连续时间破产模型-I

第6讲 2019.10.15

连续时间破产模型的主要内容

- 调节系数与破产概率
- 更新方程与破产概率
- 最大净损失与破产概率

调节系数与破产概率

调节系数为满足下面方程的正实数R

$$M_{S(t)}(R)=e^{ctR} \quad \text{或} \quad E\left[e^{-RU(t)}\right]=e^{-Ru}, \forall t\geq 0$$

复合Poisson情形调节系数与Poisson参数无关

$$cR=\lambda(M_X(R)-1)\Rightarrow 1+\frac{c}{\lambda}R=M_X(R)$$

$\Rightarrow$ 调节系数方程：

$$1+(1+\theta)E[X]R=M_X(R)$$

复合Poisson情形的调节系数性质

(1)显然$r=0$是方程的一个平凡解。

(2)若γ为$M_X(r)$定义域的上界，则有:$\lim\limits_{r\to\gamma} M_X(r)=+\infty.$

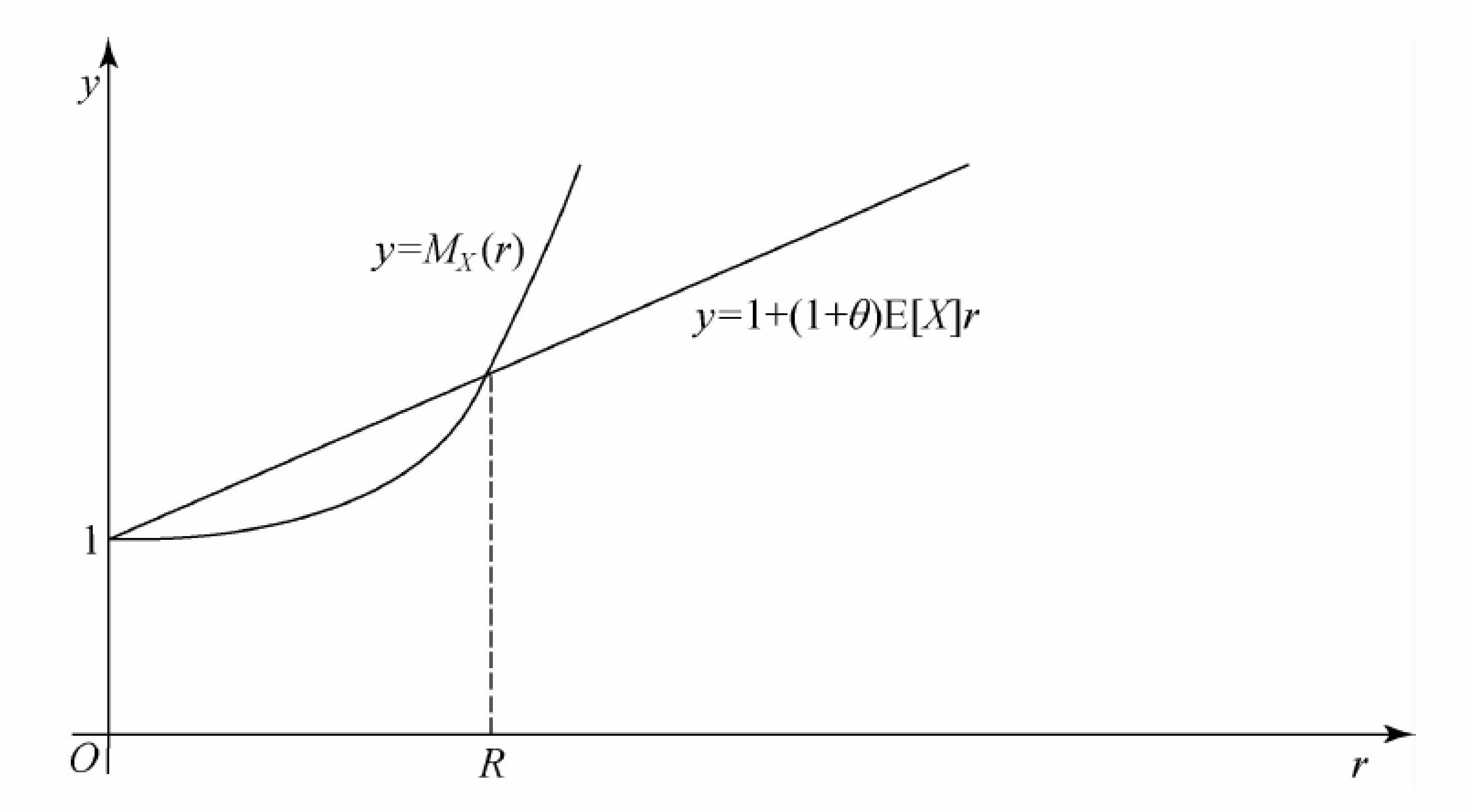
(3)由$M_X'(r)=E\left[Xe^{rX}\right]>0, r\geq 0,$可知方程的右边为严格单增的函数，而且:

