Value-at-Risk (a)

杨静平

北京大学数学学院金融数学系

2019年9月

Outline

1. 风险价值的计算
    - 计算VaR
    - 为什么选择VaR作为风险度量的方法
    - 定量因素的选择
    - 衡量VaR的精度

本部分的主要内容：

- 1. 风险价值的计算
- 2. 投资组合风险的VaR
- 3. 极值理论介绍
- 3. The statistical estimation of VaR

参考文献：

[1]David Ruppert (2004). Chapter 11: Value-at-risk, 《Statistics and Finance: An introduction》

[2] John C. Hull(2010). Risk management and financial institutions (2nd Edition). (风险管理与金融机构)。

[3]菲利普.乔瑞（2007）。第五章：风险价值的计算；第七章：投资组合风险：分析方法。选自《风险价值VaR-金融风险管理新标准》，中信出版社。

风险价值的计算

第一节通过考虑实际经验分布或利用参数估计方法计算VaR； 第二节讨论定量因素的选择，包括置信水平以及样本观察时间段； 第三节讨论披露的VaR数值的准确性，通过选择不同置信水平衡量样本的变化； 第四节介绍极值理论在VaR的计算方面的应用。 本章只考虑单一风险的情况。

- 1.1 计算VaR
- 1.2 定量因素的选择
- 1.3 衡量VaR的精度
- 1.4 极值理论

Outline

1. 风险价值的计算
   - 计算VaR
   - 为什么选择VaR作为风险度量的方法
   - 定量因素的选择
   - 衡量VaR的精度

计算VaR

假设单位损失L服从期望为μ,方差为σ^2的的正态分布，则

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

如果单位为a, 则aL的VaR为 $VaR_\alpha(aL) = a(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha))$.

计算VaR

假设我们需要衡量1亿美元的股票投资组合在10天内，在99%的置信水平下的VaR. 计算的步骤如下：

- 逐日盯市确认投资组合的市值
- 衡量风险因素的变化率
- 设定时间区域，样本观察时间段为10天
- 设定置信水平为99%
- 分析前面数据信息，得出收入的概率分布。

根据实际数据计算的得到的年波动率为15%. 假设损失的期望为0， 损失服从标准正态分布，则

$$1\text{亿元} \times 15\% \times \sqrt{10/252} \times \Phi^{-1}(0.99) = 700\text{万}$$

其中每年交易日按252天来计算,假设每天的损失相互独立，且服从相同的正态分布。 年波动率为15%，则每天的波动率为$15\%\sqrt{10/252}$。注意每天损失相互独立的不合理性。

VaR估计的非参数方法

这种方法不假设分布的形状，即利用经验分布来考虑分位点。
假设W_0为最初投资金额，R作为随机的回报率。假设头寸是不变的，或者没有交易，投资组合价值在时间期满时为

$$W = W_0(1+R).$$

R的分布记为F_R,反函数记为$F_R^{(-1)}$, 期望和标准差分别用 μ 和 σ来表示。 现在确定投资组合在给定置信水平α内的最低价值$W^* = W_0(1+R^*)$. 其中， $R^* = F_R^{(-1)}(1-\alpha)$.
注意到 $P(R \le R^*) = 1-\alpha$, 因此有

$$P(W \le W^*) = 1-\alpha.$$

其中，投资到期时间和置信水平是两个重要的变量。R^*可以利用其分位点得到。

VaR衡量在给定置信水平下的最大损失，所以使用正数来表示。有两种考虑VAR的角度：相对于预期损失的VaR或相对于初始投资的VaR。记R的期望值为μ.

考虑相对于预期损失的VaR

相对于预期损失，损失值为$E(W)-W$. 考虑$E(W)-W$的水平为α的VaR. 对于

$$VaR^{mean}=E(W)-W^{*}=E(W(1+R))-W(1+R^{*})=-W_0(R^{*}-\mu),$$

有

$$P(E(W)-W^{*}\geq VaR^{mean})=P(E(W)-W^{*}\geq -W_0(R^{*}-\mu))$$
$$=P(R\leq R^{*})=1-\alpha.$$

考虑相对于初始投资的VaR

通常交易VaR考虑相对于初始投资，即考虑$W_0 - W$的VaR. 对于

$$VaR^{zero} = W_0 - W^* = -W_0 R^*.$$

有

$$\begin{aligned} & P(W_0 - W \geq VaR^{zero}) \\ = & P(W_0 - W \geq -W_0(R^* - \mu)) = P(R \leq R^*) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

可以利用经验分布的分位数来估计得到R^*.

