上，正因为有了条件 (3.2.6)，才存在风险中性测度 Q 以及风险中性的期权定价.

下面这个定理将告诉我们条件 (3.2.6) 本质上体现了市场无套利.

定理 3.2　*在由风险资产 S 和无风险资产 B 组成的市场中，条件 (3.2.6) 成立的充要条件是市场无套利.*

证明　首先证明如果市场无套利，则条件 (3.2.6) 成立.

假如不然，例如，$\rho \geq u$. 构造一个投资组合

$$\Phi = -S + \frac{S_0}{B_0}B.$$

计算投资组合 Φ 在 $t=0$ 和 $t=T$ 的值:

$$\begin{cases} \Phi_0 = -S_0 + \dfrac{S_0}{B_0}B_0 = 0, \\ \Phi_T = -S_T + \dfrac{S_0}{B_0}B_T. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

这里 Φ_T 是随机变量，它有两个可能值: Φ_T^u 和 Φ_T^d.

当 $S_T = S_T^u$ 时,

$$\Phi_T^u = -S_0u + \frac{S_0}{B_0}\rho B_0 = (\rho - u)S_0 \geq 0;$$

当 $S_T = S_T^d$ 时,

$$\Phi_T^d = -S_0d + \frac{S_0}{B_0}\rho B_0 = (\rho - d)S_0 > 0.$$

故对于投资组合 Φ，

$$\Phi_T \geq 0, \tag{3.2.11}$$

且

$$\mathrm{Prob}\{\Phi_T > 0\} = \mathrm{Prob}\{S_T = S_T^d\} > 0. \tag{3.2.12}$$

表达式 (3.2.10)—(3.2.12) 表明: 对于投资组合 Φ 存在套利机会，这是不可能的.

同理可以证明，若 $\rho \le d$，亦将推出矛盾.

继而证明，若条件 (3.2.6) 成立，则市场是无套利的. 即对于给定的任意投资组合

$$\Phi = \alpha S + \beta B.$$

若

$$\Phi_0 = \alpha S_0 + \beta B_0 = 0, \tag{3.2.13}$$

以及

$$\Phi_T = \alpha S_T + \beta B_T \ge 0, \tag{3.2.14}$$

则必有

$$\Phi_T = \alpha S_T + \beta B_T = 0. \tag{3.2.15}$$

事实上，根据条件 (3.2.6)，定义风险中性测度 Q：

$$q_u = \mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^u\} = \frac{\rho - d}{u - d},$$

$$q_d = \mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}\{S_T = S_T^d\} = \frac{u - \rho}{u - d}.$$

由 (3.2.6)，可知

$$0 < q_u, q_d < 1,$$

且

$$q_u + q_d = 1.$$

考虑随机变量 Φ_T 的数学期望

$$E^{\mathrm{Q}}(\Phi_T) = q_u \Phi_T^u + q_d \Phi_T^d.$$

根据风险中性测度 Q 的定义，经过简单计算，由 (3.2.13)

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}(\Phi_T) &= \frac{\rho - d}{u - d}(\alpha S_0 u + \beta \rho B_0) + \frac{u - \rho}{u - d}(\alpha S_0 d + \beta \rho B_0) \\ &= \rho(\alpha S_0 + \beta B_0) = \rho \Phi_0 = 0. \end{aligned}$$

即

$$q_u \Phi_T^u + q_d \Phi_T^d = 0. \tag{3.2.16}$$

由于 (3.2.14)，故

$$\Phi_T^u \ge 0, \quad \Phi_T^d \ge 0, \tag{3.2.17}$$

因此，由 (3.2.16).(3.2.17) 推得

$$\Phi_T^u = \Phi_T^d = 0,$$

即

$$\mathrm{Prob}\{\Phi_T > 0\} = 0.$$

从而 (3.2.15) 成立，所以不存在套利机会.

综上所述，我们可以对定理 3.1 给一个更明确的表述.

定理 3.2 *若市场是无套利的，则存在风险中性测度* Q（*由* (3.2.7) *定义*），*使得* (3.2.9) *成立*.

§3.3 欧式期权定价的二叉树方法（Ⅰ）—— 不支付红利

把期权的生存区间 $[0,T]$，细分为 N 个子区间：

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T.$$

在每个区间 $[t_n, t_{n+1}](0 \le n \le N-1)$ 上，假设原生资产的价格 S 的演化适合单时段 — 双状态模型，那么 S 作为一个随机量，它在时段 $[0,T]$ 中的演化构成一个二叉树（见下页图）.

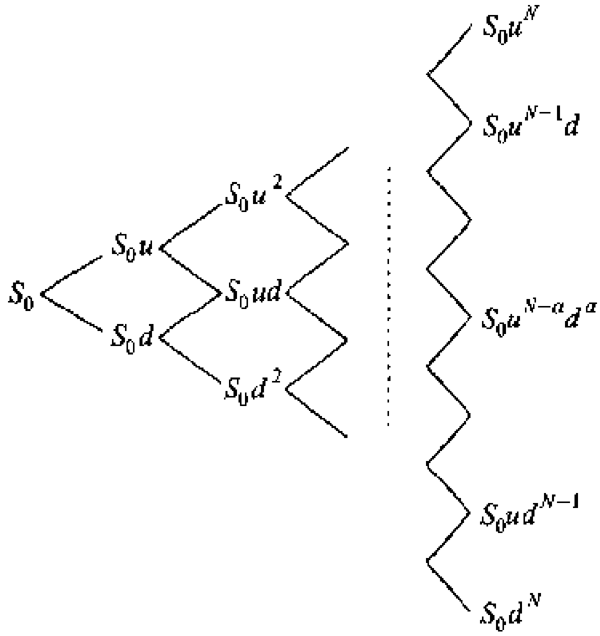
这表明如果在初始时刻原生资产的价格为 $S = S_0$，那么它在 $t = T$ 时刻，S_T 有可能取到 $N+1$ 个值 $\{S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha\}_{\alpha=0,1,\cdots,N}$. 以看涨期权为例，期权在 $t = T$ 的值 $V_T = (S_T - K)^+$ 亦是随机变量，可能取值 $\{(S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha - K)^+\}_{\alpha=0,1,\cdots,N}$.

记

$$S_\alpha^n = S_0 u^{n-\alpha} d^\alpha,\ V_\alpha^n = V(S_\alpha^n, t_n) \quad (0 \le n \le N, 0 \le \alpha \le n), \tag{3.3.1}$$

以及

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha | S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha - K \ge 0, 0 \le \alpha \le N\}. \tag{3.3.2}$$



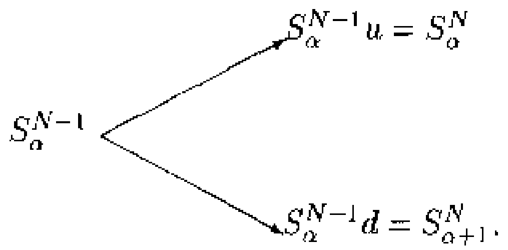
那么期权在 $t=T$ 时刻可能取到的值为

$$
\begin{aligned}
V_0^N &= S_0u^N - K = S_0^N - K,\\
&\vdots\\
V_{\hat\alpha}^N &= S_0u^{N-\hat\alpha}d^{\hat\alpha} - K = S_{\hat\alpha}^N - K,\\
V_{\hat\alpha+1}^N &= 0,\\
&\vdots\\
V_N^N &= 0.
\end{aligned}
$$

问题 若 $V_\alpha^N(0\le\alpha\le N)$ 为已知，如何去求 $V_\alpha^{N-h}(1\le h\le N, 0\le\alpha\le N-h)$，特别是 $V_0^0=V(S_0,t_0)$ 的值？

利用单时段 — 双状态模型，通过反向归纳过程，逐步求出 V_α^{N-h}.

事实上，若 $V_\alpha^N(0\le\alpha\le N)$ 为已知. 为了求出 $V_\alpha^{N-1}(0\le\alpha\le N-1)$，考虑以下单时段 — 双状态模型，由 (3.3.1)



相应地有

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & V_\alpha^N = (S_\alpha^N - K)^+ \\
V_\alpha^{N-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & V_{\alpha+1}^N = (S_{\alpha+1}^N - K)^+.
\end{tikzcd}
$$

由 (3.2.7), 定义风险中性测度 Q:

$$q_u = \frac{\rho - d}{u - d} \triangleq q, \quad q_d = \frac{u - \rho}{u - d} \triangleq 1 - q.$$

则由 (3.2.8) 给出期权定价:

$$V_\alpha^{N-1} = \frac{1}{\rho}[qV_\alpha^N + (1-q)V_{\alpha+1}^N]. \quad (0 \le \alpha \le N-1)$$

利用反向归纳法，不难推得，对任意 $h(1 \le h \le N)$,

$$V_\alpha^{N-h} = \frac{1}{\rho^h}\sum_{\ell=0}^{h}\begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix} q^{h-\ell}(1-q)^\ell V_{\alpha+\ell}^N, \quad (0 \le \alpha \le N-h)$$

这里 $\begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix}$ 是组合数.

根据 $\hat{\alpha}$ 的定义 (3.3.2)，当 $\alpha \le \hat{\alpha}$ 时,

$$V_\alpha^{N-h} = \frac{1}{\rho^h}\sum_{\ell=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix} q^{h-\ell}(1-q)^\ell (S_{\alpha+\ell}^N - K); \tag{3.3.3}$$

当 $\alpha > \hat{\alpha}$ 时, $V_\alpha^{N-h} = 0$.

由于 (3.3.1),

$$S_{\alpha+\ell}^N = S_\alpha^{N-h}u^{h-\ell}d^\ell.$$

记

$$\hat{q} = \frac{uq}{\rho}.$$

由恒等式

$$qu + (1-q)d = \rho,$$

故

$$\frac{d}{\rho}(1-q)=1-\hat{q}.$$

因此，表达式 (3.3.3) 可以改写为：

当 $\alpha\leq\hat{\alpha}$ 时，

$$V_{\alpha}^{N-h}=S_{\alpha}^{N-h}\sum_{\ell=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix}\hat{q}^{h-\ell}(1-\hat{q})^{\ell}-\frac{K}{\rho^{h}}\sum_{\ell=0}^{\hat{\alpha}-\alpha}\begin{pmatrix} h \\ \ell \end{pmatrix}q^{h-\ell}(1-q)^{\ell},$$

当 $\alpha>\hat{\alpha}$ 时，

$$V_{\alpha}^{N-h}=0.$$

记函数 $(m\geq n)$

$$\Phi(n,m,p)=\sum_{\ell=0}^{n}\begin{pmatrix} m \\ \ell \end{pmatrix}p^{m-\ell}(1-p)^{\ell}. \tag{3.3.4}$$

则 **欧式看涨期权的定价公式** 为

$$V_{\alpha}^{N-h}=S_{\alpha}^{N-h}\Phi(\hat{\alpha}-\alpha,h,\hat{q})-\frac{K}{\rho^{h}}\Phi(\hat{\alpha}-\alpha,h,q), \tag{3.3.5}$$

其中

$$q=\frac{\rho-d}{u-d},\qquad \hat{q}=\frac{uq}{\rho}.$$

特别当 $h=N$、$\alpha=0$ 时，

$$V(S_0,0)=S_0\Phi(\hat{\alpha},N,\hat{q})-\frac{K}{\rho^{N}}\Phi(\hat{\alpha},N,q).$$

我们利用看涨 — 看跌期权的平价公式 (2.2.5)（定理 2.3 ）可以得到看跌期权的定价公式.

在公式 (2.2.5) 中出现的因子 $B_t=e^{-r(T-t)}$ 是下面微分方程的解：

$$\begin{cases} \dfrac{dB_t}{dt}=rB_t, & (0\leq t<T) \\ B_T=1. \end{cases}$$

B_t 的金融意义是贴现因子，即为了使在 $t=T$ 时刻得到 1 元钱（若连续计算复利），则在 t 时刻 $(t<T)$ 需要在银行存入 B_t 元钱.

在二叉树方法中，交易只在离散时刻 $t=t_n$ $(0\le n\le N)$ 进行（复利计算亦是离散的），因此，如把离散形式的贴现因子记作 $B_n^\Delta(n=0,1,\cdots,N)$，它适合差分方程

$$\begin{cases} B_{n+1}^\Delta - B_n^\Delta = r\Delta t B_n^\Delta, & (0\le n< N-1)\\ B_N^\Delta = 1. \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} B_n^\Delta &= \frac{1}{1+r\Delta t}B_{n+1}^\Delta \\ &= \left(\frac{1}{1+r\Delta t}\right)^{N-n} B_N^\Delta \\ &= \frac{1}{\rho^{N-n}}. \end{aligned}$$

其中 ρ 是在时段 $[t,t+\Delta t]$ 上无风险债券的增长倍数，即

$$B_{n+1}^\Delta = \rho B_n^\Delta.$$

因此，对于二叉树方法，欧式期权的看涨 — 看跌期权的平价公式（离散形式）应该修改为

$$c_\alpha^{N-h} + \frac{K}{\rho^h} = p_\alpha^{N-h} + S_\alpha^{N-h}. \tag{3.3.6}$$

（读者可以仿照定理 2.3 直接给出证明）.

把 (3.3.5) 代入 (3.3.6)，得到

$$\begin{aligned} p_\alpha^{N-h} &= c_\alpha^{N-h} + \frac{K}{\rho^h} - S_\alpha^{N-h} \\ &= S_\alpha^{N-h}(\Phi(\hat\alpha-\alpha,h,\hat q)-1) + \frac{K}{\rho^h}(1-\Phi(\hat\alpha-\alpha,h,q)). \end{aligned}$$

根据函数 Φ 的定义 (3.3.4),

$$\begin{aligned} 1-\Phi(\hat\alpha-\alpha,h,q) &= \Phi(h,h,q)-\Phi(\hat\alpha-\alpha,h,q) \\ &= \Psi(\hat\alpha-\alpha,h,q), \end{aligned}$$

其中

$$\Psi(n,m,p) = \sum_{\ell=n+1}^{m} \begin{pmatrix} m \\ \ell \end{pmatrix} p^{m-\ell}(1-p)^\ell, \qquad (m\ge n+1) \tag{3.3.7}$$

从而，**欧式看跌期权的定价公式**可以表为

$$p_\alpha^{N-h}=\frac{K}{\rho^h}\Psi(\hat{\alpha}-\alpha,h,q)-S_\alpha^{N-h}\Psi(\hat{\alpha}-\alpha,h,\hat{q}),$$

其中 $0\le h\le N,0\le\alpha\le N-h$.

附注 如果把期权的投资看成参与一场赌博. 若在初始时刻具有赌资 U_0，经过一次赌博，赌资将变为 U_T. 由于赌博有输赢，因此 U_T 是一个随机变量. 假如它的期望值 $E(U_T)$ 等于初始赌资 U_0，即

$$U_0=E(U_T),$$

那么我们认为这场赌博是公平的. 一般来说，若赌徒在第 n 次赌博时有赌资为 U_n，如果他在下一次的赌资为 U_{n+1}，在已给出前 n 次赌博所有可能信息的条件下，U_{n+1} 的条件数学期望恰好等于原有赌资 U_n，即

$$E(U_{n+1}|\sigma(U_1,\cdots U_n))=U_n. \tag{3.3.8}$$

那么我们称赌博是公平的. 这里 $\sigma(U_1,\cdots,U_n)$ 表示直到第 n 次赌博，赌资 $U_1,\cdots,U_n$ 所有可能发生的信息，$E(X|Y)$ 表示在条件 Y 下，X 的条件数学期望.

在数学上，公平赌博通常用一个多义的英文名词“martingale”来表示. 这个词的另一个含义表示一种马具 ——“鞅”. 因此人们把适合条件 (3.3.8) 的赌资 $\{U_n:0\le n\le N\}$，它作为一个离散随机过程称为 **（离散）鞅** (martingale).

正如我们在 §3.2 所述，在风险中性测度 Q 意义下，对于原生资产 S 的贴现价格 $\left(\frac{S}{B}\right)_{t_n}$，$(n=0,1,\cdots,N)$，它作为一个离散随机过程适合等式：

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{t_n}=E^{\mathrm{Q}}\left(\left(\frac{S}{B}\right)_{t_{n+1}}\middle|\sigma(S_0,\cdots,S_n)\right),(0\le n<N).$$

因此原生资产的贴现价格过程是鞅. 人们把风险中性测度 Q 称为与测度 P 等价的**鞅测度** (martingale measure).

这里所谓“等价”是按以下意义：

定义 3.4 概率测度 P 与概率测度 Q**等价**当且仅当对任意概率事件（集合）$\mathcal{A}$，有

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{P}}(\mathcal{A})=0\Leftrightarrow\mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}(\mathcal{A})=0,$$

即概率测度 P 与 Q 具有同零集.

欧式期权定价的表达式 (3.3.5) 在等价鞅测度 Q 的意义下可改写为

$$\left(\frac{V}{B}\right)_{t_{N-h}} = E^{Q}\left(\left(\frac{V}{B}\right)_{t_N}\middle|\sigma(S_0,\cdots,S_{t_{N-h}})\right);$$

或

$$V_{t_{N-h}} = \rho^{-h}E^{Q}\left((S_N-K)^+|\sigma(S_0,\cdots,S_{t_{N-h}})\right).$$

特别

$$V_0 = \rho^{-N}E^{Q}\left((S_N-K)^+\right).$$

附注 无套利原理与存在等价鞅测度之间存在什么关系呢？由 §3.2–§3.3 关于二叉树方法的讨论已经知道：

$$\begin{aligned} \text{无套利原理} &\iff d<\rho<u \\ &\longrightarrow \text{存在等价鞅测度 } Q \\ &\longrightarrow \text{在风险中性世界中给出了欧式期权定价} \end{aligned}$$

事实上，不仅如此，在无套利原理与存在等价鞅测度之间还存在等价关系，人们把它称为风险资产价格基本定理 (fundamental theorem of asset pricing).

定理 3.3（风险资产价格基本定理） *假如原生资产价格的运行以二叉树方式进行，则存在等价鞅测度的充分必要条件是市场不存在套利机会.*

证明 对于由一个风险资产 S 和一个无风险资产 B 组成的市场中，如果风险资产价格 S_t 的运行适合二叉树规律，那么由定理 3.2，充分性已获得证明.

现证明其必要性．即若存在等价鞅测度，则市场必是无套利的.

设 Π 是任意一个投资组合，若

$$\Pi_0 = 0, \tag{3.3.9}$$

且存在 $t^*>0$，使得

$$\mathrm{Prob}_p(\Pi_{t^*}\ge 0)=1, \tag{3.3.10}$$

我们要证明必有

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{P}}(\Pi_{t^*} > 0) = 0.$$

这里 P 是客观测度.

事实上, 设 Q 是与 P 等价的鞅测度, 则必有

$$\left(\frac{\Pi}{B}\right)_0 = E^{\mathrm{Q}}\left(\left(\frac{\Pi}{B}\right)_{t^*}\right),$$

其中 B 是无风险资产. 从而由 (3.3.9) 得

$$E^{\mathrm{Q}}(\Pi_{t^*}) = \frac{B_{t^*}}{B_0}\Pi_0 = 0. \tag{3.3.11}$$

由于测度 P 与 Q 等价, 由 (3.3.10),

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}(\Pi_{t^*} \geq 0) = 1. \tag{3.3.12}$$

那么由 (3.3.11),(3.3.12)

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}(\Pi_{t^*} = 0) = 1,$$

即

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{Q}}(\Pi_{t^*} > 0) = 0.$$

由于测度 P 和 Q 等价, 因此有

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{P}}(\Pi_{t^*} > 0) = 0.$$

从而定理的必要性获证.

§3.4 欧式期权定价的二叉树方法 (II) —— 支付红利

原生资产支付红利 (dividend) 有两种方式:

1. 每年在规定时间支付红利;

2. 按一定比率连续支付红利.

我们在这一节中只讨论在第二种情形下欧式期权定价的二叉树方法, 把在第一种情形下欧式期权的定价计算放在第五章讨论.

研究连续支付红利有什么实际背景?

1. 假如原生资产是外币，由于汇率（外币兑汇本国货币的比率）的变动是随机的，因此它可以被看作是一种风险资产（货币风险）. 把外币存入发行国银行，它将按当地的利率标准获取利息，可以被看作是该特定“证券”的红利. 当然这个红利是连续支付的. 因此“红利率”在这里就是外币在发行国的无风险利率.

2. 假如原生资产是由一系列风险资产按一定比例组成的投资组合（如股票指数）. 由于每一个风险资产都按本身规定的时间和比率支付红利，对这个投资组合而言支付红利的时间比较多. 因此我们可以把连续支付红利（红利率与时间有关）看作是它的一个近似.

为了介绍连续支付红利的原生资产的衍生物 —— 欧式期权定价的二叉树方法，考虑以下的例子:

例 某公司为了支付德国公司的货款，需要在 $t = T$ 时刻买入 M 马克，为了回避由于马克对人民币汇率可能上扬带来的额外损失，公司购买一张 $t = T$ 到期，锁定汇率为 K，购入 M 马克的看涨期权. 问该公司需要支付多少期权金？

设 S 是汇率（1 马克的人民币价值），在 $[t, t+\Delta t]$ 的时段内汇率 S 的变化为

$$\begin{tikzcd} & S_t u \quad (\mathrm{RMB/DM}) \\ S_t \quad (\mathrm{RMB/DM}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_t d \quad (\mathrm{RMB/DM}). \end{tikzcd}$$

由于把 1 马克 (DM) 存入当地银行获得无风险收益（“红利”）

$$1\,(\mathrm{DM}) \longrightarrow \eta\,(\mathrm{DM}),$$

这里 $\eta = 1 + q\Delta t, q$ 是德国银行的无风险利率.

因此 1 马克的价值 S 在时段 $[t, t+\Delta t]$ 内的变化为

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & S_t u\eta \quad (\text{RMB}) \\ S_t \quad (\text{RMB}) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_t d\eta \quad (\text{RMB}). \end{tikzcd}$$

设 B 是中国银行发行的无风险债券，在 $[t, t+\Delta t]$ 内的变化为

$$B_t\,(\text{RMB}) \longrightarrow \rho B_t\,(\text{RMB}),$$

这里 $\rho = 1 + r\Delta t$， r 是中国银行的无风险利率.

在每个时段 $[t, t+\Delta t]$ 上，采用 Δ- 对冲策略，即形成投资组合

$$\Phi = V - \Delta S.$$

选取份额 Δ, 使得 $\Phi_{t+\Delta t}$ 是无风险的. 由于

$$\begin{aligned} \Phi_{t+\Delta t} &= V_{t+\Delta t} - \Delta S_{t+\Delta t} \\ &= \begin{cases} V^u_{t+\Delta t} - \Delta S_t u\eta, \\ V^d_{t+\Delta t} - \Delta S_t d\eta, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

以及

$$\begin{aligned} \Phi_{t+\Delta t} &= \rho\Phi_t \\ &= \rho(V_t - \Delta S_t). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

解方程组 (3.4.1),(3.4.2) 得

$$\Delta = \frac{V^u_{t+\Delta t} - V^d_{t+\Delta t}}{\eta(u-d)S_t},$$

$$V_t = \frac{1}{\rho}\left[\hat{q}_u V^u_{t+\Delta t} + \hat{q}_d V^d_{t+\Delta t}\right],$$

这里

$$\hat{q}_u = \frac{\rho/\eta - d}{u-d}, \quad \hat{q}_d = \frac{u - \rho/\eta}{u-d}.$$

假设

$$d\eta < \rho < u\eta,$$

从而有

$$0 < \hat{q}_u, \hat{q}_d < 1,$$

且

$$\hat{q}_u + \hat{q}_d = 1.$$

由于该公司购买的期权在 $t = T$ 的值 (RMB) 为

$$V_T = M(S_T - K)^+ = M(S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha - K)^+, \quad (0 \leq \alpha \leq N)$$

其中 M 为需要购入的马克数，K 是协议上规定的马克汇率. 假设 $M = 1$，与 §3.3 相仿，由反向归纳过程得到 **支付红利的欧式看涨期权的定价公式**:

$$\begin{aligned} V_\alpha^{N-h} &= V(S_\alpha^{N-h}, t_{N-h}) \\ &= \frac{S_\alpha^{N-h}}{\eta^h} \Phi(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}') - \frac{K}{\rho^h} \Phi(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}). \end{aligned}$$

这里 Φ 的定义见 (3.3.4),

$$\hat{q} = \hat{q}_u = \frac{\rho/\eta - d}{u - d},$$

$$\hat{q}' = \frac{u\hat{q}}{\rho},$$

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha | S_0 u^{N-\alpha} d^\alpha - K \geq 0, \ 0 \leq \alpha \leq N\}.$$

同理可以得到 **支付红利的欧式看跌期权的定价公式**:

$$p_\alpha^{N-h} = \frac{K}{\rho^h} \Psi(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}) - \frac{S_\alpha^{N-h}}{\eta^h} \Psi(\hat{\alpha} - \alpha, h, \hat{q}').$$

这里 Ψ 的定义见 (3.3.7).

§3.5 美式期权定价的二叉树方法

美式期权定价与欧式期权定价的不同点在于：由定理 2.4，在每一个节点 $S_\alpha^{N-h} (1 \leq h \leq N, 0 \leq \alpha \leq N - h)$ 上，对看涨期权必须有

$$V_\alpha^{N-h} = V(S_\alpha^{N-h}, t_{N-h}) \geq (S_\alpha^{N-h} - K)^+;$$

对看跌期权必须有

$$V_\alpha^{N-h} \geq (K - S_\alpha^{N-h})^+.$$

因此对于美式期权的定价（以看跌期权为例），它的反向归纳过程为：

当 $n=N$ 时

$$V_\alpha^N=(K-S_\alpha^N)^+,\quad (0\le\alpha\le N)$$

当 $n=N-1$ 时

$$V_\alpha^{N-1}=\max\{\frac{1}{\rho}[qV_\alpha^N+(1-q)V_{\alpha+1}^N],(K-S_\alpha^{N-1})^+\};$$
$$(0\le\alpha\le N-1)$$

一般来说，若 $V_\alpha^{N-h}(0\le\alpha\le N-h)$ 被给定，则

$$V_\alpha^{N-h-1}=\max\{\frac{1}{\rho}[qV_\alpha^{N-h}+(1-q)V_{\alpha+1}^{N-h}],(K-S_\alpha^{N-h-1})^+\},$$
$$(0\le\alpha\le N-h-1)\tag{3.5.1}$$

这里

$$q=\frac{\rho-d}{u-d}.$$

也就是在每一步计算 $\frac{1}{\rho}[qV_\alpha^{N-h}+(1-q)V_{\alpha+1}^{N-h}]$ 以后，必须与当时的收益函数 $(K-S_\alpha^{N-h-1})^+$ 相比较，取其中较大者作为 V_α^{N-h-1}，以此类推，直到 V_0^0.

为了对美式期权价格的演化有一个宏观的认识，我们换一种观点来表述二叉树方法. 设

$$ud=1,\quad 即\quad d=u^{-1}.$$

在这个假设下，原生资产的价格

$$S_\alpha^n=S_0u^{n-\alpha}d^\alpha\quad (0\le\alpha,\le n)$$

可表述为

$$S_j^n=S_0u^j.\quad (j=n,n-2,\cdots,-n+2,-n)$$

为简单计，无妨假设 $S_0=1$. 在 $(S,\ t)$ 平面上事先形成一个网格：

$$0<\cdots<S_j<S_{j+1}<\cdots,$$
$$0=t_0<\cdots<t_n<\cdots<t_N=T.$$

其中

$$S_j=u^j,\qquad j=0,\pm1,\cdots,$$
$$t_n=n\Delta t\quad (\Delta t=\tfrac{T}{N}).,\qquad n=0,1,\cdots,N.$$

记

$$V_j^n = V(S_j,\ t_n).$$

从而美式看跌期权的定价公式 (3.5.1) 可改写为

$$V_j^n = \max\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1}],\ \varphi_j\}, \tag{3.5.2}$$

其中 $\varphi_j = (K - S_j)^+.$

定理 3.4 若 $V_j^n \quad (n = 0, 1, \cdots, N,\ j = 0, \pm 1, \cdots)$ 是美式看跌期权的定价，则

$$V_j^n \geq V_{j+1}^n, \tag{3.5.3}$$

$$V_j^{n-1} \geq V_j^n. \tag{3.5.4}$$

证明 首先我们证明不等式 (3.5.3).

当 $n = N$ 时，由于

$$V_j^n = (K - S_j)^+,$$

因此它是 j 的单调非增函数，故不等式 (3.5.3) 当 $n = N$ 时成立.

假设当 $n = k + 1$ 时不等式 (3.5.3) 成立，现证明 $n = k$ 时，不等式 (3.5.3) 亦对.

事实上，根据归纳法假设

$$\begin{aligned} V_j^n &= \max\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1}],\ \varphi_j\} \\ &\geq \max\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+2}^{n+1} + (1-q)V_j^{n+1}],\ \varphi_{j+1}\} \\ &= V_{j+1}^n. \end{aligned}$$

为了证明不等式 (3.5.4)，我们特别考察 $n = N$ 的情况，即证明

$$V_j^{N-1} \geq V_j^N. \qquad (j = 0, \pm 1, \cdots).$$

不失一般性，我们假定 $K = 1$，（在一般情况下，我们可以先作一个代换：$\hat{S} = \frac{S}{K}, \hat{V} = \frac{V}{K}$；用 $\hat{S}, \hat{V}$ 代替 S, V.）即

$$V_j^N = (1 - S_j)^+ = \varphi_j. \qquad (j = 0, \pm 1, \cdots)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} V_j^N &= 0, \qquad (j \ge 0) \\ V_j^N &> 0, \qquad (j \le -1) \end{aligned}$$

当 $j \ge 0$ 时，显然有

$$V_j^{N-1} \ge 0 = V_j^N, \quad (j \ge 0)$$

其中

$$V_j^{N-1} = V_j^N = 0, \quad (j \ge 1)$$

和

$$V_0^{N-1} > 0 = V_0^N.$$

当 $j \le -1$ 时，由于 $\rho > 1$ 以及恒等式

$$\frac{1}{\rho}[qu + (1-q)d] = 1,$$

我们有

$$\begin{aligned} V_j^{N-1} &= \max\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^N + (1-q)V_{j-1}^N], \varphi_j\} \\ &= \max\{\frac{1}{\rho}[q(1-S_{j+1}) + (1-q)(1-S_{j-1})], \varphi_j\} \\ &= \max\{\frac{1}{\rho} - S_j[\frac{qu}{\rho} + \frac{(1-q)}{\rho}d], \varphi_j\} \\ &= \max\{\frac{1}{\rho} - S_j, 1 - S_j\} = \varphi_j \\ &= V_j^N, \end{aligned}$$

从而有

$$V_j^{N-1} = \begin{cases} 0 \quad = V_j^N, & j \ge 1, \\ \text{正值} > V_0^N, & j = 0, \\ \varphi_j \quad = V_j^N, & j \le -1. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

这表明当 $n = N$ 时不等式 (3.5.4) 成立. 利用反向归纳法，不难证明不等式 (3.5.4) 对所有 $1 \le n \le N-1$ 成立.

定理 3.5 对于每一个 $t_n(0\le n\le N-1)$, 存在 $j=j_n$ ，使得

$$\text{当}\quad j\le j_n-1\quad \text{时},\qquad V_j^n=\varphi_j, \tag{3.5.6}$$

$$\text{当}\quad j=j_n\quad \text{时},\qquad V_{j_n}^n>\varphi_{j_n}, \tag{3.5.7}$$

$$\text{当}\quad j\ge j_n+1\quad \text{时},\qquad V_j^n\ge\varphi_j, \tag{3.5.8}$$

且

$$j_{N-1}=0,$$

$$j_0\le\cdots\le j_k\le j_{k+1}\le\cdots\le j_{N-1}.$$

证明 由 (3.5.5)，知

$$j_{N-1}=0.$$

假若当 $n=k$ 时定理结论成立,即存在 j_k ,使得当 $n=k$ 时, (3.5.6),(3.5.7),(3.5.8) 成立，且

$$j_k\le j_{k+1}\cdots\le j_{N-1}.$$

由美式期权定价公式

$$V_j^{k-1}=\max\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^k+(1-q)V_{j-1}^k],\varphi_j\}.$$

根据反向归纳法假设以及估计式 (3.5.4)，通过直接计算，不难推得
当 $j\le j_k-2$ 时

$$V_j^{k-1}=\varphi_j,$$

以及当 $j\ge j_k$ 时

$$V_j^{k-1}\ge V_j^k\ge\varphi_j;$$

特别

$$V_{j_k}^{k-1}\ge V_{j_k}^k>\varphi_{j_k}.$$

由于 $V_{j_k-1}^{k-1}\ge\varphi_j$ ，从而对于 $j=j_k-1$ 有两种可能:

$$V_{j_k}^{k-1}=\varphi_{j_k-1}, \tag{3.5.9}$$

或

$$V_{j_k-1}^{k-1}>\varphi_{j_k}. \tag{3.5.10}$$

假如 (3.5.9) 成立，即

$$V_j^{k-1} = \varphi_j, \qquad (j \le j_k - 1)$$

$$V_{j_k}^{k-1} > \varphi_{j_k},$$

$$V_j^{k-1} \ge \varphi_j. \qquad (j \ge j_k + 1)$$

这表明

$$j_{k-1} = j_k.$$

假如 (3.5.10) 成立，即

$$V_j^{k-1} = \varphi_j, \qquad (j \le j_k - 2)$$

$$V_{j_k-1}^{k-1} > \varphi_{j_k-1},$$

$$V_j^{k-1} \ge \varphi_j. \qquad (j \ge j_k)$$

这表明

$$j_{k-1} = j_k - 1.$$

故在任何情况下

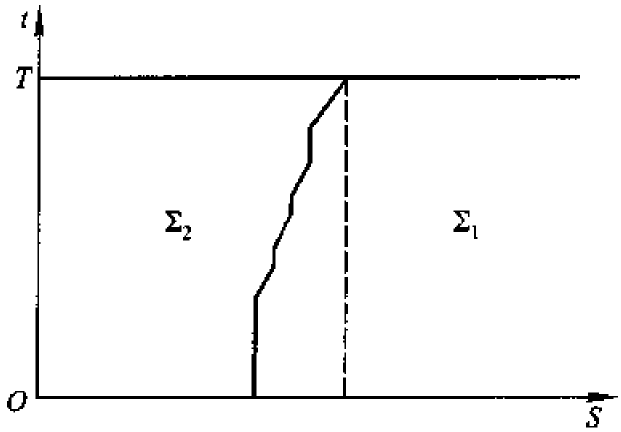
$$j_{k-1} \le j_k.$$

从而由反向归纳法，定理成立.

在区间 $[0, T]$ 上，定义曲线 $S = S_\Delta(t)$：

$$S_\Delta(t) = \begin{cases} u^{j_n}, & t = n\Delta t, \\ \text{线性插值}, & n\Delta t \le t \le (n+1)\Delta t. \end{cases}$$

曲线 $S = S_\Delta(t)$ 把区域 $\{0 \le S < \infty, \quad 0 \le t \le T\}$ 分成两部分：Σ_1 和 Σ_2.



在区域 Σ_1 内的节点 (u^j, t_n) 上，其中 $j > j_n$, $0 \le n \le N$. 在这些节点上，

$$V_j^n \ge \varphi_j.$$

而在靠近 $S = S_\Delta(t)$ 的节点上（这样的节点数将随着 n 的减少而不断增加，并随着 $\Delta t \to 0$ 这样的节点将愈来愈充满整个 Σ_1 ）：

$$V_j^n > \varphi_j. \tag{3.5.11}$$

而由美式期权定价的表达式 (3.5.2)，在 Σ_1 内（除去“少数” $V_j^n = \varphi_j$ 的节点）有

$$V_j^n = \frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1}]. \tag{3.5.12}$$

在区域 Σ_2 内的节点 (u^j, t_n) 上，其中 $j < j_n$ $0 \le n \le N$. 在这些节点上

$$V_j^n = \varphi_j, \tag{3.5.13}$$

因此由美式期权定价表达式 (3.5.2) 以及 (3.5.4) 的证明，可以看出在 Σ_2 内的节点上

$$V_j^n > \frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1}]. \tag{3.5.14}$$

在金融上，由于在区域 Σ_1 内期权的价值大于实施期权所获得的收益，因此持有人应该继续持有这张合约，而不要急于实施，所以人们称 Σ_1 为 **继续持有区域** (continuation region). 在区域 Σ_2 上，由于

$$qV_{j+1}^{n+1} + (1-q)V_{j-1}^{n+1} < \rho V_j^n,$$

这表明在区域 Σ_2 的节点上，期权的期望收益率已经小于无风险利率，因此持有人应该立即终止持有这张合约，立即付诸实施，所以人们称 Σ_2 为 **终止持有区域** (stopping region).

这样， $S = S_\Delta(t)$ 在金融上就显得特别重要. 它是继续持有与终止持有的交界线，人们称它为 **最佳实施边界** (optimal exercise boundary). 从理论上讲，美式期权的持有人应该按照上述分析决定自己的实施策略，否则将蒙受损失.

§3.6 美式看涨与看跌期权定价的对称关系式

众所周知，对于美式期权，看涨 – 看跌期权的平价公式已不成立. 人们自然关心美式看涨期权与美式看跌期权之间是否存在其他形式的关系式.

为了解决这个问题，让我们先从金融角度来考察一下这个问题.

以股票期权为例，期权作为一张合约给持有人一个权利，对看涨期权而言，在到期日（实施日）以现金（敲定价格）换取股票；而对看跌期权而言，则以股票换取现金（敲定价格）.

如果把现金看成一张无风险的债券，按无风险利率获取利息，把股票看成一张有风险的债券，按红利率获取无风险“利息”. 从而可以看出看涨期权与看跌期权之间存在着某种“对称”关系，因此它们的价格之间应有

$$C(S,K;\rho,\eta;t)=P(K,S;\eta,\rho;t). \tag{3.6.1}$$

即对于一张到期日相同的期权（不论是欧式的还是美式的），如果把 S 与 K，η 与 ρ 的位置作相应的交换，则看涨期权与看跌期权的价格相同. 我们用二叉树方法证明这个论断. 即在这一节中所出现的美式期权价格都认为是由二叉树方法确定的，从而我们证明：对于美式期权，关系式 (3.6.1) 成立 ([30]).

定理 3.6（**美式看涨 – 看跌期权定价的对称关系** (call-put symmetry)） *若 $ud=1$，则对于具有相同到期日的美式期权，关系式 (3.6.1) 成立，这里 $t=t_n$，$(0\le n\le N)$.*

这个定理是下面两个引理的直接推论.

引理 3.1 *若*

$$q=\frac{\rho/\eta-d}{u-d},\qquad q'=\frac{\eta/\rho-d}{u-d},$$

则

$$\frac{qu}{\rho}=\frac{1-q'}{\eta},$$

$$\frac{(1-q)d}{\rho}=\frac{q'}{\eta},$$

成立.

证明 由恒等式

$$\eta[qu+(1-q)d]=\rho,$$

通过直接计算，不难推得

$$\begin{aligned}\frac{qu}{\rho} &= \frac{1}{\eta}-(1-q)\frac{d}{\rho}=\frac{1}{\eta}-\frac{u-\rho/\eta}{u-d}\frac{d}{\rho} \\ &= \frac{1}{\eta}[1-\frac{ud\eta-\rho d}{\rho(u-d)}]=\frac{1}{\eta}[1-\frac{\eta/\rho-d}{u-d}] \\ &= \frac{1}{\eta}(1-q').\end{aligned}$$

同理

$$\frac{(1-q)d}{\rho}=\frac{q'}{\eta}.$$

引理 3.2 美式期权的价格是 S 与 K 的齐一次函数，即对任意 $\mu>0$，则

$$V(\mu S_\alpha^{N-h};\mu K)=\mu V(S_\alpha^{N-h};K). \tag{3.6.2}$$

这里 $V=V(S;K)$ 表示敲定价格为 K 的美式期权价格（略去了其他无关变量）.

证明 以美式看涨期权为例．显然当 $h=0$ 时，(3.6.2) 成立．现证当 $h=1$ 时，(3.6.2) 亦对．记

$$V_\alpha^{N-1}=V(S_\alpha^{N-1};K).$$

由美式看涨期权的计算公式 (3.5.1),

$$V(S_\alpha^{N-1};K)=\max\{\frac{1}{\rho}[qV(S_\alpha^N;K)+(1-q)V(S_{\alpha+1}^N;K)],(S_\alpha^{N-1}-K)^+\},$$

其中 $S_\alpha^N=S_0u^{N-\alpha}d^\alpha=S_\alpha^{N-1}u$, $S_{\alpha+1}^N=S_\alpha^{N-1}d$. 因此

$$\begin{aligned}V(\mu S_\alpha^{N-1};\mu K) &= \max\{\frac{1}{\rho}[qV(\mu S_\alpha^N;\mu K)+(1-q)V(\mu S_{\alpha+1}^N;\mu K)], \\ &\quad (\mu S_\alpha^{N-1}-\mu K)^+\} \\ &= \max\{\frac{1}{\rho}[q(\mu S_\alpha^N-\mu K)^+ +(1-q)(\mu S_{\alpha+1}^N-\mu K)^+], \\ &\quad (\mu S_\alpha^{N-1}-\mu K)^+\} \\ &= \mu V(S_\alpha^{N-1};K).\end{aligned}$$

利用反向归纳法，若 $h=k-1$ 成立，则由 (3.5.1) 推得 $h=k$ 亦成立．至此引理获证．

定理 3.6 的证明 以 $C(S,K;\rho,\eta;n)$ 表示当 $t=t_n$ $(0\le n\le N)$ 时美式看涨期权的价格，则由 (3.5.1)，

$$\begin{aligned}
C(S,K;\rho,\eta;N-1) &= \max\{\frac{1}{\rho}[q(Su-K)^+ + (1-q)(Sd-K)^+],(S-K)^+\} \\
&\quad\text{（为了书写简单，略去脚标，把 } S_\alpha^{N-1} \text{ 记作 } S\text{ ）} \\
&= \max\{\frac{1}{\rho}[qu(S-Kd)^+ + (1-q)d(S-Ku)^+], \\
&\qquad (S-K)^+\} \\
&= \max\{\frac{1}{\eta}[(1-q')(S-Kd)^+ + q'(S-Ku)^+], \\
&\qquad (S-K)^+\} \quad \text{（由于引理 3.1 ）} \\
&= \max\{\frac{1}{\eta}[q'(S-Ku)^+ + (1-q')(S-Kd)^+], \\
&\qquad (S-K)^+\} \\
&= P(K,S;\eta,\rho;N-1). \quad (\text{由于} q' = \frac{\eta/\rho-d}{u-d})
\end{aligned}$$

因此当 S ， K 都看作固定值时，定理成立．

利用反向归纳法，假设定理当 $n=k+1$ 时成立，我们证明当 $n=k$ 时定理亦对．

事实上，根据美式看涨期权的计算公式 (3.5.1)，

$$\begin{aligned}
C(S,K;\rho,\eta;k) &= \max\{\frac{1}{\rho}[qV(Su;K;k+1) + (1-q)V(Sd;K;k+1)], \\
&\qquad (S-K)^+\} \\
&= \max\{\frac{1}{\rho}[quV(S;\frac{K}{u};k+1) + (1-q)dV(S;\frac{K}{d};k+1)], \\
&\qquad (S-K)^+\} \quad \text{（由引理 3.2 ）} \\
&= \max\{\frac{1}{\eta}[(1-q')V(S;Kd;k+1) + q'V(S;Ku;k+1)],(S-K)^+\} \\
&\quad \text{（由定理假设 } ud=1\text{ ，以及引理 3.1 ）} \\
&= P(K,S;\eta,\rho;k). \quad (\text{由于} q' = \frac{\eta/\rho-d}{u-d})
\end{aligned}$$

定理至此获证．

附注 看涨 — 看跌期权的对称关系式 (3.6.1) 显然对欧式期权同样成立.

定理 3.7 对于具有相同到期日的美式期权，若 $S_c(S_p)$ 以及 $K_c(K_p)$ 分别表示看涨（跌）期权的原生资产的价格和敲定价格，若

$$\frac{K_p}{S_p}=\frac{S_c}{K_c}, \tag{3.6.3}$$

则下述关系式成立

$$\frac{C(S_c,K_c;\rho,\eta;t)}{\sqrt{S_cK_c}}=\frac{P(S_p,K_p;\eta,\rho;t)}{\sqrt{S_pK_p}}, \tag{3.6.4}$$

这里 $t=t_n \quad (0\le n\le N)$.

证明 由于看涨 — 看跌期权的对称关系式 (3.6.1)（定理 3.6）以及定理的假设 (3.6.3),

$$\begin{aligned}\frac{C(S_c,K_c;\rho,\eta;t)}{\sqrt{S_cK_c}} &= \frac{P(K_c,S_c;\eta,\rho;t)}{\sqrt{S_cK_c}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{S_pK_p}}\frac{K_p}{S_c}P(K_c,S_c;\eta,\rho;t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{S_pK_p}}P(\frac{K_pK_c}{S_c},K_p;\eta,\rho;t)\\
&\qquad \text{（由引理 3.2）}\\
&= \frac{1}{\sqrt{S_pK_p}}P(S_p,K_p;\eta,\rho;t).\\
&\qquad \text{（由假设 (3.6.3)）}\end{aligned}$$

定理至此获证.

推论 特别取 $S_c=S,\quad K_p=K_c=K$，则由 (3.6.3)

$$S_p=\frac{K^2}{S},$$

把它们代入 (3.6.4)，从而得到**具有同一到期日和敲定价格的美式看涨与看跌期权的关系式**

$$C(S,K;\rho,\eta;t_n)=\frac{S}{K}P(\frac{K^2}{S},K;\eta,\rho;t_n). \qquad (0\le n\le N) \tag{3.6.5}$$

作为这一章的小结，我们归纳以下几个要点：

1. 这一章中我们对原生资产价格的演化给出了一个离散模型——二叉树模型，基于这个模型给出了它的衍生物——期权的定价，即期权定价的二叉树方法.

2. 期权定价的二叉树方法是基于无套利原理，利用 Δ- 对冲技巧，定义了一个风险中性的等价鞅测度. 通过这个鞅测度给出了一个独立于每个投资人风险偏好的公平价格.

3. 通过美式期权的二叉树方法，我们证明了对于美式看跌期权存在二个区域：继续持有区域与终止区域，在它们中间有一条最佳实施边界. 在继续持有区域：

$$V_j^n>(K-S_j)^+,$$

$$qV_{j+1}^{n+1}+(1-q)V_{j-1}^{n+1}=V_j^n;$$

在终止持有区域：

$$V_j^n=(K-S_j)^+,$$

$$qV_{j+1}^{n+1}+(1-q)V_{j-1}^{n+1}<V_j^n.$$

4. 对于美式期权，虽然不存在看涨—看跌期权的平价公式，但它与欧式期权一样，在看涨与看跌期权之间存在对称关系式.

习题

1. 设 $c_\alpha^{N-h}(r,q,K),p_\alpha^{N-h}(r,q,K)$ 分别是利率为 r，红利率为 q，敲定价为 K 的看涨和看跌期权价格. 这里 $t=(N-h)\Delta t\ \ (0\le h\le N)$, $\quad S=S_\alpha^{N-h}=S_0u^\alpha d^{N-h-\alpha}$ $(0\le \alpha\le N-h)$. 试证：

(1) 当 $q_1>q_2$ 时，

$$c_\alpha^{N-h}(r,q_1,K)\le c_\alpha^{N-h}(r,q_2,K),$$

$$p_\alpha^{N-h}(r,q_1,K)\ge p_\alpha^{N-h}(r,q_2,K).$$

(2) 当 $r_1 > r_2$ 时,

$$c_\alpha^{N-h}(r_1,q,K) \geq c_\alpha^{N-h}(r_2,q,K),$$

$$p_\alpha^{N-h}(r_1,q,K) \leq p_\alpha^{N-h}(r_2,q,K).$$

(3)

$$c_\alpha^{N-h}(r,q,K_\lambda) \leq \lambda c_\alpha^{N-h}(r,q,K_1) + (1-\lambda)c_\alpha^{N-h}(r,q,K_2),$$

其中 $K_\lambda = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2, 0 \leq \lambda \leq 1,\quad K_1, K_2 > 0$. p_α^{N-h} 具有同样性质. 这表明期权定价是敲定价格的凸函数.

(4)

$$c_\alpha^{N-h} \leq \frac{\theta^\alpha - \theta^{\alpha_2}}{\theta^{\alpha_1} - \theta^{\alpha_2}} c_{\alpha_1}^{N-h} + \frac{\theta^{\alpha_1} - \theta^\alpha}{\theta^{\alpha_1} - \theta^{\alpha_2}} c_{\alpha_2}^{N-h},$$

其中 $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq N-h,\quad \theta = \frac{u}{d}$. p_α^{N-h} 具有同样性质. 这表明期权定价是原生资产价格的凸函数.

(5) 设

$$\Delta_\alpha^{N-h} = \frac{c_{\alpha+1}^{N-h} - c_{\alpha-1}^{N-h}}{S_\alpha^{N-h}(\theta - \theta^{-1})},$$

则

$$\Delta_\alpha^{N-h} \geq \Delta_{\alpha-1}^{N-h},$$

其中 $2 \leq \alpha \leq N-h-1$. 且对看跌期权同样成立.

2. 考虑连续支付红利的美式看涨期权, 设 $V_j^n\ (n=0,1,\cdots,N;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是它的定价, 试证明:

(1)

$$V_j^{n-1} \geq V_j^n,$$
$$V_j^n \leq V_{j+1}^n.$$

(2) 存在 $j_n(n=0,1,\cdots,N)$, 使
当 $j < j_n, 0 \leq n \leq N$ 时,

$$V_j^n \geq \varphi_j,$$

且

$$V_j^n = \frac{1}{\rho}[q_u V_{j+1}^{n+1} + q_d V_{j-1}^{n+1}];$$

当 $j > j_n, 0 \leq n \leq N$ 时,

$$V_j^n = \varphi_j,$$

且

$$V_j^n > \frac{1}{\rho}[q_u V_{j+1}^{n+1} + q_d V_{j-1}^{n+1}];$$

且 j_n 适合：

$$j_0 \geq j_1 \geq \cdots \geq j_N,$$

其中

$$q_u = \frac{\rho/\eta - d}{u-d},$$

$$q_d = \frac{u - \rho/\eta}{u-d}.$$

3. 设今日为 8 月 1 日，现股价为 75 元，无风险利率为 4%，试求下列期权的期权金：

(1) 若在三个月以后，股价有二个可能：或上升到 92 元，或下跌到 59 元. 试求在风险中性意义下，股价的上升和下降概率. 若购买一张 10 月 31 日到期，敲定价为 75 元的欧式看跌期权，问期权金为多少？

(2) 若在三个月期间，每一个月股价有二个可能：或上升 5% 或下降 5%. 若购买一张 10 月 31 日到期的敲定价为 75 元的欧式看跌期权，问期权金为多少？

(3) 在第 (2) 题的假设下，若购买一张 10 月 31 日到期的敲定价为 75 元的看跌期权，如按合约规定，每到一个月（即 8 月 31 日，9 月 30 日）持有人有权提前实施期权，问期权金为多少？

(4) 在第 (2) 题的假设下，若购买一张 10 月 31 日到期的敲定价为 75 元的看跌期权，如按合约规定，在第 2 个月月底（即 9 月 30 日）持有人有权提前实施期权，问期权金为多少？

(5) 若在 (2)～(4) 题中，购买的是一张看涨期权，问它的期权金为多少？

4. 设 $C_n(S;u,d)$ $(n=0,1,\cdots,N)$ 是给定在 $t=t_n$ 上的欧式看涨期权定价，即

$$C_n(S;u,d) = \frac{1}{\rho}[q_u C_{n+1}(Su;u,d) + q_d C(Sd;u,d)], \qquad (0 \leq n \leq N-1)$$

其中

$$q_u = \frac{\rho - d}{u-d},$$

$$q_d = \frac{u-\rho}{u-d}.$$

试证明：当 $0 < d_2 < d_1 < \rho < u_1 < u_2$ 时，

$$C_0(S_0;u_1,d_1) < C_0(S_0;u_2,d_2),$$

其中 S_0 是 $t=0$ 时刻的股价.

（金融意义：股价波动的比率愈大，相应的期权价格必愈贵）

第四章 Brown 运动与 Itô 公式

众所周知，原生资产价格演化是一个随机过程. 1900 年法国数学家 Bachelier 在他的博士论文中首先把股票价格的变化用 Brown 运动来刻画. 因此为了给出期权定价的连续模型，我们必须对 Brown 运动作一个比较直观，深入浅出的介绍. 在本章我们不仅要给出 Brown 运动的定义以及相关的性质，特别要给出基于 Brown 运动的 随机运算 (stochastic calculus)，包括 Itô 积分和 Itô 公式. 为了避免应用更多的数学知识，几乎所有的证明都是在离散情形下进行，至于它的极限过程就一笔带过了. 这一章的所有论述只求简明直观，不深究严密性.

§4.1 随机游动与 Brown 运动

让我们从扔钱币开始. 钱币有两面："字"和"花". 定义随机量 $R_i(\omega),(i=1,2,\cdots)$：

$$R_i(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\text{“字”},\\ -1. & \omega=\text{“花”}.\end{cases}$$

容易证明 $R_i(\omega)$ 具有以下性质：

$$E(R_i)=0, \tag{4.1.1}$$

$$Var(R_i)=1, \tag{4.1.2}$$

$$E(R_iR_j)=0, \qquad (i\neq j) \tag{4.1.3}$$

以及

$$R_i\text{与}R_j\text{独立}. \quad (i\neq j) \tag{4.1.4}$$

从随机量 R_i 出发，定义随机量 $R_i^{\Delta}=\sqrt{\Delta}R_i$ 以及随机序列 $S_k^{\Delta},(k=0,1,\cdots)$：

$$S_0^{\Delta}=0,$$

$$S_k^{\Delta}=\sum_{i=1}^{k}R_i^{\Delta}=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\Delta}R_i, \qquad (k=1,2,\cdots). \tag{4.1.5}$$

考虑时间段 $0 \le t \le T$. 细分 $[0,T]$，令 $\Delta = \frac{T}{N}, t_n = n\Delta$, $(n = 0,1,\cdots,N)$，从而有分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T.$$

在 $[0,T]$ 上定义 随机游动 (randomwalk)$S^{\Delta}(t)$：

$$S^{\Delta}(t) = \begin{cases} S_k^{\Delta}, & t = t_k, \\ \dfrac{t - t_k}{\Delta} S_{k+1}^{\Delta} + \dfrac{t_{k+1} - t}{\Delta} S_k^{\Delta}, & t_k \le t \le t_{k+1}. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

$S^{\Delta}(t)$ 称为随机游动的 轨线（路径） (path).

让我们考察一下轨线 $S^{\Delta}(t)$ 的分布.

设 $T = 1, N = 4, \Delta = \frac{1}{4}$,

$$S_0^{\Delta} = 0,$$

$$S_1^{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{4}} R_1 = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\},$$

$$S_2^{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{4}} [R_1 + R_2] = \{-1, 0, 1\},$$

$$S_3^{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{4}} [R_1 + R_2 + R_3] = \{-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\},$$

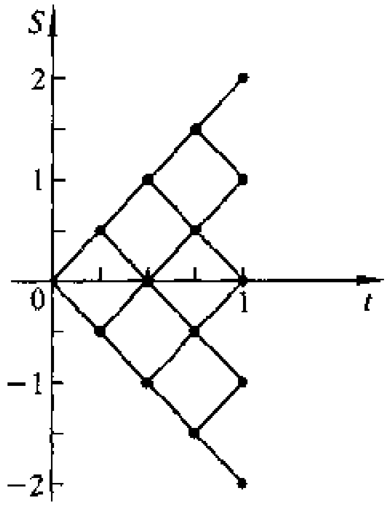
$$S_4^{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{4}} [R_1 + R_2 + R_3 + R_4] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

$S^{\Delta}(t)$ 是由这些随机点经过线性插值形成的路径（如下页图），当 $\Delta = \frac{1}{4}$ 时这样的路径共有 $2^4 = 16$ 条.

$S^{\Delta}(t)$ 具有以下的性质:

1. $E(S^{\Delta}(\hat{t}_2) - S^{\Delta}(\hat{t}_1)) = 0, \quad (4.1.7)$
2. $Var(S^{\Delta}(\hat{t}_2) - S^{\Delta}(\hat{t}_1))$
   $= E([S^{\Delta}(\hat{t}_2) - S^{\Delta}(\hat{t}_1)]^2) = | \hat{t}_2 - \hat{t}_1 | + O(\Delta), \quad (4.1.8)$
3. $E(S^{\Delta}(\hat{t}_2) S^{\Delta}(\hat{t}_1)) = \min(\hat{t}_2, \hat{t}_1) + O(\Delta), \quad (4.1.9)$
4. $S^{\Delta}(t_k + \delta) - S^{\Delta}(t_k)$ 与 $S^{\Delta}(t_k)$ 独立, $\quad (4.1.10)$

其中 $t_k = k\Delta, 1 \le k \le N - 1; \delta > 0; 0 \le \hat{t}_1, \hat{t}_2 \le T$.



性质 (4.1.7)–(4.1.10) 可以由随机量 $R_i(\omega)$ 的性质 (4.1.1)–(4.1.4) 直接推出.

以 (4.1.8) 为例，为简单计，无妨假定 $\hat{t}_2 > \hat{t}_1 = 0, t_k < \hat{t}_2 \le t_{k+1}$ ，

$$
\begin{aligned}
Var(S^\Delta(\hat{t}_2) - S^\Delta(\hat{t}_1)) &= Var(S^\Delta(\hat{t}_2)) = E(S^\Delta(\hat{t}_2)S^\Delta(\hat{t}_2)) \\
&= E([\frac{\hat{t}_2 - t_k}{\Delta} S^\Delta_{k+1} + \frac{t_{k+1} - \hat{t}_2}{\Delta} S^\Delta_k]^2) \\
&= (\frac{\hat{t}_2 - t_k}{\Delta})^2 E(S^{\Delta^2}_{k+1}) + 2(\frac{\hat{t}_2 - t_k}{\Delta})(\frac{t_{k+1} - \hat{t}_2}{\Delta}) E(S^\Delta_{k+1} S^\Delta_k) \\
&\quad + (\frac{t_{k+1} - \hat{t}_2}{\Delta})^2 E(S^{\Delta^2}_k) \\
&= (\frac{\hat{t}_2 - t_k}{\Delta})^2 (k+1)\Delta + 2k\Delta(\frac{\hat{t}_2 - t_k}{\Delta})(\frac{t_{k+1} - \hat{t}_2}{\Delta}) \\
&\quad + k\Delta(\frac{t_{k+1} - \hat{t}_2}{\Delta})^2 \\
&= t_k + \frac{(\hat{t}_2 - t_k)^2}{\Delta} = \hat{t}_2 + O(\Delta).
\end{aligned}
$$

当 $\Delta \to 0$ 时，考察 $S^\Delta(t)$ 的极限. 首先我们引用以下定理:

中心极限定理 (central limit theorem) 考虑随机序列 $\{\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} R_i\}$.（ R_i 具有性质 (4.1.1),(4.1.2) ），则当 $k \to \infty$ 时，

$$
\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} R_i \to X,
$$

这里随机变量 $X \sim N(0,1)$ ，即随机变量 X 是服从标准正态分布 (standard normal distribution) ：

$$
E(X) = 0, Var(X) = 1.
$$

应用中心极限定理，考察当 $\Delta \to 0$ 时 $S^{\Delta}(t)$ 的极限.

对于任意固定 $t(t_k < t \le t_{k+1})$，考虑 $\frac{S^{\Delta}(t)}{\sqrt{t}}$. 由于 $\Delta = \frac{t_k}{k}$，$(k = 1,2,\cdots,N)$，因此对于固定的 t,

$$
\begin{aligned}
\frac{S^{\Delta}(t)}{\sqrt{t}} &= \frac{1}{\sqrt{t}}[\frac{t_{k+1}-t}{\Delta}S_k^{\Delta} + \frac{t-t_k}{\Delta}S_{k+1}^{\Delta}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}}[\frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i=1}^{k}R_i + \frac{t-t_k}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i=1}^{k+1}R_i] \\
&= (\frac{t_{k+1}-t}{\Delta}\sqrt{\frac{t_k}{t}})\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}R_i + (\frac{t-t_k}{\Delta}\sqrt{\frac{t_{k+1}}{t}})\frac{1}{\sqrt{k+1}}\sum_{i=1}^{k+1}R_i \\
&\longrightarrow X_t. \qquad (\text{当}\Delta \to 0, \text{即 } k \to \infty \text{ 时})
\end{aligned}
$$

定义 4.1 若记 $S^{\Delta}(t)$ 的极限为 $W(t)$，那么由 (4.1.7)—(4.1.10) 我们有

1) 轨线连续 $W(0) = 0$、$W(t)$ 是 t 的连续函数. (4.1.11)

2) 增量正态分布 对固定 t, $W(t) \sim N(0,t)$、以及对 $t > S$ 有

$$W(t) - W(s) \sim N(0, t-s). \tag{4.1.12}$$

3) 增量独立 $W(t_n) - W(t_{n-1}), W(t_{n-1}) - W(t_{n-2}), \cdots, W(t_2) - W(t_1)$ 与 $W(t_1)$ 都是互相独立的 $(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$. (4.1.13)

适合性质 1)—3) 的随机过程 $W(t)$（简写为 W_t）称为 **Brown 运动** 或 **Wiener过程**.

在进一步研究 Brown 运动的性质以前，我们先举一个例子，说明上一章所描述的原生资产价格变化与 Brown 运动的关系.

§4.2 原生资产价格演化的连续模型

在上一章我们用二叉树刻画了原生资产价格的演化过程. 基于 §4.1 的讨论，我们要探求当 $\Delta \to 0$ 时它的极限，即考察原生资产价格演化的连续模型.

为此我们引进原生资产价格的 **贴现值**S_t^*:

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t}$$

以及相应的无风险资产的**贴现价格**，此时无风险利率 $r^* = 0, \rho^* = 1 + r^*\Delta t = 1$.

事实上，设 Π_t 是无风险资产，

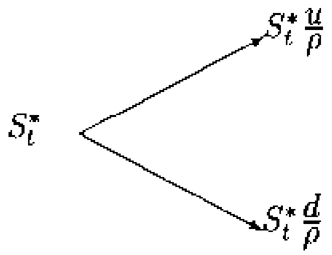
$$\begin{aligned}\Pi_{t+\Delta t} &= \rho\Pi_t \qquad (\rho = 1 + r\Delta t)\\ &= \frac{B_{t+\Delta t}}{B_t}\Pi_t,\end{aligned}$$

故

$$\Pi^*_{t+\Delta t} = \frac{\Pi_{t+\Delta t}}{B_{t+\Delta t}} = \frac{\Pi_t}{B_t} = \Pi^*_t.$$

即对于无风险资产的贴现价格， $\rho^* = 1, r^* = 0$.

对于 S^*_t，在 $[t, t+\Delta t]$ 时段，二叉树模型可以表述为



设 $ud = 1$，令

$$\frac{u}{\rho} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad \frac{d}{\rho} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

其中 σ 为常数，它表示原生资产的贴现价格的波动率.

对于鞅测度 $Q: \{q_u, q_d\}$，有

$$q_u = \frac{\rho - d}{u - d} = \frac{1 - d/\rho}{u/\rho - d/\rho} = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t}),$$

$$q_d = \frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t}).$$

因此如果忽略 Δt 的小量，在 $[t, t+\Delta t]$ 时段内原生资产的贴现价格的变动，

上扬与下跌具有相同的概率，它们都是 $\frac{1}{2}$. 而它的 回报

$$\frac{S^*_{t+\Delta t}-S^*_t}{S^*_t} = \begin{cases} (\frac{u}{\rho}-1)=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-1, & (\text{上扬}) \\ (\frac{d}{\rho}-1)=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}-1, & (\text{下跌}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma\sqrt{\Delta t}+O(\Delta t), & (\text{上扬}) \\ -\sigma\sqrt{\Delta t}+O(\Delta t). & (\text{下跌}) \end{cases}$$

因此不计 Δt 的高阶小量，我们有

$$\frac{S^*_{t+\Delta t}-S^*_t}{S^*_t}=\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega),$$

（ $R(\omega)$ 的定义见 §4.1 ）. 由 Taylor 展开，由于 $\Delta S^*=S^*_{t+\Delta t}-S^*_t$ 是小量，因此

$$\frac{S^*_{t+\Delta t}-S^*_t}{S^*_t}=\ln(1+\frac{S^*_{t+\Delta t}-S^*_t}{S^*_t})+\frac{1}{2}(\frac{S^*_{t+\Delta t}-S^*_t}{S^*_t})^2+O(|\Delta S^*|^3).$$

即不计 Δt 的高阶小量

$$\ln\frac{S^*_{t+\Delta t}}{S^*_t}=\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t. \tag{4.2.1}$$

根据定义 $S^*_0=1$, $B_0=1$，因此在对 $[0,T]$ 剖分以后，在每一个分点 $t=t_k$，

$$\ln S^*_k=\sum_{i=1}^{k}\ln\frac{S^*_i}{S^*_{i-1}}=\sigma\sum_{i=1}^{k}R^{\Delta}_i-\frac{1}{2}\sigma^2 t_k,$$

即

$$\ln S_k=\ln S^*_k+\ln B_k=rt_k+\sigma\sum_{i=1}^{k}R^{\Delta}_i-\frac{1}{2}\sigma^2 t_k.$$

如果与上节一样，把它用线性插值连成“路径”，并记作 $\hat{S}^{\Delta}(t)$，那么

$$\ln\hat{S}^{\Delta}(t)=(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma S^{\Delta}(t).$$

其中 $S^{\Delta}(t)$ 的定义是 (4.1.6). 令 $\Delta t\to 0$ 用 $S(t)$ 记 $\hat{S}^{\Delta}(t)$ 的极限函数，根据 §4.1 的结论，我们有

$$\ln S(t)=(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t),$$

即

$$S(t) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)}, \tag{4.2.2}$$

其中 $S_0 = S(0)$.

这表示原生资产价格演化作为一个连续随机过程，它的对数是用 Brown 运动来刻画，人们称原生资产价格 $S(t)$**适合几何Brown运动**(geometric Brown motion). 这就是说：相应于上一章原生资产价格的二叉树离散模型，在风险中性世界中（即在鞅测度下），它的连续模型是适合几何 Brown 运动 (4.2.2).

§4.3 二次变差定理

用 Brown 运动刻画的粒子运动的每一条轨线是连续的，但是我们要指出它是一条处处不可微的曲线.

众所周知，假如 $f(t) \in C^1[0,T]$（即在 $[0,T]$ 上一次连续可微），则 $f(t)$ 的 二次变差 (quadratic variation) 必趋于 0.

设 $[0,T]$ 上给定函数 $f(t)$，在 $[0,T]$ 上定义一个剖分 Π：

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$

则相应于剖分 Π,$f(t)$ 的 **二次变差** 定义为

$$Q_\Pi = \sum_{k=0}^{N-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2.$$

若 $f(t) \in C^1[0,T]$，则当 $\Delta = \max\limits_{0\le k\le N-1} |t_{k+1} - t_k| \to 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta\to 0} Q_\Pi = 0. \tag{4.3.1}$$

事实上

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\to 0} Q_\Pi &= \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} |f'(\xi_k)|^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&\le \lim_{\Delta\to 0} \Delta \sum_{k=0}^{N-1} |f'(\xi_k)|^2 (t_{k+1} - t_k) = 0.
\end{aligned}$$

现在考察相应于剖分 Π 的 Brown 运动的二次变差 Q_Π :

$$Q_\Pi = \sum_{k=0}^{N-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2.$$

定理 4.1 对于区间 $[0, T]$ 上的任意剖分 Π , Brown 运动的二次变差 Q_Π 当 $\Delta \to 0$ 时存在极限:

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_\Pi = T \qquad \text{(在 } L_2 \text{ 的意义下).} \tag{4.3.2}$$

在证明这个定理之前，先说明一下这个定理的意义.

对于任意 $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$, $\Pi(\tau_1, \tau_2)$ 为区间 $[\tau_1, \tau_2]$ 的任意剖分，$Q_\Pi(\tau_1, \tau_2)$ 是相应于剖分 $\Pi(\tau_1, \tau_2)$ 的 Brown 运动的二次变差，则由定理 4.1 得

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_\Pi(\tau_1, \tau_2) = \tau_2 - \tau_1. \tag{4.3.3}$$

比照可微函数的结论 (4.3.1)，我们有以下的直接推论:

Brown 运动 W_t 作为粒子的随机游动，它的轨线处处连续但处处不可微.

定理 4.1 的证明 因为 Q_Π 是随机变量，因此为了要证明 (4.3.2)，需要指出:

$$\lim_{\Delta \to 0} E(Q_\Pi - T) = 0, \tag{4.3.4}$$

以及

$$\lim_{\Delta \to 0} Var(Q_\Pi - T) = \lim_{\Delta \to 0} E((Q_\Pi - T)^2) = 0. \tag{4.3.5}$$

事实上

$$Q_\Pi - T = \sum_{k=0}^{N-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k).$$

因此由 (4.1.12)

$$\begin{aligned} E(Q_\Pi - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} E((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2) - (t_{k+1} - t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} Var(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - (t_{k+1} - t_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

即 (4.3.4) 成立.

现证 (4.3.5)，记 $D_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}, \delta_k = t_{k+1} - t_k$，则

$$
\begin{aligned}
Var(Q_\Pi - T) &= E((Q_\Pi - T)^2) \\
&= \sum_{k,\ell=0}^{N-1} E((D_k^2 - \delta_k)(D_\ell^2 - \delta_\ell)) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} E((D_k^2 - \delta_k)^2) + \sum_{k \neq \ell} E((D_k^2 - \delta_k)(D_\ell^2 - \delta_\ell)).
\end{aligned}
$$

由 (4.1.13)，当 $k \neq \ell$ 时，D_k 与 D_ℓ 独立，故

$$E((D_k^2 - \delta_k)(D_\ell^2 - \delta_\ell)) = E(D_k^2 - \delta_k)E(D_\ell^2 - \delta_\ell) = 0.$$

因此

$$
\begin{aligned}
Var(Q_\Pi - T) &= \sum_{k=0}^{N-1} E(D_k^4) - 2\delta_k E(D_k^2) + \delta_k^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} E(D_k^4) - \delta_k^2.
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

由 (4.1.12),$D_k \sim N(0, t_{k+1} - t_k)$，故 $E(D_k^4)$ 可以表成以下的积分

$$E(D_k^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1} - t_k)}} e^{-\frac{\alpha^2}{2(t_{k+1}-t_k)}} d\alpha = 3(t_{k+1} - t_k)^2.$$

把它代入 (4.3.6)，从而有

$$Var(Q_\Pi - T) = \sum_{k=0}^{N-1} 3\delta_k^2 - \delta_k^2 = 2\sum_{k=0}^{N-1} \delta_k^2.$$

故

$$0 \leq \lim_{\Delta \to 0} Var(Q_\Pi - T) \leq 2 \lim_{\Delta \to 0} \Delta \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) = 0,$$

即 (4.3.5) 成立. 从而定理获证.

附注 若令 $dt \to 0$（即 $\Delta \to 0$），记 dW_t 是 $D_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ 的极限，那么由定理 4.1，形式上我们有

$$\begin{aligned} &E(dW_t^2) = dt, \\ &Var(dW_t^2) = E(dW_t^4) - [E(dW_t^2)]^2 \\ &\qquad = 3dt^2 - dt^2 = 2dt^2. \end{aligned}$$

因此忽略 dt 的高阶小量，我们近似地认为

$$dW_t^2 = dt. \tag{4.3.7}$$

即不计高阶小量，随机变量 dW_t 的平方是一个与 dt 等阶的 **确定的** 无穷小量. 这个看法对我们以下的讨论有帮助.

§4.4 Itô 积分

例 某公司投资于一种风险资产，它的价格变化为 W_t $(0 \le t \le T)$，$f(t)$ 是投资人选取的交易策略，$f(t) > 0 (< 0)$ 表示在 t 时刻买进（卖出）该风险资产的份额. 问：在给定的交易策略下，该投资人在 $t = T$ 时刻的总收益为多少？

剖分 $[0, T]$： $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$.