$$M_X'(0)=E[X]<(1+\theta)E[X]=\frac{c}{\lambda},$$

这表明，方程左边直线的斜率小于右边曲线在原点的斜率。

(4)由$M_X''(r)=E\left[X^2e^{rX}\right]>0, r\geq 0,$可知方程的右边为严格凹函数。

复合Poisson情形的调节系数



复合Poisson情形的调节系数例子

指数分布：$R=\dfrac{\theta}{1+\theta}\beta$

Gamma分布：$\left(\dfrac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha}=1+\dfrac{\alpha}{\beta}(1+\theta)r$

复合Poisson情形调节系数的界

$$\frac{1}{k}\ln\theta < R \leq 2\theta\frac{E(X)}{E(X^2)}$$

其中k为X的取值上界。

一般的收入过程

$$U(t) = u + B(t) - S(t)$$

调节系数方程：

$$rB(t) = \lambda t(M_X(r) - 1), \forall t \geq 0, r > 0$$

结论：

若调节系数方程的解存在，则$B(t)$为t的线性函数。

定理2-1 调节系数表示的破产概率

若盈余过程的总损失过程为复合Poisson过程，

则可以得到盈余过程破产概率$\psi(u)$的以下表达式：

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}\,|\,T<\infty)},u\ge 0$$

其中R为调节系数。

证明

首先有：

$$E(e^{-rU(t)})=E(e^{-rU(t)}\,|\,T<t)\Pr(T<t)+E(e^{-rU(t)}\,|\,T\geq t)\Pr(T\geq t)$$

只需证明以下两个表达式成立：

$$E(e^{-RU(t)}\,|\,T<t)=E(e^{-RU(T)}\,|\,T<t)$$

$$\lim_{t\to\infty}E(e^{-RU(t)}\,|\,T\geq t)\Pr(T\geq t)=0$$

证明 $E(e^{-RU(t)}\mid T<t)=E(e^{-RU(T)}\mid T<t)$

利用$U(t)$过程的独立增量和平稳性质：

当$T<t$时，$U(t)=U(T)+\left(U(t)-U(T)\right)$

此时，可以将$U(t)-U(T)$看做是初值为0的新的盈余过程。

因此由调节系数的定义，有：

$$E(e^{-R\left(U(t)-U(T)\right)}\mid T<t)=e^{-R0}=1$$

进而有：

$$E(e^{-RU(t)}\mid T<t)=E(e^{-RU(T)}\mid T<t)$$

证明 $\lim_{t\to\infty} E(e^{-RU(t)} \mid T \ge t)\Pr(T \ge t) = 0$

令： $\alpha = c - \lambda E\left(X\right) > 0$，$\beta^2 = \lambda E\left(X^2\right)$

可得：

$E[U(t)] = E[u + ct - S(t)] = u + \alpha t$，$Var[U(t)] = Var[S(t)] = \beta^2 t$

显然有：$\lim_{t\to\infty}\{u + \alpha t - \beta t^{2/3}\} = \infty$

下面进行分解：

$$E[e^{-RU(t)} \mid T > t]P\{T > t\}$$

$$= E[e^{-RU(t)} \cdot I_{\{0 \le U(t) \le u + \alpha t - \beta t^{2/3}\}} \left| T > t\right] P(T > t)$$

$$+ E[e^{-RU(t)} \cdot I_{\{U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}\}} \left| T > t\right] P(T > t)$$

证明 $E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{0\le U(t)\le u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}\,|T>t]P(T>t)\to 0$

当$T>t$时，$U(t)>0$，所以有：$E[e^{-RU(t)}\,|\,T>t]\le 1$

可得：

$$E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{0\le U(t)\le u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}\,|T>t]P(T>t)\le E[I_{\{0\le U(t)\le u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}\,|T>t]$$

$$\le P[U(t)\le u+\alpha t-\beta t^{2/3}]\le P[|U(t)-(u+\alpha t)|\ge \beta t^{2/3}]$$

$$\le \frac{Var[U(t)]}{(\beta t^{2/3})^2}$$

$$\le t^{-\frac{1}{3}}$$

进而有：

$$E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{0\le U(t)\le u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}\,|T>t]P(T>t)\to 0$$

$$E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{U(t)>u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}\,|T>t]P(T>t)$$

