衍生工具模型 (金融工程风格)

2019-11-11(初稿)

要求

阅读本课件. 完成课件 2019-10-28.pdf 中作业题 1-5, 以及本课件作业题 1-5. 要求解答在下次课前提交.

1 复习

2 多元正态分布复习

记 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 正定 (对称) 矩阵, $X \in \mathbb{R}^d$ 为 d 维随机向量是正态的, 记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu, A)$, 如果其概率密度为

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}|A|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathcal{T}}A^{-1}(x-\mu)\right),$$

其中 $|A|$ 为 A 的行列式, $\mathcal{T}$ 表示转置, A^{-1} 为 A 的逆矩阵. 注: 上式中, $\mu \in \mathbb{R}^d$.

定理 2.1. *沿用以上符号, 对任意 $m \times d$ 矩阵 $H \in \mathbb{R}^{m\times d}$, 则 HX 服从 m 维正态, $\mathcal{N}(H\mu, HAH^{\mathcal{T}})$.*

□

例子 2.2. 令

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}.$$

则 $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, A)$ 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

记 $H = (1 \ \ \pm 1)$. 则 $X_1 \pm X_2 = H(X_1 \ \ X_2)^{\mathcal{T}}$, $HAH^{\mathcal{T}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\rho\sigma_1\sigma_2$. 所以

$$X_1 \pm X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\rho\sigma_1\sigma_2) \tag{2.0.1}$$

□

例子 2.3. 假设: 股票 S_1 和 S_2 服从几何布朗运动

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dB_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{2.0.2}$$

由Itô引理可得

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}{\frac{S_2}{S_1}} &=(\mu_2-\mu_1-\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)dt+\sigma_2 dB_2-\sigma_1 dB_1 \\ &=(\mu_2-\mu_1-\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)dt+\sigma_2 y\sqrt{dt}-\sigma_1 x\sqrt{dt},\end{aligned} \tag{2.0.3}$$

其中, ρ 为 dB_1 和 dB_2 的相关系数, 也是 x 和 y 的相关系数, $x, y \sim \mathcal{N}(0,1)$. 由上例结论知, 存在 $z \sim \mathcal{N}(0,1)$ 使得

$$z\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}=\sigma_2 y-\sigma_1 x,$$

或存在标准布朗运动B_3, 使得

$$B_3(t)\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}=\sigma_2 B_2(t)-\sigma_1 B_1(t),$$

以上结论也可通过对等式(2.0.3)两边取平方来理解:

$$\left[\frac{d\left(\frac{S_2}{S_1}\right)}{\frac{S_2}{S_1}}\right]^2=(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)dt.$$

□

作业题 1. 假设股票 S_1 和 S_2 无股息派发, 其服从几何布朗运动(2.0.2), $dB_1(t)dB_2(t)=\rho dt$.

(1) 记欧式衍生证券 $v(S_1,S_2,t,T)$, 其 Terminal payoff

$$v(S_1,S_2,T,T)=\max(S_1(T),S_2(T)).$$

求 $v(S_1,S_2,t,T)$.

(2) 记欧式衍生证券 $w(S_1,S_2,t,T)$, 其 Terminal payoff

$$w(S_1,S_2,T,T)=\min(S_1(T),S_2(T)).$$

求 $w(S_1,S_2,t,T)$.

□

2.1 Breeden-Litzenberger 公式

假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 无风险利率 r 为常数. 给定市场价 $\widetilde{c}(S,t,E,T)$, 假设

$$\widetilde{c}(S,0,E,T)=e^{-rT}\mathbb{E}^Q[\max(S_T-E,0)|\mathcal{F}_0],$$

在测度 Q 下, 记 $\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)$ 为转移概率密:

$$(S_0,0)\longrightarrow(S_T,T).$$

于是

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(S,0,E,T) =& e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(S_T-E,0)\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\ =& e^{-rT}\int_{E}^{+\infty}(S_T-E)\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T.\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{c}}{\partial E} =& -e^{-rT}\int_{E}^{+\infty}\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\ =& -e^{-rT}\widetilde{\text{Prob}}^Q(S_T>E)\end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2} = e^{-rT}\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0).$$

命题 2.4 (Breeden-Litzenberger (1978))**.** *对任意 $E>0$, 有*

$$\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0) = e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T).$$

□

由 Put-call parity 知

推论 2.5. *对任意 $E>0$, 有*

$$\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0) = e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{p}}{\partial E^2}(S,0,E,T).$$

□

注释 2.6. (1) 以上风险中性转移概率密度 $\widetilde{g}^Q$ 不是 $(0,S_0)\longrightarrow(T,E)$ 市场转移概率密度. 正如以前给出的关于赔率的设定并不是某球队的实际胜率. (2) 命题2.4和推论2.5并不要求 S 服从几何布朗运动.