假设交易只在时间 $t = t_k (k = 1, \cdots, N)$ 进行，则在 $t = t_k$ 时刻进行交易，在 $t = t_{k+1}$ 时刻所获的收益（损失）为

$$f(t_k)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}].$$

从而整个时段 $[0, T]$ 上总收益

$$I_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}].$$

由于投资人决定自己的投资策略时，对风险资产未来价格的走向没有任何信息，对于这样的投资策略 $f(t)$，我们称为是 非预测的 (non-anticipating).

定义 4.2 若 $f(t)$ 是非预测的随机过程，它使得

$$\lim_{\Delta \to 0} I_\Delta(f) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]$$

$(\Delta = \max\limits_{0 \leq k \leq N-1}(t_{k+1} - t_k))$ 存在，并与剖分无关的唯一极限，则称这个极限值为 $f(t)$ 的 **Itô积分**，记作 $\int_0^T f(t)dW_t$，即

$$\int_0^T f(t)dW_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}].$$

附注 我们并不准备去研究 Itô 积分存在的条件，但我们有必要指出：这个定义与通常 Riemann 积分的定义是有差别的.

$I_\Delta(f)$ 可以看作是对于给定剖分的 Riemann 和，但与通常微积分教程中的 Riemann 和的差别之处在于：由于假设 $f(t)$ 是非预测的，因此在 $I_\Delta(f)$ 中 f 的值必定取在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 的左端点，而不是区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的任意"中间点"．事实上基于二次变差定理 4.1 可以证明：关于 Wiener 过程的 Riemann 和的极限值依赖于所选取的"中间点"的位置．"中间点"的位置不同，Riemann 和的极限值就不一样，因此如果把 Wiener 过程的 Riemann 和取定在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的 **任意** "中间点"，那么 Riemann 和 $I_\Delta(f)$ 的极限不存在.

为了进一步认识 Itô 积分的意义，先看几个例子.

例 1

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2}. \tag{4.4.1}$$

证明 根据 Itô 积分的定义，

$$\int_0^T W_t dW_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} W_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \lim_{\Delta \to 0} I_\Delta,$$

其中

$$\begin{aligned}
I_\Delta &= \sum_{k=0}^{N-1} W_{t_k} W_{t_{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1} W_{t_k}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} W_{t_k} W_{t_{k-1}} - \sum_{k=1}^{N} W_{t_k}^2 + W_{t_N}^2 - W_{t_0}^2 \\
&= -\sum_{k=1}^{N} W_{t_k}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) + W_T^2.
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

考虑到 I_Δ 亦可改写为

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \tag{4.4.3}$$

(4.4.2),(4.4.3) 相加，我们有

$$\begin{aligned}2I_\Delta &= \sum_{i=1}^{N}(W_{t_{i-1}} - W_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + W_T^2 \\ &= W_T^2 - Q_\Pi.\end{aligned}$$

这里 Q_Π 是 W_t 相应于剖分 Π 的二次变差. 故由定理 4.1，推得

$$\lim_{\Delta\to 0} I_\Delta = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}\lim_{\Delta\to 0} Q_\Pi = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2}.$$

从而 (4.4.1) 获证.

附注 从上述证明中可以看出：由于 Brown 运动的二次变差不为 0，因此 Itô 积分的结果与普通定积分的结果不一样.

如果把积分上限 T 用变量上限 t 来代替，那么由 (4.4.1)，我们得到相应的微分公式：

$$W_t dW_t = \frac{1}{2}dW_t^2 - \frac{1}{2}dt,$$

即

$$dW_t^2 = 2W_t dW_t + dt. \tag{4.4.4}$$

这表明复合函数微分的法则相应地发生了变化.

§4.5 Itô 公式

设 $Y_t = f(X_t, t)$，其中 X_t 是一个随机过程，问：

$$dY_t = df(X_t, t) = ?$$

这就是这一节所要讨论的 Itô 公式. Itô 公式是随机分析中复合函数求微分的法则.

函数的微分是函数增量的线性主部. 由于 Brown 运动的二次变差定理, 因此对于由随机过程形成的复合函数, 它的增量的线性主部将出现新的内容. 为此让我们先从一些具体例子开始:

例 2

$$Y_t = f(X_t, t).\ X_t = W_t, \qquad \text{求} \quad dY_t = ?$$

由 Taylor 展开得到

$$dY_t = df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t^2 - O(|dX_t|dt).$$

由 (4.3.7),

$$dY_t = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW_t + o(dt),$$

因此不计高阶小量,

$$dY_t = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW_t. \tag{4.5.1}$$

以 $Y_t = f(X_t, t) = X_t^2, X_t = W_t$ 为例,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

把它们代入 (4.5.1) 立得

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t.$$

即公式 (4.4.4).

例 3 由 §4.2 中的讨论知: 在风险中性世界中, 风险资产 S_t 的价格变化可以用 (4.2.2) 来表示, 即

$$S(t) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

求 $dS(t)$=?

由于

$$S(t) = f(X_t, t), \qquad X_t = W_t,$$

其中

$$f(x, t) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}.$$

因此由公式 (4.5.1),

$$\begin{aligned} dS(t) &= S_0[(r-\frac{\sigma^2}{2})+\frac{1}{2}\sigma^2]e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}dt \\ &\quad +S_0\sigma e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}dW_t \\ &= rS(t)dt+\sigma S(t)dW_t. \end{aligned}$$

即在风险中性世界中，原生资产 S_t 适合随机微分方程 (stochastic differential equations)

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma dW_t, \tag{4.5.2}$$

这里 $\frac{dS_t}{S_t}$ 表示在 dt 时段内 S_t 的回报， rdt 表示 S_t 的期望增长率是无风险利率， σdW_t 表示 S_t 的回报的波动， σ 称为 **波动率** (volatility).

定理 4.2 (Itô **公式**) 设 $V_t=V(S_t,t)$ ， V 是二元可微函数. 若随机过程 S_t 适合随机微分方程

$$dS_t=\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dW_t,$$

则

$$\begin{aligned} dV_t &= (\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt+\frac{\partial V}{\partial S}dS_t \\ &= (\frac{\partial V}{\partial t}+\mu(S_t,t)\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt \\ &\quad +\sigma(S_t,t)\frac{\partial V}{\partial S}dW_t. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

证明 由 Taylor 展式

$$dV_t=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}dS_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS_t)^2+O(dtdS_t). \tag{4.5.4}$$

由于 (4.3.7),

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= (\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dW_t)^2 \\ &= \sigma^2(S_t,t)(dW_t)^2+2\mu\sigma dtdW_t+\mu^2dt^2 \\ &= \sigma^2(S_t,t)dt+o(dt). \end{aligned}$$

把它代回 (4.5.4), 得到

$$dV_t=(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt+\frac{\partial V}{\partial S}[\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dW_t]+o(dt).$$

即 (4.5.3) 成立.

定理 4.3　若 X_t、Y_t 是随机过程，它们分别适合随机微分方程

$$dX_t = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t, \tag{4.5.5}$$

$$dY_t = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t. \tag{4.5.6}$$

则

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1\sigma_2 dt. \tag{4.5.7}$$

证明　因为

$$d(X_tY_t) = \frac{1}{4}[d(X_t + Y_t)^2 - d(X_t - Y_t)^2]. \tag{4.5.8}$$

而由 (4.5.5),(4.5.6) 得:

$$d(X_t + Y_t) = (\mu_1 + \mu_2)dt + (\sigma_1 + \sigma_2)dW_t,$$

$$d(X_t - Y_t) = (\mu_1 - \mu_2)dt + (\sigma_1 - \sigma_2)dW_t.$$

因此由 Itô 公式 (4.5.1),

$$d(X_t + Y_t)^2 = 2(X_t - Y_t)d(X_t + Y_t) + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 dt,$$

$$d(X_t - Y_t)^2 = 2(X_t - Y_t)d(X_t - Y_t) + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 dt.$$

将它们代入 (4.5.8)，得到

$$\begin{aligned} d(X_tY_t) &= \frac{1}{4}[2(X_t + Y_t)d(X_t + Y_t) - 2(X_t - Y_t)d(X_t - Y_t)] \\ &\quad + \frac{1}{4}[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2]dt \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1\sigma_2 dt. \end{aligned}$$

即 (4.5.7) 成立.

定理 4.4　若 X_t, Y_t 是适合随机微分方程 (4.5.5),(4.5.6) 的随机过程，则

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{\sigma_2^2 X_t - \sigma_1\sigma_2 Y_t}{Y_t^3} dt. \tag{4.5.9}$$

证明 应用 Itô 公式 (4.5.3)

$$d(\frac{1}{Y_t}) = -\frac{1}{Y_t^2}dY_t + \frac{1}{Y_t^3}\sigma_2^2 dt$$
$$= \frac{1}{Y_t^2}[(\sigma_2^2 Y_t^{-1} - \mu_2)dt - \sigma_2 dW_t].$$

因此由定理 4.3，得

$$d(X_t\frac{1}{Y_t}) = X_t d(\frac{1}{Y_t}) + \frac{1}{Y_t}dX_t - \frac{\sigma_1\sigma_2}{Y_t^2}dt$$
$$= \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{\sigma_2^2 X_t - \sigma_1\sigma_2 Y_t}{Y_t^3}dt.$$

即 (4.5.9) 成立.

附注 定理 4.3–4.4 表明：由于对于 Wiener 过程的复合函数求微分的法则变了，因此由 Wiener 过程定义的两个随机过程相乘和相除的微分法则亦随之发生变化. 所有这一切结果提醒我们：在对随机过程作微积分运算时，与通常微积分运算是有差别的！

下面研究 **高维情形的 Itô 公式**

设 $W_j(t)$、$(j = 1, \cdots, m)$, 是互相独立的标准 Brown 运动，即

$$E(dW_j) = 0, \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

$$Var(dW_j) = dt, \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

$$Cov(dW_i dW_j) = 0, \qquad (i \neq j)$$

这里 Cov 表示 协方差 (covariance)：

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)).$$

设 $X_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是随机过程，它适合以下随机微分方程组

$$d\begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t), & \cdots, & \sigma_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t), & \cdots, & \sigma_{nm}(t) \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_m(t) \end{bmatrix}, \tag{4.5.10}$$

其中 $b_i(t),\sigma_{ij}(t)$ $(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$ 是给定函数.

定理 4.5 设 $V(x_1,\cdots,x_n,t)$ 是 $n+1$ 个变量的可微函数, $X_i(t)(i=1,\cdots,n)$ 是由 (4.5.10) 给出的随机过程, 则

$$
\begin{aligned}
dV(X_1(t),\cdots,X_n(t),t)= & \left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{x_i=X_i(t)}dt \\
& +\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_{x_i=X_i(t)}dX_i(t).
\end{aligned}
\tag{4.5.11}
$$

其中

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1m} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix}.
$$

这个定理不证了, 读者可以参照一维情形作为习题自行完成.

作为这一章的小结, 我们归纳以下两个要点:

1. Brown 运动的定义无疑是本章的核心, 基于 Brown 运动的二次变差定理, 我们建立了随机运算的基本法则, 特别是复合函数求微分的锁链法则——Itô 公式, 它是本书建立各种期权定价模型的基础.

2. 通过 Brown 运动的刻画, 我们建立了风险资产价格的离散模型——二叉树模型与连续模型——随机微分方程 (4.5.2) 之间的关系, 从而为期权定价的二叉树方法的进一步研究 (包括收敛性证明等) 打下了基础.

习题

1. 在区间 $[0,T]$ 上, 取分点

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T.$$

在每一个区间 $[t_n,t_{n+1}](0\le n\le N-1)$ 中, 对于固定 $\lambda\in[0,1]$, 取中间点:

$$\tau_n^\lambda=\lambda t_n+(1-\lambda)t_{n+1}.$$

对于光滑函数 $f(x)$, 取 Riemann 和 $\Pi_\lambda(f)$:

$$\Pi_\lambda(f)=\sum_{i=0}^{N-1}f(W_{\tau_n^\lambda})(W_{t_{n+1}}-W_{t_n}),$$

其中 W_t 是标准 Brown 运动. 定义积分值 $(\lambda)\int_0^T f(W_t)dW_t$:

$$(\lambda)\int_0^T f(W_t)dW_t = \lim_{\Delta\to 0}\Pi_\lambda(f),$$

这里 $\quad \Delta = \max_{0\le n\le N-1}|t_{n+1}-t_n|.$

当 $\lambda=1$ 时, 称为 Itô 积分; 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 称为 Stratonovich 积分; 当 $\lambda=0$ 时, 称为 backward 积分. 试求积分

$$(\lambda)\int_0^T W_t dW_t$$

当 $\lambda=0,\frac{1}{2},1$ 时的值.

2. 若 $S_{it}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个随机过程, 它们适合随机微分方程:

$$\frac{dS_{it}}{S_{it}} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i, \qquad (i=1,\cdots,n)$$

其中 $W_i(i=1,\cdots,n)$ 是标准 Brown 运动, 适合

$$\begin{aligned}&E(dW_i)=0,\\&Var(dW_i)=dt,\\&Cov(dW_i dW_j)=\rho_{ij}dt. \quad (i\ne j)\end{aligned}$$

试建立 Itô 公式, 即若 $V=V(S_{1,t},\cdots,S_{n,t},t)$, 求 $dV(S_{1,t},\cdots,S_{n,t},t)$.

3. 试求随机微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dS_t}{S_t}=(r-q)dt+\sigma dW_t,\\ S_t|_{t=0}=S_0\end{cases}$$

的解, 其中 r,q,σ 都是常数. W_t 是标准 Brown 运动.

(提示: 建立 $\ln S_t$ 的随机微分方程).

第五章 欧式期权定价 ——Black-Scholes 公式

假设原生资产价格演化的连续模型可以用几何 Brown 运动来刻画，建立它的衍生物 —— 期权定价的数学模型（ Black-Scholes 偏微分方程）和定价公式（ Black-Scholes 公式），以及利用 Black-Scholes 公式和对冲技巧对风险资产进行管理，这是这一章要讨论的几个重要问题.

§5.1 历史回顾

期权定价是一个古老的问题. 早在 1900 年， Louis Bachelier 发表了他的学位论文 " Théorie de la Spéculation " （投机交易理论）. 它被公认为是现代金融学的里程碑. 在他的论文中首次利用随机游动的思想给出了股票价格运行的随机模型，在这篇论文中，他就提到了期权的定价问题.

1964 年 Paul Samuelson（诺贝尔经济奖的获得者）对 L.Bachelier 的模型进行了修正. 以股票的回报代替原模型中的股票价格. 若 S_t 表示股票价格，那么 $\frac{dS_t}{S_t}$ 表示股票的回报， P.Samuelson 提出的随机微分方程是

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{5.1.1}$$

这个修改克服了原先模型中可能使股票价格 S_t 出现负值的不合理情况.

基于这个模型， P.Samuelson 还研究了看涨期权的定价问题（同时研究这个问题的还有 Ć.Sprenkle(1965) 和 J.Baness(1964) ），他们的结果可以表述为：

设 V 是看涨期权的期权金， S 是股价， K 是敲定价， T 是到期时间，则

$$V = e^{-\alpha_c T}[Se^{\alpha_s T}N(d_1) - KN(d_2)], \tag{5.1.2}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (\alpha_s + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{5.1.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \qquad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

这里 α_s, α_c 分别是原生资产价格 S_t 和期权的价格 V_t 的回报在 $t = T$ 时刻的数学期望值. 这两个量依赖于投资人的个人偏好, 因此虽然这个定价公式很漂亮, 但在实际交易中它是不能应用的.

1973 年 Fischer Black 和 Myron Scholes 建立了看涨期权定价公式

$$V = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2). \tag{5.1.4}$$

与公式 (5.1.2) 相比较, 在这里 α_s, α_c 已经不再出现, 取而代之的是无风险利率 r. 这个公式的创新之处在于不依赖于投资人的偏好. 它把所有投资人引向同一个以无风险利率作为投资回报率的 风险中性世界 (risk-neutral world). 1997 年由于这个光辉的公式以及由此产生的期权定价理论方面的一系列贡献, M.Scholes 和 R. Merton (F.Black 已故) 获得诺贝尔经济学奖.

在这一章, 我们将仔细介绍 Black-Scholes 公式的推导和应用.

§5.2 Black-Scholes 方程

基本假设

(a) 原生资产价格演化遵循几何 Brown 运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{5.2.1}$$

这里

μ—— 期望回报率 (expected return rate) (常数),
σ—— 波动率 (volatility) (常数),
dW_t—— 标准 Brown 运动 (standard Brown motion) ,

$$E(dW_t) = 0,$$

$$Var(dW_t) = dt,$$

(b) 无风险利率 r 是常数,
(c) 原生资产不支付股息,
(d) 不支付 交易费 (transaction cost) 和 税收 (tax) ,
(e) 不存在套利机会.

问题 设 $V=V(S,t)$ 是期权价格，它在期权的到期日 $t=T$ 时

$$V(S,T)=\begin{cases}(S-K)^+, & \text{(看涨期权)}\\ (K-S)^+, & \text{(看跌期权)}\end{cases}$$

这里 K 是期权的敲定价．问在期权的有效时间内它的价值？

利用 Δ- 对冲（见定义 3.1）技巧，我们来给出期权定价的数学模型．

形成投资组合

$$\Pi=V-\Delta S,$$

（Δ 是原生资产的份额），选取适当的 Δ 使得在 $(t,t+dt)$ 时段内，Π 是无风险的．

设在时刻 t 形成投资组合 Π，并在时段 $(t,t+dt)$ 内，不改变份额 Δ．那么由于 Π 是无风险的，因此在时刻 $t+dt$，投资组合的回报是

$$\frac{\Pi_{t+dt}-\Pi_t}{\Pi_t}=rdt,$$

即

$$dV_t-\Delta dS_t=r\Pi_t dt=r(V_t-\Delta S_t)dt. \tag{5.2.2}$$

由于

$$V_t=V(S_t,t),$$

其中 S_t 是由随机微分方程 (5.2.1) 确定的随机过程，因此由 Itô 公式

$$dV_t=(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S})dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW_t.$$

把它代入 (5.2.2) 得

$$\begin{aligned}(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta\mu S)dt+(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta\sigma S)dW_t\\ =r(V-\Delta S)dt.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

由于等式右端是无风险的，因此等式左端随机项 dW_t 的系数必为 0，即选取

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{5.2.4}$$

将它代入 (5.2.3)，并消去 dt 得到

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0.$$

这就是刻画期权价格变化的偏微分方程 --- **Black-Scholes方程**.

因此为了确定在合约有效期 $[0,T]$ 内期权的价值，就要在区域 $\Sigma:\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上求解定解问题:

$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 & (\Sigma) \qquad (5.2.5)\\ V|_{t=T}=\begin{cases}(S-K)^+, & (\text{看涨期权})\\ (K-S)^+, & (\text{看跌期权})\end{cases} & \qquad (5.2.6)\end{cases}$$

(5.2.5) 是一个变系数反抛物型方程，而定解问题 (5.2.5),(5.2.6) 是一个倒向定解问题：即在终止时间已知 "终值条件" (5.2.6)，在 $0\le t<T$ 时段内求解 $V=V(S,t)$，使它适合方程 (5.2.5) 和终值条件 (5.2.6).

附注 虽然直线段 $\{S=0,\ 0\le t\le T\}$ 是区域 Σ 的边界，但由于 $S=0$ 是方程 (5.2.5) 的蜕化线，根据偏微分方程理论，在 $S=0$ 上不必给值.

作自变数代换

$$x=\ln S,\qquad \tau=T-t. \tag{5.2.7}$$

定解问题 (5.2.5),(5.2.6) 转化为常系数抛物型方程的 Cauchy 问题（初值问题）:

$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial V}{\partial x}+rV=0 & \\ \qquad (-\infty<x<\infty,\ 0<\tau\le T) & \qquad (5.2.8)\\ V|_{\tau=0}=\begin{cases}(e^x-K)^+, & (\text{看涨期权})\\ (K-e^x)^+, & (\text{看跌期权})\end{cases} & \qquad (5.2.9)\end{cases}$$

因此由偏微分方程理论知：定解问题 (5.2.8) 和 (5.2.9) 即原定解问题 (5.2.5),(5.2.6) 是适定的.

附注 在 Black-Scholes 方程 (5.2.5) 中不出现原生资产模型 (5.2.1) 中原生资产的期望回报率 μ，代替它出现在方程 (5.2.5) 中的是无风险利率 r, 与

离散情形一样，这表明通过 Δ— 对冲技巧，Black-Scholes 方程把人们引入一个风险中性世界，它的定价理论不依赖于每个投资人的偏好以及对未来风险资产的期望值. 因此通过求解 Black-Scholes 方程所得到的期权定价是一个风险中性价格.

附注 这里我们提出一个问题:

1) 用二叉树方法求得的期权定价 V_j^n，经过适当延拓可以定义一个给定在区域 $\Sigma:\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上的函数 $V_\Delta(s,t)$，

2) 若存在函数 $V(S,t)$，使得

$$\lim_{\Delta t\to 0} V_\Delta(S,t)=V(S,t), \qquad ((S,t)\in\Sigma),$$

3) 若 $V(S,t)\in C^{2,1}(\Sigma)$ （即 V,V_x,V_{xx},V_t 在 Σ 内连续）

问：$V(S,t)$ 适合的方程？

这个问题的答案是：$V(S,t)$ 在 Σ 内适合 Black-Scholes 方程. 也就是说，如果认为二叉树方法定义的期权定价当 $\Delta t\to 0$ 时收敛到一个充分光滑的极限函数，那么这个极限函数就是 Black-Scholes 方程的解.

现在我们来给出回答这个问题的大致思路（不是证明）.

在第四章 §4.2，我们建立了在风险中性世界中，用二叉树过程所刻画的原生资产价格变化的离散模型 (4.2.1)：

$$\ln\frac{S^*(t+\Delta t)}{S^*(t)}=\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t.$$

其中

$$S^*(t)=\frac{S(t)}{B(t)} \quad \text{——原生资产的贴现价格}$$

$$R(\omega)=\begin{cases}1, & \text{“}\omega_{\rm up}\text{”},\\ -1, & \text{“}\omega_{\rm down}\text{”}.\end{cases}$$

它是由扔钱币引出的随机变量，在风险中性测度 Q 的意义下，

$$\mathrm{Prob}_Q\{\omega_{\rm up}\}=\mathrm{Prob}_Q\{\omega_{\rm down}\}=\frac{1}{2}.$$

故

$$S(t+\Delta t)=S(t)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)}. \tag{5.2.10}$$

在时段 $[t_n,t_{n+1}]$ 中，由单时段 — 双状态的期权定价模型 (3.2.8) 知：假设在 $t=t_n$ 时原生资产价格 S_α 为已知，那么由假设 1) 期权定价公式 (3.2.8) 可改写为

$$V_\Delta(S_\alpha,t_n)=\frac{1}{\rho}E^Q(V_\Delta(S(t_{n+1}),t_{n+1})\mid S(t_n)=S_\alpha),\tag{5.2.11}$$

其中 $S(t_{n+1})$ 是由 (5.2.10) 刻画的随机变量

$$S(t_{n+1})=S_\alpha e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)}.$$

根据假设 2), $\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_\Delta(S,t)=V(S,t)$ ，在 (5.2.11) 中，以极限函数 $V(S,t)$ 代替 $V_\Delta(S,t)$, 并略去由此产生的误差，则 (5.2.11) 可改写为

$$\begin{aligned}V(S_\alpha,t_n)&=\frac{1}{\rho}E^Q([V(S(t_{n+1}),t_{n+1})-V(S_\alpha,t_n)]\mid S(t_n)\\&=S_\alpha)+\frac{1}{\rho}V(S_\alpha,t_n).\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

由于假设 3)，函数 $V(S,t)$ 是充分光滑的，因此由 Taylor 展开

$$\begin{aligned}&V(S(t_{n+1}),t_{n+1})-V(S_\alpha,t_n)=\frac{\partial V}{\partial t}(S_\alpha,t_n)\Delta t\\&\quad+\frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha,t_n)[S_\alpha e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)}-S_\alpha]\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V}{\partial S^2}(S_\alpha,t_n)[S_\alpha e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)}-S_\alpha]^2\\&\quad+O(\Delta t^{\frac{3}{2}})\\&=\frac{\partial V}{\partial t}(S_\alpha,t_n)\Delta t+S_\alpha\frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha,t_n)\{[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)]\\&\quad+\frac{1}{2}[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)]^2\}\\&\quad+\frac{1}{2}S_\alpha^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}(S_\alpha,t_n)[(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)]^2\\&\quad+O(\Delta t^{\frac{3}{2}})\\&=[\frac{\partial V}{\partial t}(S_\alpha,t_n)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)S_\alpha\frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha,t_n)]\Delta t\\&\quad+S_\alpha\frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha,t_n)\sigma\sqrt{\Delta t}R(\omega)+\frac{\sigma^2}{2}[S_\alpha\frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha,t_n)\\&\quad+S_\alpha^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}(S_\alpha,t_n)]R^2(\omega)\Delta t+O(\Delta t^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

由于

$$E^Q(R(\omega)) = 0,$$
$$E^Q(R^2(\omega)) = 1,$$

把它们代入 (5.2.12) 得到

$$\begin{aligned} V(S_\alpha, t_n) &= \frac{1}{\rho}\{[\frac{\partial V}{\partial t}(S_\alpha, t_n) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)S_\alpha \frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha, t_n)]\Delta t \\ &+ [\frac{\sigma^2}{2} S_\alpha \frac{\partial V}{\partial S}(S_\alpha, t_n) + \frac{\sigma^2}{2} S_\alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_\alpha, t_n)]\Delta t\} + \frac{1}{\rho} V(S_\alpha, t_n) \\ &+ O(\Delta t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{\rho})V(S_\alpha, t_n) &= \frac{1}{\rho}[\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}]_{(S_\alpha, t_n)}\Delta t \\ &+ O(\Delta t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

由于 $\rho = 1 + r\Delta t$， r 是无风险利率，故在点 (S_α, t_n) 上，

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = O(\Delta t^{\frac{1}{2}}).$$

令 $\Delta t \to 0$， 立得 Black-Scholes 方程.

§5.3 Black-Scholes 公式

求解 Cauchy 问题 (5.2.8),(5.2.9). 作函数变换

$$V = ue^{\alpha\tau + \beta x}. \tag{5.3.1}$$

通过适当选取常数 α, β 使得方程 (5.2.8) 转化为热传导方程. 由于

$$V_\tau = e^{\alpha\tau + \beta x}[u_\tau + \alpha u],$$

$$V_x = e^{\alpha\tau + \beta x}[u_x + \beta u],$$

$$V_{xx} = e^{\alpha\tau + \beta x}[u_{xx} + 2\beta u_x + \beta^2 u],$$

将它们代入方程 (5.2.8)， 消去 $e^{\alpha\tau + \beta x}$ 得到

$$u_\tau - \frac{\sigma^2}{2}u_{xx} - [\beta\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}]u_x + [r - \beta(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + \alpha]u = 0.$$

取

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2},$$

$$\begin{aligned}\alpha &= -r + \beta(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 \\ &= -r - \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2.\end{aligned}$$

这样在变换 (5.3.1) 下，方程 (5.2.8) 变为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{5.3.2}$$

相应的初值为（以看涨期权为例）

$$u\,|_{\tau=0} = e^{-\beta x} V\,|_{\tau=0} = e^{-\beta x}(e^x - K)^+. \tag{5.3.3}$$

众所周知，热传导方程 (5.3.2) 的 Cauchy 问题的解可以用 Poisson 公式表示，即

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi,$$

其中 $\varphi(\xi)$ 为初值， $K(x-\xi,\tau)$ 为热传导方程 (5.3.2) 的基本解：

$$K(x-\xi,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}.$$

从而 Cauchy 问题 (5.3.2),(5.3.3) 的解可以表为

$$\begin{aligned}u(x,\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [e^{-\beta\xi}(e^\xi - K)^+] d\xi \\ &= \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [e^{(1-\beta)\xi} - Ke^{-\beta\xi}] d\xi,\end{aligned}$$

其中 $\beta = -\frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})$. 回到原来的未知函数 $V(x,\tau)$,

$$\begin{aligned}V(x,\tau) &= e^{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})^2\tau - \frac{1}{\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})x} u(x,\tau) \\ &= I_1 + I_2,\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp[\frac{1}{2\sigma^2\tau}\{(x-\xi)^2\\
&\quad +2(x-\xi)(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+(r-\frac{\sigma^2}{2})^2\tau^2\}+\xi]d\xi\\
&= e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x-\xi+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]^2+\xi]d\xi.
\end{aligned}
$$

令

$$\eta = x-\xi+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau,$$

则

$$I_1=\frac{e^x}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{x-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}e^{-\frac{(\eta+\sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau}}d\eta.$$

令

$$\omega=\frac{\eta+\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\qquad N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega.$$

这里 $N(x)$ 称为 标准正态分布的累计概率分布函数 (cumulative probability distribution function)，则

$$I_1=e^xN(\frac{x-\ln K+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).$$

同理

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{\infty}\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x-\xi+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]^2}d\xi\\
&= -\frac{e^{-r\tau}K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{x-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2\tau}}d\eta\\
&= -Ke^{-r\tau}N(\frac{x-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}).
\end{aligned}
$$

因此由变换 (5.2.7) 回到原变量 (S,t)，我们有

$$
\begin{aligned}
V(S,t) &= SN(\frac{\ln S-\ln K+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})\\
&\quad -Ke^{-r(T-t)}N(\frac{\ln S-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).
\end{aligned}
$$

令

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{5.3.4}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \tag{5.3.5}$$

从而对欧式看涨期权，它的定价公式为

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{5.3.6}$$

人们称它为 **Black-Scholes公式**.

对于欧式看跌期权，由平价公式 (2.2.5)

$$p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t = Ke^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] - S[1 - N(d_1)].$$

以及

$$\begin{aligned} 1 - N(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega = N(-d_1), \end{aligned}$$

它的定价公式为

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \tag{5.3.7}$$

§5.4 Black-Scholes 模型的推广（ I ） —— 支付红利

对 §5.2 节的基本假设作如下推广：

(â) 原生资产的价格适合随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t,$$

(b̂) 无风险利率 $r = r(t)$,

(ĉ) 原生资产连续支付股息（红利），红利率是 $q(t)$,

(d) 和 (e) 不变.

我们要利用 Δ- 对冲建立相应的期权定价的连续模型以及计算公式.

形成投资组合

$$\Pi = V - \Delta S.$$

选取 Δ ，使得 Π 在 $[t,t+dt]$ 内是无风险的. 类似于 §5.2 的推导，我们有

$$\Pi_{t+dt}-\Pi_t=r\Pi_t dt.$$

由于考虑到支付股息，因此

$$\Pi_{t+dt}=V_{t+dt}-\Delta_t S_t q_t dt-\Delta_t S_{t+dt}.$$

故代替 (5.2.2) ，我们有

$$dV_t-\Delta_t dS_t=r_t\Pi_t dt+\Delta_t S_t q_t dt.$$

利用 Itô 公式，并取

$$\Delta_t=\frac{\partial V}{\partial S},$$

立得

$$(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2(t)}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt=r(t)(V-S\frac{\partial V}{\partial S})dt+q(t)S\frac{\partial V}{\partial S}dt.$$

消去 dt ，得到 V 满足的偏微分方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2(t)}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r(t)-q(t))S\frac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0.$$

这就是在 **考虑红利情况下，期权定价的** Black-Scholes **方程**.

因此为了确定期权价格 (以看涨期权为例)，就是要在 Σ 上求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r(t)-q(t))S\dfrac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0, & (5.4.1)\\ V\mid_{t=T}=(S-K)^+, \qquad (0\le S<\infty). & (5.4.2)\end{cases}$$

为了求解初值问题 (5.4.1),(5.4.2), 设

$$u=Ve^{\beta(t)}, \tag{5.4.3}$$

$$y=Se^{\alpha(t)}. \tag{5.4.4}$$

适当选取 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, 消去方程 (5.4.1) 中包含 $\frac{\partial V}{\partial S}$ 和 V 的项.

考虑到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\beta(t)}+y\frac{\partial u}{\partial y}\alpha'(t)e^{-\beta(t)}-u\beta'(t)e^{-\beta(t)},\\
&S\frac{\partial V}{\partial S}=y\frac{\partial u}{\partial y}e^{-\beta(t)},\\
&S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{-\beta(t)}.
\end{aligned}$$

将它们代入 (5.4.1), 并消去 $e^{-\beta(t)}$ ，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\sigma^2(t)}{2}y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\{[r(t)-q(t)]+\alpha'(t)\}y\frac{\partial u}{\partial y}-[r(t)+\beta'(t)]u=0.$$

取 $\alpha(t)$、$\beta(t)$ 是下面常微分方程初值问题的解:

$$\begin{cases}
\dfrac{d\alpha}{dt}+r(t)-q(t)=0,\\
\dfrac{d\beta}{dt}+r(t)=0,\\
\alpha(T)=\beta(T)=0,
\end{cases}$$

解之得

$$\alpha(t)=\int_t^T[r(\tau)-q(\tau)]d\tau, \tag{5.4.5}$$

$$\beta(t)=\int_t^T r(\tau)d\tau. \tag{5.4.6}$$

从而在变换 (5.4.3),(5.4.4) 下，定解问题 (5.4.1),(5.4.2) 具有形式

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (5.4.7)\\
u\,|_{t=T}=Ve^{\beta(t)}\,|_{t=T}=(y-K)^+. & (5.4.8)
\end{cases}$$

取

$$\tau=\int_0^t\sigma^2(\omega)d\omega. \tag{5.4.9}$$

从面 (5.4.7),(5.4.8) 改写为

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial \tau}+\dfrac{1}{2}y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\
u\,|_{t=\hat{T}}=(y-K)^+,
\end{cases}$$

其中 $\hat{T}=\int_0^T \sigma^2(t)dt.$

应用 Black-Scholes 公式（其中 $\sigma=1, r=0, T=\hat{T}, t=\tau$ ）, 得到

$$u(y,\tau)=yN(\hat{d}_1)-KN(\hat{d}_2),$$

其中

$$\hat{d}_1=\frac{\ln\frac{y}{K}+\frac{1}{2}(\hat{T}-\tau)}{\sqrt{\hat{T}-\tau}},$$

$$\hat{d}_2=\hat{d}_1-\sqrt{\hat{T}-\tau}.$$

回到原变量，由 (5.4.3)—(5.4.9)，我们得到 **欧式看涨期权的定价公式**

$$\begin{aligned} V(S,t) &= e^{-\beta(t)}[Se^{\alpha(t)}N(\hat{d}_1)-KN(\hat{d}_2)] \\ &= Se^{-\int_t^T q(\tau)d\tau}N(\hat{d}_1)-Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}N(\hat{d}_2), \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

其中

$$\hat{d}_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+\int_t^T[r(\tau)-q(\tau)+\frac{\sigma^2(\tau)}{2}]d\tau}{\sqrt{\int_t^T\sigma^2(\tau)d\tau}}, \tag{5.4.11}$$

$$\hat{d}_2=\hat{d}_1-\sqrt{\int_t^T\sigma^2(\tau)d\tau}. \tag{5.4.12}$$

为了导出欧式看跌期权的定价公式，我们先建立以下平价公式:

定理 5.1 设 $c(S,t), p(S,t)$ 分别为具有相同敲定价 K, 到期日 T 的欧式看涨与看跌期权的定价，其中无风险利率 $r=r(t)$, 红利率 $q=q(t)$，波动率 $\sigma=\sigma(t)$，则看涨 — 看跌平价公式为

$$c(S,t)+Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}=p(S,t)+Se^{-\int_t^T q(\tau)d\tau}. \tag{5.4.13}$$

证明 考虑

$$W(S,t)=c(S,t)-p(S,t).$$

由于

$$W(S,T)=(S-K)^+-(K-S)^+=S-K,$$

因此由 (5.4.1),W 是下面定解问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}S^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2}+[r(t)-q(t)]S\dfrac{\partial W}{\partial S}-r(t)W=0, & (5.4.14)\\ W\mid_{t=T}=S-K. & (5.4.15)\end{cases}$$

命

$$W=a(t)S-b(t)K. \tag{5.4.16}$$

把 W 代入 (5.4.14)，得到

$$a'(t)S-b'(t)K+[r(t)-q(t)]Sa(t)-r(t)[a(t)S-b(t)K]=0.$$

选取 $a(t),b(t)$ 使得

$$a'(t)+[r(t)-q(t)]a(t)-r(t)a(t)=0,$$

$$b'(t)-b(t)r(t)=0,$$

且有

$$a(T)=b(T)=1.$$

解之得

$$a(t)=e^{-\int_t^T q(\tau)d\tau},\qquad b(t)=e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}.$$

将它代入 (5.4.16)，从而平价公式 (5.4.13) 获证.

利用平价公式 (5.4.13)，我们得到 **欧式看跌期权定价公式**

$$V(S,t)=Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}N(-\hat{d}_2)-Se^{-\int_t^T q(\tau)d\tau}N(-\hat{d}_1), \tag{5.4.17}$$

其中 $\hat{d}_1$, $\hat{d}_2$ 的定义见 (5.4.11),(5.4.12).

若代替本节开始关于支付红利的基本假设 (ĉ)，假设

(c̃) 原生资产只在固定日 $t=t_1$ $(0<t_1<T)$ 支付红利 Q（若原生资产是股票， Q 是每一股支付的红利）.

由于在红利支付日 $t=t_1$ 前后，股价有变化，它适合

$$S(t_1-0)=S(t_1+0)+Q,$$

但期权价格在 $t=t_1$ 仍是连续的，即

$$V(S(t_1-0),t_1-0)=V(S(t_1+0),t_1+0),$$

故在 $t=t_1$ 时刻，对于自变量 S,V 满足连接条件：

$$V(S,t_1-0)=V(S-Q,t_1+0). \tag{5.4.18}$$

从而相应的期权定价数学模型（以看涨期权为例）为：

分两个时段 $[0,t_1]$, $[t_1,T]$:

在 $\{0\le S<\infty,\quad t_1\le t\le T\}$ 上求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+r(t)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0, \\ V(S,T)=(S-K)^+. \end{cases}$$

求得 $\quad V=V(S,t),\ (t_1\le t\le T,\quad S\ge 0)$.

由 (5.4.18), 在 $\{0\le S<\infty,\quad 0\le t\le t_1\}$ 上求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+r(t)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0, \\ V(S,t_1)=V(S-Q,t_1+0). \end{cases}$$

从而我们得到在期权生效日当天应付的期权金 $V(S_0,0)$,（S_0 是生效日当天的股价）.

附注 应该注意到在这一章我们建立支付红利的期权定价模型时，关于"连续支付"与"定期支付"在概念的陈述上是有差别的.

在建立连续支付红利的定价模型时，我们引入了红利率 $q=q(t)$，它是对股票的回报而言的，因此在 $[t_1,t_2]$ 时段内由于单纯支付红利将使股票价格（如果忽略使得股票价格产生波动的其它因素）由 S_{t_1} 转变为 $S_{t_1}e^{-\int_{t_1}^{t_2}q(t)dt}$，按这个模型，如果在 $t=t_1$ 时集中支付红利，强度为 d_Q，即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}q(t)dt=d_Q.$$

那么在支付日 $t = t_1$ 时股价将从 S_{t_1} 下跌为 $S_{t_1}e^{-dQ}$ ，由此我们可以从 (5.4.17) 得到相应的期权定价公式.

而在建立定期支付红利的定价模型时，我们引入了实际支付红利数 Q，它是对股票本身而言的，因此在支付日 $t = t_1$，股价将从 S_{t_1} 下跌为 $S_{t_1} - Q$. 这样我们就得到在 $t = t_1$ 期权定价的连接条件 (5.4.18).

这个差别在我们处理实际问题时，应予以注意.

附注 对于商品期权，一般应考虑支付商品的贮藏费用，贮藏费用与商品件数有关.

因此在利用 Δ- 对冲时，对于组成的投资组合

$$\Pi = V - \Delta S,$$

$$d\Pi = dV - \Delta dS + \Delta\hat{q}dt$$

（ $\Delta\hat{q}dt$ 表示 Δ 份额商品在 dt 时段内需要支付的贮藏费）. 从而利用本节开始时的推导，选取

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

使得 Π 在 $(t, t + dt)$ 时段内是无风险的，从而导出期权价格 $V = V(S, t)$ 适合定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (rS + \hat{q})\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V\,|_{t=T} = (S - K)^+. \end{cases} \tag{5.4.19}$$

这个方程的解一般不能用显式解表出，只能求助于数值解.

如果把 Δ 份额商品在 dt 时段内需要支付的贮藏费表成 $\Delta\hat{q}Sdt$ 的形式，即贮藏费用依赖于当时商品的价格，那么 (5.4.19) 可改写为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r + \hat{q})S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

此时期权定价可以由 Black-Scholes 公式给出.

§5.5 Black-Scholes 模型的推广（ II ）
—— 两值期权与复合期权

(A) 以股票期权为例，**两值期权** (binary option) 有两种典型的类型：

1. 现金或无值看涨期权 (cash-or-nothing call) (简写为 CONC): 在到期日 ($t=T$) , 若股票价格低于敲定价, 则合约一文不值, 若超过敲定价格, 则按合约规定支付现金 1 元.

2. 资产或无值看涨期权 (asset-or nothing call) (简写为 AONC): 在到期日 ($t=T$) , 若股票价格低于敲定价, 则合约一文不值, 若超过敲定价格, 则按合约规定, 支付股价.

若 §5.4 节的基本假设成立, 则两值期权的模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0, & (5.5.1) \\ V\big|_{t=T}=\begin{cases} H(S-K), & (\text{ CONC }) \\ SH(S-K), & (\text{ AONC }) \end{cases} & (5.5.2) \end{cases}$$

这里 $H(x)$ 是 Heviside 函数, 当 $x>0$ 时, $H(x)=1$, 当 $x<0$ 时, $H(x)=0$.

考虑具有相同敲定价格 K , 相同到期日 T 的 标准看涨期权 (vanilla call option) 与 CONC 期权, AONC 期权的关系. 它们的价格分别记作 V, V_C 与 V_A. 在到期日 $t=T, V$ 与 V_C、V_A 适合关系式

$$V(S,T)=V_A(S,T)-KV_C(S,T).$$

事实上, 由 (5.5.2),

$$\begin{aligned} V(S,T) &= (S-K)^+=(S-K)H(S-K) \\ &= SH(S-K)-KH(S-K) \\ &= V_A(S,T)-KV_C(S,T), \end{aligned}$$

而 $V(S,t)$, $V_A(S,t)$ 以及 $V_C(S,T)$ 都适合同样的 Black-Scholes 方程 (5.5.1) , 因此由于定解问题是线性的, 我们推得: 在 $\Sigma\{0\le S<\infty, 0\le t\le T\}$ 上,

$$V(S,t)=V_A(S,t)-KV_C(S,t). \tag{5.5.3}$$

即 在整个期权的有效期内一个标准的看涨期权是一个 AONC 多头头寸和 K 个 CONC 空头头寸的组合.

人们自然会问 V_A 和 V_C 有什么关系?

定理 5.2

$$V_A(S,t;r,q)=SV_C(S,t;q,\hat{r}). \tag{5.5.4}$$

其中

$$\hat{r} = 2q - r - \sigma^2. \tag{5.5.5}$$

证明 令 $V_A(S,t) = Su(S,t)$.
容易验证 $u(S,t)$ 适合方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r - q + \sigma^2)S\frac{\partial u}{\partial S} - qu = 0.$$

引进 $\hat{r} = 2q - r - \sigma^2$ ，那么上述方程可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (q - \hat{r})S\frac{\partial u}{\partial S} - qu = 0. \tag{5.5.6}$$

而在 $t = T$ 时刻，

$$u(S,T) = \frac{1}{S}V_A(S,T) = V_C(S,T). \tag{5.5.7}$$

在 Σ 上，把 $u(S,t)$ 适合的定解问题 (5.5.6),(5.5.7) 与 $V_C(S,t)$ 适合的定解问题 (5.5.1),(5.5.2) 相比较，如果把方程 (5.5.1) 中常数 r ， q 分别换成 q 与 $\hat{r}$ ，那么它们适合相同的定解问题，所以由解的唯一性，知

$$u(x,t) = V_C(S,t;q,\hat{r}).$$

从而 (5.5.4) 获证.

因此只要求出 CONC 期权的价格 $V_C(S,t;r,q)$ ， AONC 期权的价格 $V_A(S,t;r,q)$ 即可由 (5.5.4) 得到.

为了求解 CONC 期权价格适合的定解问题 (5.5.1),(5.5.2) ，作变换

$$\tau = T - t,$$
$$x = \ln\frac{S}{K}.$$

在上述变换下，由于

$$H(S-K) = H(\frac{S}{K} - 1) = H(e^x - 1) = H(x),$$

因此 (5.5.1),(5.5.2) 转化为 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} = \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x} - rV, \\ V(x,0) = H(x). \end{cases}$$

类似于 §5.3 中关于 Black-Scholes 公式的推导，我们有

$$V(x,\tau)=e^{-r\tau}N\left(\frac{x+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

其中 $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega$.

回到原变量 (S,t)，我们有

$$V_C(S,t;r,q)=e^{-r(T-t)}N\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

由 (5.5.4) 以及 $\hat{r}$ 的定义 (5.5.5)，我们有

$$\begin{aligned}V_A(S,t;r,q) &= SV_C(S,t;q,\hat{r})\\ &= Se^{-q(T-t)}N\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+(q-\hat{r}-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\ &= Se^{-q(T-t)}N\left(\frac{\ln\frac{S}{K}+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned}$$

(B) **复合期权** (compound options)

复合期权是一类期权的期权. 它有很多品种，这里我们要介绍的是最简单的一类复合期权.

复合期权给予持有人这样的权利：他可以在若干天以后（即 $t=T_1$ 时刻）以一定价格 $\hat{K}$ 购买（出售）在日后 $t=T_2$ $(T_2>T_1)$ 到期实施敲定价格为 K 的看涨（看跌）期权. 复合期权有以下四种类型：

1. 在 $t=T_1$ 时刻购买 看涨期权的期权 (call option on a call option)，
2. 在 $t=T_1$ 时刻购买 看跌期权的期权 (call option on a put option)，
3. 在 $t=T_1$ 时刻出售 看涨期权的期权 (put option on a call option)，
4. 在 $t=T_1$ 时刻出售 看跌期权的期权 (put option on a put option).

这里有三个风险资产：原生资产（如股票），原生期权（如股票期权）和复合期权.

首先在区域 $\Sigma_2\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T_2\}$ 上定义原生期权的价格，它可以由 Black-Scholes 公式给出，记作 $V(S,t)$.

然后在 $\Sigma_1\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T_1\}$ 上建立复合期权 $V_{co}(S,t)$ 适合的定解问题. 为此仍然利用 Δ- 对冲原理，得到 $V_{co}(S,t)$ 适合的 Black-Scholes 方

程，在 $t = T_1$ 时刻相应的终值条件为

$$V_{co}(S,T_1) = \begin{cases} (V(S,T_1) - \hat{K})^+, & (\text{“购买”期权}) \\ (\hat{K} - V(S,T_1))^+. & (\text{“出售”期权}) \end{cases}$$

当 r, q, σ 都是常数的情形，我们可以得到这类复合期权定价的表达式．以 $t = T_1$ 时刻有权购买一张看涨期权的复合期权为例．在 $t = 0$ 时刻，

$$\begin{aligned} V_{co}(S,0) = &Se^{-qT_2}M(a_1, b_1; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}) \\ &-Ke^{-rT_2}M(a_2, b_2; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}) - e^{rT_1}\hat{K}N(a_2), \end{aligned} \tag{5.5.8}$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln\frac{S}{S^*} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}.$$

S^* 为下面方程的根：

$$\begin{aligned} \hat{K} = &S^*e^{-q(T_2-T_1)}N(\frac{\ln\frac{S^*}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}) \\ &-Ke^{-r(T_2-T_1)}N(\frac{\ln\frac{S^*}{K} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}). \end{aligned}$$

$M(a, b; \rho)$ 是二维累计正态分布函数：

$$M(a, b; \rho) = \text{Prob}\{X \le a,\ Y \le b\},$$

这里 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$ 都是标准正态分布，$Cov(X,Y) = \rho$ $(-1 < \rho < 1)$.

若 $f_{(X,Y)}(x,y)$ 表示它的概率密度函数，即

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\},$$

则

$$M(a, b; \rho) = \int_{-\infty}^{a} dx \int_{\infty}^{b} f_{(X,Y)}(x,y)dy.$$

(C) **选择期权** (chooser options， as you like it)

选择期权可以看作是一类特殊的复合期权．期权持有人拥有这样的权利：他可以在 $t=T_1$ 时刻，把手中这张期权转化为一张敲定价格为 K_1，到期日为 T_2 的看涨期权或者一张敲定价为 K_2，到期日为 $\hat{T}_2$ 的看跌期权 $(T_2, \hat{T}_2 > T_1 > 0)$．

这里有四个风险资产：原生资产（如股票），原生看涨期权（如股票期权；敲定价 K_1，到期日 T_2），原生看跌期权（如股票期权；敲定价 K_2，到期日 $\hat{T}_2$）以及选择期权．记

$V_C(S,t)$ 为原生看涨期权价格，

$V_P(S,t)$ 为原生看跌期权价格，

它们都由 Black-Scholes 公式给出解的表达式．

为了在 $\Sigma_1\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T_1\}$ 上给出选择期权的定价 $V_{ch}(S,t)$，需要求解以下定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0, \\ V\mid_{t=T_1}=\max\{V_C(S,T_1),V_P(S,T_1)\}. \end{cases}$$

若原生看涨与看跌期权 V_C 与 V_P 具有相同的敲定价格 K 与到期日 T_2，那么由平价公式：

$$V_P(S,T_1)=V_C(S,T_1)+Ke^{-r(T_2-T_1)}-Se^{-q(T_2-T_1)},$$

故

$$\begin{aligned} V\mid_{t=T_1} &= \max(V_C(S,T_1),V_P(S,T_1)) \\ &= V_C(S,T_1)+e^{-q(T_2-T_1)}(Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}-S)^+. \end{aligned}$$

从而由线性方程的叠加原理，推得

$$V_{ch}(S,t)=V_C(S,t)+\hat{V}(S,t),$$

其中 $\hat{V}(S,t)$ 是到期日为 T_1，敲定价为 $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ 的看跌期权价格的 $e^{-q(T_2-T_1)}$ 倍．

§5.6 数值方法（I）——差分方法

欧式期权的定价虽然有显式表达式，但是在当今计算机的使用已相当普及的情形下，人们有时还是乐于使用数值方法，特别对于一些复杂的期权定

价问题，如复合期权，选择期权等，数值方法更显得有很多优越性.

对于期权定价最常用的数值方法就是二叉树方法. 在这一节我们将讨论以下几个问题：

a. 如何用有限差分方法 (finite difference method) 去解 Black-Scholes 方程？

b. 它与二叉树方法有什么关系？

c. 二叉树方法作为一种随机算法如何利用偏微分方程数值解的框架去证明它的收敛性？

（A） 差分方法简介

差分方法 是通过用差商代替微商对方程以及定解问题离散化.

众所周知，如果 $y=f(x)$ 充分光滑，那么用差商来代替 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 有以下几种典型的形式：

$$f'(x)\sim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=(\frac{\Delta f}{\Delta x})_f, \qquad \text{(前差商)}$$

$$f'(x)\sim\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}=(\frac{\Delta f}{\Delta x})_b, \qquad \text{(后差商)}$$

$$f'(x)\sim\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}=(\frac{\Delta f}{\Delta x})_c, \qquad \text{(中心差商)}$$

$$f''(x)\sim\frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}=(\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2})_c. \qquad \text{(二级中心差商)}$$

由 Taylor 展开，以下误差估计成立

$$|f'(x)-(\frac{\Delta f}{\Delta x})_f|=O(\Delta x),$$

$$|f'(x)-(\frac{\Delta f}{\Delta x})_b|=O(\Delta x),$$

$$|f'(x)-(\frac{\Delta f}{\Delta x})_c|=O(\Delta x^2),$$

$$|f''(x)-(\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2})_c|=O(\Delta x^2).$$

建立与偏微分方程相应的差分方程有多种方式，但从求解的方式来划分，它可以分为两大类：一类是显式差分格式，求解的过程是显式的，通过直接运算求出它的值；另一类是隐式差分格式，求解的过程必须通过求解一个代数方程组才能得到它的值.

为了说明这一点，我们以给定在 $\{0 \le x < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 上的热传导方程的初 — 边值问题为例：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (0 \le x < \infty,\ t > 0) & (5.6.1) \\ u(0,t) = g(t), & (0 \le t \le T) & (5.6.2) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (0 \le x < \infty) & (5.6.3) \end{cases}$$

首先在区域 $\{0 \le x < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 上设计一个 网格 (mesh). 以间距 Δx 等分半直线 $0 \le x < \infty$ ，以间距 Δt 等分线段 $0 \le t \le T$. 记分点 (x_m, t_n):

$$\begin{aligned} x_m &= m\Delta x, & (0 \le m < \infty) \\ t_n &= n\Delta t. & (0 \le n \le N, N = \frac{T}{\Delta t}) \end{aligned}$$

记函数 $u(x,t)$ 在每一个网格点 (x_m,t_n) 上的值为

$$u_m^n = u(x_m, t_n). \qquad (m = 0,1,\cdots; n = 0,1,\cdots,N)$$

显式差分格式

$$\begin{cases} (\dfrac{\Delta u}{\Delta t})_f - a^2(\dfrac{\Delta^2 u}{\Delta x^2})_c = 0, \\ u_0^n = g(t_n), \\ u_m^0 = \varphi(x_m). \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}) - a^2(\dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2}) = 0, & (5.6.4) \\ u_0^n = g(t_n), & (5.6.5) \\ u_m^0 = \varphi(x_m). & (5.6.6) \end{cases}$$

由 (5.6.6)，当 $n = 0$ 时， u 的值为已知. 因此如果当 $t = t_n$ 时， $u_m^n (m \ge 0)$ 的值为已知，则由差分方程 (5.6.4) 得计算公式

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\alpha)u_m^n + \alpha u_{m+1}^n + \alpha u_{m-1}^n, \qquad (5.6.7)$$

以及

$$u_0^{n+1} = g(t_{n+1}), \qquad (5.6.8)$$

其中 $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}a^2.$

我们可以通过直接计算得到当 $t = t_{n+1}$ 时, u 的所有值 $u_m^{n+1}\,(m > 0)$，依次类推, 我们可以通过求解 (5.6.4)—(5.6.6) 得到所有 $u_m^n (m \geq 0,\ 0 \leq n \leq N)$ 的值, 这就是典型的显式差分算法.

隐式差分格式

$$\begin{cases} (\frac{\Delta u}{\Delta t})_b - a^2(\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2})_c = 0, \\ u_0^{n+1} = g(t_{n+1}), \\ u_m^0 = \varphi(x_m) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}) - a^2(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2}) = 0, & (5.6.9) \\ u_0^n = g(t_n), & (5.6.10) \\ u_m^0 = \varphi(x_m). & (5.6.11) \end{cases}$$

由于 (5.6.10)，当 $n = 0$ 时， u 的值为已知, 因此如果当 $t = t_n$ 时, $u_m^n (m \geq 0)$ 的值为已知, 则由差分方程 (5.6.9) 得计算公式

$$(1 + 2\alpha)u_m^{n+1} - \alpha u_{m+1}^{n+1} - \alpha u_{m-1}^{n+1} = u_m^n, \tag{5.6.12}$$

以及

$$u_0^{n+1} = g(t_{n+1}). \tag{5.6.13}$$

这里未知数是 $u_m^{n+1}(m \geq 0)$.

由于 (5.6.12),(5.6.13) 是包含无穷个未知数的代数方程组, 因此为了寻求这个方程组的解, 通常需要在 $m = M$ 处（M 充分大）补充一个边界条件, 把它变成一个包含有限个（$(M-1)$ 个）未知数的线性方程组. 补充边界条件的方法有很多种, 它涉及解在无穷远点的性态. 最简单的一种是：假如我们已知当 $x \to \infty$ 时解 $u(x,t)$ 与初值 $\varphi(x)$ 有相同的性态. 即若已知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{u(x,t)}{\varphi(x)} = 1, \qquad \forall t \in [0,T]$$

则在 $x = M\Delta x = x_M$ 上，可以补充一个边界条件:

$$u_M^{n+1} = \varphi(x_M). \tag{5.6.14}$$

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = \varphi_\infty$ (常数)，为简单计，可以取

$$u_M^{n+1} = \varphi_\infty. \tag{5.6.15}$$

这样考虑到边界条件 (5.6.13) 和 (5.6.14) 或 (5.6.15)，我们得到一组由 $M-1$ 个未知数 u_m^{n+1} $(1 \le m \le M-1)$ 适合的线性方程组 (5.6.12), (其中 $1 \le m \le M-1$). 即

$$A\vec{u}^{n+1} = \vec{f}^{n+1},$$

其中 $\vec{u}^{n+1}$ 和 $\vec{f}^{n+1}$ 都是 $M-1$ 维向量，A 是 $(M-1)\times(M-1)$ 阶矩阵:

$$\vec{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}^{n+1} = \begin{bmatrix} f_1^{n+1} \\ \vdots \\ f_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix},$$

以及 $\alpha = a^2\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$,

$$f_1^{n+1} = u_1^n + \alpha g(t_{n+1}),$$

$$f_i^{n+1} = u_i^n, \qquad (2 \le i \le M-2)$$

$$f_{M-1}^{n+1} = u_{M-1}^n + \alpha\varphi_\infty.$$

对于差分方法有二个基本问题: 1. 当 Δt, $\Delta x \to 0$ 时，差分方程的解是否收敛到偏微分方程定解问题的解？这就是所谓格式的 **收敛性问题**. 2. 当应用计算机进行差分方程的求解时，难免在每次运行中引入 舍入误差 (rounding error)，问题是随着网格不断加密，Δt, Δx 变小，这些舍入误差能否得到控制，有没有可能由于微小的舍入误差而引起解的完全失真？这就是所谓

格式的 **稳定性** (stability).

定义 5.1 假设 $L_\Delta u=0$ 是由偏微分方程 $Lu=0$ 经过离散化得到的差分方程，如果对于充分光滑函数 $\omega(x,t)$ 有

$$\lim_{\Delta t,\Delta x\to 0}|L\omega-L_\Delta\omega|=0,$$

那么称差分格式 $L_\Delta u=0$ 是 **相容的** (consistence).

定理 5.3(Lax 定理)([34]) *对于线性偏微分方程的初 — 边值问题，如果差分格式是相容的，那么这个差分格式的收敛性与稳定性是等价的.*

由偏微分方程的数值分析理论知：对于热传导方程的初 — 边值问题 (5.6.1)—(5.6.3)，隐式差分格式 (5.6.9)—(5.6.11) 是无条件稳定的，而对于显式差分格式 (5.6.4)—(5.6.6) 只有当 $a^2\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}=\alpha\le\dfrac{1}{2}$ 时，格式是稳定的，而当 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时格式是不稳定的. 这个结果表明，对于显式差分格式虽然计算比较简单，但是为了计算结果是可靠的，必须选取时间步长 $\Delta t\le\dfrac{1}{2a^2}\Delta x^2$，也就是 Δt 要受到限制，不能太大，否则计算结果是不可靠的. 而对于隐式差分格式虽然每一层的求解，需要解一个阶数很大的线性方程组，需要花较大的计算量，但格式是无条件稳定的，即时间步长 Δt 的大小不受任何限制. 因此在不影响精度的情况下，适当放大 Δt，所得结果还是可信的.

关于上述结果的证明，我们将在下面结合 Black-Scholes 方程的差分格式来进行，这里就不再另行给出.

（B） Black-Scholes 方程的显式差分格式

在 §5.2 已指出：Black-Scholes 方程在变换 $x=\ln S$ 下被转化为常系数反抛物型方程，因此为了确定欧式看涨期权的价格，即求解定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x}-rV=0, & (5.6.16)\\ V|_{t=T}=(e^x-K)^+. & (5.6.17)\end{cases}$$

在区域 $\hat{\Sigma}\{-\infty<x<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，建立网格：

$$x_m=m\Delta x,\qquad(-\infty<m<\infty)$$

$$t_n = n\Delta t. \qquad (0 \le n \le N, N = \frac{T}{\Delta t})$$

定义函数

$$V(x_m, t_n) = V_m^n.$$

对定解问题 (5.6.16),(5.6.17) 离散化:

$$\begin{cases} \dfrac{V_m^{n+1} - V_m^n}{\Delta t} + \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{V_{m+1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ \qquad +(r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} - rV_m^n = 0, & (5.6.18) \\ V_m^N = (e^{m\Delta x} - K)^+. & (5.6.19) \end{cases}$$

由 (5.6.19), 当 $n = N$ 时, V_m^n 的值为已知; 假设若 V_m^{n+1} 的值为已知 $(-\infty < m < \infty)$, 那么由 (5.6.18) 得到当 $t = t_n = n\Delta t$ 时, V_m^n 的值:

$$\begin{aligned} V_m^n = & \frac{1}{1 + r\Delta t}[(1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2})V_m^{n+1} \\ & +(\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{1}{2}(r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{\Delta x})V_{m+1}^{n+1} \\ & +(\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{1}{2}(r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{\Delta x})V_{m-1}^{n+1}]. \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

因此格式 (5.6.18),(5.6.19) 是一个（反向）显式差分格式.

定理 5.4 设 $\alpha = \dfrac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}$, 则当 $\alpha \le 1$ 以及

$$1 - \frac{1}{\sigma^2}|r - q - \frac{\sigma^2}{2}|\Delta x \ge 0 \tag{5.6.21}$$

时, 格式 (5.6.18),(5.6.19) 是稳定的.

证明 为了证明格式的稳定性, 不失一般性, 只需指出, 若 $n = N$ 时,

$$\max_{-\infty<m<\infty} |V_m^N| \le \epsilon, \tag{5.6.22}$$

那么对任意 $0 \le n < N$, 有

$$\max_{-\infty<m<\infty} | V_m^n | \le \epsilon. \tag{5.6.23}$$

为此首先证明：当 $n = N-1$ 时，估计式 (5.6.23) 成立. 根据假设 (5.6.21)，等式 (5.6.20) 右端 $V_m^{n+1}, V_{m+1}^{n+1}, V_{m-1}^{n+1}$ 的系数都是非负的，由 (5.6.22)，我们有

$$\begin{aligned}
|V_m^{N-1}| &\leq \frac{1}{1+r\Delta t}[(1-\alpha)|V_m^N| + \frac{\alpha}{2}(1+\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta x)|V_{m+1}^N| \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}(1-\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta x)|V_{m-1}^N|] \\
&\leq \frac{\epsilon}{1+r\Delta t}[1-\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta x \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta x] \\
&= \frac{\epsilon}{1+r\Delta t}.
\end{aligned} \tag{5.6.24}$$

从而利用反向归纳法，立得 (5.6.23)，定理获证.

附注 由 (5.6.24)，我们有

$$|V_m^n| \leq (\frac{1}{1+r\Delta t})^{N-n}\epsilon \leq e^{-r(T-t_n)}\epsilon.$$

即舍入误差的影响是不断衰减的.

附注 相应于差分格式 (5.6.18),(5.6.19)， Black-Scholes 方程对于原变量 (S,t) 的离散形式是什么？

令 $\quad u = e^{\Delta x}$,

$$S_m = u^m = e^{m\Delta x} = e^{x_m}.$$

对于 (x,t) 平面上的区域 $\{-\infty < x < \infty,\ 0 \leq t \leq T\}$ 中，给定的网格

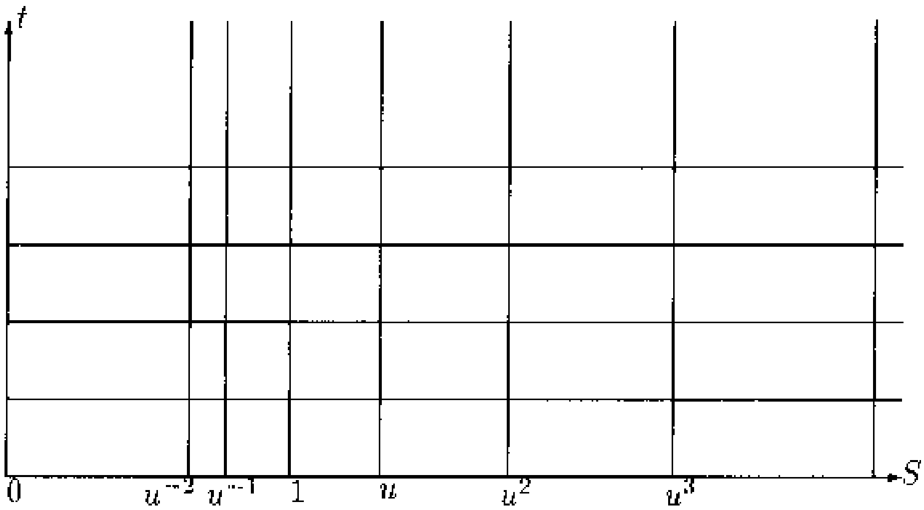
$$x_m = m\Delta x. \qquad (-\infty < m < \infty)$$

$$t_n = n\Delta t. \qquad (0 \leq n \leq N)$$

与之相应，在 (S,t) 平面上的区域 $\{0 \leq S < \infty,\ 0 \leq t \leq T\}$ 中，给出了网格

$$S_m = u^m, \qquad (-\infty < m < \infty)$$

$$t_n = n\Delta t. \qquad (0 \leq n \leq N)$$



从而 (5.6.20) 具有形式

$$V_m^n = \frac{1}{1+r\Delta t}[(1-\omega)V_m^{n+1} + (\frac{\omega}{2} + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t})V_{m+1}^{n+1}$$
$$+(\frac{\omega}{2} - \frac{\sqrt{\omega}}{2\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t})V_{m-1}^{n+1}],$$

这里 $\omega = \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln u)^2}$. 特别当 $\omega = 1$ 时，我们有

$$V_m^n = \frac{1}{1+r\Delta t}[\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2}))V_{m-1}^{n+1}$$
$$+\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}(r-q-\frac{\sigma^2}{2}))V_{m-1}^{n+1}]. \tag{5.6.25}$$

§5.7 数值方法（ II ）—— 二叉树方法与差分方法

二叉树方法本质上是一个随机算法. 但是如果把 S 看成是一个自变数，期权价格 $V = V(S,t)$ 看成是自变数 S,t 的函数，二叉树方法就是一种确定期权价格的显式的离散算法. 如果不计 Δt 的高阶无穷小量，我们要证明它是 Black-Scholes 方程的一种特定的显式差分格式.

为了证明这一点，我们首先要建立在二叉树方法中所出现的一些参数 ρ, η, ,u, d, q_u, q_d 与 Black-Scholes 方程中出现的一些参数 r、q, σ 之间的关系.

其实这一点我们在第四章 §4.2 建立原生资产价格连续模型时已经提到. 但是当时的推导多少带有一种启示性质，在数学上并不严密. 在这里我们将

通过连续模型（原生资产价格 S_t 适合的随机微分方程）与离散模型（原生资产价格 S_t 变化的二叉树模型）的比较，给出一个严格的数学推导，确认这两套参数之间的关系.

剖分区间 $[0,T]$ 为 N 等分：

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T,$$

其中 $t_n=n\Delta t,\Delta t=\frac{N}{T}$.

在 §3.4 我们建立了连续支付红利的二叉树模型. 设 $t=t_n$ 时刻，原生资产的价格 S_n 为已知，则在 $t=t_{n+1}$ 时刻 S_{n+1} 具有两种可能

$$S_{n+1}=\begin{cases} S_n u, & \text{上扬}, \\ S_n d, & \text{下跌}. \end{cases} \tag{5.7.1}$$

在风险中性世界，考虑连续支付红利的原生资产价格演化的连续模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S}=(r-q)dt+\sigma dW_t \\ S(t_n)=S_n. \end{cases}$$

由 Itô 公式，得

$$d\ln S=(r-q-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t.$$

两边从 t_n 到 t_{n+1} 求积分，并利用在 $t=t_n$ 上的初始条件，得到

$$\ln\frac{S_{n+1}}{S_n}=(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\Delta W_n, \tag{5.7.2}$$

$(\Delta W_n=W_{t_{n+1}}-W_{t_n})$.

由 (5.7.2)

$$E(\ln\frac{S_{n+1}}{S_n})=(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{5.7.3}$$

$$Var(\ln\frac{S_{n+1}}{S_n})=\sigma^2\Delta t. \tag{5.7.4}$$

在风险中性世界中，在概率测度 $\mathrm{Q}\{q_u,q_d\}$ 意义下：

$$q_u=\frac{\rho/\eta-d}{u-d},\qquad q_d=\frac{u-\rho/\eta}{u-d}. \tag{5.7.5}$$

由 (5.7.1) 推得

$$E(\ln \frac{S_{n+1}}{S_n}) = q_u \ln u + q_d \ln d, \tag{5.7.6}$$

$$Var(\ln \frac{S_{n+1}}{S_n}) = q_u(\ln u)^2 + q_d(\ln d)^2 - (q_u \ln u + q_d \ln d)^2. \tag{5.7.7}$$

假设

$$ud = 1, \tag{5.7.8}$$

$$\eta = 1 + q\Delta t = e^{q\Delta t} + O(\Delta t^2), \tag{5.7.9}$$

$$\rho = 1 + r\Delta t = e^{r\Delta t} + O(\Delta t^2), \tag{5.7.10}$$

比较 (5.7.3),(5.7.4) 与 (5.7.6),(5.7.7), 得到

$$(r - q - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t = q_u \ln u + q_d \ln d,$$

$$\sigma^2 \Delta t = q_u(\ln u)^2 + q_d(\ln d)^2 - (q_u \ln u + q_d \ln d)^2.$$

由 (5.7.8),(5.7.5)，上述方程组可以简化为

$$(2q_u - 1)\ln u = (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \tag{5.7.11}$$

$$4q_u(1 - q_u)(\ln u)^2 = \sigma^2 \Delta t. \tag{5.7.12}$$

为了从方程组 (5.7.11),(5.7.12) 中解出 u 与 q_u, 由 (5.7.12)，令

$$u = e^{\alpha\sqrt{\Delta t}}, \tag{5.7.13}$$

α 待定. 将它代入 (5.7.11),(5.7.12) 得到

$$\alpha(2q_u - 1) = (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t}, \tag{5.7.14}$$

$$4q_u(1 - q_u)\alpha^2 \Delta t = \sigma^2 \Delta t. \tag{5.7.15}$$

由 (5.7.14)，

$$q_u = \frac{1}{2} + \frac{r - q - \frac{\sigma^2}{2}}{2\alpha}\sqrt{\Delta t}, \tag{5.7.16}$$

将它代入 (5.7.15)，得到

$$\alpha^2 - \sigma^2 = (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t,$$

即

$$\alpha = \sigma + O(\Delta t). \tag{5.7.17}$$

代入 (5.7.16), 忽略 Δt 的高阶小量，从而有

$$q_u = \frac{1}{2} + \frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}, \tag{5.7.18}$$

$$q_d = \frac{1}{2} - \frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}. \tag{5.7.19}$$

将 (5.7.17) 代入 (5.7.13)，忽略 Δt 的高阶无穷小量，得到

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{5.7.20}$$

关系式 (5.7.9),(5.7.10),(5.7.18)—(5.7.20) 给出了二叉树方法与 Black-Scholes 方程所出现的参数之间的关系.

定理 5.5 如果 $ud=1$，且不计 Δt 的高阶无穷小量，那么对于欧式期权定价的二叉树方法与 Black-Scholes 方程的显式差分格式 $(\omega = \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln u)^2} = 1)$ 等价.

证明 正如在 §3.5 所述，假设我们事先在 $\{0 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 设计一个网格

$$S_m = S_0 u^m, \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$
$$t_n = n\Delta t, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

其中 $u > 1$, $\Delta t = \frac{T}{N}$. 那么欧式期权定价的二叉树方程可表述为

$$V_m^n = \frac{1}{\rho}[q_u V_{m+1}^{n+1} + q_d V_{m-1}^{n+1}], \tag{5.7.21}$$

以及

$$V_m^N = (S_m - K)^+.$$

其中

$$\rho = 1 + r\Delta t, \qquad \eta = 1 + q\Delta t,$$

$$q_u = \frac{\rho/\eta - d}{u-d}, \qquad q_d = 1 - q_u.$$

取 $S_0 = 1$，由 (5.7.10),(5.7.18),(5.7.19), 表达式 (5.7.21) 可改写为

$$V_m^n = \frac{1}{1+r\Delta t}[(\frac{1}{2} + \frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t})V_{m+1}^{n+1}$$
$$+(\frac{1}{2} - \frac{r-q-\sigma^2/2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t})V_{m-1}^{n+1}].$$

这就是显式差分格式当 $\omega=\frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln u)^2}=1$ 时的计算公式 (5.6.25). 因而定理成立.