证明（续）

自然有：

$$E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{U(t)>u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}|T>t]P(T>t)\le\exp[-R(u+\alpha t-\beta t^{\frac{2}{3}})]$$

可得：

$$E[e^{-RU(t)}\cdot I_{\{U(t)>u+\alpha t-\beta t^{2/3}\}}|T>t]P(T>t)\to 0$$

定理的直接推论：破产概率的上界

$$\psi(u) \le e^{-Ru}, u \ge 0$$

个体损失为指数分布$exp(\beta)$的破产概率

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u} = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{E(X)}}$$

且有：

$$Y = -(U(T)|T < \infty) \sim exp(\beta)$$

证明：$U(T)$与$U(T_)$的关系

数值结果

θ / k	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
1	0.7054	0.5368	0.4296	0.3562	0.3033	0.2634
2	0.5971	0.4034	0.2952	0.2284	0.1839	0.1527
3	0.5054	0.3031	0.2029	0.1464	0.1116	0.0885
4	0.4278	0.2278	0.1395	0.0939	0.0677	0.0513
5	0.3622	0.1712	0.0958	0.0602	0.0410	0.0297
6	0.3066	0.1286	0.0659	0.0386	0.0249	0.0172
7	0.3114	0.0967	0.0453	0.0248	0.0151	0.0099
8	0.2197	0.0726	0.0311	0.0159	0.0092	0.0058
9	0.1860	0.0546	0.0214	0.0102	0.0056	0.0034
10	0.1574	0.0410	0.0147	0.0065	0.0034	0.0019
15	0.0684	0.0098	0.0023	7.07×10^{-4}	2.77×10^{-4}	1.27×10^{-4}
20	0.0297	0.0024	3.46×10^{-4}	7.66×10^{-5}	2.27×10^{-5}	8.31×10^{-6}
30	0.0056	1.35×10^{-4}	8.13×10^{-6}	9.0×10^{-7}	1.53×10^{-7}	3.56×10^{-8}

$$k=\frac{u}{E[X]}$$

更新方程与破产概率

- 利用辅助函数研究破产概率的性质
- 得到破产概率函数的微积分方程
- 复合Poisson过程的相关结论

定义辅助函数

$$\Psi_1(u,w)=E[w(U(T))\,|\,T<\infty]\psi(u)$$

1）当$w(x)\equiv 1$时，$\Psi_1(u,w)=\psi(u)$

2）对任意$h>0$，当$w(x)=I_{(-\infty,-h)}(x)$时

$$\Psi_1(u,w)=\Pr(U(T)<-h\,|\,T<\infty)\psi(u)$$

3）当$w(x)=e^{-Rx}$时，$\Psi_1(u,w)=e^{-Ru}$

定理2-2

$$\Psi_1'(u,w)=\frac{\lambda}{c}\Psi_1(u,w)-\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \Psi_1(u-x,w)dF_X(x)+\int_u^\infty w(u-x)dF_X(x)\right]$$

$$\Psi_1(u,w)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi_1(u-x,w)[1-F_X(x)]dx+\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty w(u-x)[1-F_X(x)]dx$$

$$\Psi_1(0,w)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty w(-x)[1-F_X(x)]dx$$

定理2-2的证明思路

- 路线：结论1→结论2（结论3）
- 结论1的证明思路
  - 微元分析-概率分析
  - 将变量的增量转换为时间的增量
- 结论1的证明步骤
  - 在时间微元内是否有索赔发生
  - 极限的计算

结论1的证明

考虑$(0,\Delta t)$上的变化：

1）没有损失发生（概率为$1-\lambda\Delta t$），则函数$\Psi_1(u,w)$变为$\Psi_1(u+c\Delta t,w)$。

2）一次损失发生（概率为$\lambda\Delta t$），且损失量为x，进而考虑以下两种情况：

i）该损失量造成了破产。即：$x>u+c\Delta t$，$T=\Delta t$；则函数$\Psi_1(u,w)$退化为

$$\int_{u+c\Delta t}^{\infty} w(u+c\Delta t-x)\cdot 1\cdot dF_X(x)$$

ii)该损失量未造成破产。即：$x\le u+c\Delta t$，$T>\Delta t$；则函数$\Psi_1(u,w)$退化为

$$\int_{0}^{u+c\Delta t} \Psi_1(u+c\Delta t-x,w)dF_X(x)$$

3）两次以上的损失发生，概率为$o(\Delta t)$

结论1的证明（续）

$$\Psi_1(u,w)=(1-\lambda dt)\cdot\Psi_1(u+cdt,w)$$

$$+\lambda dt\{\int_0^{u+cdt}\Psi_1(u+cdt-x,w)dF_X(x)+\int_{u+cdt}^{\infty}w(u+cdt-x)dF_X(x)\}$$