□

例子 2.7. 在实际市场中, 我们只能找到有限多个 E. 在 $t=0$ 时, 假设: 以下是市场全部期权数据,

$$\{\widetilde{c}(S,0,E_i,T),\widetilde{p}(S,0,E_j,T)\mid 1\le i\le N, 1\le j\le M\}.$$

对于这些市场数据, 可做多项式拟合: 找多项式 $h_c(x)$ 和 $h_p(x)$, 使得

$$h_c(E)=\widetilde{c}(S,0,E,T)\quad \text{和}\quad h_p(E)=\widetilde{p}(S,0,E,T).$$

多项式拟合不能保证 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 相等. 我们采用以下原则: 通常 OTM 的 $\widetilde{c}$ 和 $\widetilde{p}$ 流动性较大, 其更能反映市场本质. 所以在 $h_c''(E)$ 和 $h_p''(E)$ 中取 OTM 的值作为 $\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)$ 的真实值. 云云.

□

例子 2.8. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S,0,T)$, 其 terminal payoff $w(S,T,T)=1$. 则

$$\begin{aligned}w(S,0,T)=&e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^Q[1|\mathcal{F}_0]\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}1\cdot\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&e^{-rT}.\end{aligned}$$

这与无套利假定的结果一致. 这也从另一侧面证明了

$$\int_0^{+\infty}\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T=1.$$

□

例子 2.9. 考虑一个欧式衍生证券 $w(S,0,T)$, 其 terminal payoff $w(S,T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 则

$$\begin{aligned}w(S,0,T)=&e^{-rT}\widetilde{\mathbb{E}}^Q[f(S_T)|\mathcal{F}_0]\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(S_T)\cdot\widetilde{g}^Q(S_T,T;S_0,0)dS_T\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(E)\cdot\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)dE\\=&e^{-rT}\int_0^{+\infty}f(E)e^{rT}\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE\\=&\int_0^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

以上最后第二个积分由命题2.4得出, 给出了静态复制 $w(S,0,T)$ 的思路. 具体操作见下例.

□

例子 2.10. 回忆例子2.7最后一段的讨论. 在所有可交易的市场价

$$\{\widetilde{c}(S,0,E_i,T),\widetilde{p}(S,0,E_j,T)\mid 1\le i\le N,1\le j\le M\}$$

中, 假设: 存在一临界值 $\widetilde{E}$, 使得

$$E_1<E_2<\cdots\le\widetilde{E}<\cdots<E_N$$

并且满足

- 当 $E_i\ge\widetilde{E}$ 时, $\widetilde{c}(S,0,E_i,T)$ 的流动性较大;
- 当 $E_j<\widetilde{E}$ 时, $\widetilde{p}(S,0,E_j,T)$ 的流动性较大.

因而式(2.1.1)可改写为

$$\begin{aligned}w(S,0,T)&=\int_0^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE\\&=\underbrace{\int_0^{E_0}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{p}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE}_{\text{由由命题 2.4 和推论 2.5}}+\int_{E_0}^{+\infty}f(E)\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial E^2}(S,0,E,T)dE.\end{aligned}$$

注释 2.11. 转移概率密度 $\widetilde{g}^Q(E,T;S_0,0)$ 的金融图像. 课上讲.

□

回忆 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为已知函数 $f(S_T)$. 分部积分上式可得 (细节略)

$$\begin{aligned} w(0,T) =& f(E)e^{-rT} + f'(E_0)(S_0 - E_0e^{-rT}) \\ &+ \int_0^{E_0} f''(E)\widetilde{p}(S,0,E,T)dE + \int_{E_0}^{+\infty} f''(E)\widetilde{c}(S,0,E,T)dE. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

上式给出了静态复制 $w(t,T)$ 的方法.