这个等价性定理很重要，它把二叉树方法的收敛性研究转移到差分方法的框架. 从定理 5.5 以及 Lax 定理（定理 5.3），立即推出二叉树方法作为一种离散算法它是稳定的，由它得到的数值解，当 $\Delta t\to 0$ 时必收敛到 Black-Scholes （连续）模型的解. 从而我们证明了

定理 5.6（**欧式期权二叉树方法的收敛性定理**） 假如

$$1-\left|\frac{r-q}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right|\sqrt{\Delta t}>0,$$

则当 $\Delta t\to 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta t\to 0}V_\Delta(S,t)=V(S,t),$$

其中 $V_\Delta(S,t)$ 是 V_m^n 的线性延拓.

从数值计算角度来说，为了求解 Black-Scholes 方程我们可以从偏微分方程数值解角度设计出比二叉树方法精度更高的离散算法.

§5.8 欧式期权价格的性质

影响欧式期权价格的因素有七个（以股票期权为例）: S（股价），K（敲定价格），r（无风险利率），q（红利率），T（有效期限），t（时间），σ（波动率）.

这一节我们需要研究的问题是: 当以上七个因素中某一个因素改变时，假如其它因素保持不变，问相应的期权价格有何变化？

由于欧式期权价格可以用 Black-Scholes 公式表出，因此为了回答这些问题，事实上就是去研究这个表达式对不同参数和自变数的微商的符号.

由 Black-Scholes 公式，欧式看涨（跌）期权价格 $c(S,t)(p(S,t))$ 可表为

$$c(S,t)=e^{-q(T-t)}SN(\hat{d}_1)-e^{-r(T-t)}KN(\hat{d}_2),$$

$$p(S,t)=c(S,t)-Se^{-q(T-t)}+Ke^{-r(T-t)},$$

其中

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

(1) **期权价格对 S 与 K 的依赖关系**

通过直接计算，不难知道

$$\frac{\partial \hat{d}_1}{\partial S} = \frac{\partial \hat{d}_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$N'(\hat{d}_1) = \frac{K}{S}N'(\hat{d}_2)e^{-(r-q)(T-t)}.$$

因此

$$\frac{\partial c}{\partial S} = e^{-q(T-t)}N(\hat{d}_1) > 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial S} = -e^{-q(T-t)}[1 - N(\hat{d}_1)] < 0,$$

以及

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r(T-t)}N(\hat{d}_2) < 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial K} = e^{-q(T-t)}[1 - N(\hat{d}_2)] > 0.$$

即当 S 增加时，看涨期权价格上升，看跌期权价格下降；而对于不同敲定价格期权，K 愈大看涨期权价愈小，看跌期权价愈大.

从金融意义上讲：股价上扬或敲定价减小，看涨期权的持有人在未来获益的机会愈大，可能获得的利益愈多，因此期权价上升；相反地对看跌期权的持有人在未来获益的机会愈小，可能获取的利益愈少，因此期权价下跌.

(2) **期权价格对 r 的依赖关系**

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(\hat{d}_2) > 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}[1 - N(\hat{d}_2)] < 0.$$

即若无风险利率上升，看涨期权价上升，而看跌期权价下跌.

从金融意义上讲，无风险利率上升将产生两方面影响：对股价来说，在风险中性世界股票的期望回报率 $E(\frac{dS}{S}) = (r-q)dt$ 将上升；而对于现金流来说，它使得未来 $(t = T)$ 收到的现金 K 的现值（ t 时刻） $Ke^{-r(T-t)}$ 下

降，因此对于看跌股票期权的持有人，由于在未来（ $t=T$ 时刻）是卖出股票换取现金，所以上述两个因素必然使得看跌期权的价格下跌，而对于看涨股票期权的持有人来说，影响正好相反，期权价格必然上升.

(3) **期权价格对 q 的依赖关系**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial q} &= -S(T-t)e^{-q(T-t)}N(\hat{d}_1) < 0, \\
\frac{\partial p}{\partial q} &= S(T-t)e^{-q(T-t)}[1-N(\hat{d}_1)] > 0.
\end{aligned}
$$

即若股票支付的红利率上升，则看涨期权价下降，看跌期权价上升.

从金融意义上讲，股票支付红利率多少直接影响股价的变化，在风险中性世界中，红利率上升，股票的期望回报率 $E(\frac{dS}{S})=(r-q)dt$ 下降，因此使得看涨期权价下降，相反地，使得看跌期权价上升.

(4) **期权价格对 σ 的依赖关系**.

$$
\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = e^{-q(T-t)}N'(\hat{d}_1)\sqrt{T-t} > 0.
$$

即若对于不同的股票，波动率 σ 愈大，股票期权价格（不论是看涨期权，还是看跌期权）愈高.

从金融意义上讲，波动率 σ 增大，表示股票的上扬和下跌的波动增加，也就是投资的风险增加. 对于原生资产 股票本身而言，由于 $E(\sigma dW_t)=0$，即由随机元产生的风险（获益或受损）是相互抵消的. 但对于期权的持有人则不同. 以看涨期权为例，当股价上升愈大，获益愈大，但当股票下跌时，情况就不一样了. 股价下跌，看涨期权持有人的损失是有下限的，即他的最大损失就是输掉了全部期权金. 因此股票的波动影响对看涨期权的持有人来说损益是不均等的. 当波动率升高时，看涨期权价格随之变大，同样道理适用于看跌期权的持有人.

(5) **期权价格对 T 与 t 的关系**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} = {} & qSe^{-q(T-t)}N(\hat{d}_1) - rKe^{-r(T-t)}N(\hat{d}_2) \\
& - \frac{\sigma e^{-q(T-t)}SN(\hat{d}_1)}{2\sqrt{T-t}},
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)}[1-N(\hat{d}_2)] - qSe^{-q(T-t)}[1-N(\hat{d}_1)]$$
$$-\frac{\sigma e^{-q(T-t)}S[1-N(\hat{d}_1)]}{2\sqrt{T-t}},$$
$$\frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{\partial c}{\partial t};$$
$$\frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{\partial p}{\partial t}.$$

由于上述等式右端的符号不定，因此 t 与 T 的变化不能断言期权价格必然上扬或下降.

从金融意义上讲，首先期权的有效期限 T 的长短对欧式期权来说，它的实施机会都只有一次，因此有效期长的期权并不意味着比有效期短的期权有更多的获益机会（这与美式期权是不同的！）. 因此对欧式期权来说，有效期的长短与期权价格的大小没有必然的关系. 对于 t 来说，情况亦相仿，t 愈大，$T-t$ 愈小，它表示愈接近实施期，因此对于一张欧式期权并不能说：愈接近实施期，它的价格就愈小（或愈大）. 但有一个例外，当 $q=0$ 时，

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(\hat{d}_2) - \frac{\sigma SN(\hat{d}_1)}{2\sqrt{T-t}} < 0.$$

即随着到期日的临近，一张没有红利支付的股票看涨期权的价格将下降.

综上所述，对于欧式期权的价格变化，我们有以下的表格：

变数	看涨期权	看跌期权
S （股价）	$+$	$-$
K （敲定价）	$-$	$+$
r （无风险利率）	$+$	$-$
q （红利率）	$-$	$+$
σ （波动率）	$+$	$+$
T （有效期）	?	?
t （时间）	?	?

这里“$+$”表示期权价格是变数的增函数，“$-$”表示期权价格是变数的减函数，“?”不能断言期权价格是变数的增或减函数.

§5.9 风险管理

利用期权作为金融工具对已暴露的风险进行风险管理时，以下几个用希腊字母表示的参数是重要的：

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Δ(Delta) 是期权或期权组合的价格 V 对原生资产 S 的变化率. 对于一个期权的出售方来说，这是一个需要选取的原生资产份额，以此来对冲由于出售期权或期权组合所带来的风险.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Γ(Gamma) 是 Δ 对于原生资产的变化率. 因为 Δ 是 S 和 t 的函数，因此从理论上讲为了达到对冲（消除出售期权或期权组合所带来的风险）的目的，需要不断调整 Δ 的份额，但在实际上这是不明智的，因为每次调整必然支付一定交易费用. 因此在实际操作中需要恰当地估计调整 Δ 的频率. 而 Γ 的大小恰好反映了这一点. 如果 Γ 较小，则 Δ 变化比较慢，因此可以不急于调整；相反地，如 Γ 较大，则表示 Δ 对于 S 的变化相当敏感，如果不在适当时间内加以调整，必将带来风险.

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Θ(Theta) 是期权或期权组合的价格对时间的变化率. Black-Scholes 方程给出了 Δ，Γ 与 Θ 的关系.

$$\Theta = -\frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma - (r-q)S\Delta + rV.$$

$$\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

$\mathcal{V}$(Vega) 是期权或期权组合的价格对原生资产波动率的变化率.

由于原生资产波动率 σ 是 Black-Scholes 公式中一个最难估计的量，因此要求给出一个确切的值，几乎是不可能的. 对于具体给定的 σ，考虑相应的期权价格对 σ 的敏感度，这就是求 $\mathcal{V}$ 的意义.

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

ρ(Rho) 是期权或期权组合的价格对无风险利率的变化率.

对于欧式期权在上一节（§5.8）已经得到了这些参数的表达式. 在这一节我们将说明如何利用这些参数（特别是 Δ 与 Γ）进行风险管理.

为了确切起见，假设一个金融机构在场外市场 (OTC) 出售给客户一份股票期权，由此该金融机构面临由于期权的价格变化所带来的风险. 为此金融机构采取套期保值（对冲）策略进行风险管理. 一种理想的套期保值策略应当确保在任何情况下，通过套期保值以后，使得该金融机构的收支基本相抵，即使得由于套期保值所花出的成本与由于出售期权而收到的期权金基本相当.

套期保值策略如何运作？

在 §5.2 中，我们引入 Δ- 对冲原理，即组成投资组合

$$\Pi = V - \Delta S,$$

选取适当 Δ，使得 $(t, t+\Delta t)$ 是无风险的，即

$$dV_t - \Delta_t dS_t = r(V_t - \Delta_t S_t)dt.$$

它可改写为

$$dV_t - rV_t dt = \Delta_t(dS_t - rS_t dt). \tag{5.9.1}$$

令 B_t 是无风险债券，

$$dB_t = rB_t dt. \tag{5.9.2}$$

在 (5.9.1) 两边乘 $\frac{1}{B_t}$，并考虑到 (5.9.2)，得到

$$\frac{B_t dV_t - V_t dB_t}{B_t^2} = \Delta_t \frac{B_t dS_t - S_t dB_t}{B_t^2},$$

即

$$d(\frac{V_t}{B_t}) = \Delta_t d(\frac{S_t}{B_t}). \tag{5.9.3}$$

这表示购进 Δ_t 份额的股票，使得贴现期权价格的增量正好等于 Δ_t 份贴现股票价格的增量，这样对冲的目的就完全达到了.

在整个期权的有效期为，对 t 求积分：

$$\frac{V_T}{B_T}-\frac{V_0}{B_0}=\int_0^T \Delta_t d(\frac{S_t}{B_t}),$$

即

$$V_T=V_0e^{rT}+\int_0^T \Delta_t d(e^{r(T-t)}S_t).$$

以看涨期权为例

$$V_0e^{rT}=(S_T-K)^+-\int_0^T \Delta_t d(e^{r(T-t)}S_t). \tag{5.9.4}$$

上述等式右端表示：出售方为了抵消由于出售期权所带来的风险，采取套期保值策略所花去的总成本. 而等式表明：如果无限次调整套期保值策略（即 Δ_t ），那么花去的总成本（如果不计需要花费的交易费）应与出售期权时收到的期权金，如果把它存入银行，在期权到期日所取得的收益相等.

当然这种做法是不现实的. 因为出售方每次调整套期保值策略，都要进行股票的交易，为此必须付出一定的交易费用. 因此实际操作只能取有限次调整的套期保值策略. 但是公式 (5.9.4) 至少提示我们这样一点：一个理想的套期保值策略，应该使所花的成本与期权金的收益相当.

以下结合具体的操作过程，给出公式 (5.9.4) 的一个离散形式.

假设 $\{t_n\}_{n=0,1,\cdots,N-1}$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<T)$ 是 N 个调整套期保值策略的时间. 为简单计，假设 $t_{n+1}-t_n=\Delta t$ 是固定的，即 $t_n=n\Delta t,\quad \Delta t=\frac{T}{N}$，从而公式 (5.9.4) 的离散形式为

$$\begin{aligned}V_0e^{rT} &= (S_T-K)^+-\sum_{i=0}^{N-1}\Delta_i(e^{r(T-t_{i+1})}S_{i+1}-e^{r(T-t_i)}S_i)\\ &= (S_T-K)^+-\Delta_N S_T+\sum_{i=1}^{N}e^{r(T-t_i)}S_i(\Delta_i-\Delta_{i-1})+\Delta_0e^{rT}S_0.\end{aligned}$$

因为

$$\Delta_N=\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{t=t_N}=\begin{cases}H(S_T-K), & \text{(看涨期权)}\\ -H(K-S_T), & \text{(看跌期权)}\end{cases}$$

其中 $H(\alpha)$ 是 Heaviside 函数. 若以看涨期权为例，则

$$V_0e^{rT}=-KH(S_T-K)+\Delta_0S_0e^{rT}+\sum_{i=1}^{N}e^{r(T-t_i)}S_i(\Delta_i-\Delta_{i-1}). \tag{5.9.5}$$

由于在每一个时段 $[t,t+\Delta t]$ 内，金额 Z 的利息为 $Zr\Delta t$，因此相应于连续模型的收益 $Ze^{r\Delta t}$，对于离散形式应改为 $Z(1+r\Delta t)$，从而 (5.9.5) 可改写为

$$\begin{aligned} V_0(1+r\Delta t)^N &= -KH(S_T-K)+\Delta_0 S_0(1+r\Delta t)^N \\ &\quad +\sum_{i=1}^{N}(1+r\Delta t)^{N-i}S_i(\Delta_i-\Delta_{i-1}). \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

现把具体套期保值过程描述如下：出售方在 $t=0$ 时刻按股价 S_0 买进 $\Delta_0=\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{(S_0,0)}$ 份额股票，为此向银行贷款 $\Delta_0 S_0$. 在 $t=t_1$ 时刻，由于需要对冲的份额改变为 $\Delta_1=\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{(S_1,t_1)}$（$S_1$ 为 $t=t_1$ 时刻股价），假如 $\Delta_1>\Delta_0$，则出售方需要再按股价 S_1 补进股票 $\Delta_1-\Delta_0$ 份，假如 $\Delta_1<\Delta_0$，则出售方可以按股价 S_1 出售多余的股票 $\Delta_0-\Delta_1$ 份；并把补进（售出）所需（所得）的款项继续向银行贷款（存入银行），并在 $t=t_1$ 支付在 $t=t_0$ 时刻向银行借款 $\Delta_0 S_0$ 的利息 $\Delta_0 S_0 r\Delta t$. 如此继续，一般来说在 $t=t_n$ 时刻，出售方一方面拥有 Δ_n 份股票，另一方面已经支付了套期保值成本 D_n：

$$D_n=\Delta_0 S_0(1+r\Delta t)^n+\sum_{i=1}^{n}(1+r\Delta t)^{n-i}S_i(\Delta_i-\Delta_{i-1}),$$

其中 $\Delta_i=\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{(S_i,t_i)}$，$(i=0,1,\cdots,n)$.

在期权的到期日 $t=T$ 时刻，出售方拥有 $\Delta_N=\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_{(S_T,T)}=H(S_T-K)$ 份股票，即当 $S_T>K$ 时（即期权处于**实值** (in the money) 时）出售方拥有 1 份股票，当 $S_T<K$ 时（即期权处于**虚值** (out the money) 时）出售方手中没有股票. 当期权处于实值时期权的持有人用现金 K 按合约规定向出售方换取 1 份股票 S，而当期权处于虚值时，期权的持有人就会自动放弃合约，因此出售方通过套期保值总的支出为

$$D_T=\Delta_0 S_0(1+r\Delta t)^N+\sum_{i=1}^{N}(1+r\Delta t)^{N-i}S_i(\Delta_i-\Delta_{i-1})-KH(S_T-K).$$

通过上述套期保值策略出售方成功地抵消了由于出售期权所带来的风险. 在这笔交易中他的实际收益是

$$\text{收益}=V_0e^{rT}-D_T.$$

其中 V_0 是期权金. 如果每一次调整套期保值要支付交易费，那么出售方的收益为

$$\text{收益} = V_0 e^{rT} - D_T - \sum_{i=0}^{N-1} e_i,$$

其中 e_i 是第 i 次调整所支付的交易费用.

附注 在直接操作中，调整套期保值的时间 Δt 并不是常数，它取决于 $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$ 的值，如果 Γ 比较大，调整要更频繁一些，若 Γ 比较小，调整可以放慢一点.

作为这一章的小结，我们归纳一下几个要点：

1. 这一章中我们对原生资产价格演化给出了一个连续模型 —— 随机微分方程 (5.2.1). 基于这个模型，利用 Δ- 对冲技巧和 Itô 公式，给出了期权价格满足的 Black-Scholes 方程，通过求解 Black-Scholes 方程的终值问题，我们给出了一个独立于每个投资人风险偏好的欧式期权的公平价格 ——Black-Scholes 公式.

2. 作为同一个原生风险资产的衍生物 —— 期权，它们的品种是多种多样的，在数学上反映在它们具有各种不同形式的定解条件，因此为了给这些期权定价，在数学上就是去求解带有各种不同形式定解条件的 Black-Scholes 方程.

3. 二叉树方法是期权定价的最重要的离散算法. 如果不计 Δt 的高阶小量，二叉树方法与某一个特定的 Black-Scholes 方程的显式差分格式的等价. 通过偏微分方程数值解的理论，我们证明了二叉树方法的收敛性.

4. 期权的出售方需要采取对冲策略对由于出售期权所面临的风险进行管理. 由于对冲份额 $\Delta = \Delta(S,t)$ 在不断变化，因此出售方需要根据 $\Gamma(S,t) = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$ 的大小，掌握好调整的频率，不断调整 Δ 的份额，以实现套期保值的目的.

习题

利用 Black-Scholes 框架给出以下各种看涨期权的数学模型以及在初始时刻 $t = 0$ 时的期权定价（期权金）的表达式.

1. 百慕大 (Bermudan) 期权. 按合约规定在 N 个规定时间 $\{t_n\}, (0 < t_1 < \cdots < t_N < T)$ 期权可以提前实施，试写出期权定价模型，并当 $N = 1, t_1 = \frac{T}{2}$ 时，给出期权金表达式.

2. （离散）关卡 (barrier) 期权. 若按合约规定在 N 个规定时间 $\{t_n\},(0 < t_1 < \cdots < t_N < T)$，当股价下降到或超过关卡值 $S = S_B(S_B < K)$ 时, 期权自动失效（敲出）, 试写出期权定价模型, 并当 $N = 1, t_1 = \dfrac{T}{2}$ 时, 给出期权金表达式.

3. （离散）回购 (callable) 期权. 若按合约规定, 在 N 个规定时间 $\{t_n\},(0 < t_1 < \cdots < t_N < T)$, 当股价超过 $K_c(K_c > K)$ 时, 期权出售方有权按 $K_c - K$ 价回购, 试写出期权定价模型, 并当 $N = 1, t_1 = \dfrac{T}{2}$ 时, 给出期权金表达式.

4. 若按合约规定, 在 N 个规定时间 $\{t_n\},(0 < t_1 < \cdots < t_N < T)$，按股金的 1% 支付红利, 试写出期权定价模型, 并当 $N = 1, t_1 = \dfrac{T}{2}$ 时, 给出期权金表达式.

5. （离散）亚式 (Asian) 期权. 按合约规定设置 N 个固定时间 $\{t_n\},(0 < t_1 < \cdots < t_N < T)$, 以及这 N 个时间股价的算术平均值 $J_T = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} S(t_i)$；以算术平均值 J_T 代替 S_T，形成一张新的看涨期权：即在到期日 $t = T$ 时

$$收益 = (J_T - K)^+.$$

试写出这张期权的定价模型, 以及当 $N = 2, t_1 = \dfrac{T}{2}, t_2 = T$ 时, 给出期权金的表达式.

6. 试证明在 $t = T_1$ 时刻有权购买看涨期权的复合期权的表达式 (5.5.8).

7. 试建立在 $t = T_1$ 时刻有权购买或出售看涨期权的复合期权的平价公式.

第六章　美式期权定价与最佳实施策略

美式期权是一张具有提前实施条款的合约. 由于可以提前实施, 持有人拥有比欧式期权更多的获利机会, 因此一般来说它比欧式期权更贵一些. 持有人花了更多的期权金, 能否获得相应回报, 这取决于持有人能否抓住有利时机、适时地实施这张合约, 以获取利益. 这是一个对每个美式期权持有人都必须要考虑的问题. 从数学上来说, 美式期权的定价问题是一个自由边界问题(freeboundary problem), 在这里所谓**自由边界**, 它是这样一条需要确定的交界线, 它把区域 $\{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ 分成两个部分, 一部分是**继续持有区域** (continuation region) , 另一部分是**终止持有区域** (stopping region) , 这条自由边界在金融上称为**最佳实施边界** (optimal exercise boundary).

显然对每个美式期权的持有人来说, 需要知道曲线的位置, 以便制订出最佳的实施方案. 令人遗憾的是: 美式期权与欧式期权不同, 它不可能得到解的显式表达式, 所以研究它的数值解、近似解析解、解的渐近表达式以及解本身 (特别是自由边界) 的一些性质就显得尤为重要. 本章将就这些问题展开深入的讨论.

让我们从一个最简单的美式期权模型开始, 因为这个模型的解可以有显式表达式.

§6.1　永久美式期权

永久美式期权 (perpetual American option)是一张没有终止期, 在生效后任何时间都可以实施的美式期权.

为确定计, 我们考虑永久美式看跌期权. 也就是期权持有人在任何时间都可以实施这张合约, 以敲定价 K 卖出一份原生资产 S.

永久美式期权的特点:

1. 期权价格与时间无关, $V = V(S)$. 因为这张合约没有终止期, 且它的收益不依赖时间, 只与原生资产价格有关.

2. 期权价格不小于收益函数，即

$$V(S) \geq (S-K)^{+}, \quad (\text{看涨期权})$$

$$V(S) \geq (K-S)^{+}, \quad (\text{看跌期权})$$

否则将存在套利机会（见第二章）.

3. 假设 $V_L(S,t)$ 是一张有着同样敲定价 K，终止期为 $t=T$ 的美式期权，则

$$V(S) \geq V_L(S,t). \tag{6.1.1}$$

即在所有具有同样敲定价格的美式期权中，永久美式期权是最贵的. 这是因为在收益相同的情况下，永久美式期权包括了所有具有终止期的美式期权的获利机会.

4. 按照美式看跌期权的性质，所有可能的原生资产价格 $S(0 \leq S < \infty)$ 被分成两部分：一部分是继续持有区域 Σ_1，即当原生资产在这个价格区间 $S \in \Sigma_1$ 时，期权的价格大于实施的收益，

$$V(S) > (K-S)^{+}, \tag{6.1.2}$$

持有人应继续持有，不宜实施以免损失. 另一部分是终止实施区域 Σ_2，即当原生资产在这个价格区间 $S \in \Sigma_2$ 时，期权的价格等于实施的收益，

$$V(S) = (K-S)^{+}, \tag{6.1.3}$$

持有人应立即实施，不宜再继续持有，否则将蒙受损失.

在第二章，我们已经指出，当 S充分小时，美式看跌期权应立即实施，即当 $S \ll 1$ 时，$S \in \Sigma_2$. 另一方面，当 $S \geq K$ 时，由于收益为零，所以当然应继续持有为宜，因此当 $S \geq K$ 时，$S \in \Sigma_1$. 所以我们可以认为：存在 $S_0 \in (0,K)$，使得

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{S_0 \leq S < \infty\}, \\ \Sigma_2 &= \{0 \leq S < S_0\}, \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

这里 S_0 称为**最佳实施边界**. 当然，S_0 与期权价格 $V(S)$ 一样，目前还是未知的.

综上分析，对于永久美式看跌期权的定价问题，即寻求：

在 Σ_1 上期权的价格 $V(S)$，以及最佳实施边界 S_0.

在 Σ_1 上建立定价模型.

与上一章相仿，应用 Δ- 对冲原理，由 Itô 公式，推得 $V(S)$ 适合的定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{d^2V}{dS^2}+rS\dfrac{dV}{dS}-rV=0, \quad (S_0<S<\infty) & (6.1.5)\\ V(S_0)=K-S_0, & (6.1.6)\\ V(\infty)=0. & (6.1.7)\end{cases}$$

因为在以上特点 (4) 中，我们已经通过分析，确认 $S_0<K$，故在 $S=S_0$ 时期权的收益为 $(K-S_0)^+=K-S_0$.

定解问题 (6.1.5) — (6.1.7) 是一个给定在 $[S_0,\infty)$ 上的二阶常微分方程边值问题.

按常微分方程理论，先求 (6.1.5) 的二个线性无关特解.

为此，令 $V=S^\alpha$，代入 (6.1.5) 得 α 满足的代数方程:

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2+(r-\frac{\sigma^2}{2})\alpha-r=0. \tag{6.1.8}$$

它有两个根: $\alpha=1$ 以及 $\alpha=-\dfrac{2r}{\sigma^2}$，从而方程 (6.1.5) 通解为

$$V(S)=AS+BS^{-\frac{2r}{\sigma^2}}. \tag{6.1.9}$$

利用边界条件 (6.1.6)， (6.1.7) 定出 A， B：

$$A=0, \quad B=S_0^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K-S_0),$$

将它们代入 (6.1.9)，我们得到定解问题 (6.1.5)—(6.1.7) 的解:

$$V(S,S_0)=\left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K-S_0).$$

这个解依赖于 S_0.

如何去确定 S_0 呢？由于我们要寻找的 S_0 是最佳实施边界，也就是持有人在价位 $S=S_0$ 实施这张合约，其目的是获取最大的收益，使得期权的价值达到最大.

为了与定解问题 (6.1.5)—(6.1.7) 中的边界 $S=S_0$ 相区别，这里我们把最佳实施边界记作 $S=S_0^*$. 即求 $S=S_0^*$ ，使得

$$V(S;S_0^*)=\max_{0\le S_0\le K}V(S;S_0)=\max_{0\le S_0\le K}\left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K-S_0). \tag{6.1.10}$$

记 $F(S_0)=\left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K-S_0)$ ，由于

$$\frac{dF}{dS_0}=\left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\frac{2rK}{\sigma^2 S_0}-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\right].$$

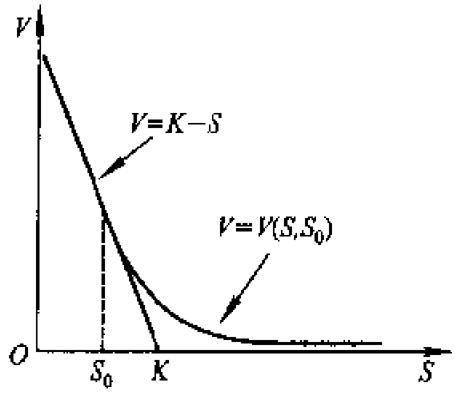
令 $\frac{dF}{dS_0}=0$ ，解出 S_0^* :

$$S_0^*=\frac{K}{1+\frac{\sigma^2}{2r}}. \tag{6.1.11}$$

易知当 $S_0=S_0^*$ 时， $V(S;S_0)$ 取最大，它的最大值为

$$V(S)=V(S;S_0^*)=\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{K}{1+\frac{\sigma^2}{2r}}\right)^{\frac{2r+\sigma^2}{\sigma^2}}S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}. \tag{6.1.12}$$

现在我们观察一下 (6.1.10) 的几何意义.



以 α 记期权价格曲线 $V=V(S;S_0)$ 在 $S=S_0$ 处的斜率，即

$$\alpha=\left.\frac{\partial V(S;S_0)}{\partial S}\right|_{S=S_0}=\frac{2r}{\sigma^2}\left(1-\frac{K}{S_0}\right).$$

当 $S_0<S_0^*$ 时， $\alpha<-1$ ，即当 $0<S-S_0\ll 1$ 时，

$$\frac{V(S;S_0)-V(S_0;S_0)}{S-S_0}<-1,$$

即

$$V(S;S_0)-(K-S_0)<-(S-S_0).$$

从而当 $S<S_0$ 时，（ S 充分与 S_0 接近，）有

$$V(S;S_0)<K-S.$$

这是不可能的，因为这与 (6.1.2) 和 (6.1.3) 相矛盾.

而当 $S_0>S_0^*$ 时， $\alpha\geq-1$ ，并且当且仅当 $S_0=S_0^*$ 时， $\alpha=-1$. 在几何上，这表示当且仅当 $S_0=S_0^*$ 时，期权价格曲线 $V=V(S;S_0)$ 与表示实施收益的曲线 $V=K-S$ 在 $S=S_0$ 点相切.

在永久美式期权的特性 (4) 中，（见 (6.1.4) ），我们已经指出：对于最佳实施边界 $S=S_0$ ，

$$V(S)=\begin{cases}V(S;S_0), & S\in\Sigma_1,\\ (K-S), & S\in\Sigma_2,\end{cases}$$

这里 $\Sigma_1=\{S_0\leq S<\infty\}$ ， $\Sigma_2=\{0\leq S\leq S_0\}$.

因此 当永久美式期权价格在通过最佳实施边界 $S=S_0$ 时，即 (6.1.11) 成立时，函数 V 及其一阶微商都是连续的，即价格 V 以及用来对冲的份额 Δ 都是连续的.

综上所述， 永久美式期权定价原则是按照期权持有人执行最佳策略，它使得期权价值达到极大，取得最大效益. 这个原则在数学上等价于选择实施策略 $(S=S_0)$ ，使得期权价格 V 本身及其微商 $\Delta=\frac{dV}{dS}$ 通过实施边界 $S=S_0$ 是连续的.

从而我们给出 **永久美式期权的定价模型**： 求 $\{V(S),S_0\}$ ，使得

$$\begin{cases}\mathcal{L}_\infty V=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+rS\frac{dV}{dS}-rV=0 \quad (S_0<S<\infty) & (6.1.13),\\ V(S_0)=K-S_0, & (6.1.14)\\ V'(S_0)=-1, & (6.1.15)\\ V(\infty)=0. & (6.1.16)\end{cases}$$

定解问题 (6.1.13)—(6.1.16) 在数学上称为 **自由边界问题**(free boundary problem)，其中 S_0 称为 **自由边界**.

自由边界问题是一个非线性问题，叠加原理对它不适用. 对于自由边界问题，$V(S)$ 与 S_0 的寻求是同时的，在求解时，它们是互相关联的.

永久美式期权除了可以明显表示为一个自由边界问题 (6.1.13)—(6.1.16) 以外，还可写成 **变分不等方程** (variational inequality)形式.

让我们把 (6.1.13)—(6.1.16) 改写为：在 $[0,\infty)$ 上，求函数 $V=V(S)$，使得

(1) $V(S)$ 本身以及 $V'(S)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，即 $V\in C^1_{[0,\infty)}$；

(2) 在区域 Σ_1 上，

$$V(S)>(K-S)^+,$$

$$\mathcal{L}_\infty V(S)=0;$$

(3) 而在区域 Σ_2 上，（考虑到 $S_0<K$）

$$V(S)=(K-S)^+=K-S,$$

$$\mathcal{L}_\infty V(S)=-rK<0;$$

把 (1)、(2)、(3) 合起来，我们有：求 $V(S)\in C^1_{[0,\infty)}$，在 $[0,\infty)$ 上具有分段连续的二阶微商，并使得

$$V(S)\geq (K-S)^+,$$

$$\mathcal{L}_\infty V(S)\leq 0,$$

$$[V(S)-(K-S)^+]\mathcal{L}_\infty V(S)=0,$$

或

$$\min\{-\mathcal{L}_\infty V, V-(K-S)^+\}=0;$$

(4) $V(S)$ 适合边界条件

$$V(0)=K, V(\infty)=0.$$

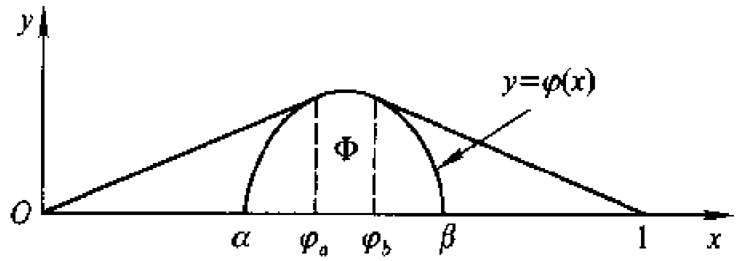
把 (1)—(4) 合在一起，即求函数 $V=V(S)\in C^1_{[0,\infty)}$，并具有分段连续二阶微商，使得在 $[0,\infty)$ 上适合

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}_\infty V, V-(K-S)^+\}=0, \quad (0<S<\infty) & (6.1.17)\\ V(0)=K, V(\infty)=0. & (6.1.18)\end{cases}$$

我们称这个形式为 **变分不等方程**.

附注　变分不等方程这个名词来自力学问题.

设 A,B 两点之间有一个障碍物 Φ， $\Phi=\{(x,y)|y\le\varphi(x),0\le x\le 1\}$；通过 A,B 两点拉一根弦，问弦的形状？



设 $y=Y(x)$ 是弦的形状，它满足：

(1) $Y(x)\in C^1_{[0,1]}$,

(2) $Y(x)\ge\varphi(x)$,

(3) 当 $0\le x\le\phi_a$ 和 $\phi_b\le x\le 1$ 时，弦与障碍 Φ 不接触，$Y(x)>\varphi(x)$，弦上不受力，故

$$-Y''=0,$$

(4) 当 $\phi_a\le x\le\phi_b$ 时，$Y(x)=\varphi(x)$，弦与障碍重合，弦上受到障碍物的反作用力 $f\ge0$，故

$$-Y''=f\ge0.$$

综合 (1)—(4)，求 $y=Y(x)\in C^1_{[0,1]}$，使得

$$\begin{cases} \min\{-Y'',Y-\varphi(x)\}=0, \quad (0\le x\le 1) & (6.1.19)\\ Y(0)=Y(1)=0. & (6.1.20)\end{cases}$$

利用最小势能原理，以上通过障碍物的弦的平衡问题，同样可表成下面

的 **变分问题**：求 $Y(x)\in\Omega$，使得

$$J(Y)=\min_{y(x)\in\Omega}J(y),$$

其中 $J(y)$ 是弦的应变能:

$$J(y)=\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{dy}{dx})^2dx,$$

$$\Omega=\{y(x)|y(x)\in C^1_{[0,1]},y(0)=y(1)=0,y(x)\geq\varphi(x)\}.$$

这里 Ω 是一个凸集，$Y(x)$ 是一个给定在凸集上的变分问题的解. 定解问题 (6.1.19) 是这个变分问题的 Euler 方程，故人们把它称为 **变分不等方程**.

附注 在数学上人们通常把定解问题 (6.1.17),(6.1.18) 称为 **障碍问题** (obstacle problem)，而把收益函数 $(K-S)^+$ 称为 **障碍** (obstacle)，继续持有区域(与障碍不接触部分)称为 **分离集** (separated set)，终止持有区域称为 **重合集** (coincident set)，而最佳实施边界称为 **重合集的边界**，即自由边界.

定解问题 (6.1.13)—(6.1.19) 和 (6.1.17),(6.1.18) 是永久美式看跌期权定价的数学模型的两种不同表示形式. 在前一个形式中明显的出现自由边界，而在后一种形式中自由边界隐含在其中，不明显出现. 它们各有特色，采用哪种形式更好些，取决于我们需要研究的问题和拟选取的方法.

附注 考虑支付红利情形. 若红利率 q 与时间无关，那么永久美式看跌期权的数学模型为:

求 $\{V(S),S_0\}$，使得

$$\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+(r-q)S\frac{dV}{dS}-rV=0, \quad (S_0<S<\infty) & (6.1.21)\\ V(S_0)=K-S_0, & (6.1.22)\\ V'(S_0)=-1, & (6.1.23)\\ V(\infty)=0. & (6.1.24)\end{cases}$$

取 $V=S^\alpha$ 代入 (6.1.21)，得到 α 适合的特征方程:

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2+(r-q-\frac{\alpha^2}{2})\alpha-r=0.$$

它有两个根

$$\alpha = \alpha_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}, \tag{6.1.25}$$

其中

$$\omega = \frac{-r + q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}.$$

易见

$$\alpha_- < 0 < \alpha_+.$$

故方程有通解

$$V(S) = AS^{\alpha_+} + BS^{\alpha_-}. \tag{6.1.26}$$

由边界条件 (6.1.24)，

$$A = 0.$$

由自由边界条件 (6.1.22),(6.1.23) 得

$$BS_0^{\alpha_-} = K - S_0,$$

$$\alpha_- BS_0^{\alpha_- - 1} = -1.$$

解之得

$$B = -\frac{1}{\alpha_-}\left(\frac{K}{1 - 1/\alpha_-}\right)^{1-\alpha_-},$$

$$S_0 = \frac{K}{1 - 1/\alpha_-}. \tag{6.1.27}$$

代入 (6.1.26) 得

$$V = -\frac{1}{\alpha_-}\left(\frac{K}{1 - 1/\alpha_-}\right)^{1-\alpha_-} S^{\alpha_-}. \tag{6.1.28}$$

附注 如何求永久美式看涨期权的定价？

首先，对于支付红利的永久美式看涨期权，继续持有区域 Σ_1 是 $\{0 \le S \le S_0\}$，终止持有区域 Σ_2 是 $\{S_0 \le S < \infty\}$， S_0 是最佳实施边界. 由于 $S_0 > K$，故永久美式看涨期权价格 $V = V(S)$ 适合定解问题:

$$
\begin{cases}
\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+(r-q)S\frac{dV}{dS}-rV=0 \quad (0<S<S_0), & (6.1.29)\\
V(S_0)=S_0-K, & (6.1.30)\\
V'(S_0)=1, & (6.1.31)\\
V(0)=0. & (6.1.32)
\end{cases}
$$

我们当然可以采用与看跌期权一样的推导，求出它的定价 $V=V(S)$ 的公式和最佳实施边界 S_0. 但是为了多得到一些信息，我们证明以下定理，它表示永久美式看涨 — 看跌期权的对称关系.

定理 6.1 设 $V_c(S;r,q)$， $V_p(S;r,q)$，以及 $S_c(r,q)$， $S_p(r,q)$ 分别是支付红利的永久美式看涨和看跌期权的定价和最佳实施边界，则

$$V_c(S;r,q)=\frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S};q,r), \tag{6.1.33}$$

$$\sqrt{S_c(r,q)S_p(q,r)}=K, \tag{6.1.34}$$

这里 K 是敲定价格.

证明 设 $V=V_p(y;q,r)$ 和 $S=S_p(q,r)$，它们是以下定解问题的解：

$$
\begin{cases}
\frac{\sigma^2}{2}y^2\frac{d^2V_p}{dy^2}+(q-r)y\frac{dV_p}{dy}-qV_p=0, \quad (S_p<y<\infty) & (6.1.35)\\
V_p(S_p)=K-S_p, & (6.1.36)\\
V_p'(S_p)=-1, & (6.1.37)\\
V_p(\infty)=0. & (6.1.38)
\end{cases}
$$

令

$$W=\frac{K}{y}V_p(y), \tag{6.1.39}$$

$$S=\frac{K^2}{y}. \tag{6.1.40}$$

在变换 (6.1.40) 下,

$$区域\{S_p \le y < \infty\} \quad \Longrightarrow \quad 区域\{0 < S \le \frac{K^2}{S_p}\}.$$

记 $\frac{K^2}{S_p} = S^*$，由自由边界条件 (6.1.36),(6.1.37)，得到

$$W(S^*) = \frac{K}{S_p}(K - S_p)\Big|_{S_p = \frac{K^2}{S^*}} = S^* - K, \tag{6.1.41}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dS}\Big|_{S=S^*} &= \left(\frac{dW}{dy}\frac{dy}{dS}\right)_{S=S^*} \\ &= \left(-\frac{K^2}{y^2}\right)\left(-\frac{K^2}{S^2}\right)\Big|_{S=S^*} = 1.\end{aligned} \tag{6.1.42}$$

此外由 (6.1.38)，得到边界条件:

$$W(0) = \left[\frac{K}{y}V_p(y)\right]_{y=\infty} = 0. \tag{6.1.43}$$

最后推导 $W(S)$ 在 $\{0 \le S \le S^*\}$ 上适合的微分方程. 通过直接计算不难知道:

$$y\frac{dV_p}{dy} = \frac{y}{K}\left[-S\frac{dW}{dS} + W\right],$$

$$y\frac{d}{dy}y\frac{dV_p}{dy} = \frac{y}{K}\left[S\frac{d}{dS}(S\frac{dW}{dS}) - 2S\frac{dW}{dS} + W\right].$$

因此方程 (6.1.35) 转化为

$$\begin{aligned}0 =& \frac{\sigma^2}{2}y\frac{d}{dy}y\frac{dV_p}{dy} + (q - r - \frac{\sigma^2}{2})y\frac{dV_p}{dy} - qV_p \\ =& \frac{y}{K}\left\{\frac{\sigma^2}{2}S\frac{d}{dS}(S\frac{dW}{dS}) + \left[-\sigma^2 - (q - r - \frac{\sigma^2}{2})\right]S\frac{dW}{dS}\right. \\ &+ \left.\left[\frac{\sigma^2}{2} + (q - r - \frac{\sigma^2}{2}) - q\right]W\right\},\end{aligned}$$

即

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2W}{dS^2} + (r - q)S\frac{dW}{dS} - rW = 0. \tag{6.1.44}$$

综合 (6.1.41)—(6.1.44)，这表明 $\{W(S), S^*\}$ 在 $[0, S^*]$ 上是永久美式看涨期权定解问题 (6.1.29)—(6.1.32) 的解.

由自由边界问题解的唯一性（在这里我们只引用不证明！），可得

$$W(S) = V_c(S; r, q), \qquad S^* = S_c(r, q).$$

通过变换式 (6.1.39),(6.1.40)，回到原变量 $V_p(S; q, r)$ 和 $S_p(q, r)$，立得定理结论.

现在我们利用定理 6.1，由永久美式看跌期权表达式来导出永久美式看涨期权定价公式.

首先我们指出

$$\alpha_-(q, r) = 1 - \alpha_+(r, q). \tag{6.1.45}$$

因为由 (6.1.25) 知

$$\begin{aligned}
\alpha_-(q, r) &= \frac{-q + r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{(q - r - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 q} \\
&= -\left[\frac{-r + q - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 r}\right] \\
&= 1 - \alpha_+(r; q).
\end{aligned}$$

故由定理 6.1 以及 (6.1.45)，

$$\begin{aligned}
V_c(S; r, q) &= \left[\frac{K}{y} V_p(y; q, r)\right]_{y = \frac{K^2}{S}} \\
&= \left\{\frac{K}{\alpha_-(q, r)}\left[\frac{K}{1 - 1/\alpha_-(q, r)}\right]^{1 - \alpha_-(q, r)} y^{-1 + \alpha_-(q, r)}\right\}_{y = \frac{K^2}{S}} \\
&= \frac{1}{\alpha_+(r, q) - 1}\left(1 - \frac{1}{\alpha_+(r, q)}\right)^{\alpha_+(r, q)} K^{1 - \alpha_+(r, q)} S^{\alpha_+(r, q)},
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} S_c(S;r,q) &= \frac{K^2}{S_p(S;q,r)} \\ &= K\frac{\alpha_-(q,r)-1}{\alpha_-(q,r)} \\ &= K\frac{\alpha_+(r,q)}{\alpha_+(r,q)-1}. \end{aligned} \tag{6.1.46}$$

推论　当 $q=0$ 时,

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \frac{-(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{(r-\frac{\sigma^2}{2})^2+2r\sigma^2} \\ &= -\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}+(r+\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

故 $S_c(S;r,0)=\infty$. 这表示对于永久美式看涨期权，若原生资产不计红利，则提前实施都是不明智的. 此时期权价 $V_c(S;r,0)=S$.

§6.2　美式期权的模型

为确定计，我们仍然以不付红利的美式看跌期权为例建立数学模型.

对于终止期为 $t=T$ 的美式看跌期权，它同样存在两个区域：一个是继续持有区域 Σ_1 ，在这个区域内：

$$V(S,t)>(K-S)^+;$$

另一个是终止持有区域 Σ_2 ，在这个区域内：

$$V(S,t)=(K-S)^+.$$

在这两个区域中间有一条最佳实施边界 $\Gamma: S=S(t)$.

与 §6.1 相仿的讨论，我们可以认为

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(S,t)|S(t)\le S<\infty, 0\le t\le T\}, \\ \Sigma_2 &= \{(S,t)|0\le S\le S(t), 0\le t\le T\}, \end{aligned}$$

以及

$$S(t) < K \qquad (0 \le t < T). \tag{6.2.1}$$

在 Σ_1 中，利用 Δ- 对冲原理以及 Itô 公式，我们可以推得：当 $(S,t) \in \Sigma_1$ 时，期权价格 $V = V(S,t)$ 适合 Black-Scholes 方程：

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (\Sigma_1) \tag{6.2.2}$$

在最佳实施边界 Γ 上，

$$V(S(t),t) = K - S(t). \tag{6.2.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S(t),t) = -1, \tag{6.2.4}$$

（请注意，由于 (6.2.1)，我们取消了"正部"的符号.）且当 $S \to \infty$ 时，

$$V \to 0, \tag{6.2.5}$$

在 $t = T$ 上，

$$V(S,T) = (K - S)^+. \tag{6.2.6}$$

这表明对于美式看跌期权的定价，就是要在 Σ_1 中，寻求函数对 $\{V(S,t), S(t)\}$，使得它适合定解问题 (6.2.2)—(6.2.4)，由于 $S(t)$ 是自由边界，所以这是一个抛物型方程的自由边界问题.

附注 自由边界条件 (6.2.4) 表明期权价格的微商（即 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ ）通过最佳实施边界是连续的. 这个事实正像我们在 §6.1 所指出，它同样体现了美式期权的定价原则，即期权持有人执行最佳实施策略，使得期权价位达到极大.

与 §6.1 相仿，从自由边界问题 (6.2.2)—(6.2.4) 出发，我们可以给出美式看跌期权定价的变分不等方程模型：

在区域 $\Sigma : \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上，寻求函数 $V(S,t) \in C^1_\Sigma$，其中 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma$，使得

(1) 在继续持有区域 Σ_1 上，

$$V(S,t) > (K - S)^+,$$

$$\mathcal{L}V = 0,$$

(2) 在终止持有区域 Σ_2 上,

$$\begin{aligned} V(S,t) &= (K-S)^+, \\ \mathcal{L}V &= \mathcal{L}(K-S) = -rK < 0. \end{aligned}$$

(3) 在终止时间 $t=T$,

$$V(S,t) = (K-S)^+.$$

(4) 当 $S\to\infty$ 时,

$$V(S,t)\to 0.$$

综合 (1)—(4) , 因此 **美式看跌期权定价的变分不等式模型** 是:
求 $V(S,t)\in C^1_\Sigma$, 使得

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V-(K-S)^+\}=0, & (\Sigma) & (6.2.7) \\ V(S,T)=(K-S)^+, & (0\le S<\infty) & (6.2.8) \\ V\to 0. & (S\to\infty) & (6.2.9) \end{cases}$$

附注 对于连续支付红利率为 q 的美式期权, 模型为

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V-g(S)\}=0, & (6.2.10) \\ V|_{t=T}=g(S). & (6.2.11) \end{cases}$$

这里

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV, \qquad (6.2.12)$$

$$g(S)=\begin{cases} (K-S)^+, & (\text{看跌期权}) & (6.2.13) \\ (S-K)^+. & (\text{看涨期权}) & (6.2.14) \end{cases}$$

人们自然关心美式看涨期权定价与美式看跌期权定价之间的关系.

事实上, 我们可以采用完全相仿的推导, 把永久美式期权的看涨 — 看跌对称关系 (定理 6.1) 推广到一般美式期权的情形.

定理 6.2 设 $V_c(S,t;r,q)$, $V_p(S,t;r,q)$ 以及 $S_c(t;r,q)$, $S_p(t;r,q)$ 分别是具有相同期限 T 和相同敲定价格 K 的支付红利的美式看涨和看跌期权的

价格与最佳实施边界，则

$$V_c(S,t;r,q) = \frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S},t;q,r)$$

和

$$\sqrt{S_c(t,r,q)S_p(t;q,r)} = K,$$

这里 K 是期权的敲定价格， r 是无风险利率， q 是红利率.

这个定理的证明与定理 6.1 完全相仿，我们把它作为习题，请读者自己完成.

§6.3 美式期权的分解

按金融意义，美式期权定价可以分解 (decomposition) 为两部分，一部分是欧式期权定价，另一部分是由于合约增加提前实施条款而需要增付的期权金. 欧式期权定价是 Black-Scholes 公式，增付的期权金显然与最佳实施边界的位置有关. 从数学上讲，我们希望由此导出最佳实施边界 $S = S(t)$ 所满足的方程式.

为了导出 $S(t)$ 所适合的积分方程，我们需要利用 Black-Scholes 方程的基本解.

定义 6.1 $G(S,t;\xi,T)$ 称为是 **Black-Scholes方程的基本解** (fundamental solution) ，如果它适合以下定解问题:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (6.3.1) \\ V(S,T) = \delta(S-\xi), & (6.3.2) \end{cases}$$

这里 $0<S<\infty, 0<\xi<\infty, 0<t<T, \delta(x)$ 为 Dirac 函数.

为了写出 $G(S,t;\xi,T)$ 的表达式，记

$$x = \ln\frac{S}{\xi}, \qquad \tau = T - t. \tag{6.3.3}$$

在上述变换下，定解问题 (6.3.1),(6.3.2) 转化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (r-q-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x} + rV = 0, & (6.3.4) \\ V(x,0) = \dfrac{1}{\xi}\delta(x), & (6.3.5) \end{cases}$$

这里 $x\in R$， $0<\tau\le T$.

为了导出 (6.3.5)，我们注意到在变换 (6.3.3) 下，

$$\delta(S-\xi)=\delta(\xi(e^x-1))=\frac{1}{\xi}\delta(e^x-1)=\frac{1}{\xi}\delta(x).$$

与 §5.3 中推导相仿，作变换

$$V=e^{\alpha\tau+\beta x}u, \tag{6.3.6}$$

其中

$$\beta=\frac{1}{2}-\frac{r-q}{\sigma^2}, \tag{6.3.7}$$

$$\alpha=-r-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2. \tag{6.3.8}$$

从而定解问题 (6.3.4),(6.3.5) 转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\tau}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & (6.3.9)\\ u(x,0)=e^{-\beta x}\frac{1}{\xi}\delta(x)=\frac{1}{\xi}\delta(x). & (6.3.10)\end{cases}$$

定解问题 (6.3.9),(6.3.10) 的解是

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\xi\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}\}.$$

将它代入 (6.3.6) 并考虑到 (6.3.7),(6.3.8)，得到

$$V(x,\tau)=\frac{1}{\xi\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\{-r\tau-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\tau]^2\}.$$

通过 (6.3.8) 回到原变量 (S,t)，即得 **Black-Scholes方程的基本解**:

$$\begin{aligned}G(S,t;\xi,T)=&\frac{e^{-r(T-t)}}{\xi\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\\&\cdot\exp\{-\tfrac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[\ln\tfrac{S}{\xi}+(r-q-\tfrac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2\}.\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

定理 6.3 基本解 $G(S,t;\xi,\eta)$ 看作 ξ,η 的函数，它是 Black-Scholes 方程的共轭方程 (adjoint equation) 的基本解，即若令

$$v(\xi,\eta)=G(S,t;\xi,\eta),$$

则 $v(\xi,\eta)$ 适合

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*v = -\dfrac{\partial v}{\partial \eta} + \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\xi^2 v) - (r-q)\dfrac{\partial}{\partial \xi}(\xi v) - rv = 0, & (6.3.12) \\ v(\xi,t) = \delta(\xi - S), & (6.3.13) \end{cases}$$

这里 $0<\xi<\infty, 0<S<\infty, t<\eta$[1]

推论 定理 6.3 表明，若令 $G^*(\xi,\eta;S,t)$ 是方程 (6.3.11) 的基本解，则

$$G(S,t;\xi,\eta) = G^*(\xi,\eta;S,t).$$

定理 6.3 的证明 考虑积分

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^\infty dx \int_{t+\epsilon}^{\eta-\epsilon} [G^*(x,y;S,t)\mathcal{L}G(x,y;\xi,\eta) \\ & - G(x,y,\xi,\eta)\mathcal{L}^*G^*(x,y;S,t)]\,dxdy \\ = & \int_0^\infty dx \int_{t+\epsilon}^{\eta-\epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(G^*G) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 G^* \frac{\partial G}{\partial x}) \right. \\ & \left. - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[G\frac{\partial}{\partial x}(x^2G^*)\right] + (r-q)\frac{\partial}{\partial x}(xGG^*) \right\} dy. \end{aligned}$$

由于当 $x \to 0, \infty$ 时，

$$\begin{aligned} & x^2 G^* \frac{\partial G}{\partial x} \to 0, \\ & G\frac{\partial}{\partial x}(x^2G^*) \to 0. \\ & xGG^* \to 0, \end{aligned}$$

从而有

$$\int_0^\infty G^*(x,\eta-\epsilon;S,t)G(x,\eta-\epsilon;\xi,\eta)dx = \int_0^\infty G^*(x,t+\epsilon;S,t)G(x,t+\epsilon;\xi,\eta)dx.$$

---

[1] $\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - c(x)u$ 的共轭算子 $\mathcal{L}^*v$ 定义为 $\mathcal{L}^*v = \sum_{i,j=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x)v) - \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)v) + c(x)v$，它们适合

$$\int_\Omega (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v)dx = 0, \qquad \forall u,v \in C_0^\infty(\Omega).$$

令 $\epsilon \to 0$，由初始条件 (6.3.2) 以及 (6.3.13)

$$\int_0^\infty G^*(x,\eta;S,t)\delta(x-\xi)dx$$

$$=\int_0^\infty \delta(x-S)G(x,t;\xi,\eta)dx.$$

即

$$G^*(\xi,\eta;S,t)=G(S,t;\xi,\eta).$$

定理获证.

现在我们建立美式期权的分解公式.

定理 6.4 设 $V(S,t)$ 是美式看跌期权定价，则

$$V(S,t)=V_E(S,t)+e(S,t), \tag{6.3.14}$$

这里 $V_E(S,t)$ 是欧式看跌期权定价：

$$V_E(S,t)-Ke^{-r(T-t)}N(-\hat{d}_2)-Se^{-q(T-t)}N(-\hat{d}_1). \tag{6.3.15}$$

其中 $\hat{d}_1$ 与 $\hat{d}_2$ 的定义见 (5-4-11),(5-4-12).$e(S,t)$ 是提前实施期权金 (early exercise premium)，

$$e(S,t)=\int_t^T d\eta\int_0^{S(\eta)}(Kr-q\xi)G(S,t;\xi,\eta)d\xi. \tag{6.3.16}$$

这里 $G(S,t;\xi,\eta)$ 是 Black-Scholes 方程的基本解.

证明 对于美式看跌期权，由于在区域 $\Sigma:\{0\le S<\infty,0\le t<T\}$ 上，期权价格 $V(S,t)$ 一阶连续可微，且有分段连续的二阶微商，且

$$-\mathcal{L}V(S,t)=\begin{cases}0, & (S,t)\in\Sigma_1,\\ Kr-qS, & (S,t)\in\Sigma_2,\end{cases} \tag{6.3.17}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是 Black-Scholes 算子.

在方程 (6.3.17) 两边乘 $G^*(\xi,\eta;S,t)$ 并在区域 $\{0\le\xi<\infty,t+\epsilon\le\eta\le T\}$

上求积分. 由于 $\Sigma_2=\{0\le\xi\le S(\eta), 0\le\eta\le T\}$ ， $S(\eta)$ 单调，故

$$
\begin{aligned}
&\int_{t+\epsilon}^{T}d\eta\int_0^{S(\eta)}(Kr-q\xi)G^*(\xi,\eta;S,t)d\xi\\
&=-\int_{t+\epsilon}^{T}d\eta\int_0^{\infty}G^*(\xi,\eta;S,t)\mathcal{L}Vd\xi\\
&=-\int_{t+\epsilon}^{T}d\eta\int_0^{\infty}[G^*(\xi,\eta;S,t)\mathcal{L}V(\xi,\eta)\\
&\quad-V(\xi,\eta)\mathcal{L}^*G^*(\xi,\eta;S,t)]d\xi\\
&=-\int_{t+\epsilon}^{T}d\eta\int_0^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(G^*V)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2G^*\frac{\partial V}{\partial\xi})\right.\\
&\quad\left.-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(V\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2G^*))+(r-q)\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi VG^*)\right\}d\xi.
\end{aligned}
$$

由于当 $\xi\to0,\infty$ 时

$$
\begin{aligned}
&\xi^2G^*\frac{\partial V}{\partial\xi}\longrightarrow0,\\
&V\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2G^*)\longrightarrow0,\\
&\xi VG^*\longrightarrow0,
\end{aligned}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}G^*(\xi,t+\epsilon;S,t)V(\xi,t+\epsilon)d\xi\\
&=\int_0^{\infty}G^*(\xi,T;S,t)V(\xi,T)d\xi\\
&\quad+\int_{t+\epsilon}^{T}d\eta\int_0^{S(\eta)}(Kr-q\xi)G^*(\xi,\eta;S,t)d\xi.
\end{aligned}
$$

令 $\epsilon\to0$ 时，并考虑到 (6.3.13) 以及定理 6.3 的推论，得到

$$
\begin{aligned}
V(S,t)&=\int_0^{\infty}G(S,t;\xi,T)(K-\xi)^+d\xi\\
&\quad+\int_t^{T}d\eta\int_0^{S(\eta)}(Kr-q\xi)G(S,t;\xi,\eta)d\eta\\
&=V_E(S,t)+e(S,t).
\end{aligned}
$$

从而定理获证.

表达式 (6.3.14)--(6.3.16) 表明：如果最佳实施边界 $S=S(t)$ 是已知的，那么美式期权的定价可以由 (6.3.14)—(6.3.16) 表出.

如何去求最佳实施边界 $S=S(t)$ 呢？作为定理 6.4 的推论，我们可以导出最佳实施边界 $S=S(t)$ 适合的非线性积分方程.

定理 6.5　美式看跌期权的最佳实施边界 $S=S(t)$ 适合非线性第二类 Volterra 积分方程：

$$
\begin{aligned}
S(t) \;=\;& K+S(t)e^{-q(T-t)}N\left(-\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}+\beta_2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
&-Ke^{-r(T-t)}N\left(-\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}+\beta_1(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
&-Kr\int_t^T e^{-r(\eta-t)}\left[1-N\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{S(\eta)}+\beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta\\
&+qS\int_t^T e^{-q(\eta-t)}\left[1-N\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{S(\eta)}+\beta_2(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta, \qquad (6.3.18)
\end{aligned}
$$

其中

$$\beta_1=r-q-\frac{\sigma^2}{2}, \qquad (6.3.19)$$

$$\beta_2=r-q+\frac{\sigma^2}{2}. \qquad (6.3.20)$$

证明　由 (6.3.16) 以及基本解的表达式 (6.3.10)，$e(S,t)$ 可表为

$$
\begin{aligned}
e(S,t) =& \int_t^T d\eta\int_0^{S(\eta)}(Kr-q\xi)\frac{e^{-r(\eta-t)}}{\sigma\xi\sqrt{2\pi(\eta-t)}}\\
&\cdot\exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{S}{\xi}+\beta_1(\eta-t)\right]^2}{2\sigma^2(\eta-t)}\right\}d\xi. \qquad (6.3.21)
\end{aligned}
$$

作变量代换

$$x = \frac{\ln \frac{S}{\xi} + \beta_1(\eta - t)}{\sigma\sqrt{\eta - t}},$$

$$dx = \frac{-d\xi}{\sigma\xi\sqrt{\eta - t}},$$

代入表达式 (6.3.21) 得到

$$\begin{aligned}
e(S,t) &= \frac{Kr}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(\eta-t)} \int_t^T d\eta \int_{\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
&\quad - \frac{qS}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T e^{(\beta_1 - r)(\eta-t)} d\eta \int_{\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2} + \sigma\sqrt{\eta-t}\,x\right)} dx \\
&= Kr \int_t^T e^{-r(\eta-t)} \left[1 - N\left(\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right] d\eta \\
&\quad - qS \int_t^T e^{-r(\eta-t)} d\eta \int_{\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+\sigma\sqrt{\eta-t})^2 + (r-q)(\eta-t)} dx \\
&= Kr \int_t^T e^{-r(\eta-t)} \left[1 - N\left(\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right] d\eta \\
&\quad - qS \int_t^T e^{-q(\eta-t)} \left[1 - N\left(\frac{\ln \frac{S}{S(\eta)} + \beta_2(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right] d\eta. \qquad (6.3.22)
\end{aligned}$$

把表达式 (6.3.22) 代入 (6.3.14)，并考虑到

$$V(S(t),t) = K - S(t),$$

从而我们有

$$K - S(t) = V_E(S(t),t) + e(S(t),t),$$

即

$$
\begin{aligned}
S(t) = & K + S(t)e^{-q(T-t)}N\left(-\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+\beta_1(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
& - Ke^{-r(T-t)}N\left(-\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+\beta_2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
& + qS\int_t^T e^{-q(\eta-t)}\left[1-N\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{S(\eta)}+\beta_2(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta \\
& - Kr\int_t^T e^{-r(\eta-t)}\left[1-N\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{S(\eta)}+\beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta.
\end{aligned}
$$

至此定理获证.

求解非线性积分 (6.3.18) 是很困难的，但是可以利用它得到最佳实施边界 $S=S(t)$ 在终止期 $t=T$ 附近的渐近表达式.

附注 我们可以用完全相仿的推演对美式看涨期权导出提前实施期权金的表达式：

$$
e(S,t)=\int_t^T d\eta\int_{S(\eta)}^{\infty}(q\xi-Kr)G(S,t;\xi,\eta)d\xi,
$$

以及最佳实施边界 $S=S(t)$ 所适合的非线性 Volterra 型积分方程.

§6.4 美式期权价格的性质

在进行数值计算方法研究以前，人们需要对美式期权价格有一个定性的了解. 与欧式期权不同，美式期权的价格除永久期权以外一般不存在显式表达式，因此有关期权性质的研究只能借助于偏微分方程理论研究. 从上一章 §5.8 的讨论可知：这需要研究偏微分方程定解问题的解对变数或参数的微商的性质. 但作为美式期权，它的价格适合的是变分不等方程式，对它不可以直接微商，为此我们引入 **惩罚函数** (penalty function) $\beta_\varepsilon(x)$，建立与变分不等方程相应的 **惩罚问题** (penalty problem). 这样通过应用抛物型方程

解的 **极值原理** (maximum principle)去证明我们的论断. 此外由于作为期权实施的收益函数 $(S-K)^+$ 或 $(K-S)^-$，它们都在 $S=K$ 时不可微，因此为了保证整个定解问题的可微性，我们同样需要对收益函数进行光滑化.

定义 6.2 函数 $\beta_\epsilon(x)$ 被称为是给定在 $(-\infty,\infty)$ 上的惩罚函数，如果

$$\beta_\epsilon(x) \in C^2_{(-\infty,\infty)},$$

$$\beta_\epsilon(x) \le 0, \tag{6.4.1}$$

$$\beta_\epsilon(0) \le -C_\epsilon, \quad (C_\epsilon \ge 0) \tag{6.4.2}$$

$$\beta'_\epsilon(x) \ge 0, \tag{6.4.3}$$

$$\beta''_\epsilon(x) \le 0, \tag{6.4.4}$$

以及

$$\lim_{\epsilon\to 0} \beta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \ge 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases} \tag{6.4.5}$$

由于在变换

$$x = \ln S, \qquad \tau = T - t$$

和

$$v(x,\tau) = V(S,t)$$

下，定解问题 (6.2.10)—(6.2.11) 转化为

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}_0 v, v - (K - e^x)^+\} = 0, & (6.4.6) \\ v(x,0) = (K - e^x)^+, & (6.4.7) \end{cases}$$

其中

$$\mathcal{L}_0 v = \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x} + rv.$$

定义 6.3 给定在 $\{x \in R, 0 \le \tau \le T\}$ 上的定解问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\epsilon(v) = \dfrac{\partial v}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \qquad\qquad + rv + \beta_\epsilon(v - \Pi_\epsilon(K - e^x)) = 0, & (6.4.8) \\ v(x,0) = \Pi_\epsilon(K - e^x), & (6.4.9) \end{cases}$$

称为是定解问题 (6.4.6)—(6.4.7) 的 **惩罚问题**. 其中

$$\Pi_\epsilon(y)=\begin{cases} y & y\geq\epsilon,\\ \nearrow & |y|\leq\epsilon,\\ 0 & y\leq-\epsilon,\end{cases} \tag{6.4.10}$$

$$\Pi_\epsilon(y)\in C^\infty(R), 1\geq\Pi_\epsilon'(y)\geq 0,$$

$$\Pi_\epsilon''(y)\geq 0, \lim_{\epsilon\to 0}\Pi_\epsilon(y)=y^+. \tag{6.4.11}$$

作为 (6.4.10),(6.4.11) 的推论，我们有

$$|\Pi_\epsilon(y)-y\Pi_\epsilon'(y)|\leq\epsilon. \tag{6.4.12}$$

设 $D_T=\{(x,t)|a<x<b,0<t\leq T\}$，其中 $-\infty\leq a<b\leq\infty$； $\partial_P D_T$ 为 D_T 的抛物边界，当 a,b 为有限时,

$$\partial_P D=\{x=a,x=b,0\leq t\leq T\}\cup\{a\leq x\leq b,t=0\};$$

当 a,b 为无穷时,

$$\partial_P D=\{x\in R,t=0\};$$

以及

$$C^{2,1}(D_T)=\left\{u(x,t)\left|u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial u}{\partial t}\in C(D_T)\right.\right\}.$$

定理 6.6(极值原理) 若 $u(x,t)\in C^{2,1}(D_T)\cap C(\bar{D}_T)$，且

$$|u(x,t)|\leq Me^{\alpha|x|^{2-\epsilon}},\qquad(\alpha,\epsilon>0)$$

在 D 内适合线性抛物方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t),$$

其中

$$a(x,t)\geq a_0>0,$$

$$c(x,t)\geq 0,$$

则当 $f(x,t)\leq 0$ 时， $u(x,t)$ 的非负的最大值只能在 $\partial_P D_T$ 上达到.

附注 对于高维抛物型方程，极值原理同样成立．它们的证明可以在一般教科书中找到．

对于惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9)，我们有以下结论（[14]）．

定理 6.7（惩罚问题的收敛性） 设 $v_\epsilon(x,t)$ 是惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9) 的解，则当 $\epsilon \to 0$ 时，在 $\overline{D}_T$ 的任意有界闭子域上，$v_\epsilon(x,t)$ 一致收敛到 Cauchy 问题 (6.4.6)—(6.4.7) 的解 $v(x,t)$．

现在我们利用定理 6.7 和极值原理（定理 6.6），研究美式期权定价的若干性质．

为确定计，我们仍然以美式看跌期权为例，给出严格证明，对于美式看涨期权的情形，可以通过美式看涨 — 看跌期权的对称关系（定理 6.2）得到．

设 $V = V(S,t) = v(x,\tau)$ 是美式看跌期权价格． $v_\epsilon(x,\tau)$ 是相应的惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9) 的解．

定理 6.8 对于美式看跌期权定价，我们有：

(1) 若 $S_1 \geq S_2$，则

$$V(S_1,t) \leq V(S_2,t); \tag{6.4.13}$$

(2) 若 $K_1 \geq K_2$，则

$$0 \leq V(S,t;K_1) - V(S,t;K_2) \leq K_1 - K_2. \tag{6.4.14}$$

证明 (6.4.13) 与 (6.4.14) 的证明是相仿的．我们只证明估计式 (6.4.14) 的右边部分：

$$V(S,t;K_1) - V(S,t;K_2) \leq K_1 - K_2. \tag{6.4.15}$$

为此作函数

$$W = K_1 - K_2 - v_1(x,\tau) + v_2(x,\tau),$$

其中 $v_i(x,\tau) = v_\epsilon(x,\tau;K_i), (i=1,2)$．

将它代入方程 (6.4.8)，得到

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + rW$$
$$- \beta_\epsilon(v_1 - \Pi_\epsilon(K_1 - e^x)) + \beta_\epsilon(v_2 - \Pi_\epsilon(K_2 - e^x))$$
$$= r(K_1 - K_2). \tag{6.4.16}$$

由于

$$\begin{aligned} &- \beta_\epsilon(v_1 - \Pi_\epsilon(K_1 - e^x)) + \beta_\epsilon(v_2 - \Pi_\epsilon(K_2 - e^x)) \\ &= - \beta_\epsilon'(\xi)\left[v_1 - v_2 - (\Pi_\epsilon(K_1 - e^x) - \Pi_\epsilon(K_2 - e^x))\right] \\ &= \beta_\epsilon'(\xi)\left\{W - (1 - \Pi_\epsilon'(\eta))(K_1 - K_2)\right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\xi = \theta_1(v_1 - \Pi_\epsilon(K_1 - e^x)) + (1 - \theta_1)(v_2 - \Pi_\epsilon(K_2 - e^x)),$$

$$\eta = \theta_2(K_1 - e^x) + (1 - \theta_2)(K_2 - e^x),$$

$$(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$$

将它代入方程 (6.4.16)，得到

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + (r + \beta_\epsilon'(\xi))W$$
$$= [r + \beta_\epsilon'(\xi)(1 - \Pi'(\eta))](K_1 - K_2). \tag{6.4.17}$$

W 的初值:

$$\begin{aligned} W|_{\tau=0} &= (K_1 - K_2) - (\Pi_\epsilon(K_1 - e^x) - \Pi_\epsilon(K_2 - e^x)) \\ &= (1 - \Pi_\epsilon'(\eta))(K_1 - K_2). \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

根据 β_ϵ， Π_ϵ 的定义 (6.4.3),(6.4.11)，得

$$r + \beta_\epsilon'(\xi) > 0,$$

$$r + \beta_\epsilon'(\xi)(1 - \Pi_\epsilon'(\eta)) > 0,$$

$$1 - \Pi_\epsilon'(\eta) \geq 0.$$

从而由 $K_1 > K_2$，对 Cauchy 问题 (6.4.17),(6.4.18) 应用极值原理，立得 $W \geq 0$，即

$$v_\epsilon(x,\tau;K_1) - v_\epsilon(x,\tau;K_2) \leq K_1 - K_2.$$

令 $\epsilon \to 0$，由定理 6.7 推得

$$V(S,t;K_1) - V(S,t;K_2) \leq K_1 - K_2.$$

至此 (6.4.15) 获证.

引理 6.1 设 $v_\epsilon(x,\tau)$ 是惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9) 的解，则

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} - v_\epsilon \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{r}. \tag{6.4.19}$$

证明 为了证明这个引理，我们需要对 β_ϵ 具体化，令

$$\beta_\epsilon(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{\epsilon}}\Pi_\epsilon(-\alpha), \tag{6.4.20}$$

其中 $\Pi_\epsilon(y)$ 的定义为 (6.4.10). 容易验证这样定义的 $\beta_\epsilon(\alpha)$ 适合条件 (6.4.1)—(6.4.4). 由 (6.4.12)， $\beta_\epsilon(\alpha)$ 适合不等式：

$$|\beta_\epsilon(\alpha) - \alpha\beta'_\epsilon(\alpha)| \leq \sqrt{\epsilon}. \tag{6.4.21}$$

事实上，根据 $\beta_\epsilon(\alpha)$ 的定义 (6.4.20)，以及估计式 (6.4.12)，我们有

$$\begin{aligned}|\beta_\epsilon(\alpha) - \alpha\beta'_\epsilon(\alpha)| &= \left|-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\Pi_\epsilon(-\alpha) - \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}\Pi'_\epsilon(-\alpha)\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left|\Pi_\epsilon(-\alpha) - (-\alpha)\Pi'_\epsilon(-\alpha)\right| \\ &\leq \sqrt{\epsilon}.\end{aligned}$$

现在回过来证明 (6.4.19). 令

$$W = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} - v_\epsilon - \frac{\sqrt{\epsilon}}{r},$$

不难验证， W 适合方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + rW \\ &\quad + \beta'_\epsilon(\alpha)\left[\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} + \Pi'_\epsilon(K - e^x)e^x\right] - \beta_\epsilon(\alpha) = -\sqrt{\epsilon},\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r+\beta_\epsilon'(\alpha))W$$

$$=-\sqrt{\epsilon}(1+\frac{1}{r}\beta_\epsilon'(\alpha))+\beta_\epsilon(\alpha)-\beta_\epsilon'(\alpha)[v_\epsilon+\Pi_\epsilon'(y)e^x].$$

其中 $\alpha=v_\epsilon-\Pi_\epsilon(y)$， $y=K-e^x$.