进而有：

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\Psi_1(u+c\cdot dt,w)-\Psi_1(u,w)}{c\cdot dt}=\Psi_1'(u,w)$$

结论1→结论2

对结论1两边进行积分：

$$\int_0^u \Psi_1'(v,w)dv$$

$$=\frac{\lambda}{c}[\int_0^u \Psi_1(v,w)dv-\int_0^u\int_0^v \Psi_1(v-x,w)dF_X(x)dv-\int_0^u\int_v^\infty w(v-x)dF_X(x)dv]$$

首先，通过简单的变量替换，有：

$$\int_0^u \Psi_1(v,w)dv=\int_0^u \Psi_1(u-v,w)dv$$

通过分部积分，可证明：

$$\int_0^u\int_0^v \Psi_1(v-x,w)dF_X(x)dv=\int_0^u \Psi_1(u-x,w)F_X(x)dx$$

$$\int_0^u\int_v^\infty w(v-x)dF_X(x)dv=-\int_0^\infty w(-x)F_X(x)dx+\int_u^\infty w(u-x)F_X(x)dx$$

推论2-1 $w(x)\equiv 1$

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}[\int_0^u \psi(u-x)dF_X(x)+(1-F_X(u))]$$

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)[1-F_X(x)]dx+\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1-F_X(x)]dx$$

$$\psi(0)=\frac{\lambda}{c}E[X]=\frac{1}{1+\theta}$$

例1-指数分布

$$f_X(x)=\beta e^{-\beta x}$$

破产概率的微分方程：

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{c}[\psi(u)-\int_0^u \psi(x)\beta e^{-\beta(u-x)}dx-e^{-\beta u}],u\geq 0$$

边界条件：$\psi(0)=\dfrac{1}{1+\theta}$， $\psi(+\infty)=0$

猜想一般解为：

$\psi(u)=ae^{-Ru}$ 则：$a=\dfrac{1}{1+\theta},R=\dfrac{\theta}{1+\theta}\beta$为方程的解

例2-混合指数分布

$$f_X(x)=c_1\beta_1 e^{-\beta_1 x}+c_2\beta_2 e^{-\beta_2 x}，\ c_1+c_2=1,\beta_1>0,\beta_2>0$$

破产概率的微积分方程为：

$$\psi'(u)$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left[\psi(u)-\int_0^u \psi(x)\left(c_1\beta_1 e^{-\beta_1(u-x)}+c_2\beta_2 e^{-\beta_2(u-x)}\right)dx-\left(1-c_1e^{-\beta_1 u}-c_2e^{-\beta_2 u}\right)\right],u\geq 0$$

进而有：$\psi^{(3)}(u)+b_2\psi''(u)+b_1\psi'(u)=0$,边界条件：$\psi(0)=\dfrac{1}{1+\theta}$，$\psi(+\infty)=0$

其中：$b_2=\left(\beta_1+\beta_2-\dfrac{\lambda}{c}\right),b_1=\left[\beta_1\beta_2-\dfrac{\lambda}{c}\left(c_1\beta_1+c_2\beta_2\right)\right]$

猜想一般解为：$\psi(u)=a_1e^{-R_1 u}+a_2e^{-R_2 u}$

则：$a_1+a_2=\dfrac{1}{1+\theta}$, R_1和R_2为下面方程的两个根：$r^2-b_2r+b_1=0$

推论2-2

当$u=0$时，取：$w(x)=I_{(-\infty,-y)}, y>0$

直接应用定理，

有如下关于破产亏损量与破产时间的联合分布：

$$\Pr\left(-U(T)<y, T<\infty\right)=\frac{\lambda}{c}\int_0^y[1-F_X(x)]dx$$

$$=\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{E[X]}\int_0^y[1-F_X(x)]dx$$

推论2-2的说明

对一般的初始盈余u,

$U(t)<u$也可以看作是一种破产的定义.

记：$L_1=-U(T)\,|\,T<\infty$

则由推论，有：

$$\Pr(L_1<l)=\frac{\Pr(-U(T)<l,T<\infty)}{\Pr(T<\infty)}=\frac{1}{E[X]}\int_0^l[1-F_X(x)]dx$$

以及：

$$M_{L_1}(t)=\frac{1}{tE[X]}[M_X(t)-1]$$

作业与思考

- 作业：第二章练习第5-6题
- 思考：
  - 随机过程与随机变量的本质差异
  - 回忆随机过程课程中的首达时计算方法
  - 如何生成盈余过程的轨道？