例子 实际数据有254个，有$254 \times 5\% = 12.7$. 可以查到第十一个次序统计量为 $W_{254-11,254} = -1000$万，第15个次序统计量为 $W_{254-15,254} = -900$万， 且估计得到的均值为 $E(W) = 510$. 利用差值可以得到

$$W^* = -900 \times \frac{12.7 - 11}{4} - 1000 \times \frac{15 - 12.7}{4} = -960,$$

因此有

$$VaR^{mean} = 510 - (-960) = 1470\text{万元}.$$

参数模型下的VaR方法

需要给出损失的分布函数，其中分布函数中的参数可以根据实际数据来估计。

假设未来的回报率服从正态分布。记置信水平α下的最低回报率为R^*的回报额，即 $W^* = W_0(1+R^*)$.

$$R^* = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma + \mu$$

其中，$\mu = E(R)$. 则有在Δt时间段内有

$$VaR^{mean} = -W_0(R^* - \mu) = W_0\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$VaR^{zero} = W_0(\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t)$$

也可以选择学生分布或其他类型的分布。利用实际数据估计模型中的参数。

Outline

1. 风险价值的计算
   - 计算VaR
   - 为什么选择VaR作为风险度量的方法
   - 定量因素的选择
   - 衡量VaR的精度

为什么选择VaR作为风险度量的方法

- 标准差方法的局限性。
- 投资组合的极限分布和正态分布比较接近。
- VaR满足单调性，平移不变性和同质性。 当$X_1, X_2, \cdots, X_n$的分布服从多元正态时， VaR满足次可加性, 即

$$VaR(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \leq VaR(X_1) + VaR(X_2) + \cdots + VaR(X_n).$$

银行业随着时间的推移，交易风险增大。下表为德意志银行VaR的值，单位为百万欧元：

年终	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
VaR	37	45	38	41	33	60	66

Outline

1. 风险价值的计算
   - 计算VaR
   - 为什么选择VaR作为风险度量的方法
   - 定量因素的选择
   - 衡量VaR的精度

定量因素的选择

选择两个定量因素：样本观察时间段Δt和置信水平α。本节给出α和Δt选择的指导意见。

VaR作为指标衡量值

- 如果VaR是用于公司范围内的不同市场风险的比较，定量因素的选择可以随意些。目前，商业银行多选择符合《巴塞尔协议》规定的99%的置信标准，样本观察时间段为天。
- 当需要关注的是跨部门或跨时间段的VaR. 如果某一机构希望了解某一部门的风险是否比其他部门高，或者今天的VaR是否和昨天的一致。这是一种相对的比较。选择置信水平和样本观察时间段并不是十分重要。

VaR作为潜在损失衡量值

VaR的另一种应用是：衡量机构总体发生最大亏损的可能性。样本观察时间段的选择视投资组合的特性而定。 同时， 样本观察时间段取决于流动性时间：

- 商业银行目前在报告中将业务的VaR样本观察时间段定为每日。
- 退休金的时间可以长一些。

另一种观点是：样本观察时间段应该和投资组合剩余相对稳定的时间段对应。因为VaR假设投资组合的在某一段时间内是不变的。

VaR用于确定资本充足保证金

如果使用VaR的目的是用于直接确定该机构的资本充足要求缓冲保证金，定量因素的选择就至关重要。 在这种情况下，超过VaR的损失，会导致公司股本金全部丧失，导致公司破产：

- 充分考虑了机构所面临的全部风险因素，应包括市场风险、信用风险、操作风险和其他风险。
- 选择置信水平应反映公司抗风险能力，分析出现损失超过VaR情况时对公司的负面影响。
- 样本观察时间段的选择，应该和管理者发现出现亏损问题，并采取措施改正问题所需要的时间匹配。

公司如果满足评级机构的要求，就应该持有充足的资本金满足违约概率的要求。 下表是信用评级对应的违约概率的值：

等级	1年内的违约概率	10年内的违约概率
Aaa	0.00%	1.01%
Aa	0.06%	2.57%
A	0.08%	3.22%
Baa	0.31%	7.63%
Ba	1.39%	19.00%
B	4.56%	36.51%