由于估计式 (6.4.21) 以及 (6.4.3),(6.4.10)，我们有

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r+\beta_\epsilon'(\alpha))W$$

$$=-\sqrt{\epsilon}(1+\frac{1}{r}\beta_\epsilon'(\alpha))+\beta_\epsilon(\alpha)-\alpha\beta_\epsilon'(\alpha)-\beta_\epsilon'(\alpha)\left[\Pi_\epsilon(y)+\Pi_\epsilon'(y)e^x\right]$$

$$\leq-\sqrt{\epsilon}(1+\frac{1}{r}\beta_\epsilon'(\alpha))+\sqrt{\epsilon}\leq 0; \tag{6.4.22}$$

而在 $\tau=0$ 上,

$$W(x,0)=-\Pi_\epsilon'(K-e^x)e^x-\Pi_\epsilon(K-e^x)-\frac{\sqrt{\epsilon}}{r}<0. \tag{6.4.23}$$

因此对定解问题 (6.4.22),(6.4.23) 利用极值原理，立得

$$W(x,\tau)\leq 0.$$

即

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x}-v_\epsilon\leq\frac{\sqrt{\epsilon}}{r}.$$

引理得证.

定理 6.9 对于美式看跌期权定价，我们有

(1) 若 $r_1\geq r_2$ 时，则

$$V(S,t;r_2)\geq V(S,t,r_1); \tag{6.4.24}$$

(2) 若 $q_1\geq q_2$ 时，则

$$V(S,t;q_1)\geq V(S,t,q_2). \tag{6.4.25}$$

证明 不等式 (6.4.24),(6.4.25) 的证明是相仿的，我们不妨以 (6.4.24) 为例.

为此作函数

$$W = v_2(x,\tau) - v_1(x,\tau) + \frac{(r_1 - r_2)\sqrt{\epsilon}}{r_2 r_1},$$

其中 $v_i(x,\tau) = v_\epsilon(x,\tau;r_i)(i = 1,2)$. 这里惩罚函数 $\beta_\epsilon(\alpha)$ 的定义见 (6.4.20)，将它代入 (6.4.8)，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r_2 - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + r_2 W \\
&\quad + \beta_\epsilon(v_2 - \Pi_\epsilon(K - e^x)) - \beta_\epsilon(v_1 - \Pi_\epsilon(K - e^x)) \\
&\quad = \frac{(r_1 - r_2)\sqrt{\epsilon}}{r_1} + r_2(\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1) - r_1(\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1).
\end{aligned}$$

因此由 (6.4.19) 得

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial W}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r_2 - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial W}{\partial x} + (r_2 + \beta_\epsilon'(\alpha))W \\
\qquad \geq (r_2 - r_1)\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 - \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{r_1}\right] \geq 0, \\
W(x,0) = \dfrac{(r_1 - r_2)\sqrt{\epsilon}}{r_2 r_1}.
\end{cases}$$

因此由极值原理， $W(x,\tau)$ 不能在 $\{x \in R, 0 < \tau \leq T\}$ 内取得负的最小值，故由 $W(x,0) > 0$ ，推得

$$W(x,\tau) \geq 0,$$

即

$$v_\epsilon(x,\tau;r_1) \leq v_\epsilon(x,\tau;r_2) + \frac{(r_1 - r_2)\sqrt{\epsilon}}{r_2 r_1}.$$

令 $\epsilon \to 0$ ，由定理 6.7 ，立得 (6.4.24).

引理 6.2 设 $v_\epsilon(x,\tau)$ 是惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9) 的解，则

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \tau} \geq 0. \tag{6.4.26}$$

证明 记

$$W = \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \tau}.$$

在区域 $\overline{D}_T\{x\in R,0\le\tau\le T\}$ 上，由于惩罚问题 (6.4.8)—(6.4.9) 的解 $v_\epsilon(x,\tau)$ 充分光滑，因此 W 适合定解问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial\tau}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial W}{\partial x}+rW+\beta_\epsilon'(\alpha)W=0, & (6.4.27)\\ W(x,0)=\phi(x), & (6.4.28)\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\phi(x)=\left.\frac{\partial v_\epsilon}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}&=\left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x}-rv_\epsilon-\beta_\epsilon'(\alpha)v_\epsilon\right]_{\tau=0}\\&=\frac{\sigma^2}{2}\left(\Pi_\epsilon''(y)e^{2x}-\Pi_\epsilon'(y)e^x\right)-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Pi_\epsilon'(y)e^x\\&\quad-r\Pi_\epsilon(y)-\beta'(0),\end{aligned}$$

这里

$$y=K-e^x.$$

由于 (6.4.2) 以及 (6.4.11)，故

$$\begin{aligned}\phi(x)&\ge-(r-q)\Pi_\epsilon'(y)e^x-r\Pi_\epsilon(y)+C_\epsilon\\&\ge C_\epsilon-r\left[\Pi_\epsilon(y)-y\Pi_\epsilon'(y)\right]-rK\Pi_\epsilon'(y)\\&\ge C_\epsilon-\frac{r\epsilon}{2}-rK.\end{aligned}$$

取

$$-\beta_\epsilon(0)=C_\epsilon=rK+\frac{r}{2}\epsilon,$$

从而有 $\phi(x)\ge 0$. 对定解问题 (6.4.27),(6.4.28)，利用极值原理，在 D_T 上立得

$$W(x,\tau)\ge 0,$$

即 (6.4.26) 成立.

定理 6.10 对于美式看跌期权定价，我们有

(1) 若 $t_1\ge t_2$，则

$$V(S,t_2)\ge V(S,t_1); \qquad (6.4.29)$$

(2) 若 $T_1 \geq T_2$，则当 $0 \leq t \leq T_2$ 时，

$$V(S,t;T_1) \geq V(S,t;T_2). \tag{6.4.30}$$

证明 结论 (6.4.29) 是 (6.4.26) 的直接推论．为了证明 (6.4.30)，记

$$W(x,\tau) = v_\epsilon(x,\tau;T_1) - v_\epsilon(x,\tau;T_2). \quad (\tau = T_2 - t)$$

易见在区域 $\{x \in R, 0 \leq \tau \leq T_2\}$ 上，$W(x,\tau)$ 适合定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial W}{\partial x} + (r + \beta_\epsilon'(\xi))W = 0, & (6.4.31) \\ W(x,\tau) = \phi(x), & (6.4.32) \end{cases}$$

其中

$$\phi(x) = v_\epsilon(x,0;T_1) - v_\epsilon(x,0;T_2) = v_\epsilon(x,0;T_1) - \Pi_\epsilon(K - e^x).$$

回到原来的时间变量 t

$$\begin{aligned} \phi(x) &= v_\epsilon(x,T_2;T_1) - \Pi_\epsilon(K - e^x) \\ &= v_\epsilon(x,T_2;T_1) - v_\epsilon(x,T_1;T_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

对定解问题 (6.4.31),(6.4.32)，应用极值原理，立得

$$W(x,\tau) \geq 0,$$

即

$$v_\epsilon(x,\tau;T_1) \geq v_\epsilon(x,\tau;T_2).$$

令 $\epsilon \to 0$，由定理 6.7，立得 (6.4.30).

引理 6.3 设 $v_\epsilon(x,\tau)$ 是惩罚问题 (6.4.8),(6.4.9) 的解，则

$$\frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} \geq 0. \tag{6.4.33}$$

证明 记

$$W(x,\tau) = \frac{\partial^2 v_\epsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x},$$

由于惩罚问题 (6.4.8),(6.4.9) 的解 $v_\epsilon(x,\tau)$ 在定解区域上充分光滑，因此 $W(x,\tau)$ 适合定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r-q-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial W}{\partial x} + (r+\beta_\epsilon'(\alpha))W = f(x,\tau), & (6.4.34) \\ W(x,0) = \phi(x), & (6.4.35) \end{cases}$$

其中

$$f(x,\tau) = -\beta_\epsilon''(\alpha)\left(\frac{\partial v_\epsilon}{\partial x} + \Pi_\epsilon'(y)e^x\right)^2 + \beta_\epsilon'(\alpha)\Pi_\epsilon''(y)e^{2x},$$

$$\phi(x) = \Pi''(y)e^{2x},$$

$$\alpha = v_\epsilon - \Pi_\epsilon(y),$$

$$y = K - e^x.$$

由 (6.4.3),(6.4.4) 和 (6.4.11) 得到

$$f(x,\tau) \geq 0,$$

$$\phi(x) \geq 0.$$

对定解问题 (6.4.34),(6.4.35) 利用极值原理，立得

$$W(x,\tau) \geq 0.$$

从而引理得证.

定理 6.11 若 $\sigma_1 \geq \sigma_2$，则

$$V(S,t;\sigma_1) \geq V(S,t;\sigma_2). \tag{6.4.36}$$

证明 记

$$W(S,\tau) = v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau),$$

其中 $v_i(x,\tau) = v_\epsilon(x,\tau;\sigma_i),(i=1,2)$. 易见在区域 $\overline{D}_T$ 上， $W(x,\tau)$ 适合方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r-q-\frac{\sigma_1^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + (r+\beta_\epsilon'(\xi))W \\ = &\ \frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{6.4.37}$$

和初始条件:

$$W(x,0)=0. \tag{6.4.38}$$

由 (6.4.33) 以及定理的假设，方程 (6.4.37) 的右端为非负. 从而对定解问题 (6.4.37),(6.4.38) 利用极值原理，立得

$$W(x,\tau)\geq 0,$$

即

$$v_c(x,\tau;\sigma_1)\geq v_c(x,\tau;\sigma_2).$$

令 $\epsilon\to 0$ ，由定理 6.7 立得 (6.4.36).

由美式看涨 - 看跌期权的对称关系

$$V_c(S,t;r,q)=\frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S},t;q,r), \tag{6.4.39}$$

我们可以把关于美式看跌期权的价格的性质（定理 6.8—6.11 ）推广到美式看涨期权的情形.

为了对表达式 (6.4.39) 进行运算，记点 P,P_0 和 Q:

$$P=(S,t;r,q,T,\sigma),$$

$$P_0=(S_0,t_0;r_0,q_0,T_0,\sigma_0),$$

$$Q=(\frac{K^2}{S},t;q,r,T,\sigma).$$

那么 (6.4.39) 可以改写为

$$V_c(P)=\left.\frac{S}{K}V_p(P_0)\right|_{P_0=Q},$$

从而我们有（假设相应的微商有意义）：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_c}{\partial S} &= \frac{1}{K}V_p(Q) - \frac{K}{S}\frac{\partial V_p}{\partial S_0}\bigg|_{P_0=Q} \geq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial K} &= -\frac{S}{K^2}V_p(Q) + 2\frac{\partial V_p}{\partial S_0}\bigg|_{P_0=Q} \leq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial r} &= \frac{S}{K}\frac{\partial V_p}{\partial q_0}\bigg|_{P_0=Q} \geq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial q} &= \frac{S}{K}\frac{\partial V_p}{\partial r_0}\bigg|_{P_0=Q} \leq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial t} &= \frac{S}{K}\frac{\partial V_p}{\partial t}(Q) \leq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial T} &= \frac{S}{K}\frac{\partial V_p}{\partial T}(Q) \geq 0,\\
\frac{\partial V_c}{\partial \sigma} &= \frac{S}{K}\frac{\partial V_p}{\partial \sigma}(Q) \geq 0.
\end{aligned}
$$

综上所述，对于美式期权的价格变化，我们有以下表格：（这里“+”表示期权价格是变数的增函数“-”表示期权价格是变数的减函数）

变数	看涨期权	看跌期权
S(股价)	+	-
K(敲定价)	-	+
r(无风险利率)	+	-
q(红利率)	-	+
σ(波动率)	+	+
T(有效期)	+	+
t(时间)	-	

在这里我们比较一下美式期权价格与欧式期权价格对各个变数依赖关系，可以得到这样的结论：

(1) 美式与欧式期权价格对于 S, K, r, q, σ 的依赖关系是相同的.

(2) 美式期权价格对于期权有效期 T 以及时间 t 的依赖关系是确定的，这一点与欧式期权价格是不同的. 从金融意义上来说，因为对于美式期权，不论是看跌期权还是看涨期权，由于有效期长的期权包含了有效期短的期权

的所有实施机会，因此它有着更多的获利机会，从而人们为此必须花出更大的代价（期权金）. 此外，对于时间而言，由于 t 增加，$T-t$ 减小，（距离截止时间 $t=T$ 更接近），期权通过提前实施的获利机会就相对减小，因此期权价格就变小了.

§6.5 最佳实施边界

由于美式期权合约中具有提前实施的条款，因此最佳实施边界的确定对于美式期权具有特殊的意义. 但是它作为一条自由边界，它的确定与美式期权价格的确定是互相关联的，所以一般来说不可能给出它的明显表达式.

在这一节我们将依据偏微分方程理论对最佳实施边界 $S=S(t)$ 作一些定性的分析，这里包括 $S(T)$ 的位置，$S(t)$ 的单调性，$S(t)$ 的上下界以及 $S(t)$ 的凸性等，并在此基础上，给出 $S(t)$ 在 $t=T$ 附近的渐近表达式. 所有这些结果不仅有助于我们增加对最佳实施边界的认识，而且将对美式期权定价的数值计算产生重要的影响.

首先，我们求最佳实施边界 $S=S(t)$ 在终止期 $t=T$ 的位置.

定理 6.12 设 $\Gamma:\{S=S(t),(0\le t\le T)\}$ 是支付红利的美式期权的最佳实施边界，则

$$S(T)=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{rK}{q},K\right\}, & (\text{看跌期权}) \quad (6.5.1)\\ \max\left\{\dfrac{rK}{q},K\right\}. & (\text{看涨期权}) \quad (6.5.2)\end{cases}$$

证明 首先考虑美式看跌期权.

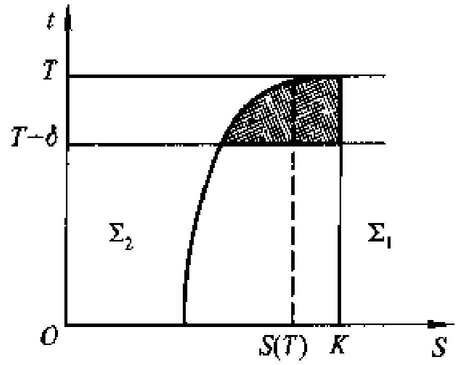
(A) 若

$$q\le r,\tag{6.5.3}$$

欲证 $S(T)=K$.

因为我们已经指出：由于 $V>0$，因此 $S(T)\le K$. 假如 $S(T)\ne K$，则 $S(T)<K$，那么在期权的继续持有区域 Σ_1 中存在区域 $D_\delta:\{S(t)<S<K,T-\delta\le t\le T\}$，（$\delta$ 充分小），使得

$$\mathcal{L}V=0,$$



故在 $t=T$， $S(T)<S<K$ 内，有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} &= -\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}+(r-q)S\frac{dV}{dS}-rV\right]_{t=T}\\ &= -\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2(K-S)}{dS^2}+(r-q)S\frac{d(K-S)}{dS}-r(K-S)\right]\\ &= rK-qS.\end{aligned}$$

由 (6.5.3)，因此当 $S<K$ 时，有

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T}>0,$$

而 $V(S,t)=(K-S)$，因此在 D_δ 内，有

$$V(S,t)<(K-S),$$

这与 $V\geq(K-S)^+$ 的性质相矛盾，故 $S(T)=K$.

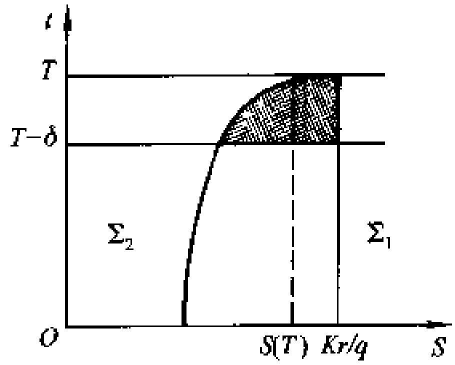
(B) 若

$$r<q. \tag{6.5.4}$$

欲证 $S(T)=\frac{rK}{q}$. 假如不然,

(a) 若 $S(T)<\frac{rK}{q}$. 由于 $\frac{r}{q}K<K$，那么在 Σ_1 中存在区域 $D_\delta^{(1)}$: $\left\{S(T)<S<\frac{rK}{q},T-\delta\leq t\leq T\right\}$，使得

$$\mathcal{L}V=0.$$



因此与 (A) 相仿，在 $D_\delta^{(1)}$ 上，我们有

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = rK - qS > 0$$

和

$$V(S,t) < K - S.$$

这与美式期权价格 $V(S,t) \geq (K-S)^+$ 相矛盾.

(b) 若 $S(T) > \frac{r}{q}K$，由于 $S(T) \geq K$，以及 (6.5.4)，因此在期权的终止持有区域 Σ_2 中存在区域

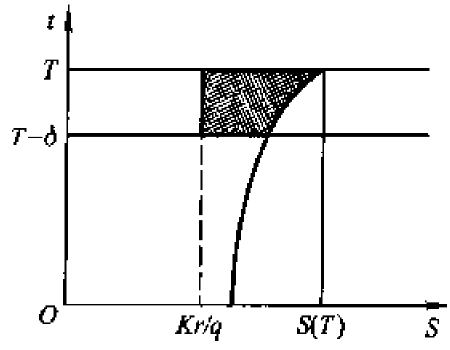
$$D_\delta^{(2)} : \left\{ \frac{r}{q}K < S < S(T), T-\delta \leq t \leq T \right\},$$

使得在 $D_\delta^{(2)}$ 中，

$$V = K - S,$$

因此在 $D_\delta^{(2)}$ 中有

$$\mathcal{L}V = rK - qS > 0.$$



这与方程 (6.1.55) 相矛盾. 因此必须有 $S(T)=\frac{rK}{q}$.

综合 (A) 与 (B) 的结论, (6.5.1) 获证. 同理可以证明 (6.5.2).

附注 在以上证明中, 我们先验地假定了以下两点:

(1) $S=S(t)$ 是连续的;

(2) 除了 $S=S(t)$, $\frac{\partial V}{\partial t},\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ 都连续直到 $t=T$.

这两点的证明我们都省略了 (见 [14]).

附注 基于美式看跌期权 $S(T)$ 的位置 (6.5.1) , 我们可以通过美式看涨 — 看跌期权价格的对称关系 (定理 6.2) 直接推出定理 6.12 中美式看涨期权的最佳实施边界在终止期的位置 (6.5.2).

事实上, 由 (6.1.34) 知

$$
\begin{aligned}
S_c(T;r,q) &= \frac{K^2}{S_p(T;q,r)}=\frac{K^2}{\min\left\{K,\frac{qK}{r}\right\}}\\
&=\begin{cases} K, & r<q,\\ \frac{r}{q}K, & r>q\end{cases}\\
&=\max(K,\frac{r}{q}K).
\end{aligned}
$$

推论 对于美式看涨期权, 若 $q<r$, 则

$$S(T)=\frac{r}{q}K.$$

如果 $q\to 0$, 则 $S(T)\to\infty$.

这样, 我们通过美式期权的偏微分方程模型, 再次证明了: 对于不考虑红利的美式看涨期权, 提前实施是没有意义的.

定理 6.13 设 $\Gamma:\{S=S(t),(0\le t\le T)\}$ 是美式期权的最佳实施边界, 则

$$
\begin{cases} S_c(t)\text{单调非减}, & \text{(看跌期权)}\\ S_p(t)\text{单调非增}, & \text{(看涨期权)}\end{cases}
$$

且对看跌期权有估计

$$S_{p,\infty} \le S_p(t) \le \min\left\{K, \frac{rK}{q}\right\}, \tag{6.5.5}$$

以及对看涨期权有估计

$$\max\left\{K, \frac{rK}{q}\right\} \le S_c(t) \le S_{c,\infty}. \tag{6.5.6}$$

这里 $S_{p,\infty}$ 与 $S_{c,\infty}$ 分别是相应的永久美式看跌与看涨期权的最佳实施边界，它们有显示表达式 (6.1.27),(6.1.46) 以及 (6.1.25).

证明　根据美式看涨 — 看跌期权定价的对称关系式，只需对美式看跌期权加以证明.

事实上，假如 $S(t)$ 不是单调非减，（为书写简单计，略去下标 p，即把 $S_p(t), S_{p,\infty}$ 分别记作 $S(t)$ 和 S_∞，）即必存在 $0 \le t_1 \le t_2 \le T$，使得

$$S(t_1) > S(t_2).$$

因此在 $t = t_2$ 时刻，

$$\{0 \le S \le S(t_2), t = t_2\}\text{属于终止持有区域}\Sigma_2,$$

$$\{S(t_2) \le S < \infty), t = t_2\}\text{属于继续持有区域}\Sigma_1.$$

特别有 $(S(t_1), t_2) \in \Sigma_1$，即

$$V(S(t_1), t_2) > (K - S(t_1))^+,$$

但是由于 $(S(t_1), t_1) \in \Gamma$，即

$$V(S(t_1), t_1) = (K - S(t_1))^+,$$

从而推得：当 $t_2 > t_1$ 时

$$V(S(t_1), t_2) > V(S(t_1), t_1).$$

这与 (6.4.29) 相矛盾. 从而我们证明了：美式看跌期权最佳实施边界 $S = S(t)$ 必是 t 的单调非减函数.

由 $S(t)$ 的单调性，当 $0 \le t \le T$ 时，有

$$S(t) \le S(T) = \min\left\{K, \frac{rK}{q}\right\}. \tag{6.5.7}$$

现证明 $S(t)$ 的下界.

由于美式期权定价对有效期 T 是单调递增函数（见 (6.4.30) ），因此从金融上讲：所有具有同一敲定价格 K 的美式期权中，最贵的是永久美式期权，因为它包含了所有美式期权的实施机会，即

$$V(S,t;T) \le V(S;\infty), \tag{6.5.8}$$

其中 $V(\cdot;T)$ 表示有效期为 $T(0<T\le\infty)$ 的美式期权价格.

估计式 (6.5.8) ，我们亦可以通过引进惩罚因子的办法给以严格的数学证明. 读者可以作为习题，自己完成.

设 S_∞ 是永久美式看跌期权的最佳实施边界，因此当 $0\le S\le S_\infty$ 时，有

$$V(S,t;T) \le V(S;\infty) = (K-S)^+.$$

根据无套利原理，

$$V(S,t;T) \ge (K-S)^+,$$

故当 $0\le S\le S_\infty$ 时

$$V(S,t;T) = (K-S)^+.$$

这表示区域 $\{0\le S\le S_\infty, 0\le t\le T\}\subset\Sigma_2$(终止持有区域) ，故对所有 $t\in[0,T]$ ，有

$$S(t) > S_\infty. \tag{6.5.9}$$

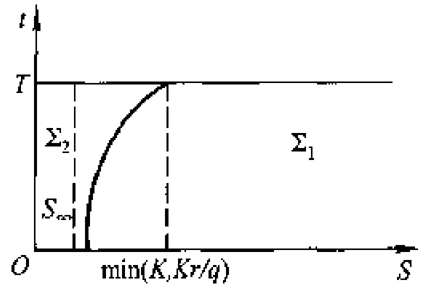
至此定理获证.

附注 当 $q=0$ 时，美式看跌期权的最佳实施边界 $\Gamma: S=S(t)$ 是一条凸曲线，即 $S''(t)\ge 0$（ [8] ）. 因为这个结论的证明并不初等，在这里我们就不证了.

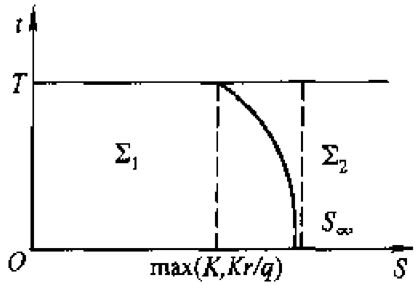
从定理 6.12 ，定理 6.13 以及这个附注，虽然我们至今仍然无法得到最佳实施边界的表达式，但是对于它的图像，我们有了一个清晰的了解.

对于美式看跌期权 $(q \geq 0)$

（对于 $q=0$，凸性已获证明）



对于美式看涨期权 $(q > 0)$



现在我们要进一步求出最佳实施边界的近似表达式，即定量地给出最佳实施边界的位置.

(A)　$q=0$ **的情形.**

定理 6.14　当 $0 < T-t \ll 1$ 时，*对于美式看跌期权的最佳实施边界 $S=S(t)$ 存在如下的渐近表达式*

$$\frac{K-S(t)}{K} \approx \sigma\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}. \tag{6.5.10}$$

这个定理的证明虽然比较长，但证明思想比较简单.

首先定义一根等值线 $S=\hat{S}(t)$，它是以下函数方程的解：

$$V_E(\hat{S}(t),t) = K - \hat{S}(t), \tag{6.5.11}$$

即 $S=\hat{S}(t)$ 是欧式看跌期权价格等于实施期权的收益的等值曲线. 由于

$$\frac{\partial V_E}{\partial S} = -\left[1 - N(\hat{d}_1)\right],$$

故

$$\frac{\partial}{\partial S}[V_E - (K-S)] = N(\hat{d}_1) > 0$$

因此由隐函数存在定理，函数方程 (6.5.11) 存在唯一解 $S = \hat{S}(t)$ ，它属于 $C^{\infty}_{[0,T)}$ ，且 $\hat{S}(T) = K$.

引理 6.4　当 $0 \leq t \leq T$ 时，

$$0 \leq \hat{S}(t) - S(t) \leq C(T-t)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.5.12}$$

在证明这个引理以前，我们先分析一下这个引理的意义．事实上，由 (6.5.12) ，

$$\begin{aligned}\frac{K - S(t)}{K} &= \frac{K - \hat{S}(t)}{K} + \frac{\hat{S}(t) - S(t)}{K} \\ &\leq \frac{K - \hat{S}(t)}{K} + \frac{C}{K}(T-t)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此为了证明 (6.5.10) ，渐近表达式右端的估计式主要来自于 $\frac{K - \hat{S}(t)}{K}$ ，而 $\hat{S}(t)$ 是由方程 (6.5.12) 确定的已知函数，因此就把定理 6.14 的证明转化为一个比较初等的微积分问题．

引理 6.4 的证明　由 (6.3.16) (其中 $q = 0$) 知：在区域 $\Sigma : \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t < T\}$ 上

$$V(S,t) > V_E(S,t),$$

故在曲线 $S = \hat{S}(t)$ 上，

$$V(\hat{S}(t),t) > V_E(\hat{S}(t),t) = K - \hat{S}(t),$$

即 $S = \hat{S}(t)$ 属于继续持有区域 Σ_1 ，因此

$$S(t) < \hat{S}(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

由 Taylor 公式：

$$\begin{aligned}V(\hat{S}(t),t) &= V(S(t),t) + \frac{\partial V(S(t),t)}{\partial S}(\hat{S}(t) - S(t)) \\ &+ \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|_{S=\xi}(\hat{S}(t) - S(t))^2,\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (S(t), \hat{S}(t))$. 由自由边界条件 (6.2.3),(6.2.4)，得

$$\begin{aligned} V(\hat{S}(t), t) &= K - S(t) - (\hat{S}(t) - S(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\bigg|_{S=\xi}(\hat{S}(t) - S(t))^2 \\ &= K - \hat{S}(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\bigg|_{S=\xi}(\hat{S}(t) - S(t))^2. \end{aligned}$$

故由 (6.5.11),(6.4.29)，

$$\begin{aligned} V(\hat{S}(t), t) - V_E(\hat{S}(t), t) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\bigg|_{S=\xi}(\hat{S}(t) - S(t))^2 \\ &= \frac{[\hat{S}(t), t) - S(t)]^2}{\sigma^2\xi^2}\left[rV - \frac{\partial V}{\partial t} - rS\frac{\partial V}{\partial S}\right]_{S=\xi} \\ &\geq -[\hat{S}(t) - S(t)]^2]\frac{r}{\sigma^2\xi}\frac{\partial V}{\partial S}\bigg|_{S=\xi}. \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

在 Σ_1 上，易知 $u = \frac{\partial V}{\partial S}$ 适合微分方程和边界条件:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 S} + (r + \sigma^2)S\dfrac{\partial u}{\partial S} = 0, & (6.5.14) \\ u|_{t=T} = 0, & (6.5.15) \\ u|_{S=S(t)} = -1. & (6.5.16) \end{cases}$$

令 $u_E = \frac{\partial V_E}{\partial S}$，则 $u_E(S, t)$ 在 Σ_1 上适合同样的方程 (6.5.14) 和终端边界条件 (6.5.15)，但在 $S = S(t)$ 上适合边界条件

$$u_E|_{S=S(t)} = \frac{\partial V_E(S(t), t)}{\partial S}.$$

由于

$$\frac{\partial V_E(S(t), t)}{\partial S} \geq -1,$$

故在区域 Σ_1 上，对函数 $u_E - u$ 应用极值原理，立得

$$u_E - u \geq 0,$$

即在 Σ_1 上，

$$\frac{\partial V}{\partial S} \leq \frac{\partial V_E}{\partial S}.$$

将它代入 (6.5.13)，立得

$$\begin{aligned}
V(\hat{S}(t),t) - V_E(\hat{S}(t),t) &\geq -[\hat{S}(t) - S(t)]^2 \frac{r}{\sigma^2\xi} \frac{\partial V_E}{\partial S}\bigg|_{S=\xi} \\
&= [\hat{S}(t) - S(t)]^2 \frac{r}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} \int_{d_1(\xi)}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha,
\end{aligned} \tag{6.5.17}$$

其中

$$d_1(\xi) = \frac{\ln\frac{\xi}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

由于 $\xi \in (S(t), \hat{S}(t))$，故 $\xi < K$，即

$$d_1(\xi) \leq \frac{1}{\sigma}(r + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-t}.$$

因此，当 $0 < T-t \ll 1$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1(\xi)}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{1}{4}.$$

将它代入 (6.5.17)，并考虑到表达式 (6.3.16)，立得

$$\begin{aligned}
0 &\leq \hat{S}(t) - S(t) \\
&\leq 2\sigma\sqrt{\frac{K}{r}}[V(\hat{S}(t),t) - V_E(\hat{S}(t),t)]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(T-t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

从而引理获证.

为了证明：当 $0 < T-t \ll 1$ 时，

$$\frac{K - \hat{S}(t)}{K} \approx \sigma\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|} \tag{6.5.18}$$

成立，我们回顾一下 $\hat{S}(t)$ 所适合的函数方程 (6.5.11). 由 $V_E(S,t)$ 的表达式 (Black-Scholes 公式)，(6.5.11) 可表示为

$$K - \hat{S}(t) = Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - \hat{S}(t)(1 - N(d_1)),$$

即

$$e^{-r(T-t)} - 1 = e^{\ln\frac{\hat{S}(t)}{K}+r(T-t)}N(d_1) - N(d_2), \tag{6.5.19}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{\hat{S}(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{\hat{S}(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

令

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{\hat{S}(t)}{K},$$

那么 (6.5.19) 可改写为

$$\begin{aligned}1 - e^{r(T-t)} = {} & N(\hat{y}(t) + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})\sqrt{T-t}) \\ & - e^{\sigma\hat{y}(t)\sqrt{T-t}+r(T-t)}N(\hat{y}(t) + (\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{T-t}).\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

由于 $\hat{S}(t) < K$，因此

$$\begin{aligned}0 \geq \sigma\sqrt{T-t}\hat{y}(t) &= \ln\frac{\hat{S}(t)}{K} \\ &= \ln\left[1 - \frac{K - \hat{S}(t)}{K}\right] \\ &= -\frac{K - \hat{S}(t)}{K} + O(|K - \hat{S}(t)|^2).\end{aligned}$$

因此，为了证明 (6.5.18)，只需证明：当 $0 < T - t \ll 1$ 时，对于适合方程 (6.5.20) 的解 $\hat{y}(t)$，有渐近展开

$$\hat{y}(t) \approx -\sqrt{|\ln(T-t)|}. \tag{6.5.21}$$

为此我们证明以下引理.

引理 6.5 设 $\tau = T - t$，则

$$\lim_{\tau \to 0} \hat{y}(\tau) = -\infty. \tag{6.5.22}$$

证明 为讨论简单计，无妨假设

$$\lim_{\tau \to 0} \hat{y}(\tau) = \beta.$$

（一般来说，我们可以考虑它的上极限.）由于方程 (6.5.20) 可改写为

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}(1 - e^{r\tau}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}}^{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}(1 - e^{r\tau+\sigma\sqrt{\tau}\hat{y}}) \int_{-\infty}^{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

令 $\tau \to 0$，立得

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} + \sigma\beta N(\beta) = 0.$$

容易看出，上述方程只有一个零点：$\beta = -\infty$，引理获证.

引理 6.6 设 $\tau = T - t$，则

$$\lim_{\tau \to 0} \sqrt{\tau}\hat{y}(\tau) = 0. \tag{6.5.23}$$

证明 与引理 6.5 证明相仿，无妨假设

$$\lim_{\tau \to 0} \sqrt{\tau}\hat{y}(\tau) = \theta \le 0,$$

（一般来说，我们可以考虑它的下极限.）由于

$$N(\hat{y}(t) + (\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\tau}(\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau})} e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} H(-\xi) e^{-\frac{\left[\xi-(\sqrt{\tau}\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\tau)\right]^2}{2\tau}} d\xi$$

$$= u(\sqrt{\tau}\hat{y} + (\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2})\tau, \tau).$$

这里 $u(x,\tau)$ 是下述热传导方程 Cauchy 问题的解

$$\begin{cases} u_\tau = \frac{1}{2}u_{xx}, \\ u|_{\tau=0} = H(-x). \end{cases}$$

其中 $H(x)$ 是 Heaviside 函数. 因此方程 (6.5.20) 可改写为

$$\begin{aligned} 1-e^{r\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}}^{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}(1-e^{r\tau+\sigma\sqrt{\tau}y})\int_{-\infty}^{\sqrt{\tau}(\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\tau)} e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}}^{\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2})\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega \\ &\quad + (1-e^{r\tau+\sigma\sqrt{\tau}\hat{y}})u(\sqrt{\tau}\hat{y}+(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2})\tau,\tau). \end{aligned}$$

令 $\tau\to 0$ ，若 $\theta<0$ ，则由引理 6.5 ，我们有

$$(1-e^{\sigma\theta})H(-\theta)=0,$$

故有矛盾. 因此必有 $\theta=0$ ，引理获证.

现在回过来证明渐近表达式 (6.5.21).

引理 6.7 当 $0<T-t\ll 1$ 时,

$$\hat{y}(t)\approx -\sqrt{|\ln(T-t)|}. \tag{6.5.24}$$

证明 由于

$$\begin{aligned} &N(\hat{y}(t)+(\frac{r}{\sigma}\pm\frac{\sigma}{2})\sqrt{T-t}) \\ &= N(\hat{y})+N'(\hat{y})(\frac{r}{\sigma}\pm\frac{\sigma}{2})\sqrt{T-t}+R_\pm, \end{aligned} \tag{6.5.25}$$

其中

$$R_\pm=\frac{1}{2}N''(\hat{y}+\theta_\pm\sqrt{T-t})(\frac{r}{\sigma}\pm\frac{\sigma}{2})^2(T-t),$$

这里

$$|\theta_\pm| \le \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}.$$

故

$$|R_\pm| \le C(T-t) \max_{|\theta|\le \frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}} N''(\hat{y}+\theta\sqrt{T-t})$$

$$= C(T-t) \max_{|\theta|\le \frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}} |\hat{y}+\theta\sqrt{T-t}|e^{-\frac{|\hat{y}+\theta\sqrt{T-t}|^2}{2}}.$$

由于 (6.5.22)，故

$$|R_\pm| = o(T-t). \tag{6.5.26}$$

把 (6.5.25),(6.5.26) 代入 (6.5.20)，得到

$$(1-e^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}+r(T-t)})N(\hat{y}) - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}(1+e^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}+r(T-t)})N'(\hat{y})$$

$$= -r(T-t) + o(T-t). \tag{6.5.27}$$

由于 $N(x)$ 在 $x=-\infty$ 处的渐近展开式为

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+O(\frac{1}{x^5})\right], \tag{6.5.28}$$

故由引理 6.6，因此

$$1-e^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}+r(T-t)} = -(\sigma\sqrt{T-t}\hat{y} + \frac{1}{2}\sigma(T-t)\hat{y}^2$$

$$+ O((T-t)+\sqrt{T-t}|\hat{y}|^3). \tag{6.5.29}$$

把 (6.5.28),(6.5.29) 代入 (6.5.27)，忽略 $T-t$ 的高阶小项，得到

$$-e^{-\frac{\hat{y}^2}{2}}\left[1+O\left(\frac{1}{\hat{y}^2}+\frac{1}{2}\sqrt{T-t}\hat{y}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}r\sqrt{T-t}+o(\sqrt{T-t}),$$

即

$$e^{-\frac{\hat{y}^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}r\sqrt{T-t}+o(\sqrt{T-t}).$$

从而有

$$-\frac{\hat{y}^2}{2} \approx \frac{1}{2}\ln|T-t|,$$

即

$$\hat{y} \approx -\sqrt{|\ln(T-t)|}.$$

引理至此获证.

由定义

$$\hat{y} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \frac{\hat{S}(t)}{K},$$

故

$$\frac{K-\hat{S}(t)}{K} \approx \sigma\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}.$$

从而由 (6.5.12)，我们证明了定理 6.14 成立.

(B) $q > r$ **的情形.**

当 $q > r$ 时

$$S(T) = \frac{Kr}{q}. \tag{6.5.30}$$

对此我们对最佳实施边界 $S = S(t)$ 证明以下的渐近展开式（[12]）.

定理 6.15 设 $S = S(t)$ 是美式看跌期权的最佳实施边界，$q > r$，那么当 $0 < T-t \ll 1$ 时，

$$\frac{\frac{rK}{q} - S(t)}{\frac{rK}{q}} \approx \alpha\sqrt{T-t}, \tag{6.5.31}$$

其中 α 是下面超越方程的根，

$$\alpha^3 e^{\frac{\alpha^2}{4}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{S^2}{4}} dS = 2(2-\alpha^2). \tag{6.5.32}$$

证明 在 Σ_1（继续持有区域）上，美式看跌期权定价适合自由边界问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (\Sigma_1) \\ V(S(t),t) = K - S(t), & (0 \le t \le T) \\ V_S(S(t),t) = -1, & (0 \le t \le T) \\ V(S,T) = (K-S)^+, & (\frac{rK}{q} \le S < \infty) \\ S(T) = \dfrac{rK}{q}. \end{cases}$$

其中 $\Sigma_1 = \{(S,t)|S(t) \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$. 令

$$x = \ln \frac{S}{K}, \tag{6.5.34}$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t), \tag{6.5.35}$$

$$p = \frac{1}{K}(K-S-V), \tag{6.5.36}$$

$$x(\tau) = \ln \frac{S(t)}{K}, \tag{6.5.37}$$

$$x(0) = \ln \frac{r}{q}. \tag{6.5.38}$$

从而新的未知函数 $\{p(x,\tau), x(\tau)\}$ 适合定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial^2 x} + (k'-1)\dfrac{\partial p}{\partial x} - kp + f(x), & (\hat{\Sigma}_1) \\ p(x(\tau),\tau) = 0, & (0 \leq \tau \leq \hat{T}) \\ p_x(x(\tau),\tau) = 0, & (0 \leq \tau \leq \hat{T}) \\ p(x,0) = -(e^x-1)^+, & (x^* \leq x < \infty) \\ x(0) = x^*, \end{cases}$$

其中 $\hat{\Sigma}_1 = \{(x,\tau)|x(\tau) \leq x < \infty, 0 \leq \tau \leq \hat{T}\}$,

$$\hat{T} = \frac{\sigma^2}{2}T, x^* = \ln \frac{r}{q}, \tag{6.5.39}$$

$$f(x) = (k'-k)e^x + k, \tag{6.5.40}$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2}, k' = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}. \tag{6.5.41}$$

为了得到 $x(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 附近的渐近展开式,我们观察一下解 $\{p(x,\tau), x(\tau)\}$ 在点 $(x^*, 0)$ 附近的性态.

由于 $p(x,\tau)$ 与 $p_x(x,\tau)$ 在 $(x^*,0)$ 附近是连续的，且在 $(x^*,0)$ 点，$p - p_x = 0$ ，故由 (6.5.40),(6.5.41)，在 $x = x^*$ 附近 $f(x)$ 有渐近展开式:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + f'(x^*)(x-x^*) + O(|x-x^*|^2) \\ &= \left[(k'-k)e^{x^*} + k\right] + (k'-k)e^{x^*}(x-x^*) + O(|x-x^*|^2) \\ &\approx -k(x-x^*). \end{aligned}$$

在 $x=x^*$ 点上，由于 $q>r$，故

$$p(x^*,0)=-\left(e^{x^*}-1\right)^+=-\left(\frac{r}{q}-1\right)^+=0.$$

从而在 $x=x^*$ 附近，存在一个邻域，使得

$$p(x,0)=0.$$

因此在 $x=x^*$ 附近，如略去 $|x-x^*|$ 的高阶小量，定解问题可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \tau}=\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}-k(x-x^*), & (x(\tau)\le x<\infty,\tau>0) \quad (6.5.42)\\ p(x(\tau),\tau)=0, & (\tau\ge 0) \quad (6.5.43)\\ p_x(x(\tau),\tau)=0, & (\tau\ge 0) \quad (6.5.44)\\ p(x,0)=0, & (x^*\le x<\infty) \quad (6.5.45)\\ x(0)=x^*. \end{cases}$$

从量纲分析理论知，这个定解问题有相似解:

$$p(x,\tau)=\tau^{\frac{3}{2}}W(\xi), \tag{6.5.46}$$

$$x(\tau)=x^*-\alpha\sqrt{\tau}, \tag{6.5.47}$$

其中

$$\xi=\frac{x^*-x}{\sqrt{\tau}}. \tag{6.5.48}$$

通过直接计算，

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{3}{2}\tau^{\frac{1}{2}}W(\xi)-\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial \xi}(x^*-x),$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\tau^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}.$$

代入方程 (6.5.42)，得到

$$\frac{3}{2}\tau^{\frac{1}{2}}W-\frac{x^*-x}{2}\frac{\partial W}{\partial \xi}=\tau^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}-k(x^*-x).$$

两边同乘 $\tau^{-\frac{1}{2}}$，并注意到 (6.5.48)，立得 $\{W(\xi),\alpha\}$ 适合的常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \xi}-\dfrac{3}{2}W=-k\xi \quad (-\infty<\xi<\alpha), & (6.5.49)\\ W(\alpha)=0, & (6.5.50)\\ W'(\alpha)=0. & (6.5.51)\end{cases}$$

我们需要在 $\xi\to-\infty$ 补充一个 W 的渐近条件. 由于 $\xi\to-\infty$ 相当于 $\tau\to 0, x\neq x^*$，因此由 (6.5.45),(6.5.46)，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to-\infty}[W(\xi)-k\xi] &= \lim_{\tau\to 0,x\neq x^*}\left[\frac{p(x,\tau)}{\tau^{3/2}}-k\frac{x^*-x}{\sqrt{\tau}}\right]\\ &= \lim_{\tau\to 0,x\neq x^*}\left[\frac{p(x,\tau)-p(x,0)}{\tau^{3/2}}-k\frac{x^*-x}{\sqrt{\tau}}\right]\\ &= \lim_{\tau\to 0,x\neq x^*}\tau^{-1/2}\left[\int_0^1 p_\tau(x,\theta\tau)d\theta-k(x^*-x)\right]\\ &= \lim_{\tau\to 0,x\neq x^*}\tau^{-1/2}\int_0^1 p_{xx}(x,\theta\tau)d\theta.\end{aligned}$$

由于当 $x>x^*$ 时，$p(x,\tau)\equiv 0$，因此由偏微分方程理论知道：当 $x>x^*$ 时，$p(x,\tau)$ 作为定解问题 (6.5.42)—(6.5.45) 的解，$p_{xx}(x,0)=p_{xxt}(x,0)=0$，因此上述等式右端的极限为 0，故当 $\xi\to-\infty$ 时，

$$W\sim k\xi. \tag{6.5.52}$$

从而我们在变换 (6.5.46)—(6.5.48) 下，自由边界问题 (6.5.42)—(6.5.45) 被转化为二阶常微分方程自由边界问题 (6.5.49)—(6.5.52).

现在求 $\{W(\xi),\alpha\}$，使它适合自由边界问题 (6.5.49)—(6.5.52).

非齐次常微分方程 (6.5.49) 有一个特解:

$$W=k\xi,$$

因此它的通解可表为

$$\begin{aligned}W(\xi) &= k\xi+A(\xi^3+6\xi)\\ &\quad+B\left[(\xi^2+4)e^{-\frac{\xi^2}{4}}+\frac{1}{2}(\xi^3+6\xi)\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{S^2}{4}}dS\right].\end{aligned}$$

$$(6.5.53)$$

由边界条件 (6.5.52)，

$$A = 0, \tag{6.5.54}$$

由边界条件 (6.5.50),(6.5.51)，得到

$$0 = k\alpha + BR(\alpha),$$

$$0 = k + BR'(\alpha),$$

即

$$B[R(\alpha) - \alpha R'(\alpha)] = 0,$$

其中

$$R(\alpha) = (\xi^2 + 4)e^{-\frac{\xi^2}{4}} + \frac{1}{2}(\xi^3 + 6\xi)\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{S^2}{4}} dS.$$

取 α 是方程 $R(\alpha) - \alpha R'(\alpha) = 0$ 的根，即 α 适合方程 (6.5.32). 取

$$B = \frac{-k\alpha}{R(\alpha)}, \tag{6.5.55}$$

把 (6.5.54),(6.5.55) 代入 (6.5.53)，得到

$$W(\xi) = k\xi - k\alpha\frac{R(\xi)}{R(\alpha)}.$$

把它代入 (6.5.46),(6.5.47)，得 $p(x,\tau)$ 在 $(x^*,0)$ 附近的渐近展开式：

$$p(x,\tau) = k\tau^{\frac{3}{2}}\left[\xi - \alpha\frac{1}{R(\alpha)}R(\frac{x^* - x}{\sqrt{\tau}})\right]$$

以及

$$x(\tau) = x^* - \alpha\sqrt{\tau}.$$

再通过变换 (6.5.34)—(6.5.38)，我们即得到 $V(S,t)$ 和 $S(t)$ 在 $(\frac{rK}{q},T)$ 附近的渐近展开式，定理至此证完.

附注 通过美式看涨 – 看跌期权的对称关系，我们立得当 $q < r$ 时，美式看涨期权最佳实施边界在 $t = T$ 附近的表达式

$$\frac{S(t) - \frac{rK}{q}}{\frac{rK}{q}} = \alpha\sqrt{T - t},$$

其中 α 仍是超越方程 (6.5.32) 的根.

附注 通过数值计算，可得方程 (6.5.32) 的根 α 的近似值

$$\alpha \approx 0.9034\cdots$$

§6.6 数值方法 (I)—— 差分方法

美式期权定价是一个自由边界问题. 除了永久美式期权以外，我们一般不可能把它的价格用一个显示表达式来表示. 因此数值方法对于美式期权定价就显得尤为重要. 在这两节我们将重点介绍差分法和切片法，前者是基于变分不等方程 (6.2.7)—(6.2.9) 的离散化，后者是基于自由边界问题 (6.2.2)—(6.2.6) 的离散化. 为明确起见，以下我们只考虑不计红利的美式看跌期权的情形. 其它情形可以相仿得到.

(A) **显式差分格式**

对给定在 $\Sigma : \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上的变分不等方程 (6.2.7)—(6.2.9)，作变换

$$x = \ln \frac{S}{K} \tag{6.6.1}$$

和

$$v(x,t) = KV(S,t), \tag{6.6.2}$$

从而定解问题可转化为

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}_0 v, v - (1-e^x)^+\} = 0, \quad (x \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T) & (6.6.3) \\ v(x,T) = (1-e^x)^+, \quad (x \in \mathbf{R}) & (6.6.4) \end{cases}$$

其中

$$\mathcal{L}_0 v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x} - rv. \tag{6.6.5}$$

在带状区域 $\{x \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T\}$ 上，构成网格

$$Q = \{(n\Delta t, j\Delta x) | 0 \le n \le N, j \in \mathbf{Z}\},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是自然数集， $\Delta t = \frac{T}{N}, \Delta x > 0$. 在每一个网格点上，定义函数

$$v_j^n = v(j\Delta x, n\Delta t), \tag{6.6.6}$$

$$\varphi_j = \varphi(j\Delta x) = (1 - e^{j\Delta x})^+. \tag{6.6.7}$$

取

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{n+1,j} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{n+1,j} = \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{n+1,j} = \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2},$$

将它们代入 (6.6.3)—(6.6.4)，得到在 $(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ 格点上的方程:

$$\begin{cases} \min\left\{-\dfrac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - (r - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right. \\ \qquad \left. + rv_j^n, v_j^n - \varphi_j\right\} = 0, \quad (0 \le n \le N-1, j \in \mathbf{Z}) & (6.6.8) \\ v_j^N = \varphi_j; & (6.6.9) \end{cases}$$

因为

$$\min(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \min(\alpha A, B) = 0, \quad (\alpha > 0)$$

以及

$$\min(C - A, C - B) = 0 \Longleftrightarrow C = \max(A, B).$$

故在方程 (6.6.8) 中，取 $\alpha = \Delta t$，得到

$$\min\{(1 + r\Delta t)v_j^n - (1 - \omega)v_j^{n+1} - av_{j+1}^{n+1} - cv_{j-1}^{n+1}, v_j^n - \varphi_j\} = 0, \tag{6.6.10}$$

这里

$$\omega = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2},$$

$$a = \frac{\omega}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(r - \frac{\sigma^2}{2}),$$

$$c = \omega - a.$$

再在 (6.6.8) 中，取 $\alpha = \dfrac{1}{1 + r\Delta t}$，得到

$$\min\left\{v_j^n - \frac{1}{1 + r\Delta t}\left[(1 - \omega)v_j^{n+1} + av_{j+1}^{n+1} + cv_{j-1}^{n+1}\right], v_j^n - \varphi_j\right\} = 0.$$

从而有

$$v_j^n = \max\left\{\frac{1}{1+r\Delta t}\left[(1-\omega)v_j^{n+1} + av_{j+1}^{n+1} + cv_{j-1}^{n+1}\right], \varphi_j\right\}, \tag{6.6.11}$$

$$(0 \le n \le N-1, j \in \mathbf{Z})$$

具体算法如下：

(1) 根据 $\varphi(x) = (1-e^x)^+$ 定义 φ_j. 由 (6.6.9) 给出 v_j^n 当 $n = N$ 时的值；

(2) 由表达式 (6.6.11)，通过反向归纳过程，逐步求出 $v_j^n(0 \le n \le N-1)$；特别当 $n = 0$ 时，得到美式期权的期权金.

由于这个算法不需要解代数方程组，因此它是一个 **显式差分格式** （倒向）. 当然，这个算法是非线性的.

定理 6.16（**美式期权显式差分格式的收敛性定理**） 假如

$$\omega = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} \le 1$$

且

$$\frac{1}{\sigma^2}\left|r - \frac{\sigma^2}{2}\right| \Delta x \le 1,$$

那么显式差分格式 (6.6.9),(6.6.11) 是收敛的，即

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} v_\Delta(x,t) = v(x,t),$$

其中 $v_\Delta(x,t)$ 是网格函数 $v(j\Delta x, n\Delta t) = v_j^n$ 的线性延拓，$v(x,t)$ 是变分不等方程 (6.6.3),(6.6.4) 的粘性解.

有关粘性解的定义以及这个结果的证明，由于涉及比较多的偏微分方程理论知识，在这里就不叙述了，读者可参阅 [20].

定理 6.17 美式看跌期权的二叉树方法与 $\omega = 1$ 时变分不等方程 (6.6.3),(6.6.4) 的显式差分格式 (6.6.9),(6.6.11) 等价.

证明 与定理 5.5 的证明相仿，在平面区域 $\Sigma: \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上设计网格

$$S_j = Ku^j, \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$t_n = n\Delta t, \quad (n = 0, 1, \cdots, N)$$

其中 $u>0$, $\Delta t=\frac{T}{N}$. 那么美式期权的定价公式可表为

$$V_j^n=\max\left\{\frac{1}{\rho}[qV_{j+1}^{n+1}+(1-q)V_{j-1}^{n+1}],\Phi_j\right\},\tag{6.6.12}$$

其中

$$ud=1,$$
$$q=\frac{\rho-d}{u-d},$$
$$\rho=1+r\Delta t,$$
$$\Phi_j=(K-S_j)^+.$$

取

$$\Delta x=\ln u,$$
$$x_j=j\Delta x=j\ln u=\ln\frac{S_j}{K},$$
$$v_j^n=KV_j^n,\varphi_j=K\Phi_j.$$

那么由 (5.7.19)，得到

$$q=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t}+O(\Delta t).$$

略去高阶小量，(6.6.12) 可改写为

$$v_j^n=\max\left\{\frac{1}{1+r\Delta t}\left[(\frac{1}{2}+\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\Delta t})v_{j+1}^{n+1}+(\frac{1}{2}-\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\Delta t})v_{j-1}^{n+1}\right],\varphi_j\right\}.\tag{6.6.13}$$

比较 (6.6.11) 与 (6.6.13)，在 (6.6.11) 中，取 $\omega=1$，即

$$\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}=1,$$

那么在 (6.6.11) 中，系数 a 可表示为

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\Delta t}{2\Delta x}(r-\frac{\sigma^2}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t},$$

故 (6.6.13) 与 (6.6.11)（当 $\omega=1$ 时）等价.

由定理 6.17 以及美式期权显式差分格式的收敛性定理立即推得:

定理 6.18（美式期权二叉树方法的收敛性定理） 若 $\frac{1}{\sigma^2}\left|r-\frac{\sigma^2}{2}\right|\Delta x\le 1$ 成立，则当 $\Delta t\to 0$ 时，美式看跌期权的二叉树方法必收敛到变分不等方程 (6.6.3),(6.6.4) 的粘性解.

(B) **隐式差分格式**

为了用隐式差分格式求解美式看跌期权的定价问题 (6.6.3),(6.6.4)，首先我们需要加两条边界: $\{x=-N_1, 0\le t\le T\}$ 和 $\{x=N_2, 0\le t\le T\}$, $(N_1, N_2>0)$，并在这两条边界上给定边界条件.

由美式期权的性质，当 N_1 充分大时，边界 $\{x=-N_1; 0\le t\le T\}$ 一定位于终止持有区域 Σ_2 中，故

$$v(-N_1,t)=\varphi(-N_1), \tag{6.6.14}$$

其中 $\varphi(x)=(1-e^x)^+$.

而由于当 $x\to\infty$ 时，$v\to 0$，故当 N_2 充分大时，在边界 $\{x=N_2; 0\le t\le T\}$ 上，假设

$$v(N_2,t)=0. \tag{6.6.15}$$

从而在 $\{-N_1\le x\le N_2, 0\le t\le T\}$ 上，$v(x,t)$ 适合变分不等方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial v}{\partial x}+rv\ge 0, & (6.6.16)\\ v\ge\varphi(x), & (6.6.17)\\ (-\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial v}{\partial x}+rv)(v-\varphi(x))=0. & (6.6.18)\end{cases}$$

在平面区域 $\{-N_1\le x\le N_2, 0\le t\le T\}$ 上形成网格

$$(j\Delta x, n\Delta t), \quad (-n_1\le j\le n_2, 0\le n\le N)$$

其中 $\Delta t=\frac{T}{N}, \Delta x=\frac{N_1}{n_1}=\frac{N_2}{n_2}$. 定义网格函数

$$v_j^n=v(j\Delta x, n\Delta t),$$

并对定解问题 (6.6.14) -(6.6.18) 离散化：取

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{n,j} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{n,j} = \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{n,j} = \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

从而有

$$\begin{cases} -av_{j+1}^n + bv_j^n - cv_{j-1}^n \geq v_j^{n+1}, & (6.6.19)\\ v_j^n \geq \varphi_j, & (6.6.20)\\ \left[-av_{j+1}^n + bv_j^n - cv_{j-1}^n - v_j^{n+1}\right][v_j^n - \varphi_j] = 0, & (6.6.21)\\ v_{-n_1}^n = \varphi_{-n_1}, & (6.6.22)\\ v_{n_2}^n = 0, & (6.6.23)\\ v_j^N = \varphi_j, & (6.6.24) \end{cases}$$

$$(-n_1 + 1 \leq j \leq n_2 - 1, 0 \leq n \leq N - 1)$$

其中

$$a = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta x,$$

$$c = \omega - a,$$

$$b = 1 + \omega + r\Delta t,$$

$$\omega = \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2},$$

$$\varphi_j = (1 - e^{j\Delta x})^+.$$

把 (6.6.19)—(6.6.21) 写成矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{AV}^n \geq \theta^n, & (6.6.25)\\ \mathbf{V}^n \geq \mathbf{\Phi}, & (6.6.26)\\ (\mathbf{AV}^n - \theta^n)_j(\mathbf{V}^n - \mathbf{\Phi})_j = 0, \quad (-n_1 + 1 \leq j \leq n_2 - 1) & (6.6.27) \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} b & -c & & & 0 \\ -a & b & -c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a & b & -c \\ 0 & & & -a & b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}^n=\begin{bmatrix} v^n_{n_2-1} \\ \vdots \\ v^n_{-n_1+1} \end{bmatrix},$$

$$\theta^n=\begin{bmatrix} \theta^n_{n_2-1} \\ \vdots \\ \theta^n_{-n_1+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} \varphi_{n_2-1} \\ \vdots \\ \varphi_{-n_1+1}. \end{bmatrix}.$$

考虑到边界条件 (6.6.22),(6.6.23)，这里

$$\theta^n_{n_2-1}=v^{n+1}_{n_2-1}+av^n_{n_2}=v^{n+1}_{n_2-1},$$

$$\theta^n_{-n_1+1}=v^{n+1}_{-n_1+1}+cv^n_{-n_1}=v^{n+1}_{-n_1+1}+c\varphi_{-n_1},$$

$$\theta^n_j=v^{n+1}_j. \quad (-n_1+2\le j\le n_2-2)$$

具体算法如下:

(1)　根据 $\varphi(x)=(1-e^x)^+$ 定义 φ_j，由 (6.6.24) 给出

$$v^N_j=\varphi_j. \quad (-n_1\le j\le n_2)$$

(2)　利用反向归纳过程，通过求解离散变分不等方程 (6.6.25)– (6.6.27) 逐步求出 $v^n_j(0\le n\le N-1)$.

如果 v^{n+1}_j 为已知，如何求解离散变分不等方程 (6.6.25)– (6.6.27) 呢？

我们利用 Gauss 消去法的思想，首先设法把矩阵 **A** 化成下三角形，然后进行逐次回代. 当然由于它是不等方程式，因此每次进行初等变换时，必须要检查比例因子的符号. 以下引入具体的求解过程.

我们先从 (6.6.25) 的最后 2 个方程开始：

$$-av^n_{-n_1+3} + bv^n_{-n_1+2} - cv^n_{-n_1+1} \geq \theta^n_{-n_1+2}; \tag{6.6.28}$$

$$-av^n_{-n_1+2} + bv^n_{-n_1+1} \geq \theta^n_{-n_1+1}. \tag{6.6.29}$$

取 Δx 充分小，使得

$$1 - \frac{1}{\sigma^2}\left|r - \frac{\sigma^2}{2}\right|\Delta x > 0,$$

从而有

$$a > 0, c > 0.$$

令 $(6.6.29) \times \frac{c}{b} + (6.6.28)$，这样 (6.6.28) 转化为

$$-av^n_{-n_1+3} + (b - \frac{ac}{b})v^n_{-n_1+2} \geq \theta^n_{-n_1+2} + \frac{c}{b}\theta^n_{-n_1+1}. \tag{6.6.30}$$

这里特别要注意：由于 $\frac{c}{b} > 0$，所以在上述初等运算下，不等式的符号不变. 记

$$b_{-n_1+2} = b - \frac{ac}{b}.$$

这样 (6.6.30) 可改写为

$$-av^n_{-n_1+3} + b_{-n_1+2}v^n_{-n_1+2} \geq \hat{\theta}^n_{-n_1+2}, \tag{6.6.31}$$

这里 $\hat{\theta}_{-n_1-2}$ 表示不等式 (6.6.30) 的右端部分.

如果要继续重复上述过程，必须要检查 b_{-n_1+2} 是否为正？事实上

$$b_{-n_1+2} = \frac{1}{b}(b^2 - ac) > \frac{1}{b}\left[(1+\omega)^2 - \frac{\omega^2}{4}\right] > 0.$$

然后把 (6.6.25) 中倒数第三个方程与 (6.6.31) 联立. 如此重复上述过程，一般来说通过上述初等变换得到不等方程：

$$-av^n_{k+1} + b_k v^n_k \geq \hat{\theta}^n_k \tag{6.6.32}$$

且

$$b_k > 0,$$

（当然，这一点是需要证明的.）然后把它与 (6.6.25) 中倒数第 n_1+k+1 个方程联立，即考虑不等式方程 (6.6.32) 以及

$$-av_{k+2}^n + bv_{k+1}^n - cv_k^n \geq \theta_{k+1}^n. \tag{6.6.33}$$

令 $(6.6.32)\times\frac{c}{b_k}+(6.6.33)$，得到

$$-av_{k+2}^n + (b-\frac{ac}{b_k})v_{k+1}^n \geq \hat{\theta}_{k+1}$$

（这里我们用到了 $\frac{c}{b_k}>0$），其中

$$\hat{\theta}_{k+1}^n = \theta_{k+1}^n + \frac{c}{b_k}\hat{\theta}_k^n.$$

记

$$b_{k+1} = b - \frac{ac}{b_k},$$

如果我们能够证明由

$$B_{m+1} = b - \frac{ac}{B_m} \quad (1\leq m\leq M) \tag{6.6.34}$$

和

$$B_1 = b \tag{6.6.35}$$

定义的所有 B_m 都是正的，那么我们就证明了：离散变分不等方程 (6.6.25) (6.6.27) 等价于变分不等方程

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}^n \geq \hat{\theta}^n, & (6.6.36)\\ \mathbf{V}^n \geq \mathbf{\Phi}, & (6.6.37)\\ (\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}^n-\hat{\theta}^n)_j(\mathbf{V}^n-\mathbf{\Phi})_j = 0, \quad (-n_1+1\leq j\leq n_2-1) & (6.6.38)\end{cases}$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为下三角矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} b_{n_2-1} & & & 0\\ -a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -a & b_{-n_1+1}\end{bmatrix}, \tag{6.6.39}$$

$$\hat{\theta}^n = \begin{bmatrix} \hat{\theta}^n_{n_2-1} \\ \vdots \\ \hat{\theta}^n_{-n_1+1} \end{bmatrix}$$

引理 6.8 假如 $b^2 - 4ac > 0$，那么方程 (6.6.34),(6.6.35) 有解

$$B_m = \frac{J_m}{J_{m-1}}, \quad (2 \le m \le M) \tag{6.6.40}$$

其中

$$J_1 = b, \tag{6.6.41}$$

$$J_m = \sum_{i=0}^{m} (\alpha_+)^{m-i} (\alpha_-)^i, \quad (m \ge 2) \tag{6.6.42}$$

这里

$$\alpha_\pm = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}. \tag{6.6.43}$$

证明 由方程 (6.6.34)，得到

$$B_{m+1} B_m = b B_m - ac, \quad (m \ge 2)$$

等式两边同乘 $B_{m-1} \cdots B_1$，由 (6.6.40),(6.6.41) 以及 (6.6.35) 推得 $J_m = \prod_{i=1}^m B_i$ 适合差分方程:

$$J_{m+1} - bJ_m + acJ_{m-1} = 0, \quad (m \ge 2) \tag{6.6.44}$$

和初始条件

$$J_1 = b, \tag{6.6.45}$$

$$J_2 = J_1 B_2 = b(b - \frac{ac}{b}) = b^2 - ac. \tag{6.6.46}$$

为了求解具有初始条件 (6.6.45),(6.6.46) 的差分方程 (6.6.44)，令

$$J_m = \xi^m.$$

把它代入 (6.6.44)，得

$$\xi^2 - b\xi + ac = 0.$$

这个二次方程称为差分方程 (6.6.44) 的特征方程，它有两个根

$$\xi = \alpha_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

故 (6.6.44) 的通解为

$$J_m = A(\alpha_+)^m + B(\alpha_-)^m. \qquad (6.6.47)$$

由初始条件 (6.6.45),(6.6.46)，推得

$$\alpha_+ A + \alpha_- B = b,$$

$$\alpha_+^2 A + \alpha_-^2 B = b^2 - ac.$$

解之得

$$A = \frac{\alpha_+}{\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$B = \frac{-\alpha_-}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

将它们代入 (6.6.47)，得

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \left[(\alpha_+)^{m+1} - (\alpha_-)^{m+1}\right] \\ &= \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \sum_{i=0}^{m} (\alpha_+)^{m-i} \alpha_-^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} (\alpha_+)^{m-i} \alpha_-^i. \end{aligned}$$

根据 J_m 的定义，

$$B_m = \frac{J_m}{J_{m-1}}, \qquad (m \geq 2)$$

至此引理获证.

现在让我们回过来验证引理 6.8 的条件

$$b^2 - 4ac > 0.$$

事实上，根据定义，

$$\begin{aligned} b &= 1+\omega+r\Delta t, \\ a &= \frac{\omega}{2}+\beta\sqrt{\Delta t}, \\ c &= \frac{\omega}{2}-\beta\sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

因此

$$b^2-4ac=(1+\omega+r\Delta t)^2-4\left(\frac{\omega^2}{4}-\beta^2\Delta t\right)>0,$$

其中

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{\omega}}{2\sigma}(r-\frac{\sigma^2}{2}), \\ \omega &= \frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

由于

$$\alpha_-=\frac{ac}{\alpha_+}=\frac{\omega^2}{4\alpha_+}\left[1-\frac{\Delta x^2}{\sigma^4}(r-\frac{\sigma^2}{2})^2\right].$$

因此若

$$1-\frac{\Delta x}{\sigma^2}\left|r-\frac{\sigma^2}{2}\right|\geq 0,$$

则

$$\alpha_+>\alpha_-\geq 0.$$

故由 (6.6.41),(6.6.42)，推得

$$J_m>0, \quad (1\leq m\leq M)$$

和

$$B_m=\frac{J_m}{J_{m-1}}. \quad (2\leq m\leq M)$$

这样我们就证明了：位于下三角矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的主对角线的所有元素 b_k 都是正的 $(-n_1+1\leq k\leq n_2-1)$.

定理 6.19 离散变分不等方程 (6.6.36)—(6.6.38) 有解

$$v_{n_2-1}^n = \max\left\{\frac{1}{b_{n_2-1}}\hat{\theta}_{n_2-1}^n, \varphi_{n_2-1}\right\}, \tag{6.6.48}$$

$$v_j^n = \max\left\{\frac{1}{b_j}[\hat{\theta}_j^n + av_{j+1}^n], \varphi_j\right\}, \quad (-n_1+1 \le j \le n_2-2). \tag{6.6.49}$$

证明 我们先看 (6.6.36)–(6.6.38) 中第一行，即在 $j = n_2 - 1$ 的情形：

$$\begin{cases} b_{n_2-1}v_{n_2-1}^n \ge \hat{\theta}_{n_2-1}^n, \\ v_{n_2-1}^n \ge \varphi_{n_2-1}, \\ (b_{n_2-1}v_{n_2-1}^n - \hat{\theta}_{n_2-1}^n)(v_{n_2-1}^n - \varphi_{n_2-1}) = 0. \end{cases}$$

它可改写为

$$\min\{v_{n_2-1}^n - \frac{1}{b_{n_2-1}}\hat{\theta}_{n_2-1}^n, v_{n_2-1}^n - \varphi_{n_2-1}\} = 0,$$

即

$$v_{n_2-1}^n = \max\left\{\frac{1}{b_{n_2-1}}\hat{\theta}_{n_2-1}^n, \varphi_{n_2-1}\right\}.$$

再把它代入 (6.6.36)–(6.6.38) 的第二行，即在 $j = n_2 - 2$ 的情形：

$$\min\{-av_{n_2-1}^n + b_{n_2-2}v_{n_2-2}^n - \hat{\theta}_{n_2-2}^n, v_{n_2-2}^n - \varphi_{n_2-2}\} = 0.$$

由于 $v_{n_2-1}^n$ 为已知，从而有

$$v_{n_2-2}^n = \max\left\{\frac{1}{b_{n_2-2}}[\hat{\theta}_{n_2-2}^n + av_{n_2-1}^n], \varphi_{n_2-2}\right\}.$$

依此类推，由归纳过程，立得 (6.6.48),(6.6.49)，至此定理获证.

若 $1 - \frac{1}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\Delta t} > 0$，同样可以证明当 $\Delta t, \Delta x \to 0$ 时，由隐式差分格式得到的近似解的收敛性. 与显式差分格式相比较，这里无需假定 $\omega = \frac{\sigma^2\Delta x^2}{\Delta t} \le 1$.

§6.7 数值方法 (II)—— 切片法

考虑不计红利的美式看跌期权的自由边界问题模型，即求 $\{V(S,t), S(t)\}$，

使得它们在区域 $\Sigma_1:\{S(t)\le S<\infty, 0\le t\le T\}$ 上适合以下定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0, \quad (\Sigma) & (6.7.1)\\
V(S(t),t)=K-S(t), & (6.7.2)\\
V_S(S(t),t)=-1, & (6.7.3)\\
V(S,T)=(K-S)^+, & (6.7.4)\\
V(S,t)\to 0, \quad (S\to\infty) & (6.7.5)\\
S(T)=K. & (6.7.6)
\end{cases}
$$

显然，如果作变换 $\hat{S}=\dfrac{S}{K},\hat{V}=KV,\hat{S}(t)=\dfrac{S(t)}{K}$ ，那么可以把敲定价格 K 单位化，即无妨假设 $K=1$.

把 $[0,T]$ 分成 N 等分：

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T,$$

$$t_n-n\Delta t, \Delta t=\frac{T}{N}.$$

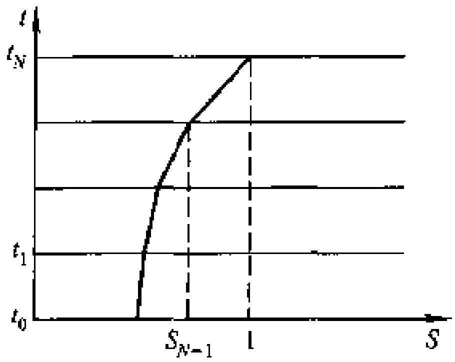
在每一“片” $t=t_n$ 上，定义

$$V_n(S)=V(S,t_n)与S_n=S(t_n),$$

使得它们适合由 (6.7.1)—(6.7.6) 对 t 离散化所得到一组常微分方程自由边界问题，即求 $\{V_n(S),S_n\},(n=0,1,\cdots,N)$ ，使得

$$
\begin{cases}
\dfrac{V_{n+1}(S)-V_n(S)}{\Delta t}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{d^2V_n}{dS^2}+rS\dfrac{dV_n}{dS}-rV_n=0, & (6.7.7)\\
\qquad (S_n\le S<\infty) & \\
V_n(S_n)=1-S_n. & (6.7.8)\\
\dfrac{dV_n}{dS}(S_n)=-1. & (6.7.9)\\
V_n(S)\to 0, \quad (S\to\infty) & (6.7.10)\\
V_N(S)=(1-S)^+, & (6.7.11)\\
S_N=1, & (6.7.12)
\end{cases}
$$

其中 $0\le n\le N-1$.