□

作业题 2. 由式(2.1.2), 给出静态复制 $w(t,T)$ 的操作细节.

□

作业题 3. 假设 S 连续股息派发, 其股息派发率为非负常数 q. 记 $w(0,T)$ 是一个欧式衍生证券, 其 terminal payoff $w(T,T)$ 为 S_T^2. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 给出 $w(0,T)$ 的解析表达式.
2. 假设 $\widetilde{c}(S,0,E,T)$ 的隐含波动率为 $\sqrt{E}$. 画出隐含波动率曲线的草图和 (隐含) 风险中性概率的草图. 给出静态对冲方法复制 $w(t,T)$.

□

作业题 4. 假设 S 无股息派发, 无风险利率 $r=0$, $H<E<S(0)$. 回答以下每个问题.

1. 在 Black-Scholes 框架下, 证明

$$c^{d/o}(S,0,E,T,H) = c(S,0,E,T) - \frac{S(0)}{H}c\left(\frac{H^2}{S_0},0,E,T\right)$$

2. 假设 $\widetilde{c}^{d/o}(S,0,E,T,H)$ 在市场上可以交易, 你能否利用 c 和/或 p 静态复制 $\widetilde{c}^{d/o}$? 说明理由. 提示:

$$\frac{S_T}{H}\max\left(\frac{H^2}{S_T}-E,0\right) = \frac{E}{H}\max\left(\frac{H^2}{E}-S_T,0\right).$$

□

3 随机波动率简介

3.1 引言

为了方便起见, 除非特别声明, 假设 S 无股息派发. 回顾几何布朗运动定义

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB_t, \tag{3.1.1}$$

其中 μ 和 σ 都是常数, 且 $\sigma>0$. 先将这个假定扩展: σ 为一随机过程 σ_t. 则将上式推广为

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \tag{3.1.2}$$

将随机过程 σ_t 写成以下形式:

$$d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t, \tag{3.1.3}$$

其中 W_t 为一 (标准)布朗运动.

注释 3.1. 公式(3.1.2)和(3.1.3)中的布朗运动$B(t)$ 和 $W(t)$ 通常不是独立的. 定义

$$dB(t) \text{ 和 } dW(t) \text{ 的相关系数 } \rho := \frac{\mathbb{E}[dB(t)dW(t)] - \mathbb{E}[dB(t)]\mathbb{E}[dW(t)]}{\sqrt{\mathbb{E}[dB^2(t)]\mathbb{E}[dW^2(t)]}}. \tag{3.1.4}$$

由布朗运动的定义知:

$$\mathbb{E}[dB(t)] = \mathbb{E}[dW(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[dB^2(t)] = \mathbb{E}[dW^2(t)] = dt.$$

于是

$$\mathbb{E}[dB(t)dW(t)] = \rho dt.$$

从逻辑上, ρ 是时间 t 的函数. 但我们假定ρ始终是常数. 细节在课上提及, 参考文件 shreve246-247.pdf 将发给大家.

□

综上所述, 波动率模型满足

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{S} =\mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d\sigma =a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t, \\ \rho dt =\mathbb{E}[dB_t dW_t]. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

假设 S 无股息派发. 记 $v(S,t,T)$ 为一欧式衍生证券. 利用 Δ 对冲可以得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + rS\frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0. \tag{3.1.6}$$

在假设(3.1.5)下, 从数学角度看, 以上方程与以前的 Black-Scholes 方程起了本质改变: 方程(3.1.6)的系数 σ 关于 t 是随机的. 求解 $v(S,t,T)$ 就变为求解含随机系数的偏微分方程. 很难. 一个解决办法是, 将 v 看成 $v(S,t,T,\sigma)$.