如果机构希望达到Baa的标准，就应该有充足的资本保证金以保证其对应在99.69%的置信水平内的风险价值。

一个观测时间段内的最大VaR(maxVaR). 即在同一置信水平内但是在样本观察时间段H内发生的最大损失。

回测标准

回测模型包括系统比较VaR和实际发生的盈亏情况，并努力寻找VaR公布数值中的误差。

选择较长的样本观察时间段，会减少独立观测事件的次数。《巴塞尔协议》采用一天的样本观察时间段进行回测， 而资本充足保证金的确定是按照样本观察时间段为10天的时间。

实际中可以选择95%作为回测的置信水平。

应用:巴塞尔参数

按照VaR方法，确定资本充足要求保证金，选择99%作为回测的置信水平，按照样本观察时间段为10天的时间。

例子:外汇期货合约的保证金 如果投资者在其头寸上发生损失，未能补足要求的保证金，则可以在一天内将其平仓。
一份芝加哥商品交易所的美元外汇期货合约，名义金额为125000欧元，目前的汇率是一欧元兑换1.05美元。 假设损失呈正态分布。欧元的年波动率为0.12. 考虑99%的置信水平，能够起到缓冲作用的1天保证金的水平为

$$VaR = 2.22 \times 0.12/\sqrt{252} \times 125000 \times 1.05 = 2310\text{美元}$$

在巴塞尔的内部模型VaR法中，在传统的计算VaR的基础上，《巴塞尔协议》选择了保险系数$k = 3$.

- 传统的VaR计算结果，是按照正态分布计算得到的。
- 为了考虑实际的损失分布与正态分布的偏差，将正态假设下的计算结果乘以3来修正分布的影响。

巴塞尔乘数的说明

假设X的分布函数关于期望$\mu = 0$对称，标准差为δ. 则有

$$P(|X - \mu| > r\delta) \leq 1/r^2.$$

因此有

$$P(X - \mu < -r\delta) \leq \frac{1}{2}1/r^2.$$

如果选择置信水平$\alpha = 0.99$, 则令$\frac{1}{2}1/r^2 = 1 - 0.99 = 0.01$, 得到$r = 7.701$. 因此可以有VaR的估计为

$$VaR_{max} = 7.701\delta$$

即一般分布假设下的VaR小于$VaR_{max} = 7.701\delta$.

假设银行报告中假设分布服从正态分布， 则

$$VaR_{Normal} = 2.33\delta.$$

如果正态分布假设不正确，则有调节系数

$$k = \frac{VaR_{max}}{VaR_{Normal}} = \frac{7.701\delta}{2.33\delta} = 3.03.$$

因此可以通过乘以3来修正分布的影响。

VaR参数的转换–在不同置信水平下的VaR的转换问题

在投资组合满足各个区间段独立且各个区间段的损失服从正态分布的假设下，且正态分布的参数固定， 则可以考虑不同计算方法中的结果的转换。
例如， 可以将风险矩阵的计算结果转化为巴塞尔中的计算要求。 在风险矩阵中，计算1天的0.95置信水平的VaR. Basel II 计算十天的0.99置信水平的VaR. 在正态分布假设下，两者转化的方式为

$$\begin{aligned} VaR_{BC}(0.99, 10) &= VaR_{RM}(0.95, 1)\frac{2.326}{1.645}\sqrt{10} \\ &= 4.45\, VaR_{RM}(0.95, 1). \end{aligned}$$

需要乘以4.45.

利用下面的公式来计算：

$$
\begin{aligned}
R^* &= \sigma\sqrt{\Delta t_1}\Phi^{-1}(1-c_1) \\
&= \sigma\sqrt{\Delta t_2}\Phi^{-1}(1-c_2) \times \frac{\sqrt{\Delta t_1}\Phi^{-1}(1-c_1)}{\sqrt{\Delta t_2}\Phi^{-1}(1-c_2)}.
\end{aligned}
$$

下表是年标准差为0.12下的计算结果。

c	$\Phi^{-1}(1-c)$	Δt	$\sigma\sqrt{\Delta t}$	R^*
99%	-2.326	两周	2.35	-5.47
57.56%	-0.456	一年	12.00	-5.47
81.89%	-0.911	3个月	6.00	-5.47
86.78%	-1.116	2个月	4.90	-5.47
95%	-1.645	四周	3.32	-5.47
99%	-2.326	两周	2.35	-5.47
99.95%	-3.29	1周	1.66	-5.47
99.99997%	-7.153	1天	0.76	-5.47

Outline

衡量VaR的精度

从实际数据中得到均值、标准差和分位数，存在估计的误差。

均值及方差的估值误差

假设样本分布为正态分布，期望值为μ,方差为σ^2. 样本数目为T. 有

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i}{T}$$

及

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T} (X_i - \hat{\mu})^2}{T-1}.$$

则

$$E(\hat{\mu}) = \mu, E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, \hat{\mu} \sim N(\mu, \frac{\delta^2}{T})$$

且

$$\frac{(T-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-1)$$