具体算法如下:

(1) 由 $V_N(S)=(1-S)^+$, $(0\le S<\infty)$

$$S_N=1.$$

因此我们给出了 $V_n(S)$ 当 $n=N$ 时的值.

(2) 由归纳过程, 若 $V_{n+1}(S), S_{n+1}$ 为已知, 且 $S_{n+1}<1$, 定义

$$\hat{V}_{n+1}(S)=\begin{cases} V_{n+1}(S), & S_{n+1}\le S<\infty, \\ 1-S, & 0\le S\le S_{n+1}. \end{cases}$$

显然 $\hat{V}_{n-1}(S)\in C^1_{[0,\infty)}$.

(3) 在区间 $\{S_n\le S<\infty\}$ 上, 求解自由边界问题:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta V_n=\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{d^2V_n}{dS^2}+rS\dfrac{dV_n}{dS}-(r+\dfrac{1}{\Delta t})V_n=\dfrac{-1}{\Delta t}\hat{V}_{n+1}(S), & (6.7.13) \\ \qquad (S_n\le S<\infty) & \\ V_n(S_n)=1-S_n, & (6.7.14) \\ \dfrac{dV_n}{dS}(S_n)=-1, & (6.7.15) \\ V_n(S)\to 0, \quad (S\to\infty) & (6.7.16) \end{cases}$$

得到 $\{V_n,S_n\}$. 然后依此类推.

(4) 求解常微分方程自由边界问题 (6.7.13)—(6.7.16), 有很多方法可以选取. 考虑这个方程的特殊性. 可以得到方程 (6.7.13) 的解的显式表达式. 我们将在下面介绍如何通过直接求解的方法, 求出 V_n 和 S_n ([6]).

先求 $V_{N-1}(S)$ 和 S_{N-1}. (6.7.13) 是非齐次二阶常微分方程, 先求齐次方程的通解形式: 令

$$V_n(S)=S^\alpha.$$

代入 (6.7.13) 得

$$K(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2}\alpha(\alpha - 1) + r\alpha - (r + \frac{1}{\Delta t}) = 0. \tag{6.7.17}$$

方程 (6.7.17) 称为常微分方程 (6.7.13) 的特征方程，它有二个根：

$$\alpha_\pm = \gamma \pm \frac{\rho}{2},$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2},$$

$$\rho = \frac{2}{\sigma^2}\sqrt{(r + \frac{\sigma^2}{2})^2 + \frac{2\sigma^2}{\Delta t}}.$$

因此

$$\alpha_+ > 0 > \alpha_-.$$

故相应于 (6.7.13) 的齐次方程的通解具形式：

$$V(S) = d_1 S^{\alpha_+} + d_2 S^{\alpha_-}.$$

由最佳实施边界的性质，可以认为 $S_{N-1} < 1$ ，因此方程 (6.7.13) 的右端是以分段多项式形式表示，即方程 (6.7.13) 可改写为

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta V_{N-1} = 0, & (1 \le S < \infty) \quad (6.7.18) \\ \mathcal{L}_\Delta V_{N-1} = -\frac{1}{\Delta t}(1 - S), & (S_{N-1} \le S < 1) \quad (6.7.19) \\ V_{N-1}、V'_{N-1}\text{在}S = 1\text{连续}, & \quad (6.7.20) \end{cases}$$

以及适合边界条件 (6.7.14)—(6.7.16).

由于非齐次方程 (6.7.19) 有一个特解

$$v = \frac{1}{1 + r\Delta t} - S,$$

因此方程 (6.7.18)—(6.7.19) 的解为

$$V_{N-1}(S) = \begin{cases} d_1^{(1)} S^{\alpha_+} + d_2^{(1)} S^{\alpha_-} + \frac{1}{1 + r\Delta t} - S, & (S_{N-1} \le S \le 1) \quad (6.7.21) \\ d_1^{(2)} S^{\alpha_+} + d_2^{(2)} S^{\alpha_-}, & (1 \le S < \infty) \quad (6.7.22) \end{cases}$$

其中常数 $d_i^{(m)}(i,m=1,2)$ 以及 S_{N-1} 是待定的，它们由边界条件 (6.7.14) (6.7.16) 以及连接条件 (6.7.20) 确定.

由 (6.7.16)，得到

$$d_1^{(2)}=0; \tag{6.7.23}$$

由 (6.7.20)，得到

$$d_2^{(2)}-d_1^{(1)}+d_2^{(1)}-\frac{r\Delta t}{1+r\Delta t}, \tag{6.7.24}$$

$$\alpha_-d_2^{(2)}=\alpha_+d_1^{(1)}+\alpha_-d_2^{(1)}-1; \tag{6.7.25}$$

由自由边界条件 (6.7.14),(6.7.15)，得到

$$d_1^{(1)}S_{N-1}^{\alpha_+}+d_2^{(1)}S_{N-1}^{\alpha_-}-\frac{r\Delta t}{1+r\Delta t}=0, \tag{6.7.26}$$

$$\alpha_+d_1^{(1)}S_{N-1}^{\alpha_+-1}+\alpha_-d_2^{(1)}S_{N-1}^{\alpha_--1}=0; \tag{6.7.27}$$

由 (6.7.24),(6.7.25)，得到

$$d_1^{(1)}=d_2^{(2)}-d_2^{(1)}+\frac{r\Delta t}{1+r\Delta t},$$

$$\frac{\alpha_+}{\alpha_-}d_1^{(1)}=d_2^{(2)}-d_2^{(1)}+1/\alpha_-.$$

故

$$d_1^{(1)}(\alpha_+-\alpha_-)/\alpha_-=\frac{1}{\alpha_-}-\frac{r\Delta t}{1-r\Delta t},$$

即

$$d_1^{(1)}=\frac{1}{\rho}(1-\frac{r\Delta t\alpha_-}{1+r\Delta t}). \tag{6.7.28}$$

由 (6.7.26) $\times\,\alpha_-$ $-$ (6.7.27) $\times\, S_{N-1}$，我们得到自由边界点 S_{N-1} 适合的方程:

$$\rho S_{N-1}^{\alpha_+}d_1^{(1)}+\frac{r\Delta t\alpha_-}{1+r\Delta t}=0,$$

即

$$(1-\frac{r\Delta t\alpha_-}{1+r\Delta t})S_{N-1}^{\alpha_+}=-\frac{r\Delta t\alpha_-}{1+r\Delta t}. \tag{6.7.29}$$

容易看出： $0<S_{N-1}<1$. 把 $d_1^{(1)},S_{N-1}$ 代入 (6.7.27)，得到

$$d_2^{(1)}=-\frac{\alpha_+}{\alpha_-}d_1^{(1)}S_{N-1}^{\alpha_+-\alpha_-}. \tag{6.7.30}$$

再把 $d_1^{(1)}$ 与 $d_2^{(1)}$ 代入 (6.7.24)，得到 $d_2^{(2)}$，这样我们就求出了 $\{V_{N-1}(S), S_{N-1}\}$：

$$V_{N-1}(S)=\begin{cases}1-S, & (0\le S\le S_{N-1})\\ d_1^{(2)}S^{\alpha_+}+d_2^{(1)}S^{\alpha_-}+\dfrac{1}{1+r\Delta t}-S, & (S_{N-1}\le S\le 1)\\ d_2^{(2)}S^{\alpha_-}, & (1\le S<\infty)\end{cases}$$

其中 $d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, d_2^{(2)}$ 和 S_{N-1} 的定义见 (6.7.28),(6.7.30),(6.7.23) 和 (6.7.29). 其确定过程依次如下：

$$d_1^{(2)}\to d_1^{(1)}\to S_{N-1}\to d_2^{(1)}\to d_2^{(2)}$$

由于在 $[0,\infty)$ 上，$V_{N-1}(S)$ 由三个分段函数组成，特别值得指出的是 α_+ 和 α_- 正好是特征方程 (6.7.17) 的根，所以为了寻找以它们为右端的非齐次方程的特解，我们需要下面的引理.

引理 6.9　*考虑非齐次常微分方程：*

$$\mathcal{L}_\Delta(W)=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2W}{dS^2}+rS\frac{dW}{dS}-(r+\frac{1}{\Delta t})W=S^\omega\frac{1}{\Delta t} \tag{6.7.31}$$

其中 ω 是特征方程 (6.7.17) 的单根，即

$$K(\omega)=\frac{\sigma^2}{2}\omega(\omega-1)+r\omega-(r+\frac{1}{\Delta t})=0, \tag{6.7.32}$$

$$K'(\omega)\neq 0;$$

则方程 (6.7.31) 有一个特解

$$W(S)=\frac{1}{\Delta tK'(\omega)}S^\omega\ln S.$$

证明　把 W 的表达式代入方程 (6.7.31)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta W &= \frac{1}{\Delta tK'(\omega)}\Big[(\frac{\sigma^2}{2}\omega(\omega-1)+r\omega-(r+\frac{1}{\Delta t}))S^\omega\ln S\\ &\quad+(\frac{\sigma^2}{2}(2\omega-1)+r)S^\omega\Big]\\ &=\frac{1}{\Delta tK'(\omega)}(\frac{\sigma^2}{2}(2\omega-1)+r)S^\omega\\ &=\frac{1}{\Delta t}S^\omega.\end{aligned}$$

现在求 $\{V_{N-2}(S), S_{N-2}\}$，它们适合

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta V_{N-2} = -\frac{1}{\Delta t} d_2^{(2)} S^{\alpha_-}, \quad (1 \le S \le \infty) & (6.7.33) \\ \mathcal{L}_\Delta V_{N-2} = -\frac{1}{\Delta t}\left(d_1^{(1)} S_+^{\alpha} + d_2^{(1)} S^{\alpha_-}\right) - \left(\frac{1}{1+r\Delta t} - S\right)\frac{1}{\Delta t}, & (6.7.34) \\ \quad (S_{N-1} \le S \le 1) & \\ \mathcal{L}_\Delta V_{N-2} = -\frac{1}{\Delta t}(1-S), \quad (S_{N-2} \le S \le S_{N-1}) & (6.7.35) \\ V_{N-2}, V'_{N-2}\text{在}S=1\text{处连续}, & (6.7.36) \\ V_{N-2}, V'_{N-2}\text{在}S=S_{N-1}\text{处连续}, & (6.7.37) \\ V_{N-2}(S_{N-2}) = 1 - S_{N-2}, & (6.7.38) \\ V'_{N-2}(S_{N-2}) = -1, & (6.7.39) \\ V_{N-2}(S) \to 0, \quad (S \to \infty) & (6.7.40) \end{cases}$$

方程 (6.7.35) 有特解

$$W_1(S) = \frac{1}{1+r\Delta t} - S, \tag{6.7.41}$$

而由引理 6.9，方程 (6.7.33),(6.7.34) 有特解

$$W_2(S) = -\frac{1}{\Delta t}\left[d_1^{(1)}\frac{1}{K'(\alpha_+)}S^{\alpha_+}\ln S + d_2^{(1)}\frac{1}{K'(\alpha_-)}S^{\alpha_-}\ln S\right] + \frac{1}{(1+r\Delta t)^2} - S, \tag{6.7.42}$$

$$W_3(S) = -\frac{1}{\Delta t} d_2^{(2)} \frac{1}{K'(\alpha_-)} S^{\alpha_-}\ln S, \tag{6.7.43}$$

因此在区间 $\{S_{N-2} < S < \infty\}$ 上，方程 (6.7.33) -(6.7.35) 的通解可表成

$$V_{N-2}(S) = \begin{cases} W_1(S) + \hat{d}_1^{(1)} S^{\alpha_+} + \hat{d}_2^{(1)} S^{\alpha_-} & (S_{N-2} \le S \le S_{N-1}) \quad (6.7.44) \\ W_2(S) + \hat{d}_1^{(2)} S^{\alpha_+} + \hat{d}_2^{(2)} S^{\alpha_-} & (S_{N-1} \le S \le 1) \quad (6.7.45) \\ W_3(S) + \hat{d}_1^{(3)} S^{\alpha_+} + \hat{d}_2^{(3)} S^{\alpha_-} & (1 \le S < \infty) \quad (6.7.46) \end{cases}$$

利用 4 个连接条件 (6.7.36),(6.7.37)，2 个自由边界条件 (6.7.38),(6.7.39) 以及一个无穷远点条件 (6.7.40) 确定 6 个系数 $\hat{d}_i^{(m)}(m=1,2,3, i=1,2)$ 以及自由边界点 S_{N-2}.

由 (6.7.40)，得到

$$\hat{d}_1^{(3)} = 0. \tag{6.7.47}$$

由 (6.7.36)，得到

$$W_2(1) + \hat{d}_1^{(2)} + \hat{d}_2^{(2)} = W_3(1) + \hat{d}_2^{(3)}, \tag{6.7.48}$$

$$W_2'(1) + \alpha_+\hat{d}_1^{(2)} + \alpha_-\hat{d}_2^{(2)} = W_3'(1) + \alpha_-\hat{d}_2^{(3)}. \tag{6.7.49}$$

由于 $W_2(1) = \dfrac{1}{(1+r\Delta t)^2} - 1, W_3(1) = 0$，因此由 (6.7.48),(6.7.49)，得到

$$\hat{d}_1^{(2)} = \frac{1}{\rho}\left\{\alpha_-\left[\frac{1}{(1+r\Delta t)^2} - 1\right] - [W_2'(1) - W_3'(1)]\right\}. \tag{6.7.50}$$

由 (6.7.37)，推得

$$\begin{aligned} W_1(S_{N-1}) &+ \hat{d}_1^{(1)} S_{N-1}^{\alpha+} + \hat{d}_2^{(1)} S_{N-1}^{\alpha-} \\ &= W_2(S_{N-1}) + \hat{d}_1^{(2)} S_{N-1}^{\alpha+} + \hat{d}_2^{(2)} S_{N-1}^{\alpha-}, \end{aligned} \tag{6.7.51}$$

$$\begin{aligned} W_1'(S_{N-1}) &+ \alpha_+\hat{d}_1^{(1)} S_{N-1}^{\alpha+-1} + \alpha_-\hat{d}_2^{(1)} S_{N-1}^{\alpha--1} \\ &= W_2'(S_{N-1}) + \alpha_+\hat{d}_1^{(2)} S_{N-1}^{\alpha+-1} + \alpha_-\hat{d}_2^{(2)} S_{N-1}^{\alpha--1}, \end{aligned}$$

消去 $\hat{d}_2^{(1)}$ 与 $\hat{d}_2^{(2)}$，得到

$$\hat{d}_1^{(1)} = \hat{d}_1^{(2)} + \frac{\alpha_-[W_1(S_{N-1}) - W_2(S_{N-1})] - S_{N-1}[W_1'(S_{N-1}) - W_2'(S_{N-1})]}{\rho S_{N-1}^{\alpha+}}. \tag{6.7.52}$$

由自由边界条件 (6.7.38),(6.7.39)，得到

$$W_1(S_{N-2}) + \hat{d}_1^{(1)} S_{N-2}^{\alpha+} + \hat{d}_2^{(1)} S_{N-2}^{\alpha-} = 1 - S_{N-2},$$

$$W_1'(S_{N-2}) + \alpha_+\hat{d}_1^{(1)} S_{N-2}^{\alpha+-1} + \alpha_-\hat{d}_2^{(1)} S_{N-2}^{\alpha--1} = -1, \tag{6.7.53}$$

消去 $\hat{d}_2^{(1)}$，注意到 $W_1(S) = \dfrac{1}{1+r\Delta t} - S, W_1'(S) = -1$，从而得到 S_{N-2} 适合的方程：

$$\hat{d}_1^{(1)} S_{N-2}^{\alpha+} = \frac{-\alpha_-}{\rho}\left[1 - \frac{1}{1+r\Delta t}\right]. \tag{6.7.54}$$

把 (6.7.50),(6.7.52) 代入 (6.7.54)，我们得到了一个 S_{N-2} 适合的超越方程. 不难看出， $S_{N-2} < S_{N-1}$.

回到 (6.7.53)，我们可以确定出 $\hat{d}_2^{(1)}$，由于我们已知 $\hat{d}_1^{(2)}, \hat{d}_1^{(1)}, \hat{d}_2^{(1)}$，可以从 (6.7.51) 中求得 $\hat{d}_2^{(2)}$，再代入 (6.7.48) 定出 $\hat{d}_2^{(3)}$，至此我们定出了全部待定系数 $\hat{d}_i^{(m)}(m=1,2,3, i=1,2)$ 以及 S_{N-2}. 其确定过程依次如下：

$$\hat{d}_1^{(3)} \to \hat{d}_1^{(2)} \to \hat{d}_1^{(1)} \to S_{N-2} \to \hat{d}_2^{(1)} \to \hat{d}_2^{(2)} \to \hat{d}_2^{(3)}$$

利用反向归纳过程, 假如当 $t=t_{n+1}$ 时, $V_{n+1}(S) \in C^1_{[0,\infty)}$ 以及 $S_{n+1}(n \geq 0)$ 为已知. $V_{n+1}(S)$ 的定义可以划分为以下区间：

$$[0, S_{n+1}], \cdots, [S_{N-1}, 1], [1, \infty).$$

在 $0 \leq S \leq S_{n+1}$ 上,

$$V_{n+1}(S) = 1 - S = M_1(S);$$

在区间 $[S_{n+1}, \infty)$ 上, 函数 $V_{n+1}(S)$ 是分段定义的. 在区间 $[S_{n+j-1}, S_{n+j}]$ 上,

$$V_{n+1}(S) = M_j(S), \quad j = 2, \cdots, N-n+1.$$

其中

$$S_N = 1,$$

$$S_{N+1} = \infty,$$

$$M_j(S) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i^{(j)} S^{\alpha_+} (lnS)^i + \sum_{i=1}^{n-2} d_i^{(j)} S^{\alpha_-} (lnS)^i + e^{(j)} S + f^{(j)}.$$

这里 $c_i^{(j)}, d_i^{(j)}, e^{(j)}, f^{(j)}$ 为常数, α_+, α_- 为特征方程 (6.7.17) 的根. 从而为了求出当 $t=t_n$ 时, $V_n(S)$ 以及 S_n 的值. 首先把自由边界问题 (6.7.13)-(6.7.16) 改写为

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Delta V_n = -\dfrac{1}{\Delta t} M_1(S), & (S_n \leq S \leq S_{n+1}) & (6.7.55) \\ \mathcal{L}_\Delta V_n = -\dfrac{1}{\Delta t} M_2(S), & (S_{n+1} \leq S \leq S_{n+2}) & (6.7.56) \\ \cdots\cdots & & \\ \mathcal{L}_\Delta V_n = -\dfrac{1}{\Delta t} M_{N-n}(S), & (S_{N-1} \leq S \leq 1) & (6.7.57) \\ \mathcal{L}_\Delta V_n = -\dfrac{1}{\Delta t} M_{N-n+1}(S), & (1 \leq S < \infty) & (6.7.58) \end{cases}$$

且

$$V_n(S),V_n'(S)在S=S_{n+1}处连续, \tag{6.7.59}$$

$$\cdots\cdots$$

$$V_n(S),V_n'(S)在S=1处连续, \tag{6.7.60}$$

以及

$$V_n(S_n)=1-S_n, \tag{6.7.61}$$

$$V_n'(S_n)=-1, \tag{6.7.62}$$

$$V_n(\infty)=0. \tag{6.7.63}$$

$V_n(S)$ 具下述形式:

$$V_n(S)=\begin{cases} W_1(S)+\tilde{d}_1^{(1)}S^{\alpha_+}+\tilde{d}_2^{(1)}S^{\alpha_-}, & (S_n\le S\le S_{n+1}) \\ \cdots\cdots & \\ W_{N-n+1}(S)+\tilde{d}_1^{(N-n+1)}S^{\alpha_+}+\tilde{d}_2^{(N-n+1)}S^{\alpha_-}, & (1\le S<\infty) \end{cases}$$

其中 $W_i(S)(i=1,\cdots,N-n+1)$ 为具右端为 $-\frac{1}{\Delta t}M_i(S)$ 的非齐次常微分方程 (6.7.55) (6.7.58) 的特解(具体求法见以下引理 6.10). 为了确定 $2(N-n+1)$ 个待定常数 $\tilde{d}_j^{(m)}(m=1,\cdots,N-n+1;j=1,2)$ 以及自由边界点 $S=S_n$. 由在 $S=1,S_{N-1},\cdots,S_{n+1}$ 点上的连接条件 (6.6.59),(6.7.60) 以及自由边界条件 (6.7.61)(6.7.62) 和无穷远点条件 (6.7.63), 共建立 $2(N-n)+3$ 个方程, 然后依次求解:

$$\tilde{d}_1^{(n+1)}\to\tilde{d}_1^{(n)}\to\cdots\to\tilde{d}_1^{(1)}\to S_n\to\tilde{d}_2^{(1)}\to\tilde{d}_2^{(2)}\to\cdots\to\tilde{d}_2^{(n+1)}$$

求解显然比较繁琐, 但是所有运算都是显式的, 不需要解大型线性方程组, 这一点正是上述方法的优点.

最后我们给出如何求以 $S^{\alpha_\pm}(\ln S)^j$ 为右端的非齐次常微分方程的特解.

引理 6.10 考虑非齐次常微分方程

$$\mathcal{L}_\Delta(W)=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2W}{dS^2}+rS\frac{dW}{dS}-(r+\frac{1}{\Delta t})W=S^\omega(\ln S)^j,$$

其中 ω 是特征方程 (6.7.17) 的单根, 即

$$K(\omega)=\frac{\sigma^2}{2}\omega(\omega-1)+r\omega-(r+\frac{1}{\Delta t})=0,$$

$$K'(\omega) \neq 0.$$

则它有一个特解

$$W(S) = \sum_{i=1}^{j+1} C_i S^{\omega} (\ln S)^i,$$

这里 $C_i(1 \leq i \leq j+1)$ 由下面递推等式给出:

$$C_i = \frac{-\sigma^2(i+1)}{2K'(\omega)} C_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, j)$$

$$C_{j+1} = \frac{1}{(j+1)K'(\omega)}.$$

证明 因为

$$\mathcal{L}_\Delta(S^\omega(\ln S)^i) = iK'(\omega)S^\omega(\ln S)^{i-1} + \frac{\sigma^2}{2}i(i-1)(\ln S)^{i-2}S^\omega, \quad (i \geq 1)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Delta(W) &= \mathcal{L}_\Delta\left(\sum_{i=1}^{j+1} C_i S^\omega (\ln S)^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{j+1} iC_iK'(\omega)(\ln S)^{i-1}S^\omega + \sum_{i=1}^{j} \frac{\sigma^2}{2} i(i+1)C_{i+1}(\ln S)^{i-1}S^\omega \\
&= (j+1)C_{j+1}K'(\omega)(\ln S)^j S^\omega \\
&\quad + \sum_{i=1}^{j} i\left[K'(\omega)C_i + \frac{\sigma^2}{2}(i+1)C_{i+1}\right](\ln S)^{i-1}S^\omega.
\end{aligned}$$

为了使它适合方程

$$\mathcal{L}_\Delta(\omega) = S^\omega(\ln S)^j,$$

必须有

$$(j+1)C_{j+1}K'(\omega) = 1,$$

$$K'(\omega)C_i + \frac{\sigma^2}{2}(i+1)C_{i+1} = 0. \quad (1 \leq i \leq j)$$

从而引理获证.

§6.8 其它形式的美式期权

(A) 美式两值期权

在美式期权合约中规定，在合约的有效期间，当原生资产价格 S_t 超过敲定价格 K，在任何时间都可以实施期权，取得 1 元现金.

这类美式期权的数学模型不是自由边界问题，因为实施期权的原生资产价格是给定的： $S_t = K$.

设 $V(S,t)$ 是期权定价，则它适合：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (0 < S < K) & (6.8.1) \\ V(0,t)\text{有界}, & (6.8.2) \\ V(K,t) = 1, & (6.8.3) \\ V(S,T) = H(S-K) = 0. \quad (0 < S < K) & (6.8.4) \end{cases}$$

令

$$V(S,t) = V_0(S) - u(S,t), \tag{6.8.5}$$

其中 $V_0(S)$ 是永久美式两值期权定价，即 $V_0(S)$ 适合

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{d^2V_0}{dS^2} + (r-q)S\dfrac{dV_0}{dS} - rV_0 = 0, \quad (0 < S < K) & (6.8.6) \\ V_0(0)\text{有界}, & (6.8.7) \\ V_0(K) = 1. & (6.8.8) \end{cases}$$

与 §6.1 的讨论相仿，取

$$V_0(S) = A\left(\frac{S}{K}\right)^{\alpha_+} + B\left(\frac{S}{K}\right)^{\alpha_-},$$

其中 $\alpha_\pm$ 是特征方程：

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha(\alpha-1) + (r-q)\alpha - r = 0$$

的根，即

$$\alpha_\pm = \frac{-(r-q-\frac{\sigma^2}{2}) \pm \sqrt{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}.$$

故

$$\alpha_+ > 0 > \alpha_-.$$

由边界条件 (6.8.7)，

$$B = 0.$$

记 $\alpha_- = \alpha$，由边界条件 (6.8.8),

$$A = 1.$$

从而 (6.8.6)　(6.8.8) 的解可表示为

$$V_0 = \left(\frac{S}{K}\right)^{\alpha}. \tag{6.8.9}$$

代入 (6.8.5)，函数 $u(S,t) = V_0(S) - V(S,t)$ 适合终边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, \quad (0 < S < K) & (6.8.10) \\ u(0,t) = \text{有界}, & (6.8.11) \\ u(K,t) = 0, & (6.8.12) \\ u(S,T) = \left(\dfrac{S}{K}\right)^{\alpha}. \quad (0 < S < K) & (6.8.13) \end{cases}$$

作自变量代换

$$x = \ln\frac{K}{S}. \tag{6.8.14}$$

则 $u(x,t)$ 适合半无界问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, & (0 < x < \infty) \\ u(0,t) = 0, & (0 \le t \le T) \\ u(x,T) = e^{-\alpha x}. & (0 < x < \infty) \end{cases}$$

作函数代换

$$u = e^{ax + b(T-t)}W, \tag{6.8.15}$$

这里

$$a = -\frac{1}{\sigma^2}(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2),$$

$$b=-r-\frac{1}{2\sigma^2}(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)^2.$$

则 $W(x,t)$ 适合

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, & (0<x<\infty)\\ W(0,t)=0, & (0\le t\le T)\\ W(x,T)=e^{-(\alpha+a)x}, & (0<x<\infty)\end{cases}$$

利用镜像法，对终值进行奇开拓，即定义 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-(\alpha+a)x}, & x>0,\\ -e^{(\alpha+a)x}, & x<0.\end{cases}$$

考虑 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, & (x\in R, 0\le t<T) & (6.8.16)\\ W(x,T)=\varphi(x). & (x\in R) & (6.8.17)\end{cases}$$

由于 $\varphi(x)$ 是奇函数，因此 $W(x,t)$ 亦是 x 的奇函数，故在 $x=0$ 上，自然适合边界条件:

$$W(0,t)=0.$$

由 Poisson 公式， Cauchy 问题 (6.8.16),(6.8.17) 的解可表为

$$\begin{aligned}W(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\varphi(\xi)d\xi\\ &=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\right]e^{-(\alpha+a)\xi}d\xi.\end{aligned}$$

代回 (6.8.15) 得到 $u(x,t)$ 的表达式，返回原自变量 (S,t)，得到 $u(S,t)$ 的表达式. 从而由 (6.8.5)，我们得到了美式两值期权的表达式.

特别当 $q=0,\alpha=1$ 时，我们有

$$V(S,t)=\left(\frac{K}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}N(d_3)+\left(\frac{S}{K}\right)N(d_1),$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{6.8.18}$$

$$d_3 = \frac{\ln\frac{S}{K} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{6.8.19}$$

这个表达式的推导请读者自己完成.

(B) Bermudan 期权

按合约规定，提前实施只限于期权有效期内的一些特定时间才可以进行. 在其他时间它与欧式期权一样不能提前实施. 人们把它称为 Bermudan 期权 (Bermudan (地名)，位于欧美两大洲的交界处).

设 $0 \le t_1 < \cdots < t_N = T$ 是看跌期权可以提前实施的时间，因此它的数学模型为：设

$$V(S,t) = \begin{cases} V_N(S,t), & t_{N-1} \le t \le t_N, \\ \vdots & \vdots \\ V_1(S,t), & 0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

则在区域 $\{0 \le S < \infty, t_{i-1} \le t \le t_i\}$ 上,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial t} - \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + (r-q)\dfrac{\partial V_i}{\partial S} - rV_i = 0, \\ V_i(S,t_i) = \max\{V_{i+1}(S,t_i), (K-S)^+\}, \qquad (i = 1,\cdots,N) \end{cases}$$

其中 $V_{N+1}(S,t_N) = (K-S)^+$.

(C) 美式封顶看涨期权 (American capped call options)

在原先美式看涨期权合约的基础上，增加以下的条款：当原生资产价格达到合约规定的上限 L ($L > K$) 时，发行人有权按价格 $L-K$ 回购. 这项条款的设置，其目的是明显的，期权发行人就是为了控制由于卖出美式看涨期权所面临的风险.

对具上限条款的美式看涨期权，它的收益函数为

$$\text{收益} = (\min(S_t, L) - K)^+,$$

因此它的数学模型是：在区域 $\Sigma^L\{0 \le S \le L; 0 \le t \le T\}$ 上求解定解问题：

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V-(S-K)^+\} = 0, & (\Sigma^L) \\ V(L,t) = L-K, & (0 \le t \le T) \\ V(S,T) = (S-K)^+. & (0 \le S \le L) \end{cases}$$

(D) 具有通知期的美式期权 (Ameircan options with warning time, make your mind up)

按合约规定持有人在决定实施以前要有一个通知期. 在通知发出以后, 持有人不得改变立意, 即在任何情况下, 在通知期到期日, 持有人必须按合约规定实施期权.

设通知期为 τ_0, 持有人在时刻 t_0 决定实施, 因此在 $t_0+\tau_0$ 时刻, 美式看涨期权的持有人的收益是

$$\text{收益} = S-K.$$

请注意: 这里已经没有"正部", 这表示持有人在任何情况下必须以敲定价 K 购进原生资产 S.

设 $V(S,t_0+\tau)(0\leq t\leq\tau_0)$ 是有通知期美式看涨期权在通知期间的价格, 则 V 适合定解问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\tau}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0, & (0\leq S<\infty, 0\leq\tau\leq\tau_0) \\ V|_{\tau=\tau_0}=S-K. & (0\leq S<\infty) \end{cases}$$

它的解可表为

$$V(S,t_0+\tau)=Se^{-q(\tau_0-\tau)}-Ke^{-r(\tau_0-\tau)}.$$

因此当 $\tau=0$ 时, 即在持有人在决定实施时期权的内在价值应为

$$V(S,t_0)=Se^{-q\tau_0}-Ke^{-r\tau_0}.$$

因此对于具有通知期 τ_0 的美式看涨期权, 它的价格必须满足

$$V(S,t)\geq Se^{-q\tau_0}-Ke^{-r\tau_0}.$$

据此我们可以写出它的数学模型: 在区域 $\Sigma\{0\leq S<\infty, 0\leq t\leq T\}$ 上求解定解问题:

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V-(Se^{-q\tau_0}-Ke^{-r\tau_0})\}, & (\Sigma) \\ V(S,T)-(S-K)^+. & (0\leq S<\infty) \end{cases}$$

作为这一章小结，我们归纳以下几个要点：

1. 美式期权的特征就是提前实施，期权持有人在整个期权的有效期间必须时刻注意是继续持有还是立即实施.

根据期权的内在价值是大于还是等于实施期权的收益，美式期权的定价分成两个区域：继续持有区域：

$$V(S,t) > (S-K)^+, \quad （看涨）$$

$$V(S,t) > (K-S)^+; \quad （看跌）$$

和 终止持有区域：

$$V(S,t) = (S-K)^+, \quad （看涨）$$

$$V(S,t) = (K-S)^+. \quad （看跌）$$

它们之间的交界面（线）称为 最佳实施边界. 美式期权持有人应该根据这张“图像”，制定自己的实施策略.

2. 确定美式期权定价的数学模型是求解一个偏微分方程自由边界问题——障碍问题. 这里障碍是期权的收益函数，解与障碍的重合集是期权的终止持有区域，重合集的边界称为自由边界，它是美式期权的最佳实施边界.

这个数学模型有两种完全等价的表述形式：

a. 变分不等方程形式. 在这里求解区域是整个区域 $\Sigma = \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$，自由边界隐含在整个求解过程之中，在定解问题的表述中并不明显出现.

b. 自由边界问题形式. 在这里求解区域只是继续持有区域 Σ_1：

$$\Sigma_1 = \{0 \le S \le S(t), 0 \le t \le T\}, \quad （看涨）$$

$$\Sigma_1 = \{S(t) \le S \le \infty, 0 \le t \le T\}. \quad （看跌）$$

自由边界 $S = S(t)$ 作为定解问题的边界 明显的 出现在定解问题的表述之中.

3. 美式期权定价是一个非线性问题，除了永久美式期权以外，它的定价一般无法用显式表达式给出. 因此对于美式期权，最佳实施边界的性态研究具有十分重要的意义.

若 $S_c(t), S_p(t)$ 和 $S_{c,\infty}, S_{p,\infty}$ 分别表示具有同一敲定价格的一般美式看涨，看跌期权和永久美式看涨看跌期权的最佳实施边界．那么对于美式看涨期权，我们有：

$$S_c(t)\text{单调递减，凸；}$$

$$\max(\frac{rK}{q}, K) = S_c(T) \leq S_c(t) < S_{c,\infty},$$

以及在 $t = T$ 附近的渐近展开式：

$$S_c(t) \approx \begin{cases} K(1 + \sigma\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}), & q = 0, \\ \frac{rK}{q}(1 + \alpha\sqrt{T-t}), & q < r. \end{cases}$$

对于 美式看跌期权，我们有

$$S_p(t)\text{单调递增，凸；}$$

$$S_{p,\infty} < S_c(t) \leq S_c(T) = \min(\frac{rK}{q}, K),$$

以及在 $t = T$ 附近的渐近展开式：

$$S_p(t) \approx \begin{cases} K(1 - \sigma\sqrt{(T-t)|\ln(T-t)|}), & q = 0, \\ \frac{rK}{q}(1 - \alpha\sqrt{T-t}), & q > r, \end{cases}$$

其中 α 是超越方程

$$\alpha^3 e^{\alpha^2/4} \int_\alpha^\infty e^{-\omega^2/4} d\omega = 2(2 - \alpha^2)$$

的根．

若最佳实施边界 $S = S(t)$ 为已知，或被近似的确定，那么美式期权的定价 $V(S,t)$ 就可由 (6.3.14) (6.3.16) 给出或近似的给出．

4. 美式期权定价一般只有通过数值方法求得．本章介绍了两种方法：

a. 差分法（显式和隐式）；

b. 切片法．

作为第五章 §5.7 的自然延伸，对于第三章 §3.5 介绍的美式期权的二叉树方法，我们证明了在忽略高阶小量的前提下，它等价于某个特定的显式差分格式，从而在偏微分方程框架下，为证明美式期权的二叉树方法的收敛性打下了基础．

5. 对于美式期权虽然看涨 — 看跌期权的平价公式不成立，但存在美式期权看涨 — 看跌期权的对称关系式

$$V_c(S,t;r,q)=\frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S},t;q,r)$$

以及

$$\sqrt{S_c(t;r,q)S_p(t;q,r)}=K,$$

这里 V_c、V_p 和 S_c,S_p 是美式看涨期权和看跌期权的价格和最佳实施边界.

习题

1. 考虑支付红利（红利率为 $q\geq 0$ ）的永久美式看涨期权. 试写出它的数学模型并直接求解，求出它的期权金和最佳实施边界.

2. 试研究美式永久期权对波动率 σ 的依赖关系，并说明它的金融意义.

3. 美式叉开式期权 (American straddle option) 是一张具有提前实施条款的合约，它的收益函数是

$$\begin{aligned}\text{收益}&=|S-K|\\&=(S-K)^+ +(K-S)^+.\end{aligned}$$

试建立考虑支付红利的永久美式叉开式期权的数学模型，并求出期权金和最佳实施边界. 又问，它的期权金能否相应的表成一张永久美式看涨期权和另一张永久美式看跌期权的期权金之和？为什么？试比较它们的期权金之间的大小.

4. 试写出具有通知期的永久美式看涨期权的数学模型，并求出它的期权金以及最佳实施边界.

5. 证明（定理 6.2 ）美式看涨 — 看跌期权的对称关系：

$$V_c(S,t;r,q)=\frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S},t;q,r)$$

和

$$\sqrt{S_c(t;r,q)S_p(t;q,r)}=K,$$

这里 $V_c(S,t;r,q),V_p(S,t;r,q)$ 以及 $S_c(t;r,q),S_p(t;q,r)$ 分别是具有相同到期日 T 和敲定价 K 的支付红利的美式（看涨，看跌）期权的价格和最佳实施边界.

6. 试证明不等式 (6.4.25). 即若 $q_1\geq q_2$ 时，美式看跌期权价格 V 适合

$$V(S,t;q_1)\geq V(S,t;q_2),$$

若 $V(S,t;q)$ 是美式看涨期权价格，问上述等式将有什么变化？

7. 试证明对于封顶美式看涨期权，它的最佳实施边界 $\hat{S}(t)$ 为

$$\hat{S}(t)=\min(L,S(t)),$$

这里 L 是合约规定的上限值， $S(t)$ 为没有封顶的美式看涨期权最佳实施边界.

8. 试求出封顶的永久美式看涨期权的期权金与最佳实施边界.

9. 试证明：具有同一敲定价的所有美式看涨期权中，永久美式看涨期权是最贵的. 即若 $V_T(S,t)$ 是到期日为 $t=T$ 的美式看涨期权价格，$V_\infty(S)$ 是永久美式期权的价格，则对一切 $T>0$，有

$$V_T(S,t)\le V_\infty(S),\qquad (0\le t\le T)$$

并由此证明

$$S_T(t)\le S_\infty,$$

这里 $S_T(t)$ 和 S_∞ 分别是具有相同到期日 T 的美式看涨期权和永久美式看涨期权的最佳实施边界.

第七章 多资产期权

多个风险资产的价格演化适合一组随机微分方程. 而基于多个风险资产的期权, 即 **多资产期权**(multi-asset options) 适合一个多个自变数的反抛物型方程. 不同形式的多资产期权具有不同的收益函数, 因此多资产期权定价问题就是求解一个多维反抛物型方程具有不同的 "终值" 条件的定解问题. 由于这里偏微分方程的维数决定于风险资产的个数, 所以即使能得到显式解, 要求它的值亦不是一件轻而易举的事情. 因此对于多资产期权定价一个重要的问题是: 研究有没有可能引进一个组合自变数, 把多资产期权定价问题转化为一维问题来处理.

§7.1 多风险资产的随机模型

为了考虑涉及多个原生风险资产的期权定价, 首先要建立多个风险资产的价格演化模型. 设 S_i 是第 i 个风险资产的价格 $(i = 1,\cdots,n)$, 它适合随机微分方程

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i, \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{7.1.1}$$

这里每一个随机元 dW_i 是标准 Brown 运动, 它们之间有一定的相关性, 即

$$E(dW_i) = 0, \tag{7.1.2}$$

$$Var(dW_i) = dt, \tag{7.1.3}$$

$$Cov(dW_i, dW_j) = \rho_{ij} dt, \quad (i \neq j) \tag{7.1.4}$$

其中 $Cov(\cdot,\cdot)$ 是协方差 (covariance) , 根据定义

$$\begin{aligned} Cov(dW_i, dW_j) &= E([dW_i - E(dW_i)][dW_j - E(dW_j)]) \\ &= E(dW_i dW_j), \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

随机微分方程 (7.1.1) 亦可采用以下的形式:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_{ij} dW_j, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{7.1.5}$$

其中 dW_i 是互相独立的标准 Brown 运动, 即

$$E(dW_i) = 0, \tag{7.1.6}$$

$$Var(dW_i) = dt, \tag{7.1.7}$$

$$Cov(dW_i, dW_j) = 0, \quad (i \neq j) \tag{7.1.8}$$

随机微分方程 (7.1.5) 可以改写为向量形式:

$$d\vec{S} = \vec{a}dt + [\sigma]d\vec{W}_t,$$

其中

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} \mu_1 S_1 \\ \vdots \\ \mu_n S_n \end{bmatrix}, \vec{W}_t = \begin{bmatrix} W_{1t} \\ \vdots \\ W_{mt} \end{bmatrix},$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} S_1 & \cdots & \sigma_{1m} S_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} S_n & \cdots & \sigma_{nm} S_n \end{bmatrix} = [S][\sigma_0],$$

这里

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{bmatrix},$$

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix}.$$

§7.2 Black-Scholes 方程

设 $S_1,\cdots,S_n$ 为 n 个风险资产（例如股票，汇率，……），它们适合几何 Brown 运动 (7.1.5).

设 V 是基于原生资产为 $S_1,\cdots,S_n$ 的期权价格，它是 $n+1$ 个变量 $S_1,\cdots,S_n$ 和 t 的函数：

$$V = V(S_1,\cdots,S_n,t). \tag{7.2.1}$$

Δ- 对冲原理

各选取 Δ_i 份原生资产 $S_i(i=1,\cdots,n)$，使它们与期权 V 对冲，即形成投资组合 Π：

$$\Pi = V(S_1,\cdots,S_n,t) - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i S_i, \tag{7.2.2}$$

使得它在时段 $(t,t+dt)$ 上是无风险的.

由多维随机过程的 Itô 公式，得到

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i dS_i - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i S_i q_i dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j}\right)dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial S_i}dS_i - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i dS_i - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i S_i q_i dt, \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

其中 q_i 是原生资产 S_i 的红利率，

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sigma_{ik}\sigma_{jk}, \quad (i,j=1,\cdots,n)$$

即

$$A = [a_{ij}] = \sigma_0\sigma_0^T,$$

这里 σ_0^T 是矩阵 σ_0 的转置矩阵.

选取 $\Delta_i(i=1,\cdots,n)$，使 Π 在 $(t,t+dt)$ 时间是无风险的，即

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \sum_{i=1}^{n}\Delta_i S_i)dt. \tag{7.2.4}$$

为此选

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}, \tag{7.2.5}$$

把 (7.2.5) 代入 (7.2.3),(7.2.4)，并消去 dt，得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^{n}(r-q_i)S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0. \tag{7.2.6}$$

这个方程称为 **多资产期权的** Black-Scholes **方程**.

由于二次型 (quadratic form)：

$$\eta^T A\eta = \eta^T\sigma_0\sigma_0^T\eta = |\sigma_0^T\eta|^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in \mathbf{R}^n$$

因此 $A = [a_{ij}]$ 是对称非负矩阵，故方程 (7.2.6) 是多维反抛物型方程.

设到期日 $(t = T)$ 期权的收益函数为 $P(S_1, \cdots, S_n)$，那么 **欧式多资产期权的数学模型** 为:

在区域 $\Sigma: \{0 \leq S_i < \infty(i = 1, \cdots, n); 0 \leq t \leq T\}$ 上，求解定解问题 (7.2.6) 和

$$V(S_1, \cdots, S_n, T) = P(S_1, \cdots, S_n). \tag{7.2.7}$$

§7.3 多维 Black-Scholes 公式

定解问题 (7.2.6),(7.2.7) 有显式解.

作变换

$$x_i = \ln S_i. \tag{7.3.1}$$

在变换 (7.3.1) 下，方程 (7.2.6) 转化为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}(r-q_i-\frac{a_{ii}}{2})\frac{\partial V}{\partial x_i} - rV = 0 \tag{7.3.2}$$

或

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla_x^T A \nabla_x V + \vec{b}^T\nabla_x V - rV = 0, \tag{7.3.3}$$

其中

$$A = [a_{ij}],$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} r - q_1 - \frac{a_{11}}{2} \\ \vdots \\ r - q_n - \frac{a_{nn}}{2} \end{bmatrix}, \tag{7.3.4}$$

$$\nabla_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

B^T 为矩阵（向量）B 的转置矩阵（向量）.

作自变量代换 $\vec{z} = B\vec{x}$，即

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{7.3.5}$$

选取适当的 B，使得方程 (7.3.3) 在新坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 下的二阶微商项的系数呈对角型. 由于

$$\nabla_x = B^T \nabla_z,$$

把它代入方程 (7.3.3)，得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla_z^T (BAB^T)\nabla_z V + (B\vec{b})^T \nabla_z V - rV = 0. \tag{7.3.6}$$

由于 A 是对称阵, 因此存在正交变换 B 使得 BAB^T 是对角型, 即存在自变量代换 (7.3.5)，其中

$$B^T B = BB^T = I, \tag{7.3.7}$$

使得

$$BAB^T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{7.3.8}$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是对称矩阵 A 的特征值，它是以下特征方程的 n 个实根:

$$\det|A - \lambda I| = 0. \tag{7.3.9}$$

设 $\vec{\xi}_i$ 是相应于特征值 λ_i 的特征向量，即

$$(A-\lambda_i I)\vec{\xi}_i=0, \tag{7.3.10}$$

且

$$\vec{\xi}_i^T\vec{\xi}_i=|\vec{\xi}_i|^2=1.$$

由线性代数理论知

$$B=\begin{bmatrix}\vec{\xi}_1^T\\ \vdots\\ \vec{\xi}_n^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn}\end{bmatrix}. \tag{7.3.11}$$

取 B 是矩阵 (7.3.11)，那么在变换 (7.3.5) 下，方程 (7.3.6) 有形式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 V}{\partial z_i^2}+\sum_{i=1}^{n}(\vec{\xi}_i^T\vec{b})\frac{\partial V}{\partial z_i}-rV=0. \tag{7.3.12}$$

因此在变换 (7.3.5) 下，定解问题 (7.2.6),(7.2.7) 转化为 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\text{方程(7.3.12)},\\ V(x_1,\cdots,x_n,t)=P(e^{x_1},\cdots,e^{x_n}).\end{cases} \tag{7.3.13}$$

为了求它的解，首先求方程 (7.3.12) 的基本解. 即求解方程 (7.3.12) 和终值条件:

$$V(z_1,\cdots,z_n,T)=\delta(z_1-z_1^0,\cdots,z_n-z_n^0), \tag{7.3.14}$$

这里 $\delta(z_1,\cdots,z_n)$ 是多维 Dirac 函数

$$\delta(z_1,\cdots,z_n)=\delta(z_1)\cdots\delta(z_n).$$

作函数代换

$$V=e^{\vec{\omega}^T\vec{z}+\beta(T-t)}W, \tag{7.3.15}$$

其中 β 是待定常数, $\vec{\omega}$ 是待定 n 维向量:

$$\vec{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}.$$

把 (7.3.15) 代入方程 (7.3.12)，得到

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i\omega_i+(\vec{\xi}_i^T\vec{b})]\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 W}{\partial z_i^2}$$

$$-[r+\beta-\frac{1}{2}(\vec{\omega}^T\Lambda\vec{\omega})-\vec{b}^TB^T\vec{\omega}]W=0.$$

取

$$\omega_i=-\frac{1}{\lambda_i}(\vec{\xi}_i^T\vec{b}) \tag{7.3.16}$$

或

$$\vec{\omega}=-\Lambda^{-1}B\vec{b}, \tag{7.3.17}$$

以及

$$\begin{aligned}\beta &= -r+\frac{1}{2}\vec{\omega}^T\Lambda\vec{\omega}+\vec{b}^TB^T\vec{\omega}\\ &= -r+\frac{1}{2}(B\vec{b})^T\Lambda^{-1}\Lambda\Lambda^{-1}(B\vec{b})-\vec{b}^TB^T\Lambda^{-1}B\vec{b}\\ &= -r+\frac{1}{2}(B\vec{b})^T\Lambda^{-1}(B\vec{b})-(B\vec{b})^T\Lambda^{-1}(B\vec{b})\\ &= -r-\frac{1}{2}(B\vec{b})^T\Lambda^{-1}(B\vec{b}).\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

从而方程 (7.3.12) 可转化为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 W}{\partial z_i^2}=0. \tag{7.3.19}$$

相应的终值条件 (7.3.14) 转化为

$$W(z_1,\cdots,z_n,T)=e^{-\vec{\omega}^T\vec{z_0}}\delta(z_1-z_1^0,\cdots,z_n-z_n^0), \tag{7.3.20}$$

这里

$$\vec{z_0}=\begin{bmatrix} z_1^0\\ \vdots\\ z_n^0\end{bmatrix}.$$

根据热传导方程理论，定解问题 (7.3.19),(7.3.20) 的解具有形式:

$$
\begin{aligned}
W(z,t;z_0) &= e^{-\vec{\alpha}^T\vec{z_0}}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i(T-t)}}e^{-\frac{(z_i-z_i^0)^2}{2\lambda_i(T-t)}}\\
&= e^{-\vec{\alpha}^T\vec{z_0}}\left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}}(\det\Lambda^{-1})^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdot\exp\left(-\frac{(\vec{z}-\vec{z_0})^T\Lambda^{-1}(\vec{z}-\vec{z_0})}{2(T-t)}\right).
\end{aligned}
$$

回到原来函数 V 以及自变量 $\vec{x}$，由 (7.3.5),(7.3.15) 我们得到 Cauchy 问题 (7.3.2),(7.3.13) 的基本解，把它记作 $\Gamma(x;t;x_0)$，则

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x,t;x_0) &= \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}}\frac{e^{-r(T-t)}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad\cdot\exp\left\{-\frac{(B(\vec{x}-\vec{x}_0))^T\Lambda^{-1}(B(\vec{x}-\vec{x}_0))}{2(T-t)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}(B\vec{b})^T\Lambda^{-1}(B\vec{b})(T-t)-(\Lambda^{-1}B\vec{b})^TB(\vec{x}-\vec{x}_0)\right\}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
B^T\Lambda^{-1}B = B^{-1}\Lambda^{-1}(B^{-1})^T = (B^T\Lambda B)^{-1} = A^{-1},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x,t;x_0) &= \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}}\frac{e^{-r(T-t)}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}}\cdot\\
&\quad\exp\left\{-\frac{1}{2(T-t)}\left[(\vec{x}-\vec{x}_0+\vec{b}(T-t))^TA^{-1}(\vec{x}-\vec{x}_0+\vec{b}(T-t))\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{7.3.21}
$$

从而 Cauchy 问题 (7.3.12),(7.3.13) 的解 $V(x,t)$ 可以表为

$$
V(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x,t;\xi)P(e^{\xi_1},\cdots,e^{\xi_n})d\xi_1\cdots d\xi_n.
$$

回到原变量 $S_1, \cdots, S_n$ 由 (7.3.1) 得到多资产欧式期权的定价公式:

$$V(S,t) = \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-r(T-t)}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \frac{P(\eta_1, \cdots, \eta_n)}{\eta_1, \cdots, \eta_n} \exp\left[\frac{\vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha}}{2(T-t)}\right] d\eta_1 \cdots d\eta_n, \tag{7.3.22}$$

其中

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

以及

$$\alpha_i = \ln \frac{S_i}{\eta_i} + (r - q_i - \frac{a_{ii}}{2})(T-t). \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{7.3.23}$$

(7.3.22) 被称为 **多资产欧式期权的** Black-Scholes **公式**.

附注 公式 (7.3.22) 表明: 任何多资产欧式期权定价都有显式表达式, 但这是一个被积函数带有奇性的多重积分. 如果原生资产的个数比较多, 也就是说, 当这个多重积分的重数比较高时, 这个积分值的计算仍是一个很困难的问题. 因此必须要考虑寻找更加有效可行的算法. 从这个意义上来讲, 对于多资产欧式期权定价, 有显式表达只是解决问题的第一步. 要真正解决这个问题还必须针对问题作具体分析, 尽可能找到简化的办法.

§7.4 彩虹期权

多资产欧式期权一般可以分成三大类:

(I) **彩虹期权** (rainbow options),

(II) **一篮子期权** (basket options),

(III) **双币种期权** (quanto options).

我们将分别对每一类多资产期权说明它们的金融意义, 给出到期实施的收益函数以及期权定价公式等, 其中特别关心的一点是有没有可能化为一维问题.

彩虹是多色调的组合. 彩虹期权的定价决定于多种原生资产价格的变化. 彩虹期权按照到期日实施的收益函数的不同分成以下几个品种:

(A) **择好期权** (Better-of options)

择好期权的持有人在到期日有权取得在多个原生资产中的最佳回报.

例 某投资人拟投资股票指数 A 和股票指数 B , 但它无法肯定在未来哪一种股票指数的回报更高些. 为此它购买一张择好期权, 确保在期权到期日能取得两种股票指数的最佳回报.

在到期日择好期权的收益可以分成两类:

(1) 按照价格本身择优收益, 即

$$\text{收益} = \max(\alpha_1 S_1(T), \cdots, \alpha_n S_n(T)),$$

这里 $S_i(T)$ 是第 i 种风险资产在 $t = T$ 时刻的价格, α_i 是保证各种风险资产价格处于同一水平的比例因子.

(2) 按照价格的增长率择优收益, 即

$$\text{收益（率）} = \max(\hat{S}_1(T), \cdots, \hat{S}_n(T)),$$

这里 $\hat{S}_i(T)$ 是第 i 种风险资产在 $t = T$ 时刻的价格的增长率. 由于

$$\hat{S}_i(T) = \frac{S_i(T) - S_i(0)}{S_i(0)} = \frac{S_i(T)}{S_i(0)} - 1,$$

因此

$$\max(\hat{S}_1(T), \cdots, \hat{S}_n(T)) = \max(\alpha_1 S_1(T), \cdots, \alpha_n S_n(T)) - 1,$$

这里

$$\alpha_i = \frac{1}{S_i(0)}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

因此对于多资产欧式择好期权, 我们通常把它的收益函数表示为

$$\text{收益} = \max(S_1(T), \cdots, S_n(T)),$$

其中 $S_i(t)$ 可以是处于同一价格水平的第 i 种风险资产的价格, 亦可以认为它是第 i 种风险资产增长的比率（百分数）.

择好期权的数学模型：求解方程 (7.2.6) 和终值条件：

$$V(S_1,\cdots,S_n,T)=\max\{S_1,\cdots,S_n\}. \tag{7.4.1}$$

它的解可以由 Black-Scholes 公式 (7.3.22) 给出，即

$$\begin{aligned}V(S_1,\cdots,S_n,t) = & \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}} e^{-r(T-t)}\det|A|^{-\frac{1}{2}}\\ & \cdot\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{\max(\eta_1,\cdots,\eta_n)}{\eta_1,\cdots,\eta_n}\exp\left\{\frac{\vec{\alpha}^T A^{-1}\vec{\alpha}}{2(T-t)}\right\}d\eta_1\cdots d\eta_n,\end{aligned}$$

其中 $\vec{\alpha}$ 的定义见 (7.3.23).

附注 与择好期权相对应，彩虹期权的另一个品种是择差期权 (worse-of options)，它在期权到期日的的收益为

$$收益=\min(S_1(T),\cdots,S_n(T)).$$

(B) **利差期权** (outer performance options)

利差期权是按照二种不同原生资产价格或增长率的差异决定实施的合约.

例 某投资人持有风险资产 A 的头寸，但考虑到未来风险资产 A 可能出现比风险资产 B 表现差的情况，它购买一张利差期权对现有的持有头寸进行保护，即若风险资产 B 比风险资产 A 有更佳表现，则按它们的差额进行补偿. 因此在到期日该期权的收益是 $\max(S_B(T)-S_A(T),0)$，这里 $S_A(T),S_B(T)$ 可以是风险资产 A,B 处于同一水平的价格，亦可以是风险资产 A,B 的增长率 (百分比).

利差期权的数学模型：求解方程 (7.2.6) 和终值条件：

$$V(S_1,S_2,T)=\max\{S_2-S_1,0\}. \tag{7.4.2}$$

附注 作为利差期权的推广，我们可以考虑差价期权 (spread options). 对于差价期权而言，它在期权到期日的收益函数是

$$V(S_1,S_2,T)=\max(S_2-S_1-K,0), \tag{7.4.3}$$

这里 K 是敲定差价.

附注 另一类与利差期权相关的期权是 **资产交换期权** (options to exchange one asset to another)，即若投资人持有风险资产 A 的头寸，如果未来风险资产 B 比风险资产 A 有较好的表现，他希望把风险资产 A 换成风险资产 B，或者把风险资产 A 加上一定数量现金 K 换成风险资产 B，为此它购买一张资产交换期权，以便实现它的构想.

资产交换期权的数学模型：求解定解问题 (7.2.6),(7.4.2) 或定解问题 (7.2.6),(7.4.3).

附注 两个风险资产的择好（择差）欧式期权可以分解为一个风险资产与另一个资产交换期权的组合. 事实上，因为欧式期权是线性问题，而在期权的到期日，择好（择差）期权的收益函数可表为

$$\max(S_1(T),S_2(T)) = S_1(T) + \max(S_2(T) - S_1(T),0)$$

以及

$$\min(S_1(T),S_2(T)) = S_2(T) - \max(S_2(T) - S_1(T),0).$$

(C) **极大看涨期权**(maximum call options) 和 **极小看涨期权**(minimum call options)

在极大看涨期权的合约中规定有 n 种可能选择：以敲定价格 K_i 购买风险资产 $S_i,(i=1,\cdots,n)$ 的权利. 期权持有人有权在合约到期日选择表现最佳的一种，使实施的效益达到极大. 因此对于极大看涨期权，在期权到期日的收益为

$$收益 = \max\{(S_1(T)-K_1)^+,\cdots,(S_n(T)-K_n)^+\}.$$

极大看涨期权定价模型：求解方程 (7.2.6) 和终值条件

$$V(S_1,\cdots,S_n,T) = \max\{(S_1-K_1)^+,\cdots,(S_n-K_n)^+\}. \tag{7.4.4}$$

它的解可由 Black-Scholes 公式 (7.3.22) 给出.

附注 在极大看涨期权，若取

$$K_1 = \cdots = K_n = K,$$

则收益函数简化为

$$V(S_1,\cdots,S_n,T)=\max\{(S_1-K),\cdots,(S_n-K),0\}=(\max\{S_1,\cdots,S_n\}-K)^+. \tag{7.4.5}$$

人们通常把这类极大看涨期权看作是单个资产的标准看涨期权的推广.

附注 与极大(极小)看涨期权相对应，我们亦可以考虑**极大(小)看跌期权**(max(min) put options). 特别当 $K_1=\cdots=K_n=K$ 时，它的收益函数为

$$\text{收益}=(K-\max(S_1,\cdots,S_n))^+ \tag{7.4.6}$$

或

$$\text{收益}=(K-\min(S_1,\cdots,S_n))^+. \tag{7.4.7}$$

人们通常把它看作是单个资产的标准看跌期权的推广.

以下我们讨论哪一些彩虹期权的定价问题可以化为一维问题. 在数学上来讲，就是探求哪一些定解问题可以通过引进一个新的组合自变量，把原来的方程，定解条件和定解区域都化成只依赖这个组合自变量的新的定解问题和定解区域.

二个风险资产的利差期权和择好(差)期权都可以化成一维问题.

首先我们从利差期权开始.

利差期权定价问题的数学模型是求解定解问题 (7.2.6),(7.4.2): 即在区域 $\Sigma:\{(S_1,S_2,t)|0\le S_1<\infty,0\le S_2<\infty,0\le t\le T\}$ 上，求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\left[a_{11}S_1^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}+2a_{12}S_1S_2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2}+a_{22}S_2^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right]\\ \qquad +(r-q_1)S_1\dfrac{\partial V}{\partial S_1}+(r-q_2)S_2\dfrac{\partial V}{\partial S_2}-rV=0, & (7.4.8)\\ V(S_1,S_2,T)=\max(S_2-S_1,0). & (7.4.9)\end{cases}$$

令

$$\xi=\frac{S_1}{S_2}, \tag{7.4.10}$$

$$u(\xi,t)=V(S_1,S_2,t)/S_2. \tag{7.4.11}$$

在变换 (7.4.10),(7.4.11) 下，

$$\frac{\partial V}{\partial S_1}=S_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_1}=\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S_2} = u + S_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = u - \xi\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} = \frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = -\frac{\xi}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} - \xi\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{\xi^2}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

把它们代入 (7.4.8)，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}[a_{11} - 2a_{12} + a_{22}]\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (q_2 - q_1)\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - q_2 u = 0. \qquad (7.4.12)$$

在变换 (7.4.10),(7.4.11) 下，终值条件 (7.4.9) 转化为

$$u(\xi, T) = \frac{1}{S_2}V(S_1, S_2, T) = \frac{1}{S_2}\max(S_2 - S_1, 0) = (1 - \xi)^+. \qquad (7.4.13)$$

容易看出在变换 (7.4.10) 下，定解区域 Σ 转化为区域:

$$\{0 \le \xi < \infty, 0 \le t \le T\}.$$

因此在变换 (7.4.10),(7.4.11) 下,给定在区域 Σ 上的定解问题 (7.4.8),(7.4.9) 转化为变量为 (ξ, t) 的一个标准的欧式看跌期权的定价问题. 由 Black-Scholes 公式得

$$u(\xi, t) = -e^{-q_1(T-t)}\xi N(-\hat{d}_1) + e^{-q_2(T-t)}N(-\hat{d}_2), \qquad (7.4.14)$$

其中

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\xi + \left[q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}, \qquad (7.4.15)$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}. \qquad (7.4.16)$$

回到原变量 (S_1, S_2, t)，由变换 (7.4.10),(7.4.11) 的逆变换，得

$$V(S_1, S_2, t) = S_2 e^{-q_2(T-t)}N(-\tilde{d}_2) - S_1 e^{-q_1(T-t)}N(-\tilde{d}_1), \qquad (7.4.17)$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\frac{S_1}{S_2} + \left[q_2 - q_1 - \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}, \tag{7.4.18}$$

$$\tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}. \tag{7.4.19}$$

二个风险资产的择好期权的定价模型：在区域 Σ 上求解定解方程 (7.4.8) 和终值条件：

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1, S_2). \tag{7.4.20}$$

同样作代换 (7.4.10),(7.4.11)，从而 $u(\xi, t)$ 在区域 $\{0 \le \xi < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上，适合方程 (7.4.12) 以及终值条件：

$$u(\xi, T) = \frac{1}{S_2} V(S_1, S_2, T) = \max(\xi, 1) = (1-\xi)^+ + \xi. \tag{7.4.21}$$

因此 $u(\xi, t)$ 可表成一个标准看跌期权 (7.4.14) 以及函数 $\xi e^{-q_1(T-t)}$ 的和．回到原变量 (S_1, S_2, t)，我们有

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, t) &= S_2 \left[\frac{S_1}{S_2}(1 - N(-\tilde{d}_1))e^{-q_1(T-t)} + e^{-q_2(T-t)} N(-\tilde{d}_2)\right] \\ &= S_1 e^{-q_1(T-t)} N(d_{1,2}) + S_2 e^{-q_2(T-t)} N(d_{2,1}), \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

其中

$$d_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_1}{S_2} + \left[q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}, \tag{7.4.23}$$

$$d_{2,1} = \frac{\ln\frac{S_2}{S_1} + \left[q_1 - q_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}. \tag{7.4.24}$$

§7.5 一篮子期权

一篮子期权是一种多资产期权，它在期权到期日的收益为

$$\text{收益} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_i - K\right)^+, \tag{7.5.1}$$

其中 α_i 是第 i 种资产 S_i 在一篮子资产中所占的比例.

一篮子期权通常使用于多种外国货币的交易. S_i 是第 i 种外国货币的汇率, K 是由不同外国货币交易费的比率决定的加权平均汇率.

根据投资组合理论，一篮子风险资产的波动率一般来说相对比较小，因此一篮子期权金是小于按每一个个别币种购买期权所付出的期权金的总和.

由多维 Black-Scholes 公式我们可以给出一篮子期权的定价公式.

有没有可能把一篮子期权定价问题化成一维问题呢？回答是否定的！因为一篮子期权是 n 种原生资产价格的 **算术平均**, 而每一种原生资产适合的是 **几何** Brown **运动**. 但是如果一篮子期权在到期日的收益为 n 种原生资产价格的几何平均，即收益函数如取为

$$\text{收益} = (\prod_{i=1}^{n} S_i^{\alpha_i} - K)^+, \tag{7.5.2}$$

其中 $\sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$ ，那么这个一篮子期权的定价可以化为一维问题.

作变换

$$x_i = \ln S_i, \tag{7.5.3}$$

在变换 (7.5.3) 下，方程 (7.2.6) 转化为 (7.3.2)，收益函数转化为

$$(\prod_{i=1}^{n} S_i^{\alpha_i} - K)^+ = \left(\exp\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\} - K\right)^+. \tag{7.5.4}$$

取

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \tag{7.5.5}$$

由于在变换 (7.5.5) 下,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\alpha_i,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}.$$

因此方程 (7.3.2) 在变换 (7.5.5) 下转化为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + (r - \hat{q} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)\frac{\partial V}{\partial \xi} - rV = 0, \tag{7.5.6}$$

其中

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j,$$

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(q_i + \frac{a_{ii}}{2}\right) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}.$$

由 (7.5.4),(7.5.5)，终值条件具有形式

$$V(\xi,T) = (e^{\xi} - K)^+, \tag{7.5.7}$$

从而由标准欧式看涨期权的 Black-Scholes 公式，得到 $V(\xi,t)$ 的表达式. 回到原变数 $(S_1,\cdots,S_n,t)$，从而有

$$V = e^{-\hat{q}(T-t)}S_1^{\alpha_1}\cdots S_n^{\alpha_n}N(\hat{d}_1) - e^{-r(T-t)}KN(\hat{d}_2), \tag{7.5.8}$$

其中

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S_1^{\alpha_1}\cdots S_n^{\alpha_n}}{K} + \left[r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right](T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{(T-t)}}. \tag{7.5.9}$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T-t}. \tag{7.5.10}$$

§7.6 双币种期权

双币种期权是指投资于外国证券所签订的期权合约. 一般来说，它的风险除依赖于外国证券价格的波动以外，还依赖于外国货币的汇率变化.

例 一中国投资者在欧洲买一张敲定价为 K（欧元）的欧洲某公司股票的欧式看涨期权，问如何去确定这张欧元股票期权的人民币价格.

这里涉及两种原生风险资产：一是欧洲股票价格 S_1（欧元），另一个是欧元汇率（1 欧元的人民币值）S_2（元）. 这里期权实施时的欧元汇率有二种选择：

(1) 即时汇率 $S_2(t)$，

(2) 不低于保证汇率 S_2^0 的即时汇率 $S_2(t)$.

所以在期权到期日的收益函数为

$$收益函数 = S_2(T)(S_1(T) - K)^+ \tag{7.6.1}$$

或

$$\text{收益函数} = \max(S_2(T), S_2^0)(S_1(T) - K)^+$$
$$= (S_2(T) - S_2^0)^+(S_1^{(T)} - K)^+ + S_2^0(S_1^{(T)} - K)^-. \quad (7.6.2)$$

现在建立双币种期权的本国（人民币）价格所适合的偏微分方程.

设

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1, \quad (7.6.3)$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2, \quad (7.6.4)$$

其中 S_1 是欧洲股票价格（欧元）, S_2 是欧元汇率（1 欧元的人民币价）, 且

$$E(dW_i) = 0, Var(dW_i) = dt, \quad (i = 1, 2)$$

$$Cov(dW_1, dW_2) = \rho dt. \quad (|\rho| < 1)$$

设期权定价为 V（人民币元）:

$$V = V(S_1, S_2, t).$$

由 Δ- 对冲原理, 形成投资组合 Π（人民币元）:

$$\Pi = V - \Delta_1 S_2 S_1 - \Delta_2 S_2. \quad (7.6.5)$$

选取 Δ_1, Δ_2 使得 Π 在 $(t, t+dt)$ 时段内是无风险的, 即

$$d\Pi = r_1 \Pi dt, \quad (7.6.6)$$

$$d\Pi = dV - \Delta_1 d(S_1 S_2) - \Delta_2 dS_2 - \Delta_1 S_2 S_1 q dt - \Delta_2 S_2 r_2 dt,$$

其中 r_1 是本国无风险利率, r_2 是外国无风险利率, q 是风险资产 S_1 的红利率. 由 Itô 公式:

$$dV = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}[\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}]\right\} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2, \quad (7.6.7)$$

$$d(S_1S_2) = S_1dS_2 + S_2dS_1 + \sigma_1\sigma_2S_1S_2\rho dt. \tag{7.6.8}$$

因此由 (7.6.6)—(7.6.8)，得到

$$\begin{aligned}
&r_1(V - \Delta_1S_1S_2 - \Delta_2S_2)dt \\
&= \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}[\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2}\right. \\
&+ \left.\sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}] - \Delta_1\sigma_1\sigma_2S_1S_2\rho\right\}dt - \Delta_1S_1S_2qdt \\
&- \Delta_2S_2r_2dt + (\frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1S_2)dS_1 \\
&+ (\frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_1S_1 - \Delta_2)dS_2.
\end{aligned} \tag{7.6.9}$$

取

$$\Delta_1S_2 = \frac{\partial V}{\partial S_1},$$

$$\Delta_1S_1 + \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}.$$

解之得到

$$\Delta_1 = \frac{1}{S_2}\frac{\partial V}{\partial S_1}, \tag{7.6.10}$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2} - \frac{S_1}{S_2}\frac{\partial V}{\partial S_1}. \tag{7.6.11}$$

把 (7.6.10),(7.6.11) 代入 (7.6.9)，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}[\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + \sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}] \\
&\quad + (r_1 - q - \sigma_1\sigma_2\rho)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + (r_1 - r_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2} \\
&\quad + (r_2 - r_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} - r_1V = 0.
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}[\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + \sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}] \\
&\quad + (r_1 - \hat{q}_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + (r_1 - \hat{q}_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2} - r_1V = 0,
\end{aligned} \tag{7.6.12}$$

其中

$$\hat{q}_1 = r_1 - r_2 + q + \sigma_1\sigma_2\rho, \tag{7.6.13}$$

$$\hat{q}_2 = r_2. \tag{7.6.14}$$

在期权的到期日 $t=T$ 的收益函数（见 (7.6.1),(7.6.2)）

$$V(S_1, S_2, T) = S_2(S_1 - K)^+ \tag{7.6.15}$$

或

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_2, S_2^0)(S_1 - K)^+. \tag{7.6.16}$$

双币种期权的数学模型是一个多维偏微分方程的定解问题 (7.6.12),(7.6.15) 或（7-6-12),(7.6.16). 由多维 Black-Scholes 公式 (7.3.22) 我们可以给出期权定价的显式表达式. 以定解问题 (7.6.12),(7.6.15) 为例,

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, t) = & \frac{1}{2\pi(T-t)} e^{-r_1(T-t)} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\eta_1 - K)^+}{\eta_1} \exp\left[\frac{\sigma_2^2\alpha_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\alpha_1\alpha_2 + \sigma_1^2\alpha_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}\right] d\eta_1 d\eta_2, \end{aligned} \tag{7.6.17}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \ln\frac{S_1}{\eta_1} + (r_2 - q - \sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t), \\ \alpha_2 &= \ln\frac{S_2}{\eta_2} + (r_1 - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t). \end{aligned}$$

请注意：在利用 (7.3.22) 推导 (7.6.17) 时，我们用到了

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\det A = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2),$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

§7.7 多资产美式期权

与单个资产美式期权一样，**多资产美式期权**(American multi-asset options) 定价的数学模型是一个抛物型变分不等方程.

设

$$\Sigma = \left\{ (S_1, \cdots, S_n, t) \mid (S_1, \cdots, S_n) \in \mathbf{R}_+^n, 0 \leq t < T \right\},$$

$$(\mathbf{R}_+^n = \{(S_1, \cdots, S_n) | 0 \leq S_i < \infty, i = 1, \cdots, n\}.)$$

$V = V(S_1, \cdots, S_n, t)$ 是美式期权的定价，则在 Σ 上 V 适合以下定解问题:

$$\begin{cases} \min\left\{-\frac{\partial V}{\partial t} - \mathcal{L}V, V - P(S_1, \cdots, S_n)\right\} = 0, \quad (\Sigma) & (7.7.1) \\ V(S_1, \cdots, S_n) = P(S_1, \cdots, S_n), \quad (\mathbf{R}_+^n) & (7.7.2) \end{cases}$$

这里 $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V$ 是由 (7.2.6) 给出的多维 Black-Scholes 微分算子:

$$\mathcal{L}V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^{n}(r - q_i) S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV,$$

$P(S_1, \cdots, S_n)$ 是期权实施的收益函数. 方程 (7.7.1) 表明: 在期权的持有区域 Σ_1 内:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V = 0,$$

$$V > P(S_1, \cdots, S_n);$$

而在期权的终止区域 Σ_2 内:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}V \leq 0,$$

$$V = P(S_1, \cdots, S_n).$$

在两个区域 Σ_1 与 Σ_2 之间的交界部分 Γ 是由 n 维曲面构成的最佳实施边界. V 作为 $n+1$ 个变量 $(S_1, \cdots, S_n, t)$ 的函数，在整个区域 $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Gamma \bigcup \Sigma_2$ 上，它本身以及它对 $S_1, \cdots, S_n$ 的微商，即 V 与 $\nabla_x V$ 是连续的. 与单个资产美式期权的数学模型一样，我们同样可以把 (7.7.1),(7.7.2) 写成自由边界问题的形式，但是必须看到: 对于多资产美式期权的最佳实施边界 (即自由边界) 的结构是十分复杂的，因此我们必须结合不同的收益函数 $P(S_1, \cdots, S_n)$ 来具体研究 Γ 的性态.