以下以 $c(S,t,E,T,\sigma)$ 为例, 在假设(3.1.5)下给出 c 满足的偏微分方程. 由Itô引理

$$\begin{aligned} dc(S,t,E,T,\sigma) =&\frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial S}dS + \frac{\partial c}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt \\ &+ \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}dt + \sigma bS\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial\sigma}dt. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

如果用以前的 Δ 对冲 $c - \Delta S$, 那么

$$dc(S,t,E,T,\sigma) - \Delta dS$$

仍是随机的. 引入另外一个可交易的 $c_1 = c(S,t,E_1,T_1,\sigma)$, $T_1 \geq T$. 构造投资组合

$$\begin{aligned} \Pi(t) :=&c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c_1 \\ =&c(S,t,E,T,\sigma) - \Delta S_t - \Delta_1 c(S,t,E_1,T_1,\sigma). \end{aligned}$$

利用(3.1.7)得

$$\begin{aligned}d\Pi(t) = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\ &- \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\ &+ \left(\frac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1 \frac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta\right) dS + \left(\frac{\partial c}{\partial \sigma} - \Delta_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma}\right) d\sigma.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c}{\partial S} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial S} - \Delta = 0 \\ \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} - \Delta_1 \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} = 0.\end{cases} \tag{3.1.8}$$

消去 $d\Pi(t)$ 的随机项. 上式解得

$$\begin{cases}\Delta = \dfrac{\partial c}{\partial S} - \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} \dfrac{\partial c_1}{\partial S} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\ \Delta_1 = \dfrac{\partial c}{\partial \sigma} \Big/ \dfrac{\partial c_1}{\partial \sigma}.\end{cases} \tag{3.1.9}$$

取以上 Δ 和 Δ_1 后,

$$\begin{aligned}d\Pi(t) = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma}\right) dt \\ &- \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma}\right) dt.\end{aligned}$$

由无套利假定得 $d\Pi(t) = r\Pi(t)dt = r(c - \Delta S - \Delta_1 c_1)dt$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} - rc \\ &\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} - rc_1\right) + r\Delta S = 0.\end{aligned}$$

再由(3.1.9), 得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc\right) \Big/ \frac{\partial c}{\partial \sigma} \\ &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c_1}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c_1}{\partial S} - rc_1\right) \Big/ \frac{\partial c_1}{\partial \sigma} \\ &=: -\phi(S, \sigma, t).\end{aligned}$$

上式第一个等号左边含 (E, T) 不含 (E_1, T_1), 右边含 (E_1, T_1) 不含 (E, T). 所以该等号左右两边都与 (E, E_1, T, T_1) 无关. 于是

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \sigma} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc + \phi(S, \sigma, t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} = 0. \tag{3.1.10}$$

上式是 c 满足的带随机波动率的 Black-Scholes 方程.

回忆公式(3.1.3), 记

$$
\begin{aligned}
\mu_c :=& \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S\frac{\partial c}{\partial S} + a(S,\sigma,t)\frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} + \sigma b S\rho\frac{\partial^2 c}{\partial S\partial \sigma}\right)\\
\sigma_{c,S} :=& \frac{\sigma S}{c}\frac{\partial c}{\partial S}\\
\sigma_{c,\sigma} :=& \frac{b(S,\sigma,t)}{c}\frac{\partial c}{\partial \sigma}\\
\sigma_c :=& \sqrt{\sigma_{c,S}^2 + \sigma_{c,\sigma}^2 + 2\rho\sigma_{c,S}\sigma_c}.
\end{aligned}
$$

定理 3.2.

$$
\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{c,S}}{\sigma_c}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) + \frac{\sigma_{c,\sigma}}{\sigma_c}\left(\frac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}\right). \tag{3.1.11}
$$

□

作业题 5. 证明公式(3.1.11).

□

在公式(3.1.11)中,

$\dfrac{\mu_c - r}{\sigma_c}$, $\dfrac{\mu - r}{\sigma}$ 和 $\dfrac{a(S,\sigma,t) - \phi(S,\sigma,t)}{b(S,\sigma,t)}$ 分别是 c, S 和 σ 的 Sharpe 比率.

回忆公式(3.1.3)

$$
d\sigma = a(S,\sigma,t)dt + b(S,\sigma,t)dW_t.
$$

在建立波动率模型时, 关键是通过实际市场对于 σ 的假设. 在实际应用中通常假设 $a(S,\sigma,t) = \alpha(m - \sigma)$ (均值反转). 课上讲. 当取 $b(S,\sigma,t)$ 为常数时上式可能会导致 $\sigma < 0$.