为了研究最佳实施边界 Γ 的性态，我们必须首先对定价 $V=V(S_1,\cdots,S_n,t)$ 的性质进行研究. 与 §6.4 相仿，我们通过引进惩罚函数方法，研究 $\frac{\partial V}{\partial S_i},\frac{\partial V}{\partial t}$ 的符号. 由于这些证明在方法上是相似的，因此在这里我们只引用结论，而把具体证明留给读者.

定理 7.1 设收益函数 $P(S_1,\cdots,S_n)$ 适合以下条件:

(1) $P(S_1,\cdots,S_n)$ 是 Lipschitz 连续函数;

(2) 存在 $P_\varepsilon(S_1,\cdots,S_n)\in C^\infty(\mathbf{R}_+^n)$，使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon(S_1,\cdots,S_n)=P(S_1,\cdots,S_n),$$

并在 $\mathbf{R}_+^n$ 的任一有界闭子区域上一致收敛;

(3) $$\frac{\partial P_\varepsilon}{\partial S_i}>0\ (\text{或}\ \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial S_i}<0\ ),\tag{7.7.3}$$

并在 $\mathbf{R}_+^n$ 的任一有界闭子区域 D 上存在与 ϵ 无关而只依赖于区域 D 的常数 C_D，使得

$$\mathcal{L}P_\varepsilon\geq C_D,\tag{7.7.4}$$

则多资产美式期权定价问题 (7.7.1),(7.7.2) 的解具有性质:

(1) $V(S_1,\cdots,S_n,t)$ 是 $S_i(i=1,\cdots n)$ 的单调非减（增）函数,

(2) $V(S_1,\cdots,S_n,t)$ 是 t 的单调非增函数.

现在我们回过来结合具体的收益函数，研究多资产美式期权的最佳实施边界的性质.

(A)两个风险资产的美式交换期权(American option to exchange one asset for another)

两个风险资产的美式交换期权亦就是两个风险资产的美式择好期权 (American better-of options on two assets)，它的数学模型是求解:

$$\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-\mathcal{L}V,V-P(S_1,S_2)\right\}=0, & (\Sigma) \qquad (7.7.5)\\ V|_{t=T}=P(S_1,S_2), & (S_1,S_2\in\mathbf{R}_+^2) \qquad (7.7.6)\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{L}V = \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right] + (r-q_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + (r-q_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0, \tag{7.7.7}$$

$$P(S_1, S_2) = \max(S_1, S_2). \tag{7.7.8}$$

与 §7.4 相仿，我们引入代换 (7.4.10),(7.4.11)

$$\xi = \frac{S_1}{S_2}, \qquad u(\xi, t) = \frac{V(S_1, S_2, t)}{S_2}. \tag{7.7.9}$$

在这个代换下，定解问题 (7.7.5),(7.7.6) 可以化为一维形式：在

$$\hat{\Sigma} = \{(\xi, t)\,|0 \le \xi \le \infty, 0 \le t \le T\}$$

上求解：

$$\begin{cases} \min\left\{-\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (q_2 - q_1)\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi} \right. \\ \qquad\qquad \left. + q_2 u, u - \max(\xi, 1)\right\} = 0, & (7.7.10) \\ u\,|_{t=T} = \max(\xi, 1), & (7.7.11) \end{cases}$$

其中

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2. \tag{7.7.12}$$

设

$$q_1, q_2 > 0, \tag{7.7.13}$$

我们可以把 $\hat{\Sigma}$ 表为 $\hat{\Sigma}_1 \cup \hat{\Gamma} \cup \hat{\Sigma}_2$，这里 $\hat{\Sigma}_1$ 是 u 的“继续持有”区域：

$$u > \max(\xi, 1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (q_2 - q_1)\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - q_2 u = 0;$$

$\hat{\Sigma}_2$ 是 u 的“终止持有”区域：

$$u = \max(\xi, 1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (q_2 - q_1)\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - q_2 u \le 0;$$

$\hat{\Gamma}$ 是 $\hat{\Sigma}_1$ 与 $\hat{\Sigma}_2$ 相交的边界.

定理 7.2 假设 (7.7.13) 成立，则对于定解问题 (7.7.10),(7.7.11) 的解，它的继续持有区域是：

$$\hat{\Sigma}_1 = \{(\xi,t)\,|\xi_1(t) \le \xi \le \xi_2(t), 0 \le t \le T\},$$

其中

$$\xi_1(T) = \xi_2(T) = 1,$$

$$\xi_1(t) \text{ 单调非减},$$
$$\xi_2(t) \text{ 单调非增};$$

在 $\hat{\Sigma}_1$ 上，u 适合自由边界问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (q_2 - q_1)\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - q_2 u = 0, \quad (\hat{\Sigma}_1) & (7.7.14) \\ u(\xi_1(t),t) = 1, \quad (0 \le t \le T) & (7.7.15) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_1(t),t) = 0, \quad (0 \le t \le T) & (7.7.16) \\ u(\xi_2(t),t) = \xi, \quad (0 \le t \le T) & (7.7.17) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_2(t),t) = 1. \quad (0 \le t \le T) & (7.7.18) \end{cases}$$

证明 首先证明 $\hat{\Sigma}_1$ 的边界 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 与直线 $t=T$ 的交集：$\partial\hat{\Sigma}\bigcap\{t=T\}$ 不可能是开集. 假如不然，则存在 $(a,b)\in\partial\hat{\Sigma}\bigcap\{t=T\}$，由于在 $\hat{\Sigma}$ 内 u 适合抛物方程 (7.7.14)，因此由抛物型方程解的正则性，在 $t=T$ 上，除了 $\xi=1$ 以外，在 (a,b) 内有 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} &= \left[-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - (q_2 - q_1)\xi\frac{\partial}{\partial \xi} + q_2\right]\max(\xi,1) \\ &= \begin{cases} q_1\xi, & \xi > 1, \\ q_2, & \xi < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

由假设 (7.7.13)，在 (a,b) 内（除 $\xi=1$ 以外），$\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=T} > 0$. 因此在 $t=T$ 附近，u 严格单调递增，即

$$u(\xi,t) < u(\xi,T) = \max(1,\xi).$$

这与 $u \ge \max(1,\xi)$ 相矛盾.

若记 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 是 $\hat{\Sigma}_1$ 的侧边界，那么由定理 7.1 知， $u(\xi,t)$ 对 ξ 是单调非减，因此再一次利用与上面相仿的讨论，不难推知

$$\partial\hat{\Sigma}_1 \cap \{t=T\} = 点(1,T),$$

且从 $(1,T)$ 出发可引出两条连续的自由边界： $\xi=\xi_1(t)$ 和 $\xi=\xi_2(t)$ ，它们作为 Σ_1 的边界，在 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 上 u 适合自由边界条件 (7.7.15),(7.7.16) 和 (7.7.17),(7.7.18).

现在进一步证明：每一条直线 $\xi=\xi_0$ 与 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 只能有一个交点.

根据上面的证明知道：存在 $0\le\tau(\xi_0)\le T$，使得线段 $\{(\xi,\tau)\,|\,\xi=\xi_0,\tau(\xi_0)\le\tau\le T\}$ 属于“终止”持有区域 $\hat{\Sigma}_2$. 这里

$$\begin{aligned}\tau(1) &= T,\\ \tau(\xi_0) &< T, \quad (\xi_0\ne 1)\end{aligned}$$

由定理 7.1 知， $V(\xi,t)$ 对 t 单调非增，因此直线 $\xi=\xi_0$ 与 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 只有两种可能：

(1) 直线 $\xi=\xi_0$ 只与 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 相交一次，（一个点或一个线段）

或

(2) 直线 $\xi=\xi_0$ 与 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 不相交.

从而我们证明了

$$\xi_1(t)<1<\xi_2(t)$$

以及

$$\begin{aligned}&\xi_1(t)\ 单调非减,\\ &\xi_2(t)\ 单调非增.\end{aligned}$$

至此定理 7.2 获证.

附注 事实上，利用抛物型方程解在边界的正则性以及强极值原理，我们可以进一步证明：直线 $\xi=\xi_0$ 与 $\partial\hat{\Sigma}_1$ 是不可能相交于一个线段的，也就是 $\xi_1(t)$ 必定严格单调增加， $\xi_2(t)$ 必定严格单调减少.

现在回到原变量 (S_1,S_2,t)，从而得到美式交换期权的定价 $V(S_1,S_2,t)$：

$$V(S_1,S_2,t)=S_2u\left(\frac{S_1}{S_2},t\right)=\begin{cases} S_2, & 0\le\frac{S_1}{S_2}\le\xi_1(t),\\ S_2u\left(\frac{S_1}{S_2},t\right), & \xi_1(t)\le\frac{S_1}{S_2}\le\xi_2(t),\\ S_1, & \xi_2(t)\le\frac{S_1}{S_2}<\infty,\end{cases} \tag{7.7.19}$$

这里最佳实施边界为曲面 Γ_1 和 Γ_2：

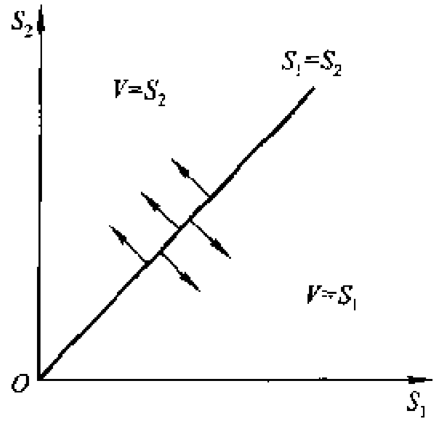
$$\Gamma_1 : S_1 = \xi_1(t)S_2, \tag{7.7.20}$$

以及

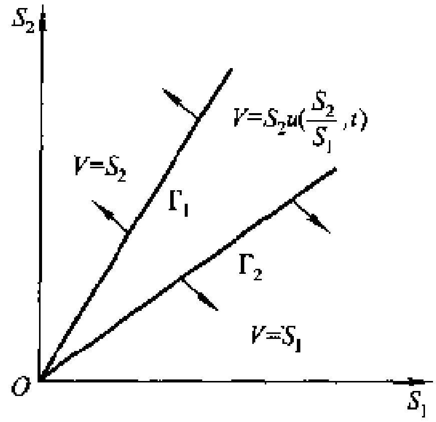
$$\Gamma_2 : S_1 = \xi_2(t)S_2, \tag{7.7.21}$$

其中 $\xi_1(T) = \xi_2(T) = 1$， $\xi_1(t)\uparrow, \xi_2(t)\downarrow$.

在 t=T 时刻， Γ_1 与 Γ_2 重合成为射线： $S_1 = S_0$



在 $t < T$ 时刻， Γ_1,Γ_2 的位置



这表明，对于美式交换期权，它的最佳实施边界 Γ 随着 t 的变化，有如下的演化图像：在 t=T 时刻 Γ_1 与 Γ_2 重合，它们是射线 $S_1 = S_2$. 当 $t < T$ 时，最佳实施边界分别向两边运动，在每一个固定时刻 t，最佳实施边界是由两条从原点出发的射线 $S_1 = \xi_1(t)S_2$ 和 $S_1 = \xi_2(t)S_2$ 组成，在它们中间是持有区域，在它们两侧是终止持有区域. 当 $t = 0$ 时，最佳实施边界到达位置 $S_1 = \xi_1(0)S_2$ 和 $S_1 = \xi_2(0)S_2$. 现在我们的问题是：有没有可能对 $\xi_1(0)$ 的下界以及 $\xi_2(0)$ 的上界作一个估计？

为此考虑永久美式交换期权的定解模型. 与 §6.1 相仿, 这是一个椭圆型方程的障碍问题. 即在区域 $\mathbf{R}_+^2$ 上求解边值问题:

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V_\infty, V_\infty - \max(S_1,S_2)\} = 0, \quad (\mathbf{R}_+^2) & (7.7.22) \\ V_\infty(0,S_2) = S_2, \quad (S_1 \in \mathbf{R}_+) & (7.7.23) \\ V_\infty(S_1,0) = S_1. \quad (S_2 \in \mathbf{R}_+) & (7.7.24) \end{cases}$$

作变换

$$V_\infty = S_2 W. \tag{7.7.25}$$

$$\xi = \frac{S_1}{S_2}. \tag{7.7.26}$$

从而定解问题 (7.7.22)—(7.7.24) 转化为在区域 $\mathbf{R}_+$ 上求解二阶常微分方程的障碍问题:

$$\begin{cases} \min\{-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{d^2W}{d\xi^2} - (q_2-q_1)\xi\frac{dW}{d\xi} + q_2W, \\ \qquad W - \max(1,\xi)\} = 0, \quad (\xi \in \mathbf{R}_+) & (7.7.27) \\ W(0) = 1, & (7.7.28) \\ W(\xi) \sim \xi, \quad (\xi \to \infty) & (7.7.29) \end{cases}$$

其中 $\hat{\sigma}$ 的定义见 (7.7.12).

与 §6.1 相仿, 障碍问题 (7.7.27)—(7.7.29) 等价于以下自由边界问题: 即求 $\{W(\xi);\xi_1^0,\xi_2^0\}$ 使得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{d^2W}{d\xi^2} + (q_2-q_1)\xi\frac{dW}{d\xi} - q_2W = 0, \quad (\xi_1^0 < \xi < \xi_2^0) & (7.7.30) \\ W(\xi_1^0) = 1, & (7.7.31) \\ W'(\xi_1^0) = 0, & (7.7.32) \\ W(\xi_2^0) = \xi_2^0, & (7.7.33) \\ W'(\xi_2^0) = 1. & (7.7.34) \end{cases}$$

方程 (7.7.30) 的通解为

$$W = A\left(\frac{\xi}{\xi_1^0}\right)^{\alpha_1} + B\left(\frac{\xi}{\xi_2^0}\right)^{\alpha_2}, \tag{7.7.35}$$

其中 $\alpha_i(i=1,2)$ 是以下特征方程的二个根:

$$\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\alpha(\alpha-1)+(q_2-q_1)\alpha-q_2=0,$$

即

$$\alpha_i=\omega+(-1)^i\theta, \quad (i=1,2) \tag{7.7.36}$$

其中

$$\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{\hat{\sigma}^2}(q_1-q_2). \tag{7.7.37}$$

$$\theta=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{q_1}{\hat{\sigma}^2}+\frac{(q_1-q_2)^2}{\hat{\sigma}^4}}. \tag{7.7.38}$$

由假设 (7.7.13),

$$\alpha_1<0, \quad \alpha_2>0.$$

为了确定 A,B,ξ_1^0,ξ_2^0, 我们利用自由边界条件 (7.7.31) –(7.7.34),从而得到:

$$A\left(\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}\right)^{\alpha_1}+B=\xi_2^0,$$

$$A\frac{\alpha_1}{\xi_1^0}\left(\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}\right)^{\alpha_1-1}+B\frac{\alpha_2}{\xi_2^0}=1,$$

$$A+B\left(\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}\right)^{\alpha_2}=1,$$

$$A\frac{\alpha_1}{\xi_1^0}+B\frac{\alpha_2}{\xi_2^0}\left(\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}\right)^{\alpha_2-1}=0.$$

解出 A,B,ξ_1^0,ξ_2^0,然后代入 (7.7.35),得到

$$\xi_1^0=\beta_1^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}},$$

$$\xi_2^0=\beta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}},$$

$$\begin{aligned}W(\xi)=&\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\beta_1^{\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{-\frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{\alpha_2-\alpha_1}}\xi^{\alpha_2}\\&+\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\beta_2^{\frac{\alpha_1(\alpha_2-1)}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_1^{\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}}\xi^{\alpha_1}, \quad (\xi_1^0<\xi<\xi_2^0)\end{aligned}$$

其中

$$\beta_i = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}, \qquad (i = 1, 2) \tag{7.7.39}$$

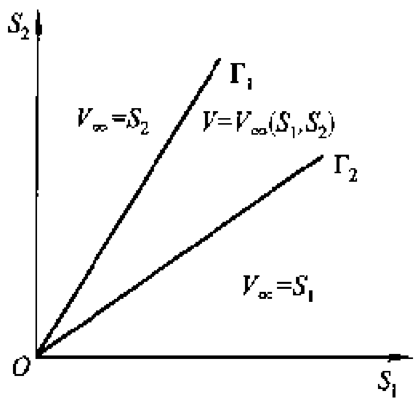
回到原变量 S_1, S_2 以及 V_∞ (见 (7.7.25),(7.7.26)), 得到永久美式交换期权的定价公式:

$$V_\infty(S_1, S_2) = \begin{cases} S_2, & 0 \le \frac{S_1}{S_2} = \xi_1^0, \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\beta_1^{\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{-\frac{\alpha_1(1+\alpha_2)}{\alpha_2-\alpha_1}}S_1^{\alpha_2}S_2^{1-\alpha_2} & \\ \quad + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\beta_1^{\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{\frac{\alpha_1(\alpha_2-1)}{\alpha_2-\alpha_1}}S_1^{\alpha_1}S_2^{1-\alpha_1}, & \xi_1^0 \le \frac{S_1}{S_2} \le \xi_2^0, \\ S_1, & \xi_2^0 \le \frac{S_1}{S_2} < \infty. \end{cases}$$

$$\Gamma_1 : \quad S_1 = \xi_1^0 S_2,$$

$$\Gamma_2 : \quad S_1 = \xi_2^0 S_2.$$

永久美式期权最佳实施边界 Γ_1 和 Γ_2 位置



由于永久美式交换期权与具有同样敲定价格的美式交换期权相比较, 它是最贵的, 故有

$$\max\{S_1, S_2\} \le V(S_1, S_2, t) \le V_\infty(S_1, S_2).$$

因此我们有估计

$$\xi_1^0 < \xi_1(t) < \xi_1(T) = 1 = \xi_2(T) < \xi_2(t) < \xi_2^0.$$

这样对于美式交换期权的最佳实施边界 Γ_1 和 Γ_2 , 我们得到了它的斜率的两个估计式:

$$\xi_1(t) > \xi_1^0 = \beta_1^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_2-\alpha_1}}\beta_2^{\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}},$$

$$\xi_2(t) < \xi_2^0 = \beta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}} \beta_2^{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}.$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的定义见 (7.7.36)—(7.3.39).

附注 上面有关美式交换期权的最佳实施边界的分析都是在假设 (7.7.13) 下进行的. 如果这两个风险资产的红利率 $q_i (i=1,2)$ 有一个为 0，那么最佳实施边界性态将作相应的调整.

不失一般性，假设

$$q_1 > 0, q_2 = 0. \tag{7.7.40}$$

那么在代换 (7.7.9) 下，定解问题 (7.7.5),(7.7.6) 转化为

$$\begin{cases} \min\left\{-\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + q_1\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi}, u - \max(\xi, 1)\right\} = 0, & (7.7.41) \\ u(\xi, T) = \max(\xi, 1). & (7.7.42) \end{cases}$$

从而相当于定理 7.2，我们有

定理 7.3 若假设 (7.7.40) 成立，则对于定解问题 (7.7.41),(7.7.42) 的解，它的持有区域是

$$\tilde{\Sigma}_1 = \{(\xi, t) \,|\, 0 \le \xi \le \xi_2(t), 0 \le t \le T\},$$

其中

$$\xi_2(T) = 1,$$

$$\xi_2(t) \text{ 单调非增},$$

在 $\tilde{\Sigma}_1$ 上，u 适合自由边界问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - q_1\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0, & (\tilde{\Sigma}_1) \\ u(\xi_2(t), t) = \xi, & (0 \le t \le T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_2(t), t) = 1, & (0 \le t \le T) \\ u(0, t) = 1. & (0 \le t \le T) \end{cases}$$

也就是定解问题 (7.7.41),(7.7.42) 只有一条自由边界 $\xi = \xi_2(t)$，在 $\tilde{\Sigma} = \{0 \le \xi < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上，u 具形式

$$u(\xi, t) = \begin{cases} u(\xi, t), & 0 < \xi \le \xi_2(t), \\ \xi, & \xi_2(t) \le \xi < \infty. \end{cases}$$

回到原变量，期权定价为

$$V(S_1,S_2,t)=\begin{cases} S_2u(\frac{S_2}{S_1},t), & 0\le \frac{S_1}{S_2}\le \xi_2(t),\\ S_1, & \xi_2(t)\le \frac{S_1}{S_2}<\infty. \end{cases}$$

相应的最佳实施边界为

$$\Gamma: S_1=\xi_2(t)S_2. \tag{7.7.43}$$

定理 7.3 的证明留给读者完成.

考虑永久美式交换期权，那么在条件 (7.7.40) 下，经过变换 (7.7.25),(7.7.26)，$\{W(\xi),\xi_2^0\}$ 适合自由边界问题

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\xi^2\frac{d^2W}{d\xi^2}+q_1\xi\frac{dW}{d\xi}=0, \quad 0<\xi<\xi_2^0, & (7.7.44)\\ W(\xi_2^0)=\xi_2^0, & (7.7.45)\\ W'(\xi_2^0)=1, & (7.7.46)\\ W(0)=1. & (7.7.47) \end{cases}$$

它的特征方程为

$$\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\alpha(\alpha-1)-q_1\alpha=0,$$

它的两个解 α_1,α_2:

$$\alpha_i=\omega+(-1)^i\theta, \quad (i=1,2)$$

其中

$$\theta=\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{\hat{\sigma}^2}q_1,$$

故

$$\alpha_1=0<\alpha_2.$$

自由边界问题 (7.7.44)—(7.7.47) 的解有形式:

$$\omega=A+B\left(\frac{\xi}{\xi_2^0}\right)^{\alpha_2}. \tag{7.7.48}$$

由自由边界条件 (7.7.45),(7.7.46) 以及 (7.7.47) 得到

$$A=1,$$

$$A+B=\xi_2^0,$$

$$\frac{\alpha_2 B}{\xi_2^0}=1.$$

代入 (7.7.47) 得

$$W=1+\frac{1}{\alpha_2-1}(\frac{\xi}{\xi_2^0})^{\alpha_2},$$

$$\xi_2^0=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}.$$

回到原变量 (S_1,S_2)，得到

$$V_\infty(S_1,S_2)=\begin{cases} S_2+\frac{(\xi_2^0)^{-\alpha_2}}{\alpha_2-1}S_1^{\alpha_2}S_2^{\alpha_2-1}, & 0\le\frac{S_1}{S_2}\le\xi_2^0,\\ S_1, & \xi_2^0\le\frac{S_1}{S_2}\le\infty.\end{cases}$$

由于

$$\max(S_1,S_2)\le V(S_1,S_2,t)\le V_\infty(S_1,S_2),$$

推得在条件 (7.7.40) 下美式交换期权的最佳实施边界 (7.7.43) 的斜率估计:

$$\xi_2(t)<\xi_2^0=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}=\frac{\hat{\sigma}^2}{2q_1}+1.$$

附注 如果两个风险资产的红利率 $q_i(i=1,2)$ 都为 0，那么与单资产情形一样，美式交换期权提前实施是不可取的. 美式交换期权与欧式交换期权具有相同价格，不存在最佳实施边界.

(B) **两个风险资产的美式极大择购期权**(American call-max options on two risky assets)

对于美式两个风险资产的极大择购期权，它在期权实施时的收益是:

$$P(S_1,S_2)=(\max(S_1,S_2)-K)^+. \tag{7.7.49}$$

它可以看作是上一小段中讨论的美式两个风险资产的交换期权的推广，因为当 $K=0$ 时，美式极大择购期权就是美式交换期权.

对于美式极大择购期权 $(K>0)$，它是一个典型的二维问题. 我们将通过细致的数学分析，对它的最佳实施边界作深入的定性研究；特别我们将利用关于美式交换期权的最佳实施边界的已有信息以及它与美式极大择购期

权最佳实施边界之间的相互关系，深入地认识美式极大择购期权最佳实施边界的性态.

两个风险资产的美式极大择购期权的数学模型：在区域

$$\Sigma:\left\{(S_1,S_2)\in\mathbf{R}_+^2,0\le t\le T\right\}$$

上求解变分不等方程

$$\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-\mathcal{L}_0V,V-P(S_1,S_2)\right\}=0, & (\Sigma) \quad (7.7.50)\\ V|_{t=T}=P(S_1,S_2), & (S_1,S_2)\in\mathbf{R}_+^2 \quad (7.7.51)\end{cases}$$

其中 $P(S_1,S_2)$ 的定义见 (7.7.49)，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V=&\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2V}{\partial S_1^2}+2\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2V}{\partial S_1\partial S_2}+\sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2V}{\partial S_2^2}\right]\\&+(r-q_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1}+(r-q_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2}-rV.\end{aligned}\tag{7.7.52}$$

作变换

$$x_i=\ln S_i,\qquad(i=1,2)$$

定解问题 (7.7.50),(7.7.51) 转化为

$$\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-\mathcal{L}_0V,V-P(x_1,x_2)\right\}=0, & (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,0\le t\le T, \quad (7.7.53)\\ V|_{t=T}=p(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2, \quad (7.7.54)\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0V=&\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2\frac{\partial^2V}{\partial x_1^2}+2\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2V}{\partial x_1\partial x_2}+\sigma_2^2\frac{\partial^2V}{\partial x_2^2}\right]\\&+(r-q_1-\frac{\sigma_1^2}{2})\frac{\partial V}{\partial x_1}+(r-q_2-\frac{\sigma_2^2}{2})\frac{\partial V}{\partial x_2}-rV,\end{aligned}\tag{7.7.55}$$

$$p(x_1,x_2)=P(e^{x_1},e^{x_2})=(\max(e^{x_1},e^{x_2})-K)^+.\tag{7.7.56}$$

为了证明期权定价对 S_1,S_2,t,K（亦即 x_1,x_2,t,K）的单调性，根据定理 7.1 的要求，需要引进 $p_\varepsilon(x_1,x_2)\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$，使得它适合定理 7.1 的条

件. 为此构造函数 $p_\epsilon(x_1,x_2)$：

$$p_\epsilon(x_1,x_2)=\Pi_\epsilon(F_\epsilon(x_1,x_2)-K),\qquad(\epsilon>0)\tag{7.7.57}$$

其中

$$\Pi_\epsilon(s)=\begin{cases}s, & s\geq\epsilon,\\ \nearrow, & -\epsilon\leq s\leq\epsilon\\ 0, & s\leq-\epsilon.\end{cases}\tag{7.7.58}$$

且有

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_\epsilon(s)\in C^\infty(\mathbf{R}),\\ &0\leq\Pi_\epsilon'(s)\leq 1,\\ &\Pi_\epsilon''(s)\geq 0,\end{aligned}\right\}\tag{7.7.59}$$

$$\lim_{\epsilon\to0}\Pi_\epsilon(s)=s^+.$$

此外

$$F_\epsilon(x_1,x_2)=\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}+\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{2}h\left(\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{2\epsilon}\right),\tag{7.7.60}$$

其中

$$h(S)=\frac{2}{\pi}\arctan S.\tag{7.7.61}$$

容易验证它具有以下性质:

$$\begin{aligned}&h'(S)\geq 0,\\ &0\leq 2h'(S)+Sh''(S)\leq\tfrac{4}{\pi},\\ &0\leq 1\pm[h(S)+Sh'(S)]\leq 2.\end{aligned}\tag{7.7.62}$$

因此

$$\lim_{\epsilon\to0}F_\epsilon(x_1,x_2)=\max(e^{x_1},e^{x_2}).$$

故有

$$\lim_{\epsilon\to0}p_\epsilon(x_1,x_2)=(\max(e^{x_1},e^{x_2})-K)^+=p(x_1,x_2).$$

函数 $p_\epsilon(x_1,x_2)$ 对 x_1,x_2,K 的单调性是显然的. 为了验证定理 7.1 中的条件 (7.7.4)，只需检查 $\mathcal{L}_0p_\epsilon(x_1,x_2)$ 的下界.

由于

$$(F_\epsilon)_{x_1x_1}=\frac{e^{2x_1}}{4\epsilon}[2h'(S)+Sh''(S)]+\frac{e^{x_1}}{2}[1+h(S)+Sh'(S)],$$

$$(F_\epsilon)_{x_1x_2} = \frac{e^{x_1+x_2}}{4\epsilon}\left[-2h'(S) - Sh''(S)\right],$$

$$(F_\epsilon)_{x_2x_2} = \frac{e^{2x_2}}{4\epsilon}\left[2h'(S) + Sh''(S)\right] + \frac{e^{x_2}}{2}\left[1 - h(S) - Sh'(S)\right],$$

其中

$$S = \frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{2\epsilon},$$

从而通过直接计算，由 (7.7.59),(7.7.62)，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}p_\epsilon =\ & \frac{1}{2}\Pi_\epsilon''(F_\epsilon - K)\left[\sigma_1^2(F_{\epsilon x_1})^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 F_{\epsilon x_1}F_{\epsilon x_2}\right.\\
&+ \left.\sigma_2^2(F_{\epsilon x_2})^2\right] + \frac{1}{8\epsilon}\Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)\left[2h'(S) + Sh''(S)\right]\\
&\cdot\left[\sigma_1^2 e^{2x_1} - 2\rho\sigma_1\sigma_2 e^{x_1+x_2} + \sigma_2^2 e^{2x_2}\right]\\
&+ \frac{e^{x_1}}{2}(r - q_1)\Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)(1 + h(S) + Sh'(S))\\
&+ \frac{e^{x_2}}{2}(r - q_2)\Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)(1 - h(S) - Sh'(S))\\
&- r\Pi_\epsilon(F_\epsilon - K)\\
\geq\ & r\left[-\Pi_\epsilon(F_\epsilon - K) + \Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)(F_\epsilon - K)\right]\\
&+ \Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)\left[rK - \max(q_1, q_2)F_\epsilon\right]\\
&+ \frac{4\epsilon}{\pi}\Pi_\epsilon'(F_\epsilon - K)(r - \max(q_1, q_2))\frac{S^2}{1 + S^2}.
\end{aligned}$$

假设 $D = \{0 \leq S_i \leq M(i = 1, 2)\}$，那么由于

$$\max_D F_\epsilon \leq e^M,$$

故由

$$\Pi_\epsilon(S) - S\Pi_\epsilon'(S) \leq \Pi_\epsilon(0) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

推得

$$\mathcal{L}p_\epsilon \geq -\frac{\epsilon}{2}r - \max(q_1, q_2)\left[e^M + \frac{4\epsilon}{\pi}\right].$$

若

$$\frac{\epsilon}{2}r < 1, M > 1,$$

则

$$\mathcal{L}P_\epsilon \geq -1 - 2\max(q_1, q_2)e^M.$$

从而我们确认了 $\mathcal{L}p_\epsilon$ 存在与 ϵ 无关的一致下界 C_D（见 (7.7.4)），因此由定理 7.1 推得：美式极大择购期权的价格 $V(S_1, S_2, t)$ 具有以下性质：

(1) 若 $\hat{S}_i \geq S_i \quad (i = 1, 2)$，则

$$V(\hat{S}_1, \hat{S}_2, t) \geq V(S_1, S_2, t); \tag{7.7.63}$$

(2) 若 $\hat{K} \geq K$，则

$$0 \leq V(S_1, S_2, t, K) - V(S_1, S_2, t; \hat{K}) \leq \hat{K} - K; \tag{7.7.64}$$

(3) 若 $\hat{t} \geq t$，则

$$V(S_1, S_2, \hat{t}) - V(S_1, S_2, t) \leq 0. \tag{7.7.65}$$

现在我们根据 (7.7.63)—(7.7.65) 研究美式极大择购期权最佳实施边界的性态。设 $\Gamma(t, K)$ 是 $V(S_1, S_2, t; K)$ 的最佳实施边界，

$$\Gamma(t, K) = \Gamma_1(t, K) \cup \Gamma_2(t, K),$$

其中

$$\Gamma_1(t, K) = \partial\Sigma_2(t, K) \cap \{S_1 \geq S_2 > 0\}, \tag{7.7.66}$$

$$\Gamma_2(t, K) = \partial\Sigma_2(t, K) \cap \{S_2 > S_2 > 0\}, \tag{7.7.67}$$

这里 $\Sigma_2(t, K)$ 是美式极大择购期权在 t 时刻的终止持有区域，即

$$\Sigma_2(t, K) = \left\{(S_1, S_2) \mid V(S_1, S_2, t; K) = P(S_1, S_2; K), (S_1, S_2) \in R_+^2\right\}. \tag{7.7.68}$$

定理 7.4 若 $q_i > 0, (i = 1, 2)$，则

$$\Sigma_2(T, K) = \left\{(S_1, S_2) \mid S_1 \geq S_2, S_1 \geq \max(K, \frac{Kr}{q_1}); \right.$$

$$\left. S_2 > S_1, S_2 \geq \max(K, \frac{Kr}{q_2})\right\}. \tag{7.7.69}$$

证明 若 (S_1^0,S_2^0,T) 属于持有区域 $\Sigma_1(T,K)$，并假设收益函数 $P(S_2,S_2)$ 在 (S_1^0,S_2^0) 附近可微，那么由偏微分方程解的正则性结果，在 (S_1^0,S_2^0,T) 附近，$V(S_1,S_2,t)$ 适合方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mathcal{L}V=0.$$

故

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{(S_1^0,S_2^0,T)}=-\mathcal{L}(V\,|_{t=T})\Big|_{(S_1^0,S_2^0)}=-\mathcal{L}(P(S_1,S_2))\Big|_{(S_1^0,S_2^0)}.$$

由直接计算知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P(S_1,S_2))&=Kr-S_1q_1\qquad S_1\geq S_2\text{ 且 }S_1>K,\\&=Kr-S_2q_2,\qquad S_2>S_1\text{ 且 }S_2>K.\end{aligned}$$

因此当

$$S_1\geq S_2\text{且}S_1>\max(K,\frac{Kr}{q_1})\tag{7.7.70}$$

以及

$$S_2>S_1\text{且}S_2>\max(K,\frac{Kr}{q_2})\tag{7.7.71}$$

时，

$$\mathcal{L}(P(S_1,S_2))<0,$$

即当 (S_1^0,S_2^0,T) 适合条件 (7.7.70),(7.7.71) 时，

$$\frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{(S_1^0,S_2^0,T)}>0,$$

但这与 V 的性质 (3)（见 (7.7.65)）矛盾．故

$$\Sigma_2(T,K)\supset\left\{(S_1,S_2)\,|\,S_1\geq S_2,S_1>\max(K,\frac{Kr}{q_1});\right.$$
$$\left.S_2>S_1,S_2>\max(K,\frac{Kr}{q_2})\right\}.$$

因此为了证明定理 7.4，只需指出所有不属于上述右端集合内的点，必属于持有区域 $\Sigma_1(T,K)$.

事实上，由于在区域 $\{(S_1,S_2)|K>\max(S_1,S_2)\}$ 内的点，$P(S_1,S_2)\equiv 0$，因此这个集合必属于 $\Sigma_1(T,K)$. 此外假如 $\frac{Kr}{q_1}>K$，那么在 $t=T$ 上集

合 $\left\{(S_1,S_2)\mid S_1\geq S_2, K\leq S_1<\frac{Kr}{q_1}\right\}$ 亦必属于 $\Sigma_1(T,K)$. 因为假如不然，若属于 $\Sigma_2(T,K)$，那么由于在 $\Sigma_2(t,K)$ 内

$$V(S_1,S_2,t)\equiv P(S_1,S_2).$$

故在这些点附近，必须有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mathcal{L}V\leq 0.$$

即

$$\mathcal{L}P(S_1,S_2)\leq 0.$$

但由 $t=T$ 时收益函数 (7.7.49) 推知，在这些点 $S_1\geq S_2$ 且 $K\leq S_1<\frac{Kr}{q_1}$ 附近，

$$\mathcal{L}P(S_1,S_2)>0,$$

从而有矛盾. 故区域 $\left\{(S_1,S_2)\mid S_1\geq S_2, K\leq S_1<\frac{Kr}{q_1}\right\}$ 必属于持有区域 $\Sigma_1(T,K)$. 同理区域 $\left\{(S_1,S_2)\mid S_2>S_1, K\leq S_2<\frac{Kr}{q_2}\right\}$ 必属于持有区域 $\Sigma_1(T,K)$. 至此定理证完.

定理 7.5 当 $t_2>t_1$ 时,

$$\Sigma_2(t_2,K)\supset\Sigma_2(t_1,K); \tag{7.7.72}$$

当 $K_2>K_1$ 时,

$$\Sigma_2(t,K_2)\supset\Sigma_2(t,K_1). \tag{7.7.73}$$

证明 包含关系 (7.7.72) 是期权价格性质 (3)（见 (7.7.65)）的推论. 事实上，假若不然，则存在 (S_1^0,S_2^0) 以及 $t=t_1^0$ 和 t_2^0 使得:

$$t_2^0>t_1^0,(S_1^0,S_2^0,t_1^0)\in\Sigma_2(t_1^0,K),$$

但

$$(S_1^0,S_2^0,t_2^0)\in\Sigma_1(t_2^0,K).$$

从而有

$$V(S_1^0,S_2^0,t_2^0)>P(S_1^0,S_2^0)=V(S_1^0,S_2^0,t_1^0),$$

但这与 (7.7.65) 相矛盾.

而包含关系 (7.7.73) 是期权价格性质 (2)(见 (7.7.64))的推论. 事实上, 假若不然, 则存在 (S_1^0, S_2^0) 以及时间 $t = t_0$, 使得: 当 $K_2 > K_1$ 时,

$$(S_1^0, S_2^0, t_0) \in \Sigma_2(t, K_2),$$

但

$$(S_1^0, S_2^0, t_0) \in \Sigma_1(t, K_1).$$

由于 (7.7.64) , 从而我们有

$$\begin{aligned} P(S_1^0, S_2^0; K_2) &= V(S_1^0, S_2^0, t_0; K_2) \\ &\geq V(S_1^0, S_2^0, t_0; K_1) - K_2 + K_1 \\ &> P(S_1^0, S_2^0; K_1) - K_2 + K_1, \end{aligned}$$

即

$$(\max(S_1^0, S_2^0) - K_2)^+ + K_2 > (\max(S_1^0, S_2^0) - K_1)^+ + K_1. \qquad (7.7.74)$$

因此必须有

$$\max(S_1^0, S_2^0) < K_2, \qquad (7.7.75)$$

否则, 若

$$\max(S_1^0, S_2^0) \geq K_2 > K_1,$$

那么

$$(\max(S_1^0, S_2^0) - K_2)^+ + K_2 = \max(S_1^0, S_2^0) = (\max(S_1^0, S_2^0) - K_1)^+ + K_1.$$

与 (7.7.74) 相矛盾.

但 (7.7.75) 与 $(S_1^0, S_2^0, t_0) \in \Sigma_2(t, K_2)$(见 (7.7.73))相矛盾, 因此 (S_1^0, S_2^0, t_0) 必须属于 $\Sigma_2(t, K_1)$. 从而 (7.7.73) 获证.

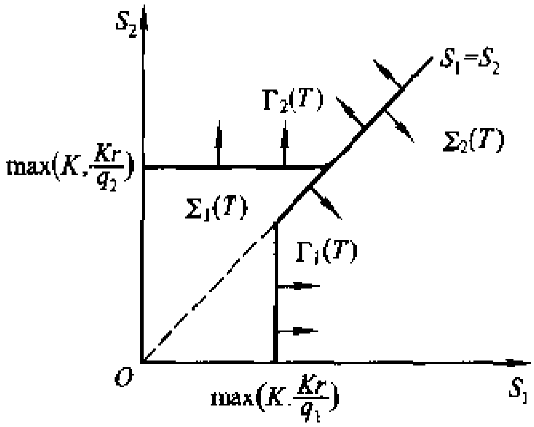
推论 由 (7.7.73) , 对每一个固定时刻 t ,

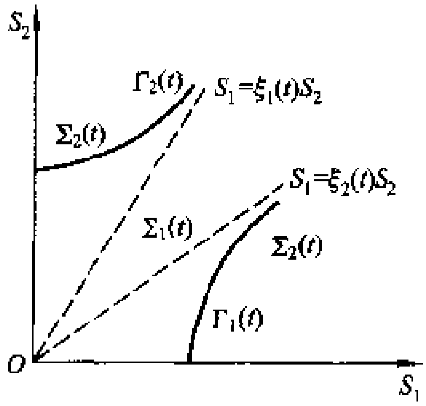
$$\Sigma_2(t, K) \supset \Sigma_2(t, 0), \quad \forall K > 0. \qquad (7.7.76)$$

推论 由 (7.7.72) , 对固定的敲定价格 K , 美式极大择购期权的终止区域从 $t = T$ 开始, 随着 t 的逐渐变小, 即随着离开截止期愈来愈远, $\Sigma_2(t, K)$ (见 (7.7.69)) 亦逐渐变小.

现在我们就可以定性地画出关于美式极大择购期权的最佳实施边界的演化图像.

在 $t = T$ 时, Γ_1 与 Γ_2 的位置, 它们部分重合于 $S_1 = S_2$,$\Sigma_2(T,K)$ 由 (7.7.69) 确定.





随着 $t < T,\Sigma_2(t,0)$ 从射线 $S_1 = S_2$ 撕开向两边发展, 由于 (7.7.76) , 从而 $\Sigma_2(t,K)$ 同样在 $S_1 = S_2$ 被撕开各向两边移动, 一部分在 $S_1 > S_2$ 区域中推进, 记作 $\Sigma_2^{(1)}(t,K)$, 另一部分在 $S_1 < S_2$ 区域中推进, 记作 $\Sigma_2^{(2)}(t,K)$. 它们在 $\{S_1 > S_2\}$ 与 $\{S_2 > S_2\}$ 中的边界, 分别记作 $\Gamma_1(t,K)$ 和 $\Gamma_2(t,K)$.

定理 7.6 美式极大择购期权定价 $V(S_1,S_2,t)$ 是 S_1,S_2 的凸函数, 即对于任意 $0 \le \lambda \le 1$,

$$(1-\lambda)V(S_1,S_2,t) + \lambda V(S_1+\Delta S_1,S_2+\Delta S_2,t)$$

$$\ge V(S_1+\lambda\Delta S_1,S_2+\lambda\Delta S_2,t),$$

这里 $(S_1,S_2),(S_1+\Delta S_1,S_2+\Delta S_2)\in\mathbf{R}_+^2$.

这个定理我们在这里不进行证明了，读者可参阅 [19]. 作为它的推论，我们可以证明:

定理 7.7 美式极大择购期权的终止持有区域 $\Sigma_2^{(1)}(t)$ 以及 $\Sigma_2^{(2)}(t)(0\le t<T)$ 是凸集.

证明 不失一般性，假设 $Q(S_1,S_2,t),Q_0(S_1^0,S_2^0,t)\in\Sigma_2^{(1)}(t)$, 记 $\overline{QQ_0}$ 为连接两点 Q 与 Q_0 的线段，设 $Q_\lambda\in\overline{QQ_0},(0\le\lambda\le1)$, 点 Q_λ 的坐标可表为

$$Q_\lambda=(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0),t)$$

由 $V(S_1,S_2,t)$ 对 S_1,S_2 是凸的，故

$$\begin{aligned}
0&\le(1-\lambda)V(S_1^0,S_2^0,t)+\lambda V(S_1,S_2,t)\\
&\quad-V(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0),t)\\
&=(1-\lambda)P(S_1^0,S_2^0)+\lambda P(S_1,S_2)\\
&\quad-V(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0),t).
\end{aligned}\tag{7.7.77}$$

由于 $Q,Q_0\in\Sigma_2^{(1)}(t)$，故

$$S_1>S_2,S_1^0>S_2^0,$$

以及

$$S_1>\max(K,\frac{Kq_1}{r}),S_1^0>\max(K,\frac{Kq_1}{r}),$$

故

$$P(S_1,S_2)=S_1-K,$$
$$P(S_1^0,S_2^0)=S_1^0-K.$$

因此 (7.7.77) 可改写为

$$\begin{aligned}
&V(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0),t)\\
&\le(1-\lambda)(S_1^0-K)+\lambda(S_1-K)\\
&=S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0)-K\\
&=P(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0)).
\end{aligned}$$

由于 $V(Q_\lambda)\ge P(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0))$，故

$$V(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0),t)=P(S_1^0+\lambda(S_1-S_1^0),S_2^0+\lambda(S_2-S_2^0)).$$

即

$$Q_\lambda\in\Sigma_2^{(1)},\quad (0\le\lambda\le1)$$

从而定理获证.

最后我们对美式极大择购期权的最佳实施边界介绍下面的结果.

定理 7.8 *美式极大择购期权的最佳实施边界 $\Gamma_1(t)$ 和 $\Gamma_2(t)$ 具有以下性质：*

(1) 存在 $\varphi_1(S_1,t)$ 和 $\varphi_2(S_2,t)$，使得

$$\Gamma_1(t):\quad S_2=\varphi_1(S_1,t),$$

$$\Gamma_2(t):\quad S_1=\varphi_2(S_2,t);$$

(2) $\varphi_1(S_1,t)$ 和 $\varphi_2(S_2,t)$ 是 $S_i\,(i=1,2)$ 的单调非减凸函数；

(3)

$$\lim_{S_1\to\infty}\frac{\varphi_1(S_1,t)}{S_1}=\frac{1}{\xi_2(t)},$$

$$\lim_{S_2\to\infty}\frac{\varphi_2(S_2,t)}{S_2}=\xi_1(t),$$

这里 $S_1=\xi_1(t)S_2$ 和 $S_1=\xi_2(t)S_2$ 是美式交换期权的最佳实施边界.

这个定理我们在这里就不证明了，读者可参阅 [19].

定理 7.8 的结论 (3) 表明：对于任意敲定价格 K 的美式极大择购期权的最佳实施边界 $\Gamma_1(t,K)$ 和 $\Gamma_2(t,K)$，分别以 $\Gamma_1(t,0)$ 和 $\Gamma_2(t,0)$（即美式交换期权的最佳实施边界）作为它们的渐近线.

作为本章的小结，我们概括以下几点：

1. 多资产期权的定价模型是一个多维反抛物型方程的终值问题. 不同的金融产品的收益函数给出了不同的终值条件. 对于标准的欧式期权，它的定价可以由显式表达式给出.

2. 对于利差期权和交换期权，不论是欧式的还是美式的，它们都可以通过引进组合变量化成一维问题来处理.

3. 多资产的美式期权的定价虽然一般没有显式表达式，但可以通过偏微分方程的理论分析给出最佳实施边界演进的图像，这无论对于了解期权定价的性质以及进行数值计算都是极为有利的.

习题

设 $S_1,\cdots,S_n$ 是 n 个风险资产的价格，在 $[0,T]$ 时段内，它们的演化适合随机微分方程组 (7.1.5)—(7.1.8)．试证明：

1. 若 $V=V(S_1,\cdots,S_n,t)$ 是欧式期权的价格，它在期权到期日（ t=T ）的收益为

$$V(S_1,\cdots,S_n,T)=\sum_{i=1}^n\Phi_i(S_i),$$

则

$$V(S_1,\cdots,S_n,t)=\sum_{i=1}^n V_i(S_i,t),$$

其中 $V_i(S_i,t),\quad(i=1,...,n)$ 是下述定解问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_i}{\partial t}+\dfrac{\hat{\sigma}_i^{\,2}}{2}S_i^2\dfrac{\partial^2V_i}{\partial S_i^2}+(r-q_i)S_i\dfrac{\partial V_i}{\partial S_i}-rV_i=0,\\ \qquad\qquad(0<S_i<\infty,0\le t<T)\\ V_i(S_i,T)=\Phi_i(S_i),\end{cases}$$

这里

$$\hat{\sigma}_i^2=\sum_{j=1}^m\sigma_{ij}^2.$$

2. 设 $C=C(S_1,\cdots,S_n,t)$ 和 $P=P(S_1,\cdots,S_n,t)$ 分别是算术平均—篮子看涨和看跌期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益分别为

$$C(S_1,\cdots,S_n,T)=(\sum_{i=1}^n\alpha_iS_i-K)^+,$$

$$P(S_1,\cdots,S_n,T)=(K-\sum_{i=1}^n\alpha_iS_i)^+,$$

其中 $\alpha_i\ge0,\quad(i=1,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i=1,$$

试求算术平均—篮子期权的看涨 — 看跌平价公式.

3. 设 $C=C(S_1,...,S_n,t)$ 和 $P=P(S_1,...,S_n,t)$ 是几何平均一篮子看涨和看跌期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益分别为

$$C(S_1,\cdots,S_n,T)=(\prod_{i=1}^{n}S_i^{\alpha_i}-K)^+,$$

$$P(S_1,\cdots,S_n,T)=(K-\prod_{i=1}^{n}S_i^{\alpha_i})^+,$$

其中 $\alpha_i\geq 0,\quad (i=1,...,n,)$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,$$

试求几何平均一篮子期权的平价公式.

4. 设 $C=C(S_1,S_2,t)$ 和 $P=P(S_1,S_2,t)$ 分别是极大看涨和看跌期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益函数分别为

$$C(S_1,S_2,T)=(\max(S_1,S_2)-K)^+,$$

$$P(S_1,S_2,T)=(K-\max(S_1,S_2))^+.$$

试求极大看涨——看跌期权的平价公式.

5. 设 $C=C(S_1,S_2,t)$ 和 $P=P(S_1,S_2,t)$ 分别是双币种看涨和看跌期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益函数分别为

$$C(S_1,S_2,T)=S_2(S_1-K)^+,$$

$$P(S_1,S_2,T)=S_2(K-S_1)^+,$$

试求双币种看涨 — 看跌期权的平价公式.（分两种情形： a. 外国证券 S_1 无红利； b. 外国证券 S_1 有红利，红利率 $q>0$.）

6. 设 $V(S_1,S_2,t)$ 和 $U(S_1,S_2,t)$ 分别是两个风险资产 S_1,S_2 的择好和择差期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益分别为

$$V(T)=\max(S_1(T),S_2(T)),$$

和

$$U(T)=\min(S_1(T),S_2(T)),$$

试求这两类期权的定价公式.

7. 设 $V(S_1,S_2,t)$ 和 $U(S_1,S_2,t)$ 分别是极大和极小看涨期权价格，在期权到期日 $(t=T)$，它们的收益分别为

$$V(S_1,S_2,T)=\max\{(S_1-K_1)^+,(S_2-K_2)^+\}$$

和

$$U(S_1, S_2, T) = \min\{(S_1 - K_1)^+, (S_2 - K_2)^+\},$$

试求极大 — 极小看涨期权的平价公式.

8. 设 S_1, S_2 为两个风险资产, 它们的红利率分别为 $q_1 > 0, q_2 > 0$. 又 $V(S_1, S_2)$ 是美式永久利差期权, 在期权实施时, 它的收益为

$$V(S_1, S_2) = (S_1 - S_2)^+,$$

试求期权价格以及最佳实施边界的位置.

9. 设 $V(S_1, S_2, t)$ 是双币种看涨期权, 在期权到期日 $(t = T)$ 的收益为:

$$\text{收益} = S_2(T)(S_1(T) - K)^+,$$

试为期权的出售方设计一个套期保值策略, 对它由于出售期权所面临的风险进行管理.

10. 设 S_1, S_2 为两个风险资产, 它们的红利率分别为 $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$; 又 $V(S_1, S_2, t)$ 是到期日为 T 的美式利差期权; 试对期权的最佳实施边界进行定性分析.

第八章　路径有关期权（Ⅰ）——弱路径有关期权

在前几章讨论的欧式期权都有一个共同的特点，就是它的最终收益只依赖于期权到期日原生资产当天的价格，而与它的历程无关．这两章我们讨论 **路径有关期权** (path-dependent options)，也就是 *期权的最终收益不仅依赖于期权到期日原生资产的价格，而且与整个期权有效期内原生资产价格的变化过程有关*．

关于路径有关期权按照最终收益对原生资产价格历程的依赖程度可以分成两大类．一类期权的最终收益与在期权有效期内原生资产的价格是否达到某个（或几个）合约规定的水平有关，这类期权被称为 弱路径有关期权 (weakly path-dependent options)．另一类期权的最终收益依赖于原生资产的价格在整个（或某一部分）期权的有效期内的信息，这类期权被称为强路径有关期权 (strongly path-dependent options)．

最重要的弱路径有关期权是 **关卡期权** (barrier options)，此外还有它的很多变种．严格来说，美式期权亦属于弱路径有关期权，当然它不在我们的讨论范围之内．

§8.1　关卡期权

关卡期权（挡板期权，障碍期权）是这样一张欧式期权合约，它的最终收益除了依赖于原生资产在期权到期日的价格，还与原生资产价格在整个期权有效期内是否达到某一规定水平（人们称为 关卡值 (barrier)）有关．

按照原生资产价格达到规定关卡后期权的状态，关卡期权分成两大类：一类是 **敲出期权** (knock-out options)，这类期权的特点是：当原生资产价格达到规定关卡时，期权 **终止** 有效．如果在期权的有效期内原生资产价格大于关卡值，那么称为 **下降敲出期权** (down-and-out options)；如果在期权的有效期内原生资产价格小于关卡值，那么称为 **上升敲出期权** (up-and-out options)．另一类是 **敲入期权** (knock-in options)，这类期权的特点是：当原生资产价格达到规定关卡时，期权 **开始** 有效，此时关卡值也被称为 **激发值**

(trigger). 按照与前面同样的理由，根据眼下期权价格与规定的激发值之间的关系，有 **下降敲入期权** (down-and-in options) 和 **上升敲入期权** (up-and-in options).

由于每一类欧式期权都可以分为看涨和看跌两大类，因此关卡期权的最终收益函数可以细分为 8 种类别：

关卡期权（S_B 关卡值）

I **敲出期权**

$$\textbf{下降敲出期权}\begin{cases}(S_T-K)^+ I_{\{S_t>S_B,\quad t\in[0,T]\}} & (\text{看涨})\\ (K-S_T)^+ I_{\{S_t>S_B,\quad t\in[0,T]\}} & (\text{看跌})\end{cases}$$

$$\textbf{上升敲出期权}\begin{cases}(S_T-K)^+ I_{\{S_t<S_B,\quad t\in[0,T]\}} & (\text{看涨})\\ (K-S_T)^+ I_{\{S_t<S_B,\quad t\in[0,T]\}} & (\text{看跌})\end{cases}$$

II **敲入期权**

$$\textbf{下降敲入期权}\begin{cases}(S_T-K)^+[1-I_{\{S_t>S_B,\quad t\in[0,T]\}}] & (\text{看涨})\\ (K-S_T)^+[1-I_{\{S_t>S_B,\quad t\in[0,T]\}}] & (\text{看跌})\end{cases}$$

$$\textbf{上升敲入期权}\begin{cases}(S_T-K)^+[1-I_{\{S_t<S_B,\quad t\in[0,T]\}}] & (\text{看涨})\\ (K-S_T)^+[1-I_{\{S_t<S_B,\quad t\in[0,T]\}}] & (\text{看跌})\end{cases}$$

这里 $I_\omega(S)$ 是集合 ω 的特征函数（简写为 I_ω），即

$$I_\omega(S)=\begin{cases}1, & S\in\omega,\\ 0, & S\notin\omega\end{cases}$$

假如我们把 $(S_T-K)^+$ 或 $(K-S_T)^+$ 称为标准期权 (vanilla options) 的收益，则容易看出：

敲出期权的收益 + 敲入期权的收益 = 标准期权的收益

由于欧式期权是一个线性问题，因此关卡期权定价与标准欧式期权定价之间存在以下关系：

$$\begin{aligned}V_{\text{vanilla}}(S,t) &= V_{\text{up-and-out}}(S,t)+V_{\text{up-and-in}}(S,t)\\ &= V_{\text{down-and-out}}(S,t)+V_{\text{down-and-in}}(S,t).\end{aligned}\tag{8.1.1}$$

这个等式的金融意义是明显的，在达到关卡值 $S=S_B$ 时，敲出一个期权的同时，敲入一个期权（具有相同敲定价格 K 和截止期 T），它的综合效果是等于不存在关卡，因此它们的和应该与标准的欧式期权值相同.

在金融市场上关卡期权是相当普遍的一类期权，投资人购买这类期权的目的，是因为关卡期权相对于标准欧式期权来说要便宜. 当然这取决于投资人对未来原生资产价格走势的估计. 以下降敲出看涨期权为例，投资人估计到当原生资产价格下跌到设置的关卡水平 $(S=S_B)$ 时，价格再回升到 $S>K$ 的可能已经几乎不存在了，因此投资人愿意放弃可能获益机会，取消期权合约. 为此他节省了期权金，但亦承担了这样的风险，即如果原生资产的价格下降到 S_B 只是偶然或者暂时的原因，不久还将继续保持上升的走势，使得在期权到期日，$S_T>K$, 这种情况一旦发生，投资人将一无所获.

下面我们看一个关于关卡期权与标准期权的期权金之间比较的例子.

例 一张 6 个月为期的看涨股票期权，若现股价 145 元，无风险利率 $r=6\%$，红利率 $q=3\%$，波动率 $\sigma=0.295$

期权品种	敲定价 K	关卡值 S_B	期权金
标准期权	145 元		12.87 元
上升敲出期权	145 元	160 元	0.17 元
上升敲出期权	145 元	190 元	4.46 元
上升敲入期权	145 元	160 元	12.70 元
上升敲入期权	145 元	190 元	8.41 元
下降敲出期权	145 元	130 元	10.48 元
下降敲出期权	145 元	110 元	12.83 元
下降敲入期权	145 元	130 元	2.39 元
下降敲入期权	145 元	110 元	0.04 元

关卡期权的偏微分方程模型：

关卡期权必须根据 **“敲出”** 与 **“敲入”**，**“上升”** 与 **“下降”**，**“看涨”** 与 **“看跌”** 的不同情况，给出不同的 **定解区域**，在关卡值 $S=S_B$ 上的 **边界条件**，以及在 $t=T$ 时的 **终值条件**.

(1) **定解区域** 设 D 是求解的区域，

“上升” 表示原生资产价格在关卡值下面运行，

$$D=\{(S,t)|0\le S\le S_B,\quad 0\le t\le T\},$$

"下降" 表示原生资产价格在关卡值上面运行，

$$D=\{(S,t)|S_B\le S<\infty,\quad 0\le t\le T\};$$

(2) **在 $S=S_B$ 上的边界条件**

"敲出" 表示期权价为 0:

$$V(S_B,t)=0,$$

"敲入" 表示期权价与标准期权价相等:

$$V(S_B,t)=V_{\text{vanilla}}(S_B,t);$$

(3) **在 $t=T$ 上的终值条件**

"看涨敲出"

$$V(S,T)=(S-K)^+,\qquad \begin{pmatrix} 0\le S\le S_B & \text{上升} \\ S_B\le S<\infty & \text{下降} \end{pmatrix}$$

"看涨敲入"

$$V(S,T)=0,\qquad \begin{pmatrix} 0\le S\le S_B & \text{上升} \\ S_B\le S<\infty & \text{下降} \end{pmatrix}$$

"看跌敲出"

$$V(S,T)=(K-S)^+,\qquad \begin{pmatrix} 0\le S\le S_B & \text{上升} \\ S_B\le S<\infty & \text{下降} \end{pmatrix}$$

"看跌敲入"

$$V(S,T)=0;\qquad \begin{pmatrix} 0\le S\le S_B & \text{上升} \\ S_B\le S<\infty & \text{下降} \end{pmatrix}$$

(4) **偏微分方程**

在定解区域内，所有关卡期权适合同一个 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0.$$

总而言之，关卡期权的定价问题是求解 Black-Scholes 方程的一个特定的终 — 边值问题，它与标准期权比较，多了一条边界 $S=S_B$ 以及相应的边界条件. 它的求解区域、边界条件以及终值条件将根据关卡期权的具体类别确定.

如何求解？

我们以下降敲出的看涨期权为例，求出它的解的明显表达式，至于其他类型的关卡期权可以相仿得到.

欧式下降敲出看涨期权 (European down-and-out call option) 的数学模

型为：在区域 $D=\{S_B<S<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2V}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0, & (D) \quad (8.1.2)\\ V(S,T)=(S-K)^+, & (S_B\le S<\infty) \quad (8.1.3)\\ V(S_B,t)=0. & (0\le t\le T) \quad (8.1.4)\end{cases}$$

作变换

$$x=\ln\frac{S}{S_B}, \tag{8.1.5}$$

$$V=S_Bu. \tag{8.1.6}$$

从而有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-ru=0, & (8.1.7)\\ \qquad (x\in\mathbf{R}_+,0\le t\le T) & \\ u(x,T)=(e^x-K_B)^+,\qquad (0<x<\infty) & (8.1.8)\\ u(0,t)=0,\qquad (0\le t\le T) & (8.1.9)\end{cases}$$

这里 $K_B=\dfrac{K}{S_B}$.

作函数代换

$$u=e^{\alpha x+\beta(T-t)}W, \tag{8.1.10}$$

其中

$$\alpha=-\frac{1}{\sigma^2}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right),$$

$$\beta=-r-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2.$$

在变换 (8.1.10) 下，W 在 $\{x\in\mathbf{R}_+,\ 0\le t\le T\}$ 上适合定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}=0, & (8.1.11)\\ W(x,T)=e^{-\alpha x}(e^x-K_B)^+, & (8.1.12)\\ W(0,t)=0. & (8.1.13)\end{cases}$$

利用镜像法，定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}(e^x-K_B)^+, & x>0,\\ -e^{\alpha x}(e^{-x}-K_B)^+, & x<0,\end{cases} \tag{8.1.14}$$

易见 $\varphi(x)=-\varphi(-x)$，即 $\varphi(x)$ 是奇函数．在 $\{x\in\mathbf{R},0\le t\le T\}$ 上考虑 Cauchy 问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \quad (x\in\mathbf{R},\quad 0\le t\le T) & (8.1.15)\\[2mm]
W(x,T)=\varphi(x). \qquad\qquad (x\in\mathbf{R}) & (8.1.16)
\end{cases}
$$

由于这个解必是奇函数，因此它在 D：$\{x\in\mathbf{R}_+,\quad 0\le t\le T\}$ 的限制必适合定解问题 (8.1.11)—(8.1.13).

Cauchy 问题 (8.1.15),(8.1.16) 的解可表为 Poisson 公式：

$$
\begin{aligned}
W(x,t)&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\varphi(\xi)d\xi\\
&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\Big[\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\varphi(-\xi)d\xi\\
&\quad+\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\varphi(\xi)d\xi\Big]\\
&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\Big[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\Big]e^{-\alpha\xi}(e^{\xi}-K_B)^+d\xi.
\end{aligned}
$$

由 (8.1.10), 回到函数 $u(x,t)$, 得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\ln K_B}^{\infty}e^{-\frac{[(x-\xi)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(e^{\xi}-K_B)d\xi\\
&\quad-\frac{e^{-r(T-t)-\frac{2}{\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})x}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\ln K_B}^{\infty}e^{-\frac{[(x+\xi)-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}(e^{\xi}-K_B)d\xi\\
&=\frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\ln K_B+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega\\
&\quad-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}K_Be^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\frac{x-\ln K_B+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega\\
&\quad-\frac{e^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-x-\ln K_B-(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega\\
&\quad+\frac{K_B}{\sqrt{2\pi}}e^{-r(T-t)-\frac{2}{\sigma^2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})x}\int_{-\infty}^{\frac{-x-\ln K_B+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega.
\end{aligned}
$$

由 (8.1.5),(8.1.6) 回到原变量 (S,t) 以及函数 $V(S,t)$, 得到

$$\begin{aligned}V(S,t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S_B\left(\frac{S}{S_B}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)}N(d_3)\\&\quad -Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{S}{S_B}\right)^{1-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)}N(d_4)\\&= V_{\text{vanilla}}(S,t) - \left(\frac{S}{S_B}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)+1}\left[\frac{S_B^2}{S}N(d_3) - Ke^{-r(T-t)}N(d_4)\right],\end{aligned} \tag{8.1.17}$$

这里

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{K} + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\\d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t},\\d_3 &= \frac{\ln\frac{S_B^2}{SK} + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\\d_4 &= d_3 - \sigma\sqrt{T-t}.\end{aligned}$$

解 (8.1.17) 可以改写为

$$V_{\text{down-and-out}}(S,t) = V_{\text{vanilla}}(S,t) - \left(\frac{S}{S_B}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)+1}V_{\text{vanilla}}\left(\frac{S_B^2}{S},t\right). \tag{8.1.18}$$

由 (8.1.1) 推得

$$V_{\text{down-and-in}}(S,t) = \left(\frac{S}{S_B}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)+1}V_{\text{vanilla}}\left(\frac{S_B^2}{S},t\right). \tag{8.1.19}$$

同理可以推得 $V_{\text{up-and-out}}(S,t)$ 和 $V_{\text{up-and-in}}(S,t)$ 的表达式.

为了得到看跌关卡期权定价的表达式，我们建立如下关于看涨 – 看跌关卡期权的平价公式 (put-call parity for barrier options).

定理 8.1 对于下降敌出期权存在看涨 – 看跌平价公式

$$\begin{aligned}p_{\text{down-and-out}}(S,t) + SN(\hat{d}_1) &= c_{\text{down-and-out}}(S,t) + Ke^{-r(T-t)}N(\hat{d}_2)\\&\quad + \left(\frac{S}{S_B}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)+1}\left[\frac{S_B^2}{S}N(\hat{d}_3) - Ke^{-r(T-t)}N(\hat{d}_4)\right],\end{aligned} \tag{8.1.20}$$

其中

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\dfrac{S}{S_B} + (r - q + \dfrac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\hat{d}_3 = \frac{\ln\dfrac{S_B}{S} + (r - q + \dfrac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\hat{d}_4 = \hat{d}_3 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

证明 令 W 是下降敲出看涨期权与看跌期权之差:

$$W = c_{\text{down-and-out}}(S, t) - p_{\text{down-and-out}}(S, t).$$

易知 W(S,t) 在区域 $D: \{S_B < S < \infty, \quad 0 \le t \le T\}$ 上适合终—边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2} + (r - q)S\dfrac{\partial W}{\partial S} - rW = 0, & (D) \\ W(S,T) = S - K, & (S_B < S < \infty) \\ W(S_B, t) = 0. & (0 \le t < T) \end{cases}$$

令变换 (8.1.5) 和

$$W = S_B u.$$

从而我们有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, & (x \in \mathbf{R}_+,\ 0 \le t < T) \\ u(x, T) = e^x - K_B, & (0 \le x < \infty) \\ u(0, t) = 0. & (0 \le t \le T) \end{cases}$$

解之得

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\
& -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K}{S_B} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\frac{x+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\
& -\frac{e^{-\frac{2}{\sigma^2}(r-q)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x+(r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\
& +\frac{K}{S_B} \frac{e^{-r(T-t)-[\frac{2}{\sigma^2}(r-q)-1]x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega.
\end{aligned}
$$

回到原变量 (S,t) 和 V, 立得定理结论.

类似地我们可以对其他类型的关卡期权建立看涨—跌平价公式. 根据这些公式, 我们就可由看涨关卡期权定价公式推出看跌关卡期权的定价公式.

§8.2 依赖于时间的关卡期权

若期权的关卡值是时间的函数, 则称为 **依赖于时间的关卡期权**(time-dependent barrier options), 它可以分成两大类:

(A) **移动关卡期权** (moving barrier options)

设关卡值 S_B 是时间 t 的已知函数, 即关卡值 $S = S_B(t)$. 对于这类期权的定价一般不可能用显式表达式给出, 除非 S_B 是 t 的指数函数.

以下降敲出看涨期权为例, 即在定解区域 $D = \{(S,t)|S_B(t) \le S < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 上, 求解 Black-Scholes 方程终—边值问题:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (D) \qquad (8.2.1) \\
V(S_B(t),t) = 0, & (0 \le t \le T) \qquad (8.2.2) \\
V(S,T) = (S-K)^+. & (S_B(T) < S < \infty) \qquad (8.2.3)
\end{cases}
$$

作变换

$$
x = \ln\frac{S}{S_B(t)}, \tag{8.1.5}
$$

$$V = S_B(T)u. \tag{8.1.6}$$

从而由 (8.2.1)–(8.2.3)，推得 $u(x,t)$ 在区域 $\{x \in \mathbf{R}_+,\ 0 \leq t \leq T\}$ 上适合方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [r - q - \dfrac{\sigma^2}{2} - \alpha(t)]\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, & (8.2.4) \\ u(0,t) = 0, & (8.2.5) \\ u(x,0) = (e^x - K_B)^+, & (8.2.6) \end{cases}$$

其中

$$K_B = \frac{K}{S_B(T)}, \tag{8.2.7}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{S_B}\frac{dS_B}{dt}. \tag{8.2.8}$$

设

$$\alpha(t) = \alpha(\text{常数}), \tag{8.2.9}$$

即

$$\frac{dS_B}{dt} = \alpha S_B(t),$$

则

$$S_B(t) = S_B(T)e^{-\alpha(T-t)}. \tag{8.2.10}$$

此时方程 (8.2.4) 具形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [r - \hat{q} - \frac{\sigma^2}{2}]\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0, \tag{8.2.11}$$

其中

$$\hat{q} = \alpha + q.$$

从而由 (8.1.17)，我们得到

$$\begin{aligned} V(S,t) &= SN(d_1^*) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2^*) \\ &\quad - \left(\frac{S}{S_B(T)}\right)^{-\frac{1}{\sigma^2}(r-q-\alpha)+1}\left[\frac{S_B(T)}{S}N(d_3^*) - Ke^{-r(T-t)}N(d_4^*)\right], \end{aligned} \tag{8.2.12}$$

其中

$$d_1^* = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q - \alpha + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2^* = d_1^* - \sigma\sqrt{T-t},$$
$$d_3^* = \frac{\ln\frac{S_B^2(T)}{SK} + (r - q - \alpha + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_4^* = d_3^* - \sigma\sqrt{T-t}.$$

（B）**部分（时间）关卡期权** (partial barrier options)

关卡只在期权有效期的某几个预先设定的时段内被设置. 对于一个上升敲出的部分（时间）关卡期权, 在设置关卡的时段内, 原生资产的价格 S_t 与关卡值 S_B 之间的相对位置有三种可能:

(a) $S_t < S_B$, 这表明在时段内原生资产价格没有触及关卡值.

(b) 在这时段内, 存在 $t = t_0$, 使得 $S_{t_0} = S_B$, 这表明在这时段内原生资产价格触及关卡值.

(c) $S_t > S_B$, 这表明在这时段以前原生资产价格已经经过了 S_B（但在那个时段按合约规定 S_B 不是关卡值), 而在这时段内原生资产价格一直在关卡值 S_B 的上面变动.

由于对于一个上升敲出的部分（时间）关卡期权, 情形（c）有可能发生, 因此针对这种情形上升敲出部分（时间）关卡可以分成两类:

第一类（Ⅰ）: 情形“c”的发生认为已经触及关卡值.

对于这张期权合约, 在期权到期日期权的收益函数（以看涨期权为例）为

$$\text{收益函数} = (S_T - K)^+ I_{\{S_t < S_B,\quad t\in\Pi\}},$$

其中 Π— 设置关卡的时段, I_ω 为 ω 的特征函数.

第二类（Ⅱ）: 情形“c”的发生不认为触及关卡, 也就是按合约规定只有在这规定时段内“跨过”（不管是由下到上, 还是由上到下）关卡, 关卡才被激发.

对于这张期权合约, 在期权到期日期权的收益函数为

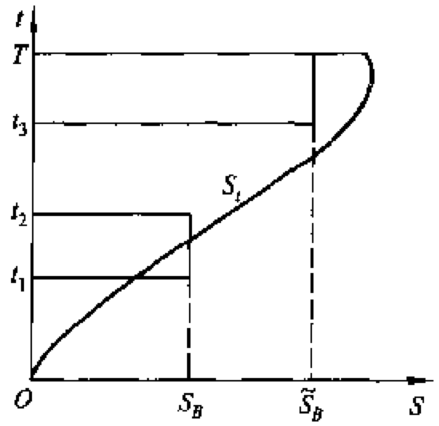
$$\text{收益函数} = (S_T - K)^+ [I_{\{S_t < S_B,\quad t\in\Pi\}} + I_{\{S_t > S_B,\quad t\in\Pi\}}].$$

现在我们来建立这两类关卡期权的偏微分方程模型.

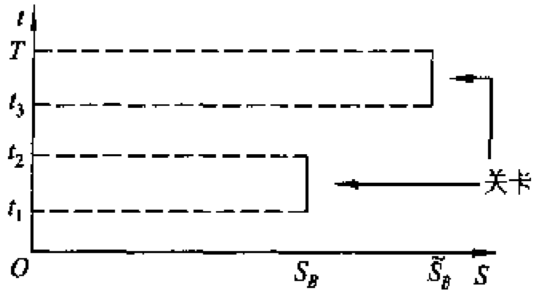
考虑上升敲出部分（时间）关卡期权．设期权的有效期为 $[0,T]$，又设

$$0<t_1<t_2<t_3<T.$$

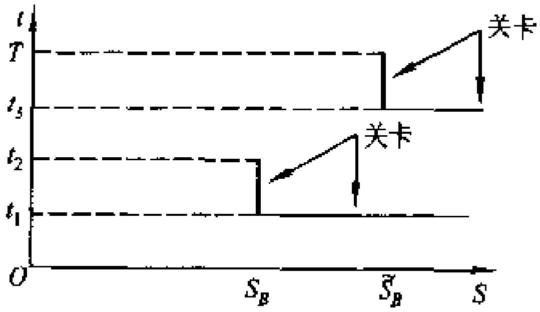
若设置关卡的时段 II 被规定为 $[t_1,t_2]$ 和 $[t_3,T]$，相应的关卡值分别规定为 S_B 和 $\hat{S}_B$．假设原生资产的价格变化曲线如下图：



那么在 $[t_1,t_2]$ 时段，无论对于（ I ）类还是（ II ）类，关卡均被触及；而在 $[t_3,T]$ 时段，按（ I ）类规定关卡仍被认为触及；而按（ II ）类规定，关卡没有被触及．其实， I 类与 II 类不同之处在于如何设置关卡．



第(II)类情形关卡的设置



第(I)类情形关卡的设置

如图所示，对于第（ II ）类部分（时间）关卡期权，只在 $\{S=S_B,t_1\leq$

$t \le t_2\}$ 以及 $\{S = \hat{S}_B, t_3 \le t \le T\}$ 上设置关卡，在这两个线段上，期权定价满足敲出边界条件：

$$V(S_B, t) = 0, \qquad (t_1 \le t \le t_2) \tag{8.2.13}$$

$$V(\hat{S}_B, t) = 0. \qquad (t_3 \le t \le T) \tag{8.2.14}$$

对于第（Ⅰ）类部分（时间）关卡期权，除了在 $\{S = S_B, t_1 \le t \le t_2\}$ 以及 $\{S = \hat{S}_B, t_3 \le t \le T\}$ 上设置关卡，在这两个线段上，期权定价满足敲出边界条件 (8.2.13),(8.2.14) 以外，还在线段 $\{S_B \le S < \infty,\ t = t_1\}$ 以及 $\{\hat{S}_B \le S < \infty,\ t = t_3\}$ 上设置关卡，在这两个线段上，期权定价还满足敲出的“边界”条件：

$$V(S, t_1) = 0, \qquad (S_B \le S < \infty) \tag{8.2.15}$$

以及

$$V(S, t_3) = 0. \qquad (\hat{S}_B \le S < \infty) \tag{8.2.16}$$

所以这两类部分（时间）关卡期权定价的数学模型为：

在 $[t_3, T]$ 时段上：

（Ⅰ）类　在区域 D_{I} $\{0 \le S \le \hat{S}_B,\quad t_3 \le t \le T\}$ 上求解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (D_{\mathrm{I}}) \\ V(\hat{S}_B, t) = 0, & (t_3 \le t \le T) \\ V(S, T) = (S - K)^+; & (0 \le S \le \hat{S}_B) \end{cases}$$

（Ⅱ）类　在区域 D_{II}^1 $\{0 \le S \le \hat{S}_B,\quad t_3 \le t \le T\}$ 以及 D_{II}^2 $\{\hat{S}_B \le S < \infty,\quad t_3 \le t \le T\}$ 上求解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V}_1 = 0, & (D_{\mathrm{II}}^1) \\ \tilde{V}_1(\hat{S}_B, t) = 0, & (t_3 \le t \le T) \\ \tilde{V}_1(S, T) = (S - K)^+, & (0 \le S \le \hat{S}_B) \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V}_2 = 0, & (D_{\mathrm{II}}^2) \\ \tilde{V}_2(\hat{S}_B, t) = 0, & (t_3 \le t \le T) \\ \tilde{V}_2(S, T) = (S - K)^+; & (\hat{S}_B \le S < \infty) \end{cases}$$

在 $[t_2, t_3]$ 时段上:

(I)类　在区域 $\tilde{D} = \{0 \le S < \infty,\quad t_2 \le t \le t_3\}$ 上求解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (\tilde{D}) \\ V(S, t_3) = \begin{cases} V(S, t_3 + 0), & (0 \le S \le \hat{S}_B) \\ 0; & (\hat{S}_B \le S < \infty) \end{cases} \end{cases}$$

(II)类　在区域 $\tilde{D}$ 上求解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V} = 0, & (\tilde{D}) \\ \tilde{V}(S, t_3) = \begin{cases} \tilde{V}_1(S, t_3 + 0), & (0 \le S \le \hat{S}_B) \\ \tilde{V}_2(S, t_3 + 0); & (\hat{S}_B \le S < \infty) \end{cases} \end{cases}$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段上:

(I)类　在区域 $\hat{D}_{\mathrm{I}} = \{0 \le S < S_B,\quad t_1 \le t \le t_2\}$ 上求解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (\hat{D}_{\mathrm{I}}) \\ V(S_B, t) = 0, & t_1 \le t \le t_2 \\ V(S, t_2) = V(S, t_2 + 0); & (0 \le S \le S_B) \end{cases}$$

(II)类　在区域 $\hat{D}_{\mathrm{II}}^1 = \{0 \le S \le S_B,\quad t_1 \le t \le t_2\}$ 和区域 $\hat{D}_{\mathrm{II}}^2 = \{S_B \le S < \infty,\quad t_1 \le t \le t_2\}$ 上求解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V}_1 = 0, & (\hat{D}_{\mathrm{II}}^1) \\ \tilde{V}_1(S_B, t) = 0, & (t_1 \le t \le t_2) \\ \tilde{V}_1(S, t_2) = \tilde{V}(S, t_2 + 0) & (0 \le S \le S_B) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V}_2 = 0, & (\hat{D}_{\mathrm{II}}^2) \\ \tilde{V}_2(S_B, t) = 0, & (t_1 \le t \le t_2) \\ \tilde{V}_2(S, t_2) = \tilde{V}(S, t_2 + 0); & (S_B \le S < \infty) \end{cases}$$

在 $[0, t_1]$ 时段上:

（Ⅰ）类　在区域 $\hat{D} = \{0 \le S < \infty,\quad 0 \le t \le t_1\}$ 上求解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (\hat{D}) \\ V(S,t_1) = \begin{cases} V(S,t_1+0), & (0 \le S \le S_B) \\ 0; & (S_B \le S < \infty) \end{cases} \end{cases}$$

（Ⅱ）类　在区域 $\hat{D} = \{0 \le S < \infty,\quad 0 \le t \le t_1\}$ 上求解：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V} = 0, & (\hat{D}) \\ \tilde{V}(S,t_1) = \begin{cases} \tilde{V}_1(S,t_1+0), & 0 \le S \le S_B \\ \tilde{V}_2(S,t_1+0); & S_B \le S < \infty \end{cases} \end{cases}$$

这里

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

§8.3 重置期权

重置期权 (reset options) 是这样一张合约，当原生资产价格达到某一预先给定的水平时，按合约规定，将重新设定敲定价格，以使持有人有更多的获利机会.

这样的重新设定可以一次也可以多次. 重置期权可以分成两大类：

（Ⅰ）**规定时间的重置期权** (reset options with predetermined dates): 重新设定敲定价格的过程在预先规定的时间进行.

（以看涨期权为例）设 $0 < t_1 < \cdots < t_n < T$. 若在期权签订日 $(t = 0)$ 设置的期权价格为 K，在 $t = t_1$ 时刻如果原生资产价格 $S(t_1)$ 低于 K，那么重新设置敲定价格为 $S(t_1)$，否则仍保持原来敲定价格 K，然后依此类推. 一般来说，在 $t = t_m$ 时刻 $(1 \le m \le n)$，按合约规定，重新设置的敲定价格为 K_m，则

$$K_m = \min(K_{m-1}, S(t_m)),$$
$$K_0 = K.$$

（Ⅱ）**规定水平的重置期权** (reset options with predetermined levels): 重新设定敲定价格的过程按照预先规定的价格水平进行.

（以看涨期权为例）设 $K > K_1 > K_2 > \cdots > K_n$. 若在期权的签订日 $(t = 0)$ 设置的敲定价格为 K，若原生资产价格下降到预先规定的水平 K_1，

那么重新设置敲定价格为 K_1，然后依此类推. 一般来说，若原生资产价格从 K_{m-1} 下降到 K_m，按合约规定，重新设置敲定价格为 K_m，$(1 \le m \le n)$.

为什么把重置期权归入关卡期权来考虑呢？事实上，每一次重置的过程可以看成是两个关卡期权的复合：敲出一个“老”的敲定价格的关卡期权，与此同时，敲入一个“新”的敲定价格的关卡期权. 当然对这两类不同的重置期权，关于关卡的理解有区别，因此它们的数学模型亦是不一样的. 为了简单起见，我们只考虑重置看涨期权，并假定只有一次重置的机会.

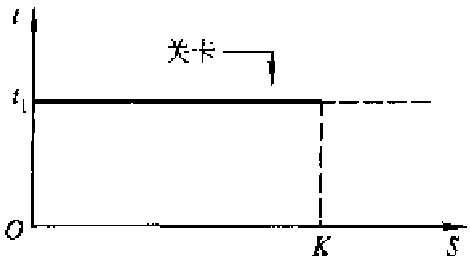
对于 **第 I 类 —— 规定时间的重置期权.**

设 $t_1 \in (0,T)$，在 $t=t_1$ 时刻，如果原生资产价格 $S(t_1) < K$（K 是在合约签订，即 $t=0$ 时确定的敲定价格），那么重新设置敲定价为 $\hat{K}$：

$$\hat{K} = \min(K, S(t_1)).$$

如下图关卡设置在

$$\{0 \le S \le K,\ t = t_1\}.$$



在 $t=t_1$ 时刻，我们有

$$V(S(t_1),t_1) = \begin{cases} V(S(t_1),t_1;K), & S(t_1) \ge K, \\ V(S(t_1),t_1;S(t_1)), & S(t_1) < K. \end{cases}$$

定义函数 $\hat{V}(S)$：

$$\hat{V}(S) = \begin{cases} V(S,t_1;K), & S \ge K, \\ V(S,t_1;S), & S < K, \end{cases}$$

在 $[t,t_1]$ 时段，求解

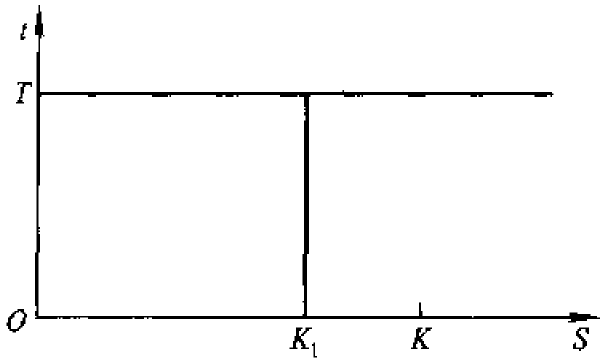
$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (0 \le S < \infty,\ 0 \le t \le t_1) \\ V(S,t_1) = \hat{V}(S), & (S \in \mathbf{R}_+) \end{cases}$$

特别我们可以求得 $V(S,0)$ 的值. 由于每一步求解都可通过由 Black-Scholes 算子的基本解构成的 Poisson 公式给出, 因此这个解有显式表达式.

对于 **第 II 类 —— 规定水平的重置期权**.

设 $K_1 < K$, 如果原生资产价格下降到 K_1 , 那么重新设置敲定价为 K_1. 关卡设置在

$$\{S = K_1, \quad 0 \le t \le T\}$$



在 $D\{0 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 上求解

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{V} = 0, & (D) \\ \tilde{V}(S,T) = (S - K_1)^+, & (\mathbf{R}_+) \end{cases}$$

得到

$$\tilde{V} = \tilde{V}(S,t;K_1).$$

为了确定规定水平的重置期权价格, 在 $D\{K_1 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T\}$ 上求解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = 0, & (K_1 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T) \\ V(K_1,t) = V(K_1,t;K_1), & (0 \le t \le T) \\ V(S,T) = (S - K)^+. & (K_1 \le S < \infty) \end{cases}$$

由于期权定价 $V(S,t)$ 可以分解为

$$\begin{aligned} V(S,t) = {} & V_{\text{down-and-out}}(S,t;K;K_1) \\ & + V_{\text{down-and-in}}(S,t;K_1;K_1), \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

这里 $V_{down-and-out(in)}(S,t;K;S_B)$ 表示当敲定价格为 K，关卡值为 S_B 时的关卡期权的定价. 因此这类重置期权的定价可以分解为敲出一个敲定价为 K 的关卡期权和敲入一个敲定价为 K_1 的关卡期权的组合，因此它的定价可用显式表达式给出.

附注 我们可以把这两类重置期权的模型和求解过程推广到多次重新设置的情形. 当然表达式要复杂得多. 读者可参阅 [42],[24].

§8.4 修正的关卡期权

由于关卡期权的期权金低于标准期权的期权金，因此对投资人有吸引力，但关卡期权存在着以下的不足:

1. 对于一个敲出关卡期权持有人，往往由于原生资产价格在短时期内的触及关卡值，而使他失去全部投资.

2. 当原生资产价格接近关卡值时，由于持有人和出售人具有不同的利害关系，往往引发对市场的短时期操纵.

3. 由于原生资产价格通过关卡值时，Δ（套期保值的份额）是间断的，因此当原生资产价格接近关卡值，出售人为了风险管理的需要，必须及时调整对冲策略.

为此人们考虑引进新的思路去修改关卡期权的合约条款. 我们把这类经过修改的关卡期权统称为**修正的关卡期权** (modified barrieroptions). 这一节我们具体介绍三类修正的关卡期权.

以下降看涨敲出为例，修改的基本思路是: *当原生资产价格下跌到关卡值 S_B 时，期权合约并不立即失效，它将经历一个缓冲过程.* 对这个缓冲过程的刻画有多种方式:

(1) 当原生资产下跌进入 $S \le S_B$ 时，期权的收益开始逐渐衰减，设衰减率 (killing rate) 为 ρ. 即在期权到期日的收益函数为

$$V(S,T) = (S_T - K)^+ e^{-\rho\tau_T}, \tag{8.4.1}$$

这里 τ_t 是在 $[0,t]$ 时段内，原生资产价格 S 在 S_B 以下（包括 S_B 本身）徘徊时间的总和，即

$$\tau_t = \text{mes}\{t'|S(t') \le S_B,\ 0 \le t' \le t\},$$

或

$$\tau_t = \int_0^t H(S_B - S_\tau)d\tau. \tag{8.4.2}$$

这里

$$H(S) = \begin{cases} 1, & S \geq 0, \\ 0, & S < 0. \end{cases} \tag{8.4.3}$$

这个缓冲过程表明：虽然期权不会失效，但随着原生资产 S_t 在障碍值 S_B 以下（包括它本身）徘徊时间愈长，它的收益会愈来愈小，这张期权会变得愈来愈不值钱．人们把这类障碍期权称为 **梯级期权** (step options).

(2) 从原生资产价格下跌到 S_B 时开始，期权失效进入一个倒计时阶段，即虽然此时期权的收益不改变，但若在 S_B 以下（包括 S_B 本身）**累计** 徘徊时间达到合约所设定天数 D 以后，期权立即失效，即期权到期日的收益函数为

$$V(S_T, T, \tau_T) = (S_T - K)^+ I_{\{\tau_T < D\}}. \tag{8.4.4}$$

人们把这类期权称为 **巴拉期权** (Parasian options).

(3) 原生资产价格下跌到 S_B 时开始，期权失效同样进入一个倒计时阶段，但计算时间的方法与 (2) 不同，即若在 S_B 以下（不包括 S_B 本身）**持续** 徘徊时间达到合约所假定天数 D 以后，期权立即失效，但若持续时间不到 D，而原生资产价格又重新回到 S_B，则期权失效的倒计时将自动撤消．

以 $\hat{\tau}_t$ 表示在 S_B 以下（不包括 S_B 本身）持续徘徊时间，即

$$\hat{\tau}_t = t - g_t = t - \sup\{t' | S(t') \geq S_B \quad 0 \leq t' \leq t\}. \tag{8.4.5}$$

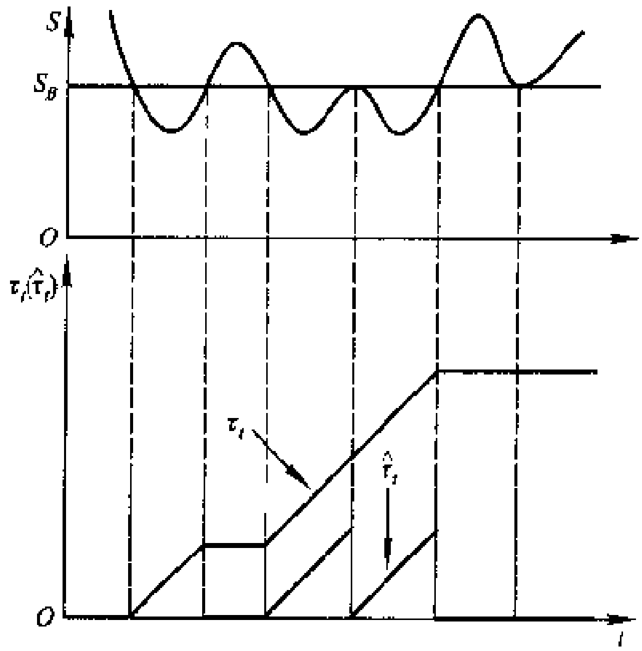
在到期日期权的收益函数为

$$V(S_T, T, \hat{\tau}_T) = (S_T - K)^+ I_{\{\hat{\tau}_T < D\}}. \tag{8.4.6}$$

人们把这类期权称为 **巴黎期权** (Parisian options) .

在导出修正关卡期权的定价模型以前，我们先来考察一下，累计徘徊时间 τ_t 与持续徘徊时间 $\hat{\tau}_t$ 的差别．

若如下图已知原生资产价格 S_t 的价格演化曲线， S_B 为合约设置的关卡值，那么相应的 τ_t 与 $\hat{\tau}_t$ 分别由下图表出．



附注 梯级期权，巴拉期权，巴黎期权以及关卡期权之间存在一定的联系：

(1) 当 $\rho\to\infty$ 时，梯级期权转化为关卡期权，

(2) 当 $\rho\to 0$ 时，梯级期权转化为 标准期权，

(3) 当 $D\to T$ 时，巴拉期权、巴黎期权转化为标准期权，

(4) 当 $D\to 0$ 时，巴拉期权、巴黎期权转化为关卡期权.

以下降敲出期权为例，根据 τ_t 与 $\hat{\tau}_t$ 的定义 (8.4.2),(8.4.5), 易知

$$\frac{d\tau_t}{dt}=\frac{d\hat{\tau}_t}{dt}=\begin{cases}0, & S_t>S_B,\\ 1, & S_t<S_B.\end{cases} \tag{8.4.7}$$

（请注意：在 $S_t=S_B$ 处，$\frac{d\tau_t}{dt}$ 与 $\frac{d\hat{\tau}_t}{dt}$ 具有完全不同的结论，（参考上图））.
设期权定价为

$$V=V(S,\tau,t),$$

（这里 τ 不加区别地表示 τ_t 和 $\hat{\tau}_t$.）
利用 Δ- 对冲原理：构成投资组合 Π：

$$\Pi=V-\Delta S.$$

选取 Δ，使得 Π 在 $(t,t+dt)$ 是无风险的．由于

$$d\Pi = dV - \Delta dS,$$

由 Itô 公式:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial \tau}d\tau + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS \\ &= (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS, \end{aligned}$$

取

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

从而由

$$d\Pi = r\Pi dt,$$

推得:

当 $S > S_B$ 时，

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0; \tag{8.4.8}$$

当 $S < S_B$ 时，

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{8.4.9}$$

现在我们分别对三个不同类型的修正关卡期权进行分析，并给出它们的数学模型（以下降敲出期权为例）．

(1) **梯级期权**

解的形式： $V = V(S,t,\tau)$;

定解区域： $\{0 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau \le T\}$;

偏微分方程:

$$\begin{aligned} &S > S_B \quad \text{时}, \qquad \text{适合(8.4.8)}, \\ &S < S_B \quad \text{时}, \qquad \text{适合(8.4.9)}; \end{aligned}$$

终值条件:

$$V(S,T,\tau) = (S-K)^+e^{-\rho\tau}; \tag{8.4.10}$$

边界条件:

$$V(0,t,\tau)=0, \tag{8.4.11}$$

$$V\sim S(\text{当}S\to\infty\text{时}); \tag{8.4.12}$$

连接条件:

$$V(S_B+0,t,\tau)=V(S_B-0,t,\tau), \tag{8.4.13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_B+0,t,\tau)=\frac{\partial V}{\partial S}(S_B-0,t,\tau). \tag{8.4.14}$$

由 (8.4.13),(8.4.14)，方程 (8.4.8),(8.4.9) 可合并为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H(S_B-S)\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0. \tag{8.4.15}$$

(2)**巴拉期权**

解的形式: $V=V(S,t,\tau)$;

定解区域: $\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le D\}$;

偏微分方程:

$$\begin{array}{lll} S>S_B & \text{时}, & \text{适合}(8.4.8), \\ S<S_B & \text{时}, & \text{适合}(8.4.9); \end{array}$$

终值条件:

$$V(S,T,\tau)=(S-K)^+; \tag{8.4.16}$$

边界条件:

$$V(S,t,D)=0, \tag{8.4.17}$$

$$(8.4.11),(8.4.12);$$

连接条件 $(8.4.13),(8.4.14)$;

由 (8.4.13),(8.4.14), 方程 (8.4.8),(8.4.9) 可合并为 (8.4.15).

(3) **巴黎期权**

解的形式

$$V=\begin{cases} V(S,t,\tau), & 0<S\le S_B, \\ V(S,t), & S_B<S<\infty; \end{cases}$$

（这是巴黎期权与巴拉期权的不同之处. 即对于在关卡值 $S=S_B$ 以下的 **徘徊时间** τ 的处理有区别: 当原生资产回升以至超过 S_B 时，对于巴拉期权它

随之带入 $S > S_B$ 区域，而对于巴黎期权徘徊时间不被带入 $S > S_B$ 区域.假如设想一下，若用钟表上的指针表示徘徊时间，那么对于巴拉期权，当 S 回升以至超出 S_B 时，钟表只是按一下表示"暂停"，而对于巴黎期权，钟表要按两下，表示"返零". 所以当 $S > S_B$ 时，对于巴拉期权价格 V 仍与 τ 有关，而对于巴黎期权价格 V 与 τ 无关).

定解区域: $\{0 \le S < \infty,\ 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau < D\}$;

偏微分方程:

$$\begin{array}{lll} S > S_B & \text{时,} & \text{适合(8.4.8),} \\ S < S_B & \text{时,} & \text{适合(8.4.9);} \end{array}$$

终值条件: (8.4.16);

边界条件: (8.4.17), (8.4.11) 以及 (8.4.12);

连接条件;

$$V(S_B, t) = V(S_B, \tau, t) = V(S_B, 0, t), \tag{8.4.18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_B, t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S_B, 0, t); \tag{8.4.19}$$

这是巴黎期权与巴拉期权不同之处的又一个体现. 等式 $V(S_B, \tau, t) = V(S_B, 0, t)$ 表示: 当 S 重新到 S_B 时，徘徊时间将重新返回零点. 此外只当 $\tau = 0$ 时，$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ 才在 $S = S_B$ 上连续，而当 $\tau > 0$ 时，Δ 一般并不连续.

现在我们来讨论一下求解三种修正关卡期权的方法. 对于梯级期权虽然可以求得显式表达式，但由于形式比较复杂，因此我们仍集中研究它的数值解法.

由于梯级期权与巴拉期权适合同一个偏微分方程 (8.4.15)，因此在数值解的处理上是相仿的. 为此我们只需要集中研究巴拉期权的解法就可以了.

（A） **分裂法** (splitting method)

把期权的有效期 $[0, T]$ 等分成 N 个小区间:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$

其中 $t_n = n\Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{N}$.

巴拉期权

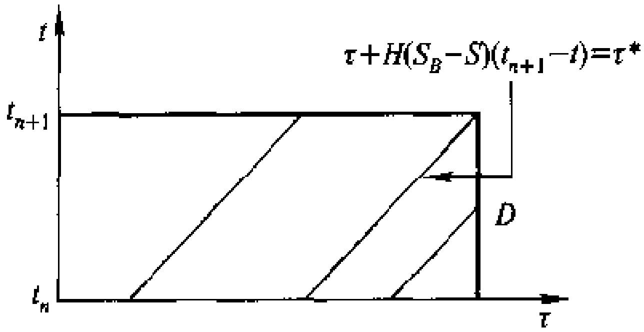
在每一个时段 $[t_n, t_{n+1}]$ 上，$(0 \le n \le N-1)$，假设 $V(S, t_{n+1}, \tau)$ 为已知，先在区域 $\{t_n \le t \le t_{n+1},\ 0 \le \tau \le D\}$ 上解一阶偏微分方程的终－边值问题（ S 是参数，$0 \le S < \infty$ ）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{V}}{\partial t} + H(S_B - S)\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial \tau} = 0, & (t_n \le t \le t_{n+1},\ 0 \le \tau \le D) \\ \hat{V}(S, t_{n+1}, \tau) = V(S, t_{n+1}, \tau), & (0 \le \tau \le D) \\ \hat{V}(S, t, D) = 0. & (t_n \le t \le t_{n+1}) \end{cases}$$

这个方程的特征线为

$$\tau = H(S_B - S)(t - t_{n+1}) + \tau^*.$$

当 $S < S_B$ 时，特征线是以下图象：



从而上述问题的解可表成：
当 $\tau + H(S_B - S)(t_{n+1} - t) < D$ 时，

$$\hat{V}(S, t, \tau) = V(S, t_{n+1}, \tau + H(S_B - S)(t_{n+1} - t)),$$

当 $\tau + H(S_B - S)(t_{n+1} - t) > D$ 时，

$$\hat{V}(S, t, \tau) = 0.$$

然后再以 $\hat{V}(x, t, \tau)$ 为初值，在区域 $\{0 \le S < \infty,\ t_n \le t \le t_{n+1}\}$ 上，求解 Black-Scholes 方程（ τ 是参数）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S, t_{n+1}, \tau) = \hat{V}(S, t_n, \tau), \end{cases}$$

这里

$$\hat{V}(S,t_n,\tau)=\begin{cases} V(S,t_{n+1},\tau+H(S_B-S)\Delta t), & (0\le\tau\le D-H(S_B-S)\Delta t)\\ 0. & (D-H(S_B-S)\Delta t\le\tau\le D)\end{cases}$$

这样我们就在区域 $\{0\le S<\infty,\ t_n\le t\le t_{n+1},\ 0\le\tau\le D\}$ 上求得解

$$V=V(S,t,\tau),$$

特别我们有

$$V|_{t=t_n}=V(S,t_n,\tau).$$

由于

$$V(S,t_N,\tau)=V(S,T,\tau)=(S-K)^+,$$

因此利用倒向归纳过程，我们可以求得在整个区域 $\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T.\ 0\le\tau\le D\}$ 上巴拉期权的定价.

巴黎期权

由于巴黎期权的定价在关卡值 $S=S_B$ 上，对于任意 $\tau>0$， V 与 $\Delta=\dfrac{\partial V}{\partial S}$ 并不连续，故方程 (8.4.8) (8.4.9) 不能合并写成 (8.4.15)、因此在使用分裂法时有差别.

在每一个时段 $[t_n,t_{n+1}]$ 上，假设 $V(S,t_{n+1})$(当 $0<S\le S_B$ 时)，和 $V(S,t_{n+1},\tau)$(当 $S_B<S<\infty$ 时) 为已知. 事实上我们可以把它合并成 $V(S,t_{n+1},\tilde{H}(S_B-S)\tau)$，这里

$$\tilde{H}(S)=\begin{cases}1, & S>0.\\ 0, & S\le 0.\end{cases}$$

（请注意: $\tilde{H}(S)$ 与 $H(S)$ 的差别在于在 $S=0$ 点的定义.）

在区域 $\{t_n\le t\le t_{n+1},\ 0\le\tau\le D\}$ 上求解一个一阶方程（ S 是参数，$0\le S<S_B$ ）:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{V}}{\partial t}+\dfrac{\partial\hat{V}}{\partial\tau}=0,\\ \hat{V}(S,t_{n+.},\tilde{H}(S_B-S)\tau)=V(S,t_{n+1},\tilde{H}(S_B-S)\tau),\\ \hat{V}(S,t,\tilde{H}(S_B-S)D)=0.\end{cases}$$

这个方程的特征线为

$$\tau=(t-t_{n+1})+\tau^*. \qquad (0<S<S_B)$$

从而当 $\tau+(t_{n+1}-t)<D$ 时,

$$\hat{V}(S,t,\tilde{H}(S_B-S)\tau)=V(S,t_{n+1},\tilde{H}(S_B-S)[\tau+(t_{n+1}-t)]).$$

当 $\tau+(t_{n+1}-t)>D$ 时,

$$\hat{V}(S,t,\tilde{H}(S_B-S)\tau)=0. \qquad (t_n\le t\le t_{n+1})$$

从而求得

$$\hat{V}(S,t_n,\tilde{H}(S_B-S)\tau)=\begin{cases} V(S,t_{n+1},\tilde{H}(S_B-S)(\Delta t+\tau)), & (0\le\tau\le D-\Delta t)\\ 0. & (D-\Delta t\le\tau\le D)\end{cases}$$

然后在区域 $\{0\le S<\infty,\ t_n\le t\le t_{n+1}\}$ 上求解 Black-Scholes 方程（这里 τ 是参数）:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0,\\ V\big|_{t=t_{n+1}}=\hat{V}(S,t_n,\tilde{H}(S_B-S)\tau).\end{cases}$$

这样我们就在区域 $\{0\le S<\infty,\ t_n\le t\le t_{n+1},\ 0\le\tau\le D\}$ 上求得解:

$$V=V(S,t,\tilde{H}(S_B-S)\tau). \qquad (t_n\le t\le t_{n-1})$$

特别有

$$V\big|_{t=t_n}=V(S,t_n,\tilde{H}(S_B-S)\tau).$$

由于

$$V(S,t_N,\tilde{H}(S_B-S)\tau)=(S-K)^+,$$

因此利用倒向归纳过程,我们在整个区域 $\{0\le S<\infty,\ 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le D\}$ 上求得巴黎期权的定价.

（B）特征线差分法

作变换

$$x=\ln\frac{S}{S_B}, \qquad S_Bu(x,t,\tau)=V(S,t,\tau).$$

当 $x > 0$ 时，(8.4.8) 转化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0; \tag{8.4.20}$$

当 $x < 0$ 时，(8.4.9) 转化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0. \tag{8.4.21}$$

对区域 $\{x \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T, 0 \le \tau \le D\}$ 进行剖分:

$$x_i = i\Delta x, \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$t_n = n\Delta t, \qquad (n = 0, 1, \cdots, N)$$

$$\tau_\ell = \ell\Delta\tau, \qquad (\ell = 0, 1, \cdots, L)$$

其中

$$\Delta t = \Delta\tau = \frac{T}{N} = \frac{D}{L}.$$

巴拉期权

由于通过关卡值 $x = 0$(即$S = S_B$) 时，u 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 都是连续的，因此 (8.4.20),(8.4.21) 可合并写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(-x)\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0. \tag{8.4.22}$$

为了对它进行离散化，我们使用特征线差分格式，在 (t_{n+1}, τ_ℓ) 拉一根特征线

$$\tau = H(-x)(t - t_{n+1}) + \tau_\ell,$$

然后把方程 (8.4.22) 写成

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u(x, t, H(-x)(t - t_{n+1}) + \tau_\ell) + \\ &\left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} - ru\right]_{\tau = H(-x)(t - t_{n+1}) + \tau_\ell} = 0. \end{aligned} \tag{8.4.23}$$

对 (8.4.23) 进行离散化，设 $u_{i,\ell}^n = u(x_i, t_n, \tau_\ell)$，则当 $x > 0$ (即 $i > 0$) 时，

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,\ell}^{n+1} - u_{i,\ell}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - 2u_{i,\ell}^{n+1} + u_{i-1,\ell}^{n+1}}{\Delta x^2}] \\ &+ (r - \frac{\sigma^2}{2})[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - u_{i-1,\ell}^{n+1}}{2\Delta x}] - ru_{i,\ell}^n = 0, \end{aligned}$$

当 $x \le 0$（即 $i \le 0$）时，

$$\frac{u_{i,\ell}^{n+1} - u_{i,\ell-1}^{n}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - 2u_{i,\ell}^{n+1} + u_{i-1,\ell}^{n+1}}{\Delta x^2}] \\ +(r - \frac{\sigma^2}{2})[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - u_{i-1,\ell}^{n+1}}{2\Delta x}] - ru_{i,\ell-1}^{n} = 0,$$

且

$$u_{i,\ell}^{N} = (e^{i\Delta x} - K_B)^{+}, \qquad (i = 0, \pm 1, \cdots; \ell = 0, 1, \cdots, L)$$

其中 $K_B = \frac{K}{S_B}$；

$$u_{i,L}^{n} = 0. \qquad (i = 0, \pm 1, \cdots;\ n = 0, 1, \cdots, N)$$

巴黎期权

记 $u_{i,0}^{n} = u(x_i, t_n, 0) = u(x_i, t_n)$. 则当 $x \ge 0$ $(i \ge 0)$，

$$\frac{u_{i,0}^{n+1} - u_{i,0}^{n}}{\Delta t} + fs\sigma^2 2\left[\frac{u_{i+1,0}^{n+1} - 2u_{i,0}^{n+1} + u_{i-1,0}^{n+1}}{\Delta x^2}\right] \\ + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\frac{u_{i+1,0}^{n+1} - u_{i-1,0}^{n+1}}{2\Delta x}\right] - ru_{i,0}^{n} = 0, \tag{8.4.24}$$

当 $x < 0$ $(i < 0)$ 时，

$$\frac{u_{i,\ell}^{n+1} - u_{i,\ell-1}^{n}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - 2u_{i,\ell}^{n+1} + u_{i-1,\ell}^{n+1}}{\Delta x^2}\right] \\ + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\frac{u_{i+1,\ell}^{n+1} - u_{i-1,\ell}^{n+1}}{2\Delta x}\right] - ru_{i,\ell-1}^{n} = 0, \tag{8.4.25}$$

且

$$u_{i,\ell}^{N} = (e^{i\Delta x} - K_B)^{+}, \quad (i = 0, \pm 1, \cdots;\ \ell = 0, 1, \cdots, L) \tag{8.2.26}$$

$$u_{i,L}^{n} = 0, \quad (i = 0, \pm 1, \cdots;\ n = 0, 1, \cdots, N) \tag{8.4.27}$$

$$u_{0,\ell}^{n} = u_{0,0}^{n}. \qquad (\ell = 0, 1, \cdots, D-1;\ n = 0, 1, \cdots, N) \tag{8.4.28}$$

因此，巴黎期权的算法过程如下：若 $u_{i,\ell}^{n+1}$ 为已知，求解 (8.4.24) 得到 $u_{i,0}^{n}$ $(i \ge 0)$，利用在 $x = 0$ 上的界面条件 (8.4.28) 求出 $u_{0,\ell}^{n}$，再求解方程 (8.4.25)，并考虑到 (8.4.27)，求得 $u_{i,\ell}^{n}, (i < 0)$ 的值.

作为本章小结，我们概括以下两点：

(1) 与标准的欧式期权比较，（欧式）关卡期权定价的数学模型是求解一个抛物方程的终 — 边值问题，这里关卡作为定解区域的边界，需要根据敲出或敲入的条款给出一个边界条件.

(2) 对于敲出关卡期权，由于当原生资产价格触及关卡值时，期权立即失效，为了解决这个”突变”现象，人们引进一个缓冲时间 $\tau_t(\hat{\tau}_t)$ 的概念，从而使关卡期权定价的数学模型转化为一个包括三个自变量 S, t 和 τ 的超抛物型方程. 由于在这个方程中，只出现解对于 τ 的一阶微商，因此利用分裂法（把方程“分裂”为一个一阶偏微分方程和一个二阶抛物型方程求解）和特征线差分方法（按照一阶偏微分方程的特征线形成差分方程），这是一种合乎情理的考虑.

习题

1. 某金融机构出售一张附有回购条款的欧式看涨股票期权，即当股价上升达到 $S = S_c$ 时，（ $S_c > K, K$ 是敲定价，）出售方有权以 $S_c - K$ 回购这张期权，问该欧式期权的定价.

2. 某金融机构出售一张附有回购条款的欧式下降敲出看涨股票期权，关卡值为 $S = S_B$ ，回购股价为 $S = S_c$ ，且

$$S_B < K < S_c \qquad (K\text{是敲定价})$$

试建立该关卡期权的定价模型，并当 $r = \frac{\sigma^2}{2}$, $q = 0$ 时，求出这个定价的表达式.

3. 设 $V(S, t; S_B)$ 是关卡值为 S_B 的下降敲出看涨期权价格. 试证明当 $S_B < K$ 时， $V(S, t; S_B)$ 是 S_B 的严格单调下降函数，并说明它的金融意义.

4. 试给出上升敲入期权的看涨 — 看跌平价公式，并加以证明.

5. 设 $V_\infty(S; S_B)$ 是永久美式上升敲出看跌期权价格， $S_B > K$ ，试求该美式关卡期权的定价以及最佳实施边界的位置 $S = \gamma(S_B)$. 并证明：
若 $S_{B_1} > S_{B_2} (> K)$, 则

$$V_\infty(S; S_{B_1}) \geq V_\infty(S; S_{B_2}),$$
$$\gamma(S_{B_1}) < \gamma(S_{B_2}).$$

6. 设 $V(S, t; S_B)$ 是美式上升敲出看跌期权定价， $S_B > K$, 试给出该美式关卡期权的定价模型，且证明

$$V(S, t; S_B) \leq V_\infty(S; S_B);$$

若 $S(t;S_B)$ 是该美式关卡期权的最佳实施边界，则

$$S(t;S_B) > \gamma(S_B).$$

7. 试以美式上升敲出看跌期权为例，给出计算美式关卡期权的二叉树算法.

第九章　路径有关期权（II）
—— 强路径有关期权

强路径有关期权在期权到期日的收益不仅依赖于当天原生资产的价格，而且依赖于期权在整个（或部分）有效期内原生资产价格历程．它可以分成两类：依赖于价格的平均值 —— 亚式期权 (Asian options) 或依赖于价格的最大（小）值 —— 回望期权 (lookback options)．因此对于这类期权它们的定价除了与时间 t 以及当时的原生资产价格 S_t 有关以外，还依赖一个路径变量 J_t，它可以是到 t 时刻为止价格历程的平均值，或价格历程的最大（小）值，即 $V=V(S,J,t)$．

这一章我们要讨论的问题是：1. 建立定价模型；2. 研究有没有可能化成一维问题，即引进一个组合自变量 ξ，使得 $V=V(\xi,t)$；3. 求解，除了求解析解以外，特别是用二叉树方法求它们的近似解．

§9.1　亚式期权

亚式期权 是一张期权合约，在期权到期日的收益依赖于在整个期权有效期内原生资产所经历的价格平均值．这里所谓的平均值有两个意义：算术平均和几何平均．假设 J_t 是路径变量，它表示从起始时刻到时刻 t 的平均值，那么

	算术平均 (J_t)	几何平均 (J_t)
离散情形	$J_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}S_{t_i}$	$J_n=(\Pi_{i=1}^{n}S_{t_i})^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln S_{t_i}}$
连续情形	$J_t=\frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$	$J_t=e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_\tau d\tau}$

与之相应的亚式期权亦有两类：**算术平均亚式期权** (arithmetic average Asian options) **和 几何平均亚式期权** (geometric average Asian options)．

亚式期权在到期日的收益可以有两种不同类型：

(1) **固定敲定价格**（以看涨期权为例）：

$$收益=(J_T-K)^+.$$

(2) **浮动敲定价格**(以看涨期权为例):

$$\text{收益} = (S_T - J_T)^+.$$

因此与之相应亚式期权亦可分为:具有固定敲定价格的亚式期权 (Asian options with fixed strike price) 以及 具有浮动敲定价格的亚式期权 (Asian options with floating strike price). 因此如果不计这个期权是看涨期权还是看跌期权, 那么亚式期权可以分成四类:

具有固定敲定价格的算术平均亚式期权 (arithmetic average Asian options with fixed strike price).

具有固定敲定价格的几何平均亚式期权 (geometric average Asian options with fixed strike price).

具有浮动敲定价格的算术平均亚式期权 (arithmetic average Asian options with floating strike price).

具有浮动敲定价格的几何平均亚式期权 (geometric average Asian options with floating strike price).

由于原生资产平均价格的波动率一般总是小于原生资产单个价格系列的波动率, 因此亚式期权的期权金一般总是小于相应的标准期权的期权金.

例 考虑一张 6 个月到期的股票看涨期权, 假设 $S_0 = K = \$145, r = 6\%, q = 3\%, \sigma = 29.5\%$, 通过 Black Scholes 理论计算出期权金:

	平均期	期权金
标准欧式期权		\$12.87
亚式期权(算术 / 几何)	30天	\$12.16/12.03
	60天	\$11.30/11.23
	180天	\$7.31/7.13

从这表可以看出两点:

(1) 亚式期权比标准期权便宜, 且随着平均时段增大, 期权金呈下降趋势.

(2) 几何平均亚式期权总是比算术平均亚式期权便宜, 这个理由是显然的, 因为

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S(t_i)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i).$$

亚式期权广泛应用于国际贸易部门. 一个在本国公司进口外国厂商生产的产品, 货款用外国货币结算, 但产品在本国销售, 取得的是本国货币, 如果本国公司每月要向外国公司支付货款 (外币), 而本国公司每年结算一次企业的损益. 因此本国公司面临一个汇率变动所带来的风险, 为了回避这个风险, 它可以采取两种措施:

(A) 按每月交付的货款额, 买 12 张期权锁定汇率.

(B) 按一年应付的总金额, 买一张一年为期的算术平均亚式期权, 锁定汇率.

下面我们通过一个例子比较一下该公司付出的期权金 (按 Black-Scholes 理论计算) ([40]):

例 美国公司进口日本产品, 每月应向日本支付 100 万日元货款, 若汇率现价为 1 美元 = 85 日元, 公司希望锁定这个汇率, 设 $r = 6\%, q = 3\%, \sigma = 18\%$, 则方案 (A) 中, 这 12 张期权的期权金分别为 \$258, \$372, \$463, \$540, \$610, \$674, \$733, \$789, \$842, \$892, \$940, \$987, 总计应付期权金为 \$8100. 方案 (B) 中, 这张一年为期的亚式期权的期权金为 \$5795.

执行这两个方案, 该美国公司都可以达到预期的目的, 但所花的代价不同, 采用方案 (B) 比方案 (A) 要节省 \$2305, 比采用方案 (A) 所花费期权金节省了 28.46%.

如果一个外贸公司与外国企业进行贸易往来, 按本国货币结算的成本是确定已知的, 那么为了回避汇率风险, 保证公司获取预期利润率, 通常采取具固定敲定价的亚式期权. 反之, 如果按外国货币结算的成本是确定的, 获取的利润率 (按外国货币结算) 亦是预期的, 只是担心在年末当款项汇入本国公司所面临的汇率风险, 那么该公司应采取具有浮动敲定价的亚式期权. 一般来说具固定敲定价的亚式期权比具浮动敲定价的亚式期权使用更普遍一些.

由于人们对算术平均比几何平均更容易理解, 因此在金融市场中采用算术平均亚式期权比几何平均亚式期权要更普遍. 但从我们的定价模型看, 由于人们普遍采用几何 Brown 运动来刻画原生资产的价格变化, 因此从使用 Black – Scholes 框架计算期权金的角度看, 几何平均亚式期权要比算术平均亚式期权简单得多.

§9.2 模型和简化

现在我们来建立亚式期权定价的数学模型.

设亚式期权定价是

$$V = V(S_t, J_t, t),$$

形成投资组合

$$\Pi = V(S, J, t) - \Delta S.$$

选取适当的 Δ, 使得 Π 在 $(t, t+dt)$ 时段内是无风险的，即

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta S)dt. \tag{9.2.1}$$

由 Itô 公式,

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS - q\Delta S dt \\ &= (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - q\Delta S)dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial J}dJ - \Delta dS \qquad (9.2.2) \\ &= (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - q\Delta S + \frac{\partial V}{\partial J}\frac{dJ}{dt})dt + (\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta)dS. \end{aligned}$$

取

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

从而由 (9.2.1),(9.2.2) 得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J}\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{9.2.3}$$

其中

$$J_t = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau, & \text{(算术平均)} \\ e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_\tau d\tau}, & \text{(几何平均)} \end{cases} \tag{9.2.4}$$

故

$$\frac{dJ_t}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{t}[S_t - J_t], & \text{(算术平均)} \\ J_t[\frac{\ln S_t - \ln J_t}{t}]. & \text{(几何平均)} \end{cases} \tag{9.2.5}$$

将 (9.2.5) 代入 (9.2.3)，我们得到亚式期权的定价模型:

算术平均亚式期权的定价模型：在定解区域 $\{0 \le S < \infty, 0 \le J < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上，求解定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{S-J}{t}\dfrac{\partial V}{\partial J} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (9.2.6)\\
V(S,J,T) = \begin{cases} (J-K)^+, & \text{(具固定敲定价格看涨期权)}\\ (K-J)^+, & \text{(具固定敲定价格看跌期权)}\\ (S-J)^+, & \text{(具浮动敲定价格看涨期权)}\\ (J-S)^+. & \text{(具浮动敲定价格看跌期权)} \end{cases} & (9.2.7)
\end{cases}
$$

几何平均亚式期权的定价模型：在定解区域 $\{0 \le S < \infty, 0 \le J < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上求解定解问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} + J\dfrac{\ln S - \ln J}{t}\dfrac{\partial V}{\partial J} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (9.2.8)\\
V(S,J,T) = \begin{cases} (J-K)^+, & \text{(具固定敲定价格看涨期权)}\\ (K-J)^+, & \text{(具固定敲定价格看跌期权)}\\ (S-J)^+, & \text{(具浮动敲定价格看涨期权)}\\ (J-S)^+. & \text{(具浮动敲定价格看跌期权)} \end{cases} & (9.2.9)
\end{cases}
$$

方程 (9.2.6),(9.2.8) 是包括三个变量的超抛物方程．为了寻求定解问题 (9.2.6),(9.2.7) 和 (9.2.8),(9.2.9) 的解，我们研究有没有可能引进适当的组合自变量，把它们化成一维问题．值得庆幸的是所有亚式期权的定价问题都可化为一维问题，但只有几何平均亚式期权的定价可以得到显式表达式．为了以下讨论方便，我们只讨论看涨期权的情形．

（A）具固定敲定价的算术平均亚式期权

令

$$\xi = \frac{TK - tJ}{S}, \tag{9.2.10}$$

$$V = \frac{SU}{T}. \tag{9.2.11}$$

通过直接计算，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{S}{T}\left[\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{J}{S}\right)\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial J}=\frac{S}{T}\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{t}{S}\right),$$
$$\frac{\partial V}{\partial S}=\frac{U}{T}+\frac{S}{T}\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{tJ-TK}{S^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{2}{T}\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{tJ-TK}{S^2}\right)+\frac{S}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{tJ-TK}{S^2}\right)^2-\frac{2S}{T}\left(\frac{tJ-TK}{S^3}\right),$$

将它们代入 (9.2.6) 得到

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-[(r-q)\xi+1]\frac{\partial U}{\partial \xi}-qU=0, \tag{9.2.12}$$

以及由 (9.2.7), 得到终值条件:

$$U|_{t=T}=\frac{T}{S}V\bigg|_{t=T}=\frac{T}{S}(J-K)^+=(-\xi)^+. \tag{9.2.13}$$

这样具固定敲定价算术平均的亚式期权在变换 (9.2.10),(9.2.11) 下, 转化为在区域 $\{\xi\in R, 0\le t\le T\}$ 求解一维抛物方程的 Cauchy 问题 (9.2.12),(9.2.13).

(B) 具浮动敲定价的算术平均亚式期权

令

$$\xi=\frac{tJ}{S}, \tag{9.2.14}$$

$$V=SU. \tag{9.2.15}$$

通过直接计算，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}=S\left[\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{J}{S}\right)\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial J}=t\frac{\partial U}{\partial \xi},$$
$$\frac{\partial V}{\partial S}=U+S\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{tJ}{S^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=S\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{tJ}{S^2}\right)^2.$$

将它们代入方程 (9.2.6)，从而有

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+[1-(r-q)\xi]\frac{\partial U}{\partial \xi}-qU=0, \tag{9.2.16}$$

以及由 (9.2.7), 得到

$$U|_{t=T} = \frac{1}{S}V|_{t=T} = \left(1 - \frac{tJ}{ST}\right)^+|_{t=T} = \left(1 - \frac{\xi}{T}\right)^+. \tag{9.2.17}$$

这样具浮动敲定价的算术平均亚式期权在变换 (9.2.14),(9.2.15) 下，转化为在区域 $\{0 \le \xi \le \infty, 0 \le t \le T\}$ 上求解定解问题 (9.2.16),(9.2.17).

（C）具固定敲定价的几何平均亚式期权

令

$$\xi = \frac{t\ln J + (T-t)\ln S}{T}, \tag{9.2.18}$$

$$V = U(\xi, t). \tag{9.2.19}$$

通过直接计算，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\left[\frac{\ln J}{T} - \frac{\ln S}{T}\right],\\
\frac{\partial V}{\partial J} &= \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{t}{TJ},\\
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{T-t}{TS}\frac{\partial U}{\partial \xi},\\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \left(\frac{T-t}{TS}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{T-t}{TS^2}\frac{\partial U}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

将它们代入方程 (9.2.8) 得到

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{T-t}{T}\right)\frac{\partial U}{\partial \xi} - rU = 0, \tag{9.2.20}$$

以及由 (9.2.9), 得到

$$U|_{t=T} = V|_{t=T} = (J-K)^+|_{t=T} = (e^{\xi} - K)^+. \tag{9.2.21}$$

这样具固定敲定价的几何平均亚式期权在变换 (9.2.18),(9.2.19) 下，转化为在区域 $\{\xi \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T\}$ 上，求解 Cauchy 问题 (9.2.20),(9.2.21).

（D）具浮动敲定价几何平均亚式期权

令

$$\xi = \frac{1}{t}\ln\frac{J}{S}, \tag{9.2.22}$$

$$V = SU. \tag{9.2.23}$$

通过直接计算，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= S\frac{\partial U}{\partial t} + S\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{\xi}{t}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial J} &= S\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(\frac{1}{tJ}\right),\\
\frac{\partial V}{\partial S} &= U + S\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(-\frac{1}{tS}\right),\\
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= S\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{tS}\right)^2 - \frac{1}{tS}\frac{\partial U}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

将它们代入方程 (9.2.8) 得到

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) - 2\xi\right]\frac{1}{t}\frac{\partial U}{\partial \xi} - qU = 0, \tag{9.2.24}$$

以及由 (9.2.9), 得到

$$U|_{t=T} = \frac{1}{S}V|_{t=T} = (1 - \frac{J}{S})^+|_{t=T} = (1 - e^{T\xi})^+. \tag{9.2.25}$$

这样具浮动敲定价几何平均亚式期权在变换 (9.2.22),(9.2.23) 下，转化为在区域 $\{\xi \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T\}$ 上求解 Cauchy 问题 (9.2.24),(9.2.25).

附注 对于具浮动敲定价的几何平均亚式期权，虽然在变换 (9.2.24), (9.2.25) 下，原定解问题被转化为一维问题处理，但是由于方程 (9.2.24) 的一阶项系数中同时包含 ξ 和 t，因此对于 Cauchy 问题 (9.2.24),(9.2.25) 无法求得解的显式表达式. 所以有时我们仍考虑利用变换 (9.2.18), (9.2.19)，当然在这个变换下具浮动敲定价的几何平均亚式期权的数学模型 (9.2.8),(9.2.9) 不可能化为一维问题（因为条件 (9.2.9), $V(S, J, t) = (S - J)^+$ 不可能化为只依赖 ξ 的函数），但是由于方程具有一些类似于一维问题的特殊结构，因此将可以求得解的显式表达式.

对于具浮动敲定价的几何平均亚式期权，令

$$x = \ln S, \tag{9.2.26}$$

$$y = \frac{t\ln J + (T - t)\ln S}{T}, \tag{9.2.27}$$

$$V = U(x, y, t). \tag{9.2.28}$$

通过直接计算, 方程 (9.2.8) 可转化为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\sigma^2\left(\frac{T-t}{T}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\frac{T-t}{T}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right]-rU=0,$$

或

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\right]^2 U\\&+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\left[\left(\frac{T-t}{T}\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\right]U-rU=0,\end{aligned}\tag{9.2.29}$$

以及由 (9.2.9), 得到

$$U|_{t=T}=(e^x-e^y)^+.\tag{9.2.30}$$

这样具浮动敲定价的几何平均亚式期权在变换 (9.2.26)– (9.2.28) 下, 转化为在区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, 0\le t\le T\}$ 上的 Cauchy 问题 (9.2.29),(9.2.30).

（E） **美式具浮动敲定价的亚式期权** (American–style Asian options with floating strike price)

美式具浮动敲定价的亚式期权不论是算术平均还是几何平均, 它们都可以引进组合问题自变量, 把它们化成一维的自由边界问题.

(1)**算术平均情形**

考虑支付红利的美式具浮动敲定价的亚式期权, 它们的模型（以看涨期权为例）为: 在区域 $\{0\le S<\infty, 0\le J<\infty, 0\le t\le T\}$ 上, 求解障碍问题:

$$\begin{cases}\min\{-\hat{\mathcal{L}}V, V-(S-J)^+\}=0, & (9.2.31)\\ V|_{t=T}=(S-J)^+, & (9.2.32)\end{cases}$$

其中

$$\hat{\mathcal{L}}V=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{S-J}{t}\frac{\partial V}{\partial J}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV.$$

令

$$\xi=\frac{tJ}{S},\tag{9.2.33}$$

$$V=SU.\tag{9.2.34}$$

在上述变换下, 障碍问题 (9.2.31),(9.2.32) 转化为在区域 $\{\xi\in\mathbf{R}_+, 0\le t\le T\}$ 上求解:

$$\begin{cases} \min\left\{-\hat{\mathcal{L}}_1 U, U - \left(1 - \frac{\xi}{t}\right)^+\right\} = 0, & (9.2.35) \\ U|_{t=T} \left(1 - \frac{\xi}{T}\right)^+. & (9.2.36) \end{cases}$$

其中

$$\hat{\mathcal{L}}_1 U = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + [1 - (r-q)\xi]\frac{\partial u}{\partial \xi} - qU.$$

(2) **几何平均情形**

考虑支付红利的美式具浮动敲定价的亚式期权，它们的模型（以看涨期权为例）为：在区域 $\{0 \le S < \infty, 0 \le J < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上，求解障碍问题：

$$\begin{cases} \min\{-\tilde{\mathcal{L}}V, V - (S-J)^+\} = 0, & (9.2.37) \\ V|_{t=T} = (S-J)^+, & (9.2.38) \end{cases}$$

其中

$$\tilde{\mathcal{L}}V = \frac{\partial V}{\partial t} + J\frac{\ln S - \ln J}{t}\frac{\partial V}{\partial J} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

令

$$\xi = \frac{1}{t}\ln\frac{J}{S}, \tag{9.2.39}$$

$$V = SU. \tag{9.2.40}$$

在上述变换下，障碍问题 (9.2.37),(9.2.38) 转化为在区域 $\{\xi \in \mathbf{R}, 0 \le t \le T\}$ 上求解

$$\begin{cases} \min\{-\tilde{\mathcal{L}}_1 U, U - (1 - e^{t\xi})^+\} = 0, \\ U|_{t=T} = (1 - e^{T\xi})^+, \end{cases}$$

其中

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 U = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi} - \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) - 2\xi\right]\frac{1}{t}\frac{\partial U}{\partial \xi} - qU.$$

对于美式具固定敲定价的亚式期权是否必能化成一维问题，目前还不清楚；但至少可以肯定在变换 (9.2.10),(9.2.11) 以及 (9.2.18),(9.2.19) 下，美式固定敲定价的亚式期权是不能化成一维自由边界问题的.

§9.3 欧式几何平均亚式期权的定价公式

欧式几何平均亚式期权的定价是可以用显式解给出的.

（A）具固定敲定价的亚式期权

在变换 (9.2.18),(9.2.19) 下，定价问题转化为求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left(\dfrac{T-t}{T}\right)\dfrac{\partial U}{\partial \xi}-rU=0, & (9.3.1)\\ U|_{t=T}=(e^{\xi}-K)^{+}. & (9.3.2)\end{cases}$$

命

$$W=Ue^{\beta(t)}, \tag{9.3.3}$$

$$\eta=\xi+\alpha(t), \tag{9.3.4}$$

$$\tau=\gamma(t). \tag{9.3.5}$$

将它们代入 (9.3.1), 得到

$$\gamma'(t)\frac{\partial W}{\partial \tau}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{T-t}{T}\right)+\alpha'(t)\right]\frac{\partial W}{\partial \eta}-(r+\beta'(t))W=0.$$

取

$$\begin{aligned}&\alpha'(t)+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{T-t}{T}\right)=0,\\ &\beta'(t)+r=0,\\ &\gamma'(t)=-\left(\frac{T-t}{T}\right)^2,\end{aligned}$$

以及终值条件:

$$\alpha(T)=\beta(T)=\gamma(T)=0.$$

解之得到

$$\begin{aligned}&\alpha(t)=\frac{1}{2T}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)^2,\\ &\beta(t)=r(T-t),\\ &\gamma(t)=\frac{1}{3T^2}(T-t)^3.\end{aligned}$$

在变换 (9.3.3)—(9.3.5) 下, 定解问题 (9.3.1),(9.3.2) 转化为热传导方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial \tau}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}=0,\\ W(\eta,0)=(e^{\eta}-K)^{+}.\end{cases}$$

它的解可表成 Poisson 公式:

$$W(\eta,\tau)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{y}-K)^{+}e^{-\frac{(y-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}\tau}}dy.$$

由变换 (9.3.3) –(9.3.5) 以及 (9.2.18),(9.2.19), 回到原变量 (S,J,t) 以及函数 V, 从而有

$$V(S,J,t)=[J^{t}S^{T-t}]^{\frac{1}{T}}e^{(r^{*}+\frac{\sigma^{*2}}{2})(T-t)}N(d_{1}^{*})-KN(d_{2}^{*}),$$

其中

$$d_1^*=\frac{\frac{1}{T}\ln\frac{J^tS^{T-t}}{K^T}+(r^*+\frac{\sigma^{*2}}{2})(T-t)}{\sigma^*\sqrt{T-t}},$$

$$d_2^*=d_1^*-\sigma^*\sqrt{T-t},$$

$$r^*=(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T-t}{2T},$$

$$\sigma^*=\frac{\sigma(T-t)}{\sqrt{3}T}.$$

(B) 具浮动敲定价的亚式期权

在变换 (9.2.26)– (9.2.28) 下, 问题 (9.2.8),(9.2.9) 被转化为 (9.2.29),(9.2.30), 即在区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, 0\le t\le T\}$ 上求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{T-t}{T}\dfrac{\partial}{\partial y}\right]^2U+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left[\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{T-t}{T}\dfrac{\partial}{\partial y}\right]U-rU=0, & (9.3.6)\\ U|_{t=T}=(e^x-e^y)^+\hat{=}U_0(x,y). & (9.3.7)\end{cases}$$

用 Fourier 变换求解 Cauchy 问题 (9.3.6),(9.3.7)([41]). 令

$$\hat{U}(\xi,\eta,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,y,t)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy,$$

对方程 (9.3.6) 两边作 Fourier 变换, 从而得到 $\hat{U}$ 作为 t 的函数适合的常微分方程(ξ,η 是参数):

$$\frac{d\hat{U}}{dt}-\frac{\sigma^2}{2}\left(\xi+\frac{T-t}{T}\eta\right)^2\hat{U}+i\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\xi+\frac{T-t}{T}\eta\right)\hat{U}-r\hat{U}=0. \tag{9.3.8}$$

对初条件 (9.3.7) 作 Fourier 变换，得到

$$\hat{U}(T)=\hat{U}_0(\xi,\eta). \tag{9.3.9}$$

解常微分方程初值问题 (9.3.8),(9.3.9) 得到

$$\hat{U}(\xi,\eta,t)=\hat{U}_0(\xi,\eta)\exp\{-(d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2)+i(d_4\xi+d_5\eta)-d_6\}, \tag{9.3.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
d_1&=\frac{\sigma^2}{2}(T-t),\\
d_2&=\frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)^2}{2T},\\
d_3&=\frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)^3}{3T^3},\\
d_4&=\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\\
d_5&=\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{(T-t)^2}{2T},\\
d_6&=r(T-t).
\end{aligned}$$

对 (9.3.10) 求 Fourier 逆变换，从而得到

$$U(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_0(\alpha,\beta)G(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta, \tag{9.3.11}$$

其中

$$U_0(\alpha,\beta)=(e^\alpha-e^\beta)^+, \tag{9.3.12}$$

$$\begin{aligned}G(x,y)=&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-(d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2)+i(d_4\xi+d_5\eta)-d_6\}\\
&\cdot e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{9.3.13}$$

为了计算积分 (9.3.13)，对积分换元

$$\begin{aligned}
\xi&=\frac{1}{\sqrt{2d_1}}(\hat{\xi}+\hat{\eta}),\\
\eta&=\frac{1}{\sqrt{2d_3}}(\hat{\xi}-\hat{\eta}).
\end{aligned}$$

因为

$$
\begin{aligned}
& d_1\xi^2 + 2d_2\xi\eta + d_3\eta^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[(\hat{\xi}+\hat{\eta})^2 + (\hat{\xi}-\hat{\eta})^2 + \frac{2d_2}{\sqrt{d_1d_3}}(\hat{\xi}^2-\hat{\eta}^2)\right] \\
&= \left(1+\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)\hat{\xi}^2 + \left(1-\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)\hat{\eta}^2,
\end{aligned}
$$

故积分 (9.3.13) 可改写为

$$
\begin{aligned}
G(x,y) = {} & \frac{1}{4\pi^2\sqrt{d_1d_3}}e^{-d_6}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(1+\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)\hat{\xi}^2 + i\left(\frac{d_4+x}{\sqrt{2d_1}}+\frac{d_5+y}{\sqrt{2d_3}}\right)\hat{\xi}}d\hat{\xi} \\
& \cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(1-\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)\hat{\eta}^2 + i\left(\frac{d_4+x}{\sqrt{2d_1}}-\frac{d_5+y}{\sqrt{2d_3}}\right)\hat{\eta}}d\hat{\eta} \\
= {} & \frac{e^{-d_6}}{4\pi^2\sqrt{d_1d_3-d_2^2}}\exp\left[-\frac{\left(\frac{d_4+x}{\sqrt{d_1}}+\frac{d_5+y}{\sqrt{d_3}}\right)^2}{8\left(1+\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)} - \frac{\left(\frac{d_4+x}{\sqrt{d_1}}-\frac{d_5+y}{\sqrt{d_3}}\right)^2}{8\left(1-\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)}\right].
\end{aligned}
$$

对它代回 (9.3.11)，由变换（ 9.2.26),(9.2.28)，回到原变量 (S,J,t) 以及函数 $V(S,J,t)$，经简化得到

$$
V(S,J,t) = S[e^{-r(T-t)}N(-g_2) - J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}e^{g_0}N(-g_1)],
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_0 &= q(T-t) + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})\frac{T^2-t^2}{2T} - \frac{\sigma^2}{6}\frac{T^3-t^3}{T^2} \\
g_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma(T^3-t^3)^{1/2}}[t\ln\frac{J}{S} - (r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T^2-t^2) + \frac{\sigma^2}{6}\frac{T^3-t^3}{T}] \\
g_2 &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma(T^3-t^3)^{1/2}}[t\ln\frac{J}{S} - (r-q+\frac{\sigma^2}{2})(T^2-t^2)].
\end{aligned}
$$

§9.4 亚式看涨 — 看跌期权的平价公式

利用亚式期权的数学模型，建立各种亚式期权的 看涨 - 看跌平价关系.

（A）具固定敲定价算术平均亚式期权的看涨 — 看跌平价关系

设 $C(S,J,t)$ 与 $P(S,J,t)$ 分别为亚式看涨和看跌期权的定价，令

$$W(S,J,t)=C(S,J,t)-P(S,J,t),$$

从而在 $\{0\le S<\infty,\ 0\le J<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，W 适合

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{S-J}{t}\dfrac{\partial W}{\partial J}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial W}{\partial S}-rW=0, & (9.4.1)\\ W\big|_{t=T}=(J-K)^+-(K-J)^+=J-K. & (9.4.2)\end{cases}$$

在变换 (9.2.10) 下，函数

$$\hat{W}=\frac{T}{S}W \tag{9.4.3}$$

在 $\{\xi\in\mathbf{R},\ 0\le t\le T\}$ 上适合 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\xi^2\dfrac{\partial^2\hat{W}}{\partial\xi^2}-[(r-q)\xi+1]\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial\xi}-q\hat{W}=0 & (9.4.4)\\ \hat{W}(\xi,T)=-\xi. \qquad (\xi\in\mathbf{R}) & (9.4.5)\end{cases}$$

设

$$\hat{W}(\xi,t)=a(t)\xi+b(t). \tag{9.4.6}$$

代入 (9.4.4), (9.4.5), 并比较系数得:

$$\begin{cases}a'(t)-ra(t)=0,\\ b'(t)-a(t)-qb(t)=0,\\ a(T)=-1,\\ b(T)=0.\end{cases}$$

解之得到 $(r\ne q)$

$$a(t)=-e^{-r(T-t)},$$

$$b(t)=\frac{-1}{r-q}[e^{-r(T-t)}-e^{-q(T-t)}].$$

代入 (9.4.6)，并考虑 (9.2.10) 和 (9.4.3)，得 $(r\ne q)$:

$$\begin{aligned}C(S,J,t)-P(S,J,t)&=\frac{S}{T}\Big[a(t)\frac{TK-tJ}{S}-b(t)\Big]\\ &=\Big[\frac{t}{T}J-\frac{S}{(r-q)T}-K\Big]e^{-r(T-t)}+\frac{S}{r-q}e^{-q(T-t)}.\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

（B）具浮动敲定价算术平均亚式期权的看涨–看跌平价关系

令

$$W(S,J,t)=C(S,J,t)-P(S,J,t).$$

从而在 $\{0\le S<\infty,\ 0\le J<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，W 适合 (9.4.1) 以及终值条件

$$W|_{t=T}=(S-J)^+-(J-S)^+=S-J. \tag{9.4.8}$$

在变换 (9.2.14) 下，函数

$$\hat{W}=\frac{1}{S}W \tag{9.4.9}$$

在 $\{0\le\xi<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上适合：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\xi^2\dfrac{\partial^2\hat{W}}{\partial\xi^2}+[1-(r-q)\xi]\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial\xi}-q\hat{W}=0, & (9.4.10)\\ \hat{W}|_{t=T}=1-\dfrac{\xi}{T}. & (9.4.11)\end{cases}$$

设

$$\hat{W}=a(t)\xi+b(t), \tag{9.4.12}$$

代入 (9.4.10),(9.4.11)，并比较系数，得到

$$\begin{cases}a'(t)-ra(t)=0,\\ b'(t)+a(t)-qb(t)=0,\\ a(T)=-\dfrac{1}{T},\\ b(T)=1.\end{cases}$$

解之得到 $(r\ne q)$

$$a(t)=-\frac{1}{T}e^{-r(T-t)},$$

$$b(t)=\frac{1}{T(r-q)}e^{-r(T-t)}+\left[1-\frac{1}{T(r-q)}\right]e^{-q(T-t)}.$$

代入 (9.4.12)，并考虑 (9.2.14) 和 (9.4.9)，得 $(r\ne q)$:

$$\begin{aligned}C(S,J,t)-P(S,J,t)&=S[a(t)\frac{tJ}{S}+b(t)]\\ &=-\frac{t}{T}Je^{-r(T-t)}+\frac{S}{T(r-q)}e^{-r(T-t)}+\left[1-\frac{1}{T(r-q)}\right]Se^{-q(T-t)}.\end{aligned} \tag{9.4.13}$$

（C）具固定敲定价几何平均亚式期权的看涨－看跌平价关系

令

$$W(S,J,t)=C(S,J,t)-P(S,J,t).$$

从而在 $\{0\le S<\infty,\ 0\le J<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，W 适合初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+J\dfrac{\ln S-\ln J}{t}\dfrac{\partial W}{\partial J}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial W}{\partial S}-rW=0, & (9.4.14)\\ W\mid_{t=T}=(J-K)^+-(K-J)^+=J-K. & (9.4.15)\end{cases}$$

在变换 (9.2.18) 下，W 在 $\{\xi\in\mathbf{R},\ 0\le t\le T\}$ 上适合：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left(\dfrac{T-t}{T}\right)\dfrac{\partial W}{\partial \xi}-rW=0, & (9.4.16)\\ W\mid_{t=T}=e^{\xi}-K. & (9.4.17)\end{cases}$$

设

$$W=a(t)e^{\xi}+b(t). \tag{9.4.18}$$

将它代入 (9.4.16),(9.4.17)，并比较系数得

$$\begin{cases} a'(t)+\dfrac{\sigma^2}{2}\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2a(t)+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left(\dfrac{T-t}{T}\right)a(t)-ra(t)=0,\\ b'(t)-rb(t)=0,\\ a(T)=1,\\ b(T)=-K.\end{cases}$$

解之得 $(r>q)$:

$$a(t)=e^{(T-t)\left[\frac{\sigma^2}{6}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2+\frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{2}\frac{T-t}{T}-r\right]},$$

$$b(t)=-Ke^{-r(T-t)}.$$

代入 (9.4.18)，并考虑 (9.2.14) 得

$$\begin{aligned}C(S,J,t)-P(S,J,t)&=a(t)J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}+b(t)\\ &=\left\{e^{(T-t)\left[\frac{\sigma^2}{6}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2+\frac{r-q-\frac{\sigma^2}{2}}{2}\frac{T-t}{T}\right]}J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}-K\right\}e^{-r(T-t)}.\end{aligned}$$

(9.4.19)

（D）具浮动敲定价几何平均亚式期权的看涨 — 看跌平价关系

令

$$W(S,J,t)=C(S,J,t)-P(S,J,t),$$

从而在 $\{0\le S<\infty,\ 0\le J<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，W 适合

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+J\dfrac{\ln S-\ln J}{t}\dfrac{\partial W}{\partial J}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2}+(r-q)S\dfrac{\partial W}{\partial S}-rW=0, & (9.4.20)\\ W\mid_{t=T}=(S-J)^+-(J-S)^+=S-J. & (9.4.21)\end{cases}$$

在变换 (9.2.26)—(9.2.28) 下，函数 W 在区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ 0\le t\le T\}$ 上适合 Cauchy 问题：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\sigma^2\left(\frac{T-t}{T}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\\&\quad+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left[\frac{T-t}{T}\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial x}\right]-rW=0,\end{aligned}\tag{9.4.22}$$

以及由 (9.2.9)，

$$W|_{t=T}=e^x-e^y. \tag{9.4.23}$$

设

$$W(x,y)=a(t)e^x-b(t)e^y. \tag{9.4.24}$$

代入 (9.4.22),(9.4.23)，并比较系数得

$$\begin{cases} a'(t)-qa(t)=0,\\ b'(t)+\dfrac{\sigma^2}{2}\left(\dfrac{T-t}{T}\right)^2b(t)+\left(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\left(\dfrac{T-t}{T}\right)b(t)-rb(t)=0,\\ a(T)=1,\\ b(T)=1.\end{cases}$$

解之得到

$$a(t)=e^{-q(T-t)},$$

$$b(t)=e^{\frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}+\frac{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T}-r(T-t)}.$$

代入 (9.4.24)，并考虑 (9.2.26),(9.2.27)，得到

$$C(S,J,t)-P(S,J,t)=Se^{-q(T-t)}-J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}e^{\frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}+\frac{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)^2}{2T}-r(T-t)}.$$

§9.5 回望期权

回望期权就是在期权到期日持有人可以"回望"期权的有效期内原生资产价格演化的整个历程，选取最低（高）的原生资产价格作为敲定价格，购进（出售）原生资产，因此它在期权到期日 $(t=T)$ 的收益为

$$\text{收益} = S_T - \min_{0\le t\le T} S_t \quad (\text{看涨期权}) \tag{9.5.1}$$

$$= \max_{0\le t\le T} S_t - S_T \quad (\text{看跌期权}) \tag{9.5.2}$$

因此人们亦把它称为"买进按低价，卖出按高价"期权 (options："buy at the low ,sell at the high") 或称标准的回望期权 (standard lookback options). 按我们在这一章开始对路径有关期权的分类，它是"具有浮动敲定价的回望看涨（跌）期权 (lookback call(put)options with a floating strike price)"．由于这类期权的收益高，因此价格十分昂贵．当然对回望看涨期权一旦有效期内的原生资产的最低价是在到期日达到，那么期权将成为一文不值，这种情况的出现将使期权持有人花去了昂贵的期权金而一无所获．

例（接着§9.1 的例子） 考虑 6 个月到期的股票看涨期权，假设 $S_0 = K = \$145, r = 6\%, q = 3\%, \sigma = 29.5\%$ ，通过 Black-Scholes 理论计算出期权金：

	期权金
标准欧式期权	\$12.87
回望期权	\$23.12

从这个例子回望期权的期权金几乎是标准欧式期权的期权金的一倍，它的昂贵程度令人咋舌．

回望期权的收益对原生资产在期权有效期内价格演化的依赖是很强的．它是强路径依赖期权的另一个典型品种．在这里路径依赖变量 J 是

$$J_t = \min_{0\le\tau\le t} S_\tau \text{ 或 } J_t = \max_{0\le\tau\le t} S_\tau. \tag{9.5.3}$$

根据路径变量的定义，对于回望看涨期权，我们有

$$S_t \ge J_t = \min_{0\le\tau\le t} S_\tau, \tag{9.5.4}$$

而对于回望看跌期权，我们有

$$S_t \le J_t = \max_{0\le\tau\le t} S_\tau. \tag{9.5.5}$$

数学模型（以回望看跌期权为例）

设 V 是回望看跌期权的定价，

$$V = V(S, J, t),$$

这里 J 的定义见 (9.5.3).