3.1.1 波动率模型的一些例子

记 m, α 和 β 为非负常数, W_t 为一 (标准)布朗运动. 随机过程 σ_t 可能的形式:

(1) 形式 1

$$
d\sigma = \alpha(m - \sigma)dt + \beta dW_t. \tag{3.1.12}
$$

(2) 形式 2

$$
d(\sigma^2) = \alpha(m - \sigma^2)dt + \beta dW_t. \tag{3.1.13}
$$

(3) 形式 3

$$
d(\sigma^2) = \alpha(m - \sigma^2)dt + \beta\sigma^2 dW_t. \tag{3.1.14}
$$

(4) 形式 4 (Heston (1993) 模型)

$$
d(\sigma^2) = \alpha(m - \sigma^2)dt + \beta|\sigma|dW_t. \tag{3.1.15}
$$

(5) 其他扩展形式.

注释 3.3. 公式(3.1.12)和(3.1.13)可能导致 $\sigma < 0$. 而在公式(3.1.14)和(3.1.15)中的 σ 总是非负. 以下重点讨论 Heston 模型(3.1.15).

□

Heston 模型(3.1.15)通常写为

$$d(V) = \alpha(m - V)dt + \beta\sqrt{V}dW_t, \tag{3.1.16}$$

其中 $V = \sigma^2$.

在文献中较常见的是 Heston 模型. 现将其综述如下.

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_t dB_t, \\ d(V_t) = \alpha(m - V_t)dt + \beta\sqrt{V_t}dW_t, \\ \sigma_t = \sqrt{V_t} \\ \rho dt = \mathbb{E}[dB(t)dW(t)], \\ \text{其中}\alpha, m, \beta\text{非负}. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

4 在金融工程中一种确定期权市场价格的方法

为了叙述简单起见, 我们假设无风险利率 r 为常数, S 是一个标的, 不一定保证其可以买卖. 记 $F(S, t, T)$ 为期货/远期合约的价格, $v_F(F, t, T)$ 为标的为 F 的欧式看涨衍生证券, 其 terminal payoff 为 $\max(F_T - E, 0)$.

我们需要给出 $v_F(F, t, T)$ 的市场价 $\widetilde{v}_F(F, t, T)$ 的估计.

我们采用以下思路/步骤.

1. 忽略 F 是否服从几何布朗运动.

2. 固定 σ 以外的变量, 直接定义映射

$$g(\sigma) := e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma)) - EN(d_2(\sigma)).$$

3. 由于 $g' > 0$，所以 g 是 1-1 的. 如果 g 的值域与市场价 $\widetilde{v}_F(F, t, T)$ 的值域相同, 那么对于给定市场价 $\widetilde{v}_F(F, t, T)$, 存在唯一的 $\widetilde{\sigma}$, 使得

$$\widetilde{v}_F(F, t, T) = e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\widetilde{\sigma})) - EN(d_2(\widetilde{\sigma})). \tag{4.0.1}$$

4. 式(4.0.1)中的 $\widetilde{\sigma}$ 称为 $v_F(F, t, T)$ 隐含波动率.

5. 假设

$$dF = G(F, \sigma_t)dB_t \tag{4.0.2}$$

和/或

$$d\sigma_t = K(F, \sigma_t)dW_t$$

找函数 $G(F, \sigma_t)$ 和/或 $K(F, \sigma_t)$. 给出 $v_F(F, t, T)$ 的定价公式, 记为 $w(F, t, T)$.

6. 让

$$w(F, t, T) = e^{-r(T-t)}(FN(d_1(\sigma)) - EN(d_2(\sigma))$$

解出 σ(如果解存在). 记这个解为 $\sigma_w(F, t, T)$.

7. 如果走运, 我们找到合适的的 $G(F, \sigma_t)$ 和/或 $K(F, \sigma_t)$, 使得

$$\sigma_w(F, t, T) \approx \widetilde{\sigma}(F, t, T), \quad \forall t,$$

那么我们就能很好的把握市场价 $\widetilde{v}_F(F, t, T)$ 了.

□

注释 4.1. 在选取公式(4.0.2)中的 $G(F, \sigma_t)$ 时, 有时不必确保 $F > 0$. 例如: 有时可以选择 $dF = \sigma_t dB_t$. 此时, 只需要将原来的 F 改成以障碍为 $F = 0$ 的障碍期权即可.

□