利用 Δ- 对冲原理，形成投资组合 Π：

$$\Pi = V - \Delta S,$$

适当选取 Δ ，使得 Π 在 $(t, t + dt)$ 是无风险的，即

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{9.5.6}$$

由 Itô 公式:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta dS - qS\Delta dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - qS\Delta\right) dt + \frac{\partial V}{\partial J} dJ \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS. \end{aligned} \tag{9.5.7}$$

如何求 dJ ？由于 (9.5.3) 定义的路径依赖变量 J 对 t 不是可微函数，通常我们先对它进行逼近. 定义

$$J_n(t) = \left[\frac{1}{t}\int_0^t (S_\tau)^n d\tau\right]^{\frac{1}{n}}.$$

显然 $J_n(t)$ 对 t 是可微的，

$$nJ_n^{n-1}(t)\frac{dJ_n}{dt} = \frac{S_t^n - J_n^n(t)}{t}. \tag{9.5.8}$$

此外当 $n \to \infty$ ，因为 S_t 对 t 是连续函数，故

$$\lim_{n\to\infty} J_n(t) = \max_{0\le\tau<t} S_\tau = J_t. \tag{9.5.9}$$

以 $J_n(t)$ 代替路径变量 J_t ，假设 $S \le J_n$ ，从而由 (9.5.8), 等式 (9.5.7) 可改写为

$$\begin{aligned} d\Pi = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 7V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial J_n}\frac{dJ_n}{dt} - qS\Delta\right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS. \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

取

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

从而由 (9.5.10),(9.5.6), 推得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\left(\frac{S}{J_n}\right)^{n-1} S - J_n}{nt} \frac{\partial V}{\partial J_n} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

$$(S \leq J_n) \tag{9.5.11}$$

对于固定 (J, t) ，令 $n \to \infty$ ，考虑到 (9.5.9) ，方程 (9.5.11) 中 $\frac{\partial V}{\partial J_n}$ 的系数趋于 0，从而有

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{9.5.12}$$

$$(0 \leq S \leq J < \infty,\ 0 \leq t \leq T)$$

由 (9.5.1) ，得到

$$V(S, J, T) = J - S, \tag{9.5.13}$$

由于 $\{S = J,\ 0 \leq J < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ 是定解区域的边界，我们需要一个边界条件：

$$\frac{\partial V}{\partial J}\Big|_{S=J} = 0. \tag{9.5.14}$$

它的金融意义：期权定价在原生资产价格达到极大值的水平上对极大值的变化是不敏感的.

因此回望看跌期权定价的数学模型是在区域 $\{0 \leq S \leq J < \infty,\quad 0 \leq t \leq T\}$ 上求解定解问题 (9.5.12)—(9.5.14). 值得注意的是在方程 (9.5.12) 中不出现路径变量 J ，也就是说在解方程 (9.5.12) 时， J 只是一个参量，但 J 出现在边界条件 (9.5.14) 和终值条件 (9.5.13) 中.

同理我们可以建立回望看涨期权定价的数学模型，即在区域 $\{0 \leq J \leq S < \infty,\ 0 \leq t \leq T\}$ 上求解定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & & (9.5.15) \\ V(S, J, T) = S - J, & (0 \leq J \leq S < \infty), & (9.5.16) \\ \dfrac{\partial V}{\partial J}\Big|_{S=J} = 0. & (0 < J < \infty) & (9.5.17) \end{cases}$$

对于欧式回望期权我们可以把它化成一维问题，并得到它的定价的显式表达式.

为确定计，首先考虑回望看跌期权.

令

$$x=\ln\frac{J}{S},\qquad V=Su(x,t). \tag{9.5.18}$$

通过直接计算，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial S}=u+S\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{S}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{1}{S}\left[-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right],$$

代入方程 (9.5.12) 得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(q-r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-qu=0, & (9.5.19)\\ \qquad (0<x<\infty,\ 0\le t\le T) & \\ u\big|_{t=T}=e^x-1, \qquad (0\le x<\infty) & (9.5.20)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0. \qquad (0\le t\le T) & (9.5.21)\end{cases}$$

令

$$u=e^{\alpha x+\beta(T-t)}W, \tag{9.5.22}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{r-q}{\sigma^2},$$

$$\beta=q-\frac{1}{8\sigma^2}[\sigma^2+2(q-r)]^2.$$

得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, \qquad (x\in\mathbf{R}^+,\ 0\le t\le T) & (9.5.23)\\ W\big|_{t=T}=(e^x-1)e^{-\alpha x}, \qquad (x\in\mathbf{R}^+) & (9.5.24)\\ \left[\dfrac{\partial W}{\partial x}+\alpha W\right]\Big|_{x=0}=0. \qquad (0\le t\le T) & (9.5.25)\end{cases}$$

我们仍然企图利用镜像法去求它的解，当然由于边界条件 (9.5.25)，简单地通过对称开拓（即奇偶开拓）那是不行的. 为此令

$$\Phi(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}(e^x-1), & x>0,\\ \varphi(x), & x<0.\end{cases} \tag{9.5.26}$$

求解 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{W}}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 \hat{W}}{\partial x^2} = 0. & (x \in \mathbf{R}, \quad 0 \le t \le T) & (9.5.27) \\ \hat{W}\Big|_{t=T} = \Phi(x), & (x \in \mathbf{R}) & (9.5.28) \end{cases}$$

我们要选取适当的 $\varphi(x)$，使得 Cauchy 问题 (9.5.27),(9.5.28) 的解 $\hat{W}(x,t)$ 在 $x=0$ 上自然适合边界条件 (9.5.25)，即

$$\left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \alpha \hat{W}\right]\Bigg|_{x=0} = 0. \tag{9.5.29}$$

如能做到这一点，那么由问题 (9.5.23)–(9.5.25) 解的唯一性，立得

$$W(x,t) \equiv \hat{W}(x,t). \qquad (x \ge 0,\ 0 \le t \le T) \tag{9.5.30}$$

由 Poisson 公式，(9.2.27),(9.2.28) 的解可表为

$$\hat{W}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x-\xi,t)\Phi(\xi)d\xi, \tag{9.5.31}$$

其中 $\Gamma(x-\xi,t)$ 是方程 (9.2.27) 的基本解:

$$\Gamma(x-\xi,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}, \qquad (0 \le t < T)$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(x-\xi,t)\Phi(\xi)d\xi \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\xi(x-\xi,t)\Phi(\xi)d\xi \\ &= -\Gamma(x,t)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x-\xi,t)\Phi'(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

故由 (9.5.29)，推得

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial x} + \alpha \hat{W}\right]\Bigg|_{x=0} \\
&= -\Gamma(0,t)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\xi,t)[\Phi'(\xi) + \alpha\Phi(\xi)]d\xi \\
&= -\Gamma(0,t)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} \Gamma(\xi,t)[\varphi'(\xi) + \alpha\varphi(\xi)]d\xi \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} \Gamma(\xi,t)[(1-\alpha)e^{(1-\alpha)\xi} + \alpha e^{-\alpha\xi} + \alpha e^{(-\alpha\xi)} - \alpha e^{-\alpha\xi}]d\xi \\
&= -\Gamma(0,t)\varphi(0) - \int_{-\infty}^{0} \Gamma(\xi,t)[\varphi'(\xi) + \alpha\varphi(\xi) + e^{(\alpha-1)\xi}]d\xi.
\end{aligned}
$$

取 $\varphi(x)$ 适合以下方程和边界条件：

$$
\begin{cases}
\varphi'(\xi) + \alpha\varphi(\xi) = -e^{(\alpha-1)\xi}, \\
\varphi(0) = 0.
\end{cases}
$$

若 $2\alpha - 1 \neq 0$，即 $r \neq q$，解之得

$$
\varphi(x) = \frac{-1}{2\alpha - 1}[e^{(\alpha-1)x} - e^{-\alpha x}].
$$

把它代入 (9.5.31),(9.5.30) 立得

$$
\begin{aligned}
W(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi,t)\left[\frac{1}{2\alpha-1}(e^{-\alpha\xi} - e^{(\alpha-1)\xi})\right]d\xi \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} \Gamma(x-\xi,t)[e^{(1-\alpha)\xi} - e^{-\alpha\xi}]d\xi.
\end{aligned}
$$

当 $r = q$ 时，

$$
\varphi(x) = -xe^{\alpha x},
$$

$$
\begin{aligned}
W(x,t) &= -\int_{-\infty}^{0} \Gamma(x-\xi,t)\xi e^{\alpha\xi}d\xi \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} \Gamma(x-\xi,t)[e^{(1-\alpha)\xi} - e^{-\alpha\xi}]d\xi.
\end{aligned}
$$

由 (9.5.22),(9.5.18)，把它代回原自变量 (S,J,t) 以及函数 V，从而得到回望看跌期权定价公式：

当 $r\neq q$ 时,

$$\begin{aligned}V(S,J,t) &= Je^{-r(T-t)}\left[N(b_1)-\frac{1}{\theta}\left(\frac{J}{S}\right)^{\theta-1}N(-b_3)\right]\\&\quad -Se^{-q(T-t)}\left[N(b_2)-\frac{1}{\theta}N(-b_2)\right];\end{aligned}$$

当 $r=q$ 时,

$$\begin{aligned}V(S,J,t) &= -Se^{-r(T-t)}\left[N(b_2)+\ln\left(\frac{J}{S}\right)N(-b_3)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)N(-b_2)\right.\\&\quad\left.-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b_3^2}{2}}\right]+Je^{-r(T-t)}N(b_1);\end{aligned}$$

其中

$$b_1=\frac{\ln\frac{J}{S}+\left(-r+q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$b_2=b_1-\sigma\sqrt{T-t},$$

$$b_3=b_2+\frac{2(r-q)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\theta=\frac{2(r-q)}{\sigma^2}.$$

相仿的推导可以得到回望看涨期权的定价公式:
当 $r\neq q$ 时,

$$\begin{aligned}V(S,J,t) &= -Je^{-r(T-t)}\left[N(a_2)-\frac{1}{\theta}\left(\frac{S}{J}\right)^{1-\theta}N(-a_3)\right]\\&\quad +Se^{-q(T-t)}\left[N(a_1)-\frac{1}{\theta}N(-a_1)\right];\end{aligned}$$

当 $r=q$ 时,

$$\begin{aligned}V(S,J,t) &= Se^{-r(T-t)}\left[N(a_1)+\ln\left(\frac{S}{J}\right)N(-a_3)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)N(-a_1)\right.\\&\quad\left.-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a_3^2}{2}}\right]-Je^{-r(T-t)}N(a_2);\end{aligned}$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln\frac{S}{J} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$$a_3 = -a_1 + \frac{2(r - q)\sqrt{T - t}}{\sigma},$$

$$\theta = \frac{2(r - q)}{\sigma^2}.$$

附注 由于本节研究的标准回望期权属于具浮动敲定价的路径有关期权,因此我们自然想到考虑具固定敲定价的回望期权,即在到期日的收益函数为

$$\text{收益} = (\max_{0<t<T} S_t - K)^+ \quad (\text{看涨情形})$$

或

$$\text{收益} = (K - \min_{0\le t\le T} S_t)^-. \quad (\text{看跌情形})$$

对于这类回望期权,我们同样可以得到它的定价表达式,但是由于这类期权在金融市场上实际意义比较小,因此本节就不介绍了.

附注 标准回望期权与上一章讨论过的重置期权有密切关系. 如果规定的重置时间不是离散的 $(0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < T)$,而是连续地充满了整个期权有效期,那么这张重置期权将就是标准的回望期权. 所以对于一张重置期权,如果重置的时间很多,分布很密,那么我们可以考虑用回望期权的定价作为它的一个近似,因为回望期权定价的表达式要比重置期权简单得多.

美式回望期权

根据无套利原理,美式回望期权的数学模型(以看跌期权为例)是在区域 $\{0 \le S < \infty,\ S \le J,\ 0 \le t \le T\}$ 上,求解 $V = V(S, J, t)$,使它适合

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}V, V - (J - S)\} = 0, & (0 \le S \le J < \infty, 0 \le t \le T) \\ \left.\frac{\partial V}{\partial J}\right|_{S=J} = 0, & (0 \le J < \infty, 0 \le t \le T) \\ V|_{t=T} = J - S, & (0 \le S \le J < \infty) \end{cases}$$

这里
$$\mathcal{L}V=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV.$$
这是一个二维问题. 在变换 (9.5.18) 下，它可以化成一维问题. 即在区域 $\{0\le x<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 上，求 $u=u(x,t)$ 使它适合：
$$\begin{cases}\min\{-\mathcal{L}_0u,u-(e^x-1)\}=0, & (x\in\mathbf{R}^+,0\le t\le T)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, & (0\le t\le T)\\ u(x,T)=e^x-1, & (x\in\mathbf{R}^+)\end{cases}$$
这里
$$\mathcal{L}_0u=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\left(q-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-qu.$$
与它等价的自由边界问题形式是：求 $\{u(x,t),X(t)\}$, 使得在区域 $\{0\le x\le X(t),\ 0\le t\le T\}$ 上适合：
$$\begin{cases}\mathcal{L}_0u=0, & (0\le x\le X(t),0\le t\le T)\\ u(X(t),t)=e^{X(t)}-1, & (0\le t\le T)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)=e^{X(t)}, & (0\le t\le T)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, & (0\le t\le T)\\ u(x,T)=e^x-1. & (0\le x\le X(T))\end{cases}$$
由于
$$\left.\left[\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\left(q-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-qu\right]\right|_{t=T}=q-re^x,$$
因此利用第六章 §6.5 关于自由边界性质的讨论，易知
$$X(T)=\max\left(\ln\frac{q}{r},0\right)$$
和
$$X(t)\text{单调下降}.$$

把它回到原变量 (S,J,t)，从而对美式回望看跌期权的最佳实施边界 Γ，我们有

(1) 对固定 t ， Γ_t 是一条直线： $J - Se^{X(t)}$;

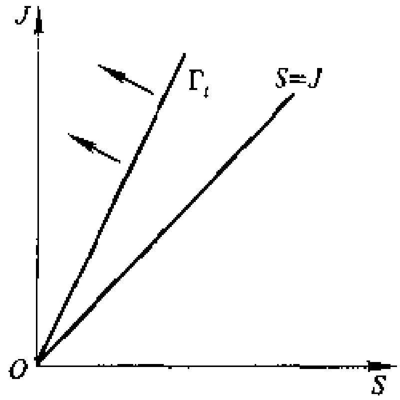
(2) 当 $t = T$ ，

$r \geq q$ 时， Γ_T ： $J = S$,

$r < q$ 时， Γ_T ： $J = \frac{q}{r}S$;

(3) 当 $T - t$ 增加时，持有区域 $\{0 \leq \frac{J}{S} \leq e^{X(t)}\}$ 不断扩大；（见图）

(4) 当 $T - t$ 无限增加时， $e^{X(t)}$ 有上界，这个界限就是永久美式回望看跌期权的最佳实施边界. 有关这方面的论证，我们就不展开了，读者可仿 §6.5 来进行.



§9.6 数值方法

路径有关期权的定价问题虽然有的（如几何平均亚式期权，回望期权）有显式表达式，有的（如算术平均亚式期权）没有显式表达式，但是人们有时还是乐于使用数值方法.

最重要亦是最常用的数值方法是 二叉树方法.

这一节我们将首先介绍二叉树方法，然后给出 特征线差分格式以及建立二叉树方法与特征线差分方法的等价关系.

A. 二叉树方法

对期权的有效期 $[0, T]$ 进行 N 等分：

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$

其中 $t_n = n\Delta t$, $(0 \leq n \leq N)$, $\Delta t = \frac{T}{N}$.

建立随机变量 S（原生资产价格）与 J（路径变量）的二叉树过程：

设 $S_i^n = S_0 u^i d^{n-i}$ $(0 \le i \le n)$ 表示在 t_n 时刻原生资产价格的所有可能取值. $J_{i,k}^n$, $(k \in I_i^n)$ 表示在 t_n 时刻当原生资产价格为 S_i^n 时路径变量的所有可能取值, I_i^n 是相应于 S_i^n 路径变量的指标集合.

若在 $t = t_n$ 时刻, $S_i^n, J_{i,k}^n$ 为已知, 问在 $t = t_{n+1}$ 时刻, 它们的可能变化?

由二叉树过程:

$$
\begin{tikzcd}
 & S_{i+1}^{n+1} = S_i^n u \\
S_i^n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_i^{n+1} = S_i^n d.
\end{tikzcd}
$$

为了导出由此引起的 $J_{i,k}^n$ 的变化, 我们把它分三种情形来考察:

假设原生资产价格从 t=0 时刻 S_0 到 $t = t_n$ 时刻 S_i^n 的历程为 $\{S_0, S_{i_1}^1, \cdots, S_{i_{n-1}}^{n-1}, S_i^n\}$.

由于在 $[t_n, t_{n+1}]$ 上, 原生资产价格从 S_i^n 变到 S_{i+1}^{n+1} 或 S_i^{n+1}, 故

(1) **相应的算术平均**

$$J_{i,k}^n = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} S_{i_\ell}^\ell \qquad (S_{i_n}^n = S_i^n)$$

的变化为

$$J_{i,k_u}^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{n} S_{i_\ell}^\ell + S_{i+1}^{n+1} \right\},$$

$$J_{i,k_d}^{n+1} = \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{n} S_{i_\ell}^\ell + S_i^{n+1} \right\};$$

也就是

$$
\begin{tikzcd}
 & J_{i+1,k_u}^{n+1} = \frac{n}{n+1} J_{i,k}^n + \frac{1}{n+1} S_{i+1}^{n+1} \\
J_{i,k}^n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & J_{i,k_d}^{n+1} = \frac{n}{n+1} J_{i,k}^n + \frac{1}{n+1} S_i^{n+1};
\end{tikzcd}
\tag{9.6.1}
$$

(2) **相应的几何平均**

$$J_{i,k}^n = \Big(\prod_{\ell=1}^{n} S_{i_\ell}^\ell\Big)^{1/n}$$

的变化为

$$J_{i,k}^n \begin{cases} J_{i+1,k_u}^{n+1} = (J_{i,k}^n)^{\frac{n}{n+1}}(S_{i+1}^{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \\ \\ J_{i,k_d}^{n+1} = (J_{i,k}^n)^{\frac{n}{n+1}}(S_{i}^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}; \end{cases} \tag{9.6.2}$$

(3) **相应的极大（小）值**（为确定计，以极大值为例）

$$J_{i,k}^n = \max_{1\le\ell\le n} S_{i_\ell}^\ell$$

的变化为

$$J_{i,k}^n \begin{cases} J_{i+1,k_u}^{n+1} = \max\{J_{i,k}^n, S_{i+1}^{n+1}\} \\ \\ J_{i,k_d}^{n+1} = J_{i,k}^n. \end{cases} \tag{9.6.3}$$

附注 必须看到变量 $J_{i,k}^n$ 形成的二叉树过程具有与路径有关的特点. 对应于每一个 S_i^n，与它相应的路径变量 $\vec{J}_i^n = \{J_{i,\ell}^n\}_{\ell\in I_i^n}$ 一般来说是一个 2^{n-1} 维向量. （其中分量可能有重叠.）

在建立了原生资产价格和路径变量运行的二叉树过程以后, 我们利用 Δ-对冲技巧，基于无套利原理，导出路径有关期权定价的二叉树算法.

对于每一个单时段 — 双状态模型:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & S^{n+1}_{i+1} \\ S^n_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S^{n+1}_i, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & J^{n+1}_{i+1,k_u} \\ J^n_{i,k} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & J^{n+1}_{i,k_d}, \end{tikzcd}$$

相应的期权定价

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & V^{n+1}_{i+1,k_u} \arrow[dl] \\ V^n_{i,k} & \\ & V^{n+1}_{i,k_d}, \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

其中

$$\begin{cases} V^{n+1}_{i+1,k_u} = V(S^{n+1}_{i+1}, J^{n+1}_{i+1,k_u}, t_{n+1}), \\ V^{n+1}_{i,k_d} = V(S^{n+1}_i, J^{n+1}_{i,k_d}, t_{n+1}), \\ V^n_{i,k} = V(S^n_i, J^n_{i,k}, t_n). \end{cases} \tag{9.6.4}$$

形成投资组合

$$\Pi = V - \Delta S,$$

选取适当的 Δ, 使得在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上, Π 是无风险的, 从而得到

$$V^{n+1}_{i+1,k_u} - \Delta S^{n+1}_{i-1} = V^{n+1}_{i,k_d} - \Delta S^{n+1}_i = \rho(V^n_{i,k} - \Delta S^n_i).$$

解之得

$$V^n_{i,k} = \frac{1}{\rho}[qV^{n+1}_{i+1,k_u} + (1-q)V^{n+1}_{i,k_d}], \tag{9.6.5}$$

其中

$$q = \frac{\rho - d}{u - d}, \qquad 1 - q = \frac{u - \rho}{u - d}. \tag{9.6.6}$$

算法 在计算期权定价以前, 首先要形成关于原生资产价格 S 以及相应的路径变量的二叉树. 其中特别要输入关于每一个原生资产价格 S^n_i 与其相应的路径向量 $\vec{J}^n_i$, 以及它的每一个分量 $J^n_{i,k}$ 与它相应的 J^{n+1}_{i+1,k_u} 以及 J^{n+1}_{i,k_d} 的对应信息.

在 $t=t_N=T$ 上根据已给的收益函数，$\{V_{i,k}^N\}_{k\in I_i^N}$, $(0\le i\le N)$ 为已知，为了得到 $\{V_{i,k}^{N-1}\}_{k\in I_i^{N-1}}$, $(0\le i\le N-1)$:

第一步　对于在 $t=t_{N-1}$, $S=S_i^{N-1}$ 上每一个路径有关指标 $k\in I_i^{N-1}$，在 $t=t_N$、$S=S_{i+1}^N$ 与 $S=S_i^N$ 所对应的路径向量 $\vec{J}_{i+1}^N$ 与 $\vec{J}_i^N$ 中，找到指标 $k_u\in I_{i+1}^N$ 和 $k_d\in I_i^N$.

第二步　在 $\{V_{i+1,k}^N\}_{k\in I_{i+1}^N}$ 和 $\{V_{i,k}^N\}_{k\in I_i^N}$ 中找到相应于指标为 k_u、k_d 的分量 J_{i+1,k_u}^N 和 J_{i,k_d}^N，并算出相应的定价 V_{i+1,k_u}^N 与 V_{i,k_d}^N.

第三步　利用公式 (9.6.5) 求出 $V_{i,k}^{N-1}$

然后利用反向归纳法，算出所有的期权定价，特别是期权发行日的期权金.

附注　应该说上述算法并不复杂，但计算量和存储量是极大的. 因为在每一个节点 S_i^n 都对应一个 2^{n-1} 维的向量 $\vec{J}_i^n$，对于每一个向量 $\vec{J}_i^n$ 必须存储它的分量以及与 $\vec{J}_{i+1}^{n+1}$ 和 $\vec{J}_{i+1}^{n+1}$ 的分量之间的对应信息. 所以当 n 比较大时，需要花出的代价是惊人的. 所以给出一些有效的修正算法是十分必要的，特别对于算术平均亚式期权情况更是如此，在这里我们就不细论了，读者可参阅 [21][22].

B. 特征线差分方法

为了确切起见，以下只考虑算术平均亚式期权，即求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{S-J}{t}\dfrac{\partial V}{\partial J}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0. & (9.6.7)\\ \qquad (0\le S<\infty,\ 0<J<\infty,\ 0\le t\le T) & \\ V(S,J,T)=f(S,J). \qquad (0\le S<\infty, 0\le J<\infty) & (9.6.8)\end{cases}$$

把时段 $[0,T]$ 分成 N 等分:

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T.$$

其中 $t_n=n\Delta t$，$\Delta t=\dfrac{T}{N}$.

在每一个时段 $[t_n,t_{n+1}]$ 中考虑一阶偏微分算子

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{S-J}{t}\frac{\partial V}{\partial J},$$

寻求从 (J_0,t_n) 拉出的特征线，它适合初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{t}=\dfrac{dJ}{S-J}, \\ J(t_n)=J_0. \end{cases}$$

解之得

$$J=S-\frac{t_n}{t}(S-J_0). \tag{9.6.9}$$

众所周知，沿着这条特征线

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{S-J}{t}\frac{\partial V}{\partial J}=\frac{d}{dt}V(S,S-\frac{t_n}{t}(S-J_0),t),$$

（因为 $J_0=S+\frac{t}{t_n}(J-S)$.）从而方程 (9.6.7) 可改写为

$$\frac{d}{dt}V(S,S-\frac{t_n}{t}(S-J_0),t)+\left[\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right]_{J=S-\frac{t_n}{t}(S-J_0)}=0. \tag{9.6.10}$$

为了把上述等式左端方括号内的项都写成沿着特征线微商，设 $\frac{d}{dS}$ 是沿着特征线对 S 的微商，则

$$\frac{d}{dS}=\frac{\partial}{\partial S}+\frac{t-t_n}{t}\frac{\partial}{\partial J}, \qquad \frac{d^2}{dS^2}=\left(\frac{\partial}{\partial S}+\frac{t-t_n}{t}\frac{\partial}{\partial J}\right)^2.$$

从而方程 (9.6.10) 可改写为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}V(S,S-\frac{t_n}{t}(S-J_0),t)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2V}{dS^2}+rS\frac{dV}{dS}-rV\\&-\left[\frac{\sigma^2}{2}S^2\left(2\frac{t-t_n}{t}\frac{\partial^2V}{\partial S\partial J}+\left(\frac{t-t_n}{t}\right)^2\frac{\partial^2V}{\partial J^2}\right)\right.\\&\left.-rS\frac{t-t_n}{t}\frac{\partial V}{\partial J}\right]_{J=S-\frac{t_n}{t}(S-J_0)}=0.\end{aligned} \tag{9.6.11}$$

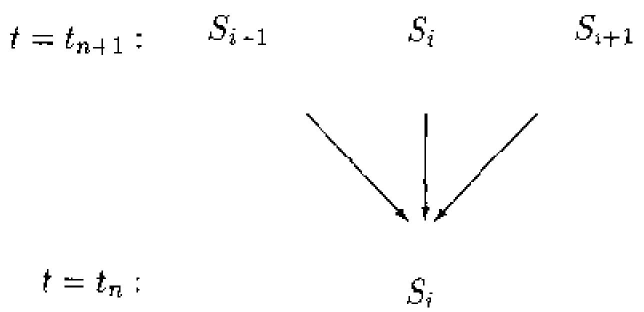
由于我们的目的是导出方程 (9.6.7) 的离散格式，因此无妨假设 $S^2\frac{\partial^2V}{\partial S\partial J}$, $S^2\frac{\partial^2V}{\partial J^2}$, $S\frac{\partial V}{\partial J}$ 有界. 从而有

$$\frac{dV}{dt}+\frac{\sigma^2}{2}S\frac{d}{dS}S\frac{dV}{dS}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)S\frac{dV}{dS}-rV+O(\Delta t)=0, \tag{9.6.12}$$

这里 $\frac{d}{dt}$ 和 $\frac{d}{dS}$ 分别表示沿着特征线对 t 和对 S 的微商.

进一步对 S 离散化. 对于给定 $\Delta x > 0$, 取 $u = e^{\Delta x}$, 记 $S_i = u^i = e^{i\Delta x}, (i = 0, \pm 1, \cdots)$. 从而在 $0 \leq S < \infty$ 上形成了一个剖分.

用显式差分格式:



取 $J_0 = J_k$, 沿着从 $t = t_n$, $J = J_k$ 拉出的特征线为

$$J = S - \frac{t_n}{t}(S - J_k), \tag{9.6.13}$$

故沿着这条特征线，当 $t = t_n$, $S = S_i$ 时

$$V(t_n, S_i, J_k) = V_{i,k}^n$$

（ $V_{i,k}^n$ 的定义见 (9.6.4)，）当 $t = t_{n+1}, S = S_{i+1}, S_i$ 以及 S_{i-1} 时,

$$\begin{aligned}
&V(t_{n+1}, S_{i+1}, J_{i+1,k_u}^{n+1}) = V_{i+1,k_u}^{n+1},\\
&V(t_{n+1}, S_i, J_{i,k_0}^{n+1}) = V_{i,k_0}^{n+1},\\
&V(t_{n+1}, S_{i-1}, J_{i-1,k_d}^{n+1}) = V_{i-1,k_d}^{n+1},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{i+1,k_u}^{n+1} &= \frac{1}{n+1}S_{i+1} + \frac{n}{n+1}J_k,\\
J_{i,k_0}^{n+1} &= \frac{1}{n+1}S_i + \frac{n}{n+1}J_k,\\
J_{i-1,k_d}^{n+1} &= \frac{1}{n+1}S_{i-1} + \frac{n}{n+1}J_k.
\end{aligned}$$

考虑到离散格式

$$\left(S\frac{dF}{dS}\right)_{S=S_i} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{\ln S_{i+1} - \ln S_{i-1}},$$

$$\left(S\frac{d}{dS}S\frac{dF}{dS}\right)_{S=S_i} = \frac{\left(S\frac{dF}{dS}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(S\frac{dF}{dS}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\ln S_{i+\frac{1}{2}} - \ln S_{i-\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{(\ln S_{i+1} - \ln S_i)^2},$$

这里，根据假设，我们有

$$\ln\frac{S_{i+1}}{S_i} = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}} = \ln\frac{S_{i+\frac{1}{2}}}{S_{i-\frac{1}{2}}}.$$

由于

$$S_i = e^{i\Delta x}, \qquad \ln\frac{S_{i+1}}{S_i} = \Delta x. \tag{9.6.14}$$

从而方程 (9.6.7) 沿着特征线的显式差分格式可以写为

$$\begin{aligned}&\frac{V_{i,k_0}^{n+1} - V_{i,k}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2\Delta x^2}[V_{i+1,k_u}^{n+1} - 2V_{i,k_0}^{n+1} + V_{i-1,k_d}^{n+1}]\\ &+\frac{r-\sigma^2/2}{2\Delta x}[V_{i+1,k_u}^{n+1} - V_{i-1,k_d}^{n+1}] - rV_{i,k}^n + O(\Delta t) = 0.\end{aligned} \tag{9.6.15}$$

经过整理，并略去高阶小量，它可改写为

$$\begin{aligned}V_{i,k}^n =& (1+r\Delta t)^{-1}\left\{\left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]V_{i+1,k_u}^{n+1}\right.\\ &\left.+\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]V_{i-1,k_d}^{n+1} + \left(1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)V_{i,k_0}^{n+1}\right\}\end{aligned} \tag{9.6.16}$$

这就是方程 (9.6.7) 的特征线显式差分格式.

由于 $V_{i,k}^N$ 为已知，从而由差分方程 (9.6.16) 通过反向归纳过程可以求得 $V_{i,k}^n$，$(0 \le n \le N)$.

不难证明

1. 若

$$\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2} \le 1 \tag{9.6.17}$$

以及

$$\frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}|r - \frac{\sigma^2}{2}| > 0, \tag{9.6.18}$$

则格式 (9.6.16) 是稳定的.

2. 当 Δx、$\Delta t \to 0$ 时，差分格式 (9.6.15) 的极限是方程 (9.6.7)，也就是格式 (9.6.16) 是相容的.

因此由 Lax 定理推知：在条件 (9.6.17),(9.6.18) 下，当 Δt、$\Delta x \to 0$ 时，由差分格式 (9.6.16) 得到的解必收敛到原定解问题 (9.6.7),(9.6.8) 的解.

推论　若

$$\frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = 1 \tag{9.6.19}$$

以及

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma}\left|r - \frac{\sigma^2}{2}\right|\sqrt{\Delta t} > 0, \tag{9.6.20}$$

则格式 (9.6.16) 转化为

$$V_{i,k}^n = \frac{1}{\rho}[qV_{i+1,k_u}^{n+1} + (1-q)V_{i-1,k_d}^{n+1}], \tag{9.6.21}$$

其中

$$\begin{aligned} &\rho = 1 + r\Delta t, \\ &q = \frac{1}{2}\left(1 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{9.6.22}$$

正如我们在 §5.7 所指出：

$$\begin{aligned} &u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad \rho = e^{r\Delta t} \\ &q = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\Delta t}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] = \frac{\rho - d}{u - d} + O(\Delta t^{3/2}) \end{aligned} \tag{9.6.23}$$

比较一下 (9.6.21) 与 (9.6.5) 并注意到 (9.6.23)，我们证明了：在忽略 Δt 的高阶无穷小的情况下，当条件 (9.6.19)，(9.6.20) 成立时，算术平均亚式期权的二叉树算法等价于方程 (9.6.7),(9.6.8) 的特征线显式差分格式.

从而由特征线显式差分格式的收敛性结果推得算术平均亚式期权二叉树方法必收敛.

作为这一章的小结，我们概括以下几点：

(1) 亚式期权的数学模型是一个具有三个自变数 S, t, J 的超抛物型方程的终值问题. 所有亚式期权都可以通过引进适当的组合自变数把它化为一维问题，但只有几何平均亚式期权的定价可以用显式表达式给出.

(2) 最常用的求亚式期权定价数值方法是二叉树方法. 在忽略高阶小量的前提下, 它与特征线差分格式 (当 $\frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = 1$) 等价. 值得注意的是: 对于算术平均亚式期权, 由于对应每一个原生资产价格 S_i^n, 它的路径变量 $\bar{J}_k^n$ 是一个 2^{n-1} 维向量, 因此直接计算需要花费极大的存储量和计算时间.

(3) 标准的看跌回望期权的定价模型是在区域 $\{0 \le S \le J < \infty, 0 \le t \le T\}$ 上求解一个带有边界条件:

$$\frac{\partial V}{\partial S}\Big|_{S=J} = 0$$

的 Black-Scholes 方程 (这里 J 是参变量).

可以引进一个适当的组合自变数把它化为一维问题, 并求出它的解的显式表达式.

习题

1. 设 V_t 为亚式期权定价, 它在期权到期日 $t = T$ 时的收益为

$$\text{收益} = (J_T^{\omega} - K)^+,$$

其中

$$J_T^{\omega} = \frac{1}{\omega}\int_{T-\omega}^{T} S_\tau d\tau \qquad \text{(算术平均)}$$

或

$$J_T^{\omega} = e^{\frac{1}{\omega}\int_{T-\omega}^{T} \ln S_\tau d\tau}, \qquad \text{(几何平均)}$$

这里 ω 是确定时段, $\omega < T$. 试写出这两个亚式期权的定价模型.

当 $\omega = \frac{T}{2}$ 时, 求出几何平均亚式期权的定价表达式.

2. 设 $S_1(t), S_2(t)$ 是两个风险资产的价格. 它们的演化适合随机微分方程 (7.1.5)—(7.1.8). 设 V_t 为极小亚式看涨期权价格, 它在期权到期日的收益为

$$\text{收益} = (\min(J_T^{(1)}, J_T^{(2)}) - K)^+,$$

其中 $J_t^{(i)}$ 为风险资产的价格 $S_i(t)$ 的几何平均

$$J_t^{(i)} = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_i(\tau) d\tau}. \qquad (i = 1, 2)$$

试

(a) 建立该期权定价的数学模型.

(b) 通过引进适当的组合自变量把原来的四维问题化为二维问题.

3. 设 S_t 是连续支付红利的股票价格，红利率为 $q>0$. 俄式期权 (Russian option) 是一张永久的美式期权，持有人有权在任何时间 $t>0$ 实施这张期权，取得原生资产价格在它的历程中的最大值： $M_t=\max\limits_{0\le\tau\le t} S_\tau$.

(a) 试写出俄式期权定价的自由边界问题模型.

(b) 求出俄式期权定价以及它的最佳实施边界.

4. 试证明：若不计 Δt 的高阶小量，则几何平均亚式期权的二叉树算法与满足一定条件的特征线差分格式等价.

5. 试写出计算回望期权的显式差分格式，并证明：若不计 Δt 的高阶小量，则在一定条件下，它与二叉树算法等价.

第十章　隐含波动率

在 Black-Scholes 公式中，波动率 σ 是一个非常重要的参数，期权价格对它的变化十分敏感. 在原生资产的交易市场中，人们往往希望知道原生资产未来价格的波动率. 一般来说，由于事件还没有发生，人们对 σ 的未来走向很难预测. 但是期权市场并不因此而变得无所作为. 事实上我们每天可以从期权市场获取对于同一个原生资产在不同敲定价和不同到期日的期权价格的各种报价. 如果我们认为 Black-Scholes 的期权定价理论是正确的，那么在期权市场中获得的有关期权价格的报价，它应该蕴含了关于原生资产价格的未来波动率的信息. 人们把由单个期权价格所导出的原生资产的波动率称为**隐含波动率** (implied volatility).

这一节我们主要研究如何运用 Black-Scholes 理论框架，从期权市场获取的信息去重构 (recovering) 在风险中性测度意义下原生资产的价格过程，也就是去导出原生资产价格的隐含波动率.

§10.1　问题的提出

在 Black-Scholes 公式的推导中，我们假定了在整个期权的有效期内，原生资产的波动率是常数 σ，根据 Black-Scholes 公式，期权定价可以表为:

$$V = V(S, t; \sigma, K, T).$$

若从期权市场获知: 当 $t = t_0, S = S_0$ 时，对于一张敲定价为 K_0，期限为 T_0 的期权，它的价格为 V_0. 那么由 Black-Scholes 公式得到关于 σ 的方程式:

$$V_0 = V(S_0, t_0; \sigma, K_0, T_0). \tag{10.1.1}$$

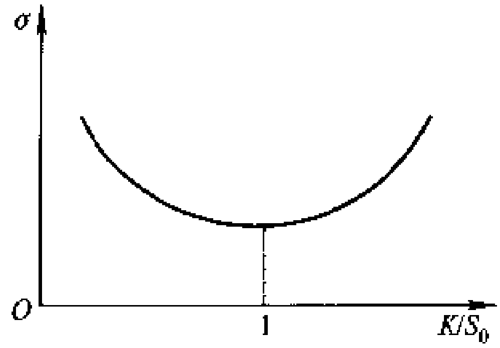
由于

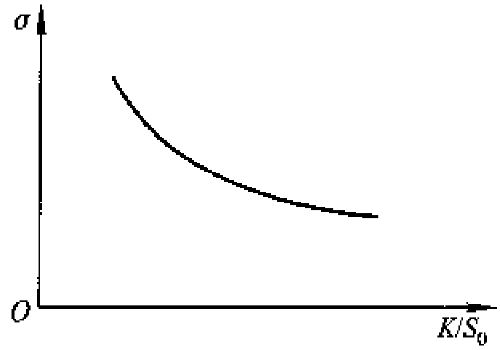
$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} > 0,$$

因此方程 (10.1.1) 存在唯一解 $\sigma = \sigma_0$. 这样我们从一张特定的期权（敲定价为 K_0，期限为 T_0）导出了原生资产的隐含波动率 $\sigma = \sigma_0$.

按照 Black-Scholes 公式的假设，σ 是常数，因此从这一张特定期权求出的隐含波动率 σ_0 应该与 K_0 与 T_0 无关，即对于不同的敲定价格，不同的有效期限的期权，由相应的期权定价决定出的原生资产的隐含波动率应该都是相同的. 但事实并非如此，由不同敲定价格和不同期限的期权定价得到的原生资产的隐含波动率 σ，它是 K,T 的二元函数 $\sigma=\sigma(K,T)$.

对于固定的 T，隐含波动率 σ 与敲定价格 K 的关系一般呈现以下两种典型的图像.





这里 S_0 是 $t=t_0$ 时刻的原生资产的价格. 上图称为**波动率的微笑** (volatility smile) **曲线**，下图称为**波动率的偏斜** (volatility skrew) **曲线**.

对于固定的 K，隐含波动率 σ 与期限 T 的关系一般呈现以下图像.

这些图像显示，在推导 Black-Scholes 公式中有关原生资产波动率 σ 是常数的假设与实际有较大差异. 因此比较合理的假设应该认为： σ 是时间 t 和原生资产价格 S 的函数，即在风险中性测度意义下把原生资产价格演化的随机过程修改为

$$\frac{dS}{S} = (r-q)dt + \sigma(S,t)dW_t, \tag{10.1.2}$$

从而相应的 Black-Scholes 方程应为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{10.1.3}$$

对于它的定解问题一般不可能获得解的显式表达式，只有求助数值方法.

经过对原生资产价格模型的修改，我们提出这样的问题：*如何运用期权市场期权的报价，获取有关未来原生资产波动率的信息？*在数学上，即当 $t=t_0, S=S_0$ 时，若已知

$$V(S_0,t_0;\sigma,K_k,T_l) = V_{k,l}, \quad (k=1,\cdots,m, l=1,\cdots,n) \tag{10.1.4}$$

如何求

$$\sigma = \sigma(S,t).$$

由看涨 — 看跌期权的平价关系，不论用看涨期权的市场报价，还是用看跌期权的市场报价所得到的 $\sigma=\sigma(S,t)$ 应该是相同的，因此为确定计，无妨以看涨期权为例.

问题 P *若 $V=V(S,t;\sigma,K,T)$ 是看涨期权的定价，即它适合*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, & (10.1.5)\\ \qquad (0 \le S < \infty, 0 \le t < T) & \\ V(S,T) = (S-K)^+. \quad (0 \le S < \infty) & (10.1.6)\end{cases}$$

假设当 $t=t^*, (0 \le t^* < T_1), S=S^*$ 时，已知

$$V(S^*,t^*;\sigma,K,T) = V_0(K,T), \quad (0 < K < \infty, T_1 \le T \le T_2)$$

问如何确定 $\sigma=\sigma(S,t), (0 \le S < \infty, T_1 \le t \le T_2)$ ？

§10.2 Dupire 解法

设

$$V = V(S,t;K,T)$$

是欧式看涨期权的定价，令

$$\frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = G(S,t;K,T). \tag{10.2.1}$$

由 (10.1.5),(10.1.6)， G 适合

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial G}{\partial S} - rG = 0, & (10.2.2) \\ G(S,t) = \delta(K-S). & (10.2.3) \end{cases}$$

因 $\delta(x) = \delta(-x)$，因此 $G(S,t;K,T)$ 是方程 (10.2.2) 的基本解. 由第六章定理 6.3 知： $G(S,t;K,T)$ 作为 K,T 的函数（ S,t 为参数），它是定解问题 (10.2.2),(10.2.3) 的共轭问题的基本解，即

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G}{\partial T} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial K^2}(\sigma^2(K,T)K^2G) - (r-q)\dfrac{\partial}{\partial K}(KG) - rG = 0, & \\ \qquad (0 \le K < \infty, t \le T) & (10.2.4) \\ G(S,t;K,t) = \delta(K-S). \quad (0 \le K < \infty) & (10.2.5) \end{cases}$$

把 (10.2.1) 代入 (10.2.4),(10.2.5) 并对 K 在 $[K,\infty]$ 上求两次积分，由于

(1) 当 S 固定， $K \to \infty$ 时，

$$V, K\frac{\partial V}{\partial K}, \sigma^2K^2G, K\frac{\partial G}{\partial K}, \frac{\partial}{\partial K}(\sigma^2K^2G) \to 0,$$

(2) $$\int_K^\infty d\xi \int_\xi^\infty \delta(\eta - S)d\eta = \int_K^\infty (\eta - K)\delta(\eta - S)d\eta$$

$$= \int_0^\infty (\eta - K)^+\delta(\eta - S)d\eta = (S-K)^+,$$

(3) $$\int_K^\infty G(S,t;\xi,T)d\xi = \int_K^\infty \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}d\xi = -\frac{\partial V}{\partial K},$$

(4) $$\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial \xi}V(S,t;\xi,T)d\xi = -V(S,t;K,T),$$

(5) $$\int_K^\infty \xi G(x,t;\xi,T)d\xi = \int_K^\infty \xi\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}d\xi = -K\frac{\partial V}{\partial K} + V.$$

$$(6)\quad \int_K^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\sigma^2(\eta,T)\eta^2 G)d\eta = \sigma^2(K,T)K^2\frac{\partial^2 V}{\partial K^2}.$$

从而定解问题 (10.2.4),(10.2.5) 转化为

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial T} + \dfrac{1}{2}K^2\sigma^2(K,T)\dfrac{\partial^2 V}{\partial K^2} - (r-q)K\dfrac{\partial V}{\partial K} - qV = 0, & (10.2.6) \\ \qquad (0 \le K < \infty, t \le T) & \\ V|_{T=t} = (S-K)^+, \quad (0 \le K < \infty) & (10.2.7) \end{cases}$$

由 (10.2.6) 解出 $\sigma(K,T)$ ，得到

$$\sigma(K,T) = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial V}{\partial T} + (r-q)K\dfrac{\partial V}{\partial K} + qV}{\dfrac{1}{2}K^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial K^2}}}. \tag{10.2.8}$$

因此假如当 $t = t^*, S = S^*$ 时，已知我们能从期权市场获取对于不同敲定价格，不同期限的期权报价，也就是得到函数 $F(K,T)$:

$$F(K,T) = V(S^*, t^*; K, T), \tag{10.2.9}$$

那么我们可以从 (10.2.8) 求得 $\sigma(K,T)$.

但是，这个算法对数据的变化异常敏感，因此它是不可靠的.

事实上，给定了 $F(K,T)$ (见 (10.2.9))，为了用 (10.2.8) 计算 $\sigma(K,T)$ ，需要计算微商： F_{KK}, F_K 以及 F_T ，但 F 的微小变化可能引起它的微商，特别是二阶微商的极大的变化，因此由 (10.2.5) 确定 $\sigma(K,T)$ 的算法是**不适定的** (illposed).

特别，正如我们在 (10.1.4) 中所指出：一般来说，$F(K,T)$ 只在一个离散点集 $\{(K_k, T_l)\}(k = 1, \cdots, m, l = 1, \cdots, n)$ 上是确定的，而在区域 $(0 \le K < \infty, T_1 \le T \le T_2)$ 上， $F(K,T)$ 是由离散点上的值通过插值 或外推 而得到的，所以由此必然带来误差. 这个误差将由于上述原因使得 $\sigma(K,T)$ 的值严重失真.

因此， Dupire 的解法在实际上是无法使用的，必须要对它进行必要的修正. 不过，必须看到 Dupire 解法的意义：他把确定隐含波动率问题转化为一个抛物型方程的 " 终端 " 问题. 这是一个典型的反问题，我们可以通过多种途径给出求解它的适定算法.

§10.3 最佳控制解法

为了简单起见，假定 $\sigma(S,t)\equiv\sigma(S)$，即 σ 只依赖 S 而与 t 无关. 问题 P（见 (10.1.5),(10.1.6)）类似于一个"终端"控制问题：即对一个抛物型方程的"初值"问题，如果"终端"的值为已知，问如何确定它的首项系数. 但问题 P 又不是一个典型的"终端"控制问题，因为我们在"终端" $t=t^*$ 给出的不是函数值的全体 $V(S,t^*),(0\le S<\infty)$，而只在某一点 $S=S^*$ 给出关于参数 K 的一个函数式 $V(S^*,t^*;K),(0\le K<\infty)$.

但是按照 Dupire 的思路，事实上我们已经把问题 P 转化为一个典型终端控制问题.

问题 P_0　设 $V=V(K,\tau;\sigma)$ 是 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial\tau}=\dfrac{1}{2}\sigma^2(K)K^2\dfrac{\partial^2V}{\partial K^2}-(r-q)K\dfrac{\partial V}{\partial K}-qV, & (10.3.1)\\ V(K,0)=(S-K)^+, & (10.3.2)\end{cases}$$

的解，其中 $\tau=T-t$.

若当 $\tau=\tau^*=T-t^*$ 时，$V(K,\tau^*)$ 的值为已知，即

$$V(K,\tau^*;\sigma)=F(K),\qquad(0\le K<\infty)\tag{10.3.3}$$

问如何确定 $\sigma=\sigma(K)$?

问题 P_0 是一个典型的终端控制问题（这里终端是 $\tau=\tau^*$）.

作变换

$$y=\ln\frac{K}{S},v=\frac{1}{S}e^{q\tau}V.\tag{10.3.4}$$

问题 (10.3.1),(10.3.2) 转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\tau}=a(y)\left(\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)-(r-q)\dfrac{\partial v}{\partial y}, & (y\in R,0<\tau\le\tau^*)\quad(10.3.5)\\ v(y,0)=(1-e^y)^+, & (y\in\mathbf{R})\quad(10.3.6)\end{cases}$$

这里

$$a(y)=\frac{1}{2}\sigma^2(K).\tag{10.3.7}$$

问题 Q_0　求 $\bar{a}(y)\in\mathcal{A}$，使得

$$J(\bar{a})=\inf_{a\in\mathcal{A}}J(a), \tag{10.3.8}$$

这里 $v=v(y,\tau;a)$ 是 Cauchy 问题 (10.3.5),(10.3.6) 的解,

$$J(a)=\frac{1}{2}\int_R|v(y,\tau^*;a)-v^*(y)|^2dy+\frac{N}{2}\int_R|\nabla a|^2dy, \tag{10.3.9}$$

$$v^*(y)=\frac{1}{S^*}e^{q\tau^*}F(S^*e^y), \tag{10.3.10}$$

（函数 $F(K)$ 的定义见 (10.3.3)).

$\mathcal{A}$ 是变分问题 (10.3.8) 的允许函数类 (admissiable set)，这个函数类的选取要使得定解问题 (10.3.5), (10.3.6) 有解，为此取

$$\mathcal{A}=\{a(y)|0<a_0\le a(y)\le a_1,\int_{\mathbf{R}}|\nabla a|^2dy<\infty\}. \tag{10.3.11}$$

N 是 **常数**. 其中 $J(a)$ 称为代价泛函 (cost functional)， $a=a(y)$ 称为控制变量 (control variable)， $\bar{a}(y)$ 称为最佳控制 (optimal control) 或极小元 (minimizer). 变分问题 Q_0 称为最佳控制问题 (optimal control problem).

利用偏微分方程理论，可以证明（见 [23] ）

定理 10.1　变分问题 Q_0 至少存在一个极小元 $\bar{a}(y)\in\mathcal{A}$.

下面我们建立极小元 $\bar{a}(y)$ 适合的必要条件.

设 $\bar{a}(y)$ 是极小元，由于 $\mathcal{A}$ 是凸集，因此对于任意给定的 $h(y)\in\mathcal{A}$， $a_\lambda(y)=(1-\lambda)\bar{a}+\lambda h\in\mathcal{A},(\lambda\in[0,1])$. 定义函数 $j(\lambda)$：

$$j(\lambda)=J((1-\lambda)\bar{a}+\lambda h),$$

它在 $\lambda=0$ 达到极小值，故

$$\begin{aligned}0\le j'(0)=&\left[\frac{d}{d\lambda}\int_R|v^\lambda(y,\tau^*)-v^*(y)|^2dy\right.\\&\left.+N\frac{d}{d\lambda}\int_R|\nabla((1-\lambda)\bar{a}+\lambda h)|^2dy\right]_{\lambda=0},\end{aligned} \tag{10.3.12}$$

这里 $v_\lambda(y,\tau)$ 适合

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial \tau} = a_\lambda(y)\left[\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right] - (r-q)\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}, & (10.3.13) \\ v_\lambda(y,0) = (1-e^y)^+. & (10.3.14) \end{cases}$$

设 $\xi_\lambda(y,\tau) = \dfrac{dv_\lambda}{d\lambda}$，通过直接计算，易得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_\lambda}{\partial \tau} = a_\lambda(y)\left[\dfrac{\partial^2 \xi_\lambda}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \xi_\lambda}{\partial y}\right] - (r-q)\dfrac{\partial \xi_\lambda}{\partial y} + \left[\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right](h-\bar{a}), \\ & (10.3.15) \\ \xi_\lambda(y,0) = 0. & (10.3.16) \end{cases}$$

从而 (10.3.12) 可表为

$$\int_R (\bar{v}(y,\tau^*) - v^*(y))\xi_0(y,\tau^*)dy + N\int_{\mathbf{R}} \nabla\bar{a}\cdot\nabla(h-\bar{a})dy \geq 0, \quad \forall h \in A$$

(10.3.17)

这里 $\bar{v}(y,\tau)$ 是定解问题 (10.3.5),(10.3.6) 的解，其中 $a(y)=\bar{a}(y)$. $\xi_0(y,\tau^*)$ 是定解问题 (10.3.15),(10.3.16) 的解，其中 $\lambda=0$，即

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{L}}\xi_0 = \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \tau} - \bar{a}(y)\left[\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \xi_0}{\partial y}\right] + (r-q)\dfrac{\partial \xi_0}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right](h-\bar{a}), \\ & (10.3.18) \\ \xi_0(y,0) = 0. & (10.3.19) \end{cases}$$

取 $\varphi(y,\tau)$ 是定解问题 (10.3.18),(10.3.19) 的共轭问题的解，即

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{L}}^*\bar{\varphi} = 0, \quad (y\in\mathbf{R}, 0\leq\tau<\tau^*) & (10.3.20) \\ \bar{\varphi}(y,\tau^*) = \bar{v}(y,\tau^*) - v^*(y), \quad (y\in\mathbf{R}) & (10.3.21) \end{cases}$$

其中微分算子 $\bar{\mathcal{L}}^*$ 是 $\bar{\mathcal{L}}$ 的共轭算子:

$$\bar{\mathcal{L}}^*\bar{\varphi} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{a}\bar{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}\bar{\varphi}) - (r-q)\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}.$$

从而由 Green 公式

$$\int_0^{\tau^*}\int_{\mathbf{R}}(\bar{\varphi}\bar{\mathcal{L}}\xi_0-\xi_0\bar{\mathcal{L}}^*\bar{\varphi})dyd\tau$$

$$=\int_0^{\tau^*}\int_{\mathbf{R}}\left\{\frac{\partial(\bar{\varphi}\xi_0)}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}(y)\bar{\varphi}\frac{\partial\xi_0}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(\xi_0\frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}(y)\bar{\varphi}))\right.$$

$$\left.+\ \frac{\partial}{\partial y}(\xi_0\bar{a}(y)\bar{\varphi})+(r-q)\frac{\partial(\xi_0\bar{\varphi})}{\partial y}\right\}dyd\tau$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\left[(\bar{\varphi}\xi_0)_{\tau=\tau^*}-(\bar{\varphi}\xi_0)_{\tau=0}\right]dy.$$

由方程 (10.3.18),(10.3.20) 和定解条件 (10.3.19),(10.3.21)，得到

$$\int_0^{\tau^*}\int_{\mathbf{R}}\bar{\varphi}\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right](h-\bar{a})dyd\tau=\int_{\mathbf{R}}\xi_0(y,\tau^*)[\bar{v}(y,\tau^*)-v^*(y)]dy. \tag{10.3.22}$$

把 (10.3.22) 代入 (10.3.17)，得到

$$\int_0^{\tau^*}\int_{\mathbf{R}}\bar{\varphi}\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right](h-\bar{a})dyd\tau+N\int_{\mathbf{R}}\nabla\bar{a}\cdot\nabla(h-\bar{a})dy\geq 0.\quad\forall h\in\mathcal{A}$$

设

$$f(y;\bar{v},\bar{\varphi})=\frac{1}{N}\int_0^{\tau^*}\bar{\varphi}(\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial y})d\tau, \tag{10.3.23}$$

则上述不等方程式可改写为

$$\int_{\mathbf{R}}[\nabla\bar{a}\cdot\nabla(h-\bar{a})+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})(h-\bar{a})]dy\geq 0,\quad\forall h\in\mathcal{A} \tag{10.3.24}$$

取 $\lambda(y)$ 充分光滑，且

$$0\leq\lambda(y)\leq 1, \tag{10.3.25}$$

令

$$h(y)=[(1-\lambda(y))]\bar{a}(y)+\lambda(y)a_i,\quad(i=0,1)$$

由允许函数类 $\mathcal{A}$ 的定义 (10.3.11)，任意适合条件 (10.3.25) 的 $\lambda(y),h(y)\in\mathcal{A}$.

从而由 (10.3.24) 推得，对于一切适合条件 (10.3.25) 的 $\lambda(y)$ 有

$$\int_{\mathbf{R}}\{\nabla\bar{a}\nabla[\lambda(y)(a_i-\bar{a})]+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})[\lambda(y)(a_i-\bar{a})]\}dy\geq 0,$$

即
$$\int_{\mathbf{R}}\{[-\bar{a}''(y)+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})](a_i-\bar{a})\}\lambda(y)dy\geq 0,$$

由于 $\lambda(y)$ 的任意性，故

$$[-a''(y)+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})](a_i-\bar{a})\geq 0,\qquad (i=0,1)\tag{10.3.26}$$

由于

$$a_0\leq\bar{a}\leq a_1,\tag{10.3.27}$$

故由 (10.3.26) 得到

$$[-a''(y)+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})](\bar{a}-a_0)\leq 0,\tag{10.3.28}$$

$$[-a''(y)+f(y;\bar{v},\bar{\varphi})](a_1-\bar{a})\geq 0.\tag{10.3.29}$$

这样我们证明了变分不等方程 (10.3.24) 与 (10.3.27)—(10.3.29) 等价. 这是一个双障碍变分不等式问题.

至此我们证明了变分问题 Q_0 的必要条件.

定理 10.2 *若 $\bar{a}(y)\in A$ 是变分问题 Q_0(10.3.8) 的极小元，则存在三元组 $\{\bar{a}(y),\bar{v}(y,\tau),\bar{\varphi}(y,\tau)\}$，它们在区域 $\{y\in R,0\leq\tau\leq\tau^*\}$ 上是以下偏微分方程组的定解问题的解:*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\tau}-\bar{a}(y)\dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}+\bar{a}(y)\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial y}+(r-q)\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial y}=0, & (10.3.30)\\ \bar{v}(y,0)=(1-e^y)^+, & (10.3.31)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\tau}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(\bar{a}(y)\bar{\varphi})-\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{a}(y)\bar{\varphi})-(r-q)\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}=0, & (10.3.32)\\ \bar{\varphi}(y,\tau^*)=\bar{v}(y,\tau^*)-v^*(y), & (10.3.33)\end{cases}$$

以及 (10.3.27)—(10.3.29). 这里 $v^*(y)$ 与 $f(y;\bar{v},\bar{\varphi})$ 的定义见 (10.3.4) 和 (10.3.23).

附注 方程 (10.3.30) 与初值条件 (10.3.31) 是正向抛物型方程的 Cauchy 问题. 方程 (10.3.32) 与终值条件 (10.3.33) 是反抛物型方程的倒向 Cauchy 问题，方程 (10.3.27)—(10.3.29) 是一个二阶常微分方程的变分不等式，因此这是一组正 — 倒向抛物型方程与一个椭圆型变分不等方程相耦合的方程组.

在 [23] 中我们研究了这个方程组解的唯一性问题.

§10.4 数值方法

为了求问题 P_0 的数值解, 有两个途径: (1) 直接从变分问题 Q_0(10.3.8) 出发, 进行离散化, 把它转化为一个具有凸约束的优化问题, 然后求出它的近似解. (2) 从变分问题的必要条件出发, 即求解三元组 $\{\bar{a}(y), \bar{v}(y,\tau), \bar{\varphi}(y,\tau)\}$, 使它适合正 — 倒向偏微分方程组的定解问题 (10.3.27) — (10.3.33). 以下我们介绍求解定解问题 (10.3.27)—(10.3.33) 的具体过程.

我们采用迭代法求解. 具体求解步骤如下:

(1) 设在 $t = t^*$ 时刻, $S = S^*$, 在期权市场获取对不同敲定价 K 对同一到期日的期权定价 $V(S^*, t^*; K) = F(K)$.

按 (10.3.4) 定义函数

$$v^*(y) = \frac{1}{S^*} e^{q\tau^*} F(S^* e^y), \tag{10.4.1}$$

其中 $\tau^* = T - t^*, y = \ln \frac{K}{S^*}$.

(2) 选取迭代初值 $\sigma = \sigma_0(K)$. 它可以取作由 Black-Scholes 公式确定的隐含波动率, 即求 $\sigma = \sigma_0(K)$ 使它适合以下超越方程:

$$\begin{aligned} &e^{-q(T-t^*)} S^* N\left(\frac{\ln \frac{S^*}{K} + (r - q + \frac{\sigma_0^2(K)}{2})(T - t^*)}{\sigma_0(K)\sqrt{T - t^*}}\right) \\ &\quad + K e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln \frac{S^*}{K} + (r - q - \frac{\sigma_0^2(K)}{2})(T - t^*)}{\sigma_0(K)\sqrt{T - t^*}}\right) = F(K). \end{aligned} \tag{10.4.2}$$

根据期权定价对 σ 的严格单调性, 因此方程 (10.4.2) 存在唯一解 $\sigma = \sigma_0(K)$.

由公式 (10.3.7) 定义函数

$$a_0(y) = \frac{1}{2}\sigma_0^2(S^* e^y). \tag{10.4.3}$$

(3) 求解 Cauchy 问题 (10.3.30),(10.3.31), 其中 $\bar{a}(y)$ 取作:

$$\bar{a}(y) = a_0(y),$$

$a_0(y)$ 的定义见 (10.4.3). 从而求得解 $v_0(y, \tau)$.

(4) 求解倒向 Cauchy 问题 (10.3.32),(10.3.33)，其中

$$\bar{a}(y) = a_0(y),$$

$$\bar{\varphi}(y,\tau^*) = v_0(y,\tau) - v^*(y),$$

这里 $v^*(y)$ 的定义见 (10.4.1). 从而求得解 $\varphi_0(y,\tau)$.

(5) 按定义 (10.3.23)，求出 $f(y;v_0,\varphi_0)$：

$$f(y;v_0,\varphi_0) = \frac{1}{N}\int_0^{\tau^*} \varphi_0(y,\tau)\left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial v_0}{\partial y}\right] d\tau. \tag{10.4.4}$$

(6) 求解变分不等方程 (10.3.27)—(10.3.29)，其中 $f(y;\bar{v},\bar{\varphi})$ 的定义见 (10.4.4). 从而求得解 $a = a_1(y),(y \in \mathbf{R})$. 然后利用归纳过程依此得到序列 $a = a_n(y)$.

(7) 把它回到原坐标，求得 $\sigma_n(K)$：

$$\sigma_n(K) = \sqrt{2a_n(\ln\frac{K}{S^*})}.$$

至于在步骤 (3),(4),(6) 中，为了求偏（常）微分方程初（边）值问题的解，我们可以利用差分方法或其它数值解法.

附注 在期权市场获取的信息通常都是有限的离散点，因此为了在 $0 \le K < \infty$ 上，定义函数 $F(K) = V(S^*,t^*;K)$，我们需要利用内插和外推技巧，把离散数据转化为定义在 $0 \le K < \infty$ 上的连续函数. 当然这样的转化必然会带来误差. 这一点在具体计算时必须给与充分注意.

作为这一章的小结，我们归纳以下两点：

1. 由于利用 Black-Scholes 公式得到的隐含波动率出现"微笑"和"偏斜"等现象，因此有必要修改原生资产价格运行的模型，假定波动率 σ 是 S,t 的函数.

2. 利用 Dupire 解法，把求隐含波动率（函数）$\sigma(S,t)$ 转化为抛物型方程的"终端"控制问题，然后利用最佳控制的框架，给出了一个寻求隐含波动率（函数）的迭定算法.

参考文献

[1] Bachelier, L. (1900) Théorie de la spéculation, Ann. Sci. École Norm. Sup., **17**, 21-86.

[2] Barles, G., Burdean, J., Romano, M. & Samsoen, N.(1995)Critical stock price near expiration. Math. Finan. , **5**, 77-95.

[3] Black, F.& Scholes, M.(1973) The pricing of options and corporate liabilities.J.polit.Econ., **81**, 637-654.

[4] Brennan, M. & Schwartz, E.(1977) The valuation of American put options, J.Finan., **32**, 449-462.

[5] Broadie, M.&Deltemple, J.(1997) The valuation of American options on multiple assets, Math. Finan., **7**, 241-286.

[6] Carr, P.&Faguet, D.(1994) Fast accurate valuation of American options, Working paper, Cornell University.

[7] Carr, P., Jarrow, R. & Myneni, R.(1992) Alternative charaterization of American put options, Math. Finan., **2**, 87-106.

[8] Chen, X., Chadam, J., Jiang, L.&Zheng W.(2001)Convexity of exercise boundary of the American put option for no dividend asset, Math.Finan., (to appear).

[9] Chesney, M., Cornwall, J., Jeanblanc-Picque, M., Kentwell, G. & Yor, M.(1997) Parisian pricing, Risk, **10**, (January), 77-79.

[10] Cox, J.&Ross, S.(1976) The valuation of options for alternative stochastic processes. J.Finan.Econ., **3**, 145-166.

[11] Cox, J., Ross, S.&Rubinstein, M.(1979) Option pricing: A simplified approach, J. Finan. Econ.**7**, 229-263.

[12] Dewynne, J.N., Howison, S.D., Rupf, I.&Wilmott, P.(1993) Some mathematical results in the pricing of American options , Europ. J. Appl. Math., **4**, 381-398.

[13] Dupire, B.(1994) Pricing with a smile, Risk, **7**, (January), 18-20.

[14] Friedman, Avner.(1982) Variational Principles and Free Broundary Problems, John Wiley& Sons, New York.

[15] Goldman, M.B., Sozin, H.B.&Gatto, M.A.(1979) Path dependent options:buy at the low, sell at the high, J.Finan., **34**, 1111-1128.

[16] Hull,J. (2000)Options, Furtures and Other Derivatives, Fourth Edition, Prentice-Hall.

[17] Jacka, S.D. (1991)Optimal stopping and the American put, Math. Finan., 1, 1-14.

[18] Jaillet, P., Lamberton, D.&Lapeyre, B.(1990) Variatinal inequalities and pricing of American options, Acta Appl. Math., **21**, 263-289.

[19] Jiang, L.(2002) Analysis of pricing American options on the maximum(minimum) of two risk assets , Interface &Free Boundaries, **4**, 27-46.

[20] Jiang, L.& Dai, M.(2002) Convergence of binomial tree method for American options, J.Comp.Math., (to appear).

[21] Jiang, L.&Dai, M.(2000) On path-dependent options, Mathematical Finance-Theory &Applications, Higher Education Press, Beijing, 290-317.

[22] Jiang, L.&Dai, M.(2000) Convergence analysis of binomial method for American-type path-dependent options, Math.Sci.&Appl., **13**, 153-166.

[23] Jiang, L.&Tao Y.(2001) Identifying the volatility of underlying assets from option prices, Inverse Problems, **17**, 137-155.

[24] Jiang, L., Yang D.& Zhang, S.(2002) On pricing model of asset option with N predetermined levels, Working paper, Tongji University.

[25] Jiang, L., Wang, L., Chen, Q.&J.E.Zhang(2000) Recovery of implied volatility:An optimal control approach, Working paper, City University of Hong Kong.

[26] Karatzas, I.&Shreve, S.(1998)Methods of Mathematical Finance , Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[27] Kwok, Y.-K.(1998)Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[28] Linetsky, V.(1999) Step options, Math.Finan.9, 55-96.

[29] Margrale, W.(1978)The value of an option to exchange one asset for another, J.Finan., **33**, 177-186.

[30] McDonald, R.L.&Schroder, M.D.(1998)A parity result for American options, J.Comp.Finan., **3**, 5-13.

[31] Merton, R.C.(1973)Theory of rational option pricing, Bell J.Econ.Manag. Sci., 4, 141-183.

[32] Merton, R.C.(1990)Continuous Time Finance, Basil Blackwell, Oxford.

[33] Musiela, M.&Rutkowski, M.(1998)Martingale Methods in Financial Modelling, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[34] Richtmyer, R.D.(1957)Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, Inc., New York.

[35] Rogers, L.C.G.&Shi, Z.(1995) The value of an Asian option. J.Appl.Prob., **32**, 1077-1088.

[36] Robinstein, M.(1991) One for another, Risk, **4**, (December), 30-32.

[37] Stulz, R.M.(1982) Options on the minimum or the maximum of two risky assets.

J.Finan.Econ., **10** . 161-185.

[38] Wilmott, P., Dewynne, J.N.&Howison, S.D.(1993)Option Pricing:Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford.

[39] Wilmott, P.(1998)Derivatives:The Theory and Practice of Financial Engineering, John Wiley &Sons, Inc., New York.

[40] Zhang, P.G.(1997)Exotic Options, World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., Singapore.

[41] Zhang, Q.(1998) A theory study of path-dependent options with general payoff. Working paper, City Univ.of Hong Kong.

[42] Cheng, W.&Zhang, S.(2000) The analysis of reset options. The Journal of Derivatives, 59-71.

名 词 索 引

期权是风险管理的核心工具，对期权定价理论作出杰出贡献的Scholes和Merton曾因此荣获1997年诺贝尔经济学奖。

本书从偏微分方程的观点和方法，对Black-Scholes-Merton的期权定价理论作了系统深入的阐述。一方面，从多个角度，多个层面阐明期权定价理论的基本思路：基于市场无套利假设，通过Δ-对冲原理，把人们引入一个风险中性世界，从而对期权给出一个独立于每个投资人偏好的“公平价格”；另一方面，充分利用偏微分方程理论和方法对期权理论作深入的定性和定量分析，其中特别对美式期权，与路径有关期权以及隐含波动率等重要问题，展开了深入的讨论。另外，本书对所涉及的现代数学内容，都有专节介绍，尽可能作到内容是自封的。

本书可用作应用数学、金融、保险、管理等专业研究生教材，也可供有关领域的研究人员和工作人员参考。

定价 33.00 元

F8