北京大学 PEKING UNIVERSITY 数学作业纸 科目

班级 19金数 姓名 马骏 编号 1901210006 第 页

1. 随机游动 $\begin{cases} P_{i,i+1}=p & 0<p<1 \\ P_{i,i-1}=q=1-p & i=1,2,\cdots,r-1 \\ P_{0,0}=P_{r,r}=1 \end{cases}$ 求 $d(k)=E[$吸收至0或r | 初始$k]$

解：设 P(从初始k经过n步吸收至0或r) $=\pi_i^n$

则 $d(i)=\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_i^n$，易得 $d(0)=0$，$d(r)=0$，

当 $0<i<r$ 时，$d(i)=\sum_{n=1}^{\infty} n\pi_i^n=\pi_i^1+\sum_{n=2}^{\infty} n\sum_{0<j<r}P_{ij}\pi_j^{n-1}$

$$=\pi_i^1+\sum_{0<j<r}P_{ij}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_j^n+\sum_{0<j<r}P_{ij}\,d(j) \quad ①$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\pi_i^n=\pi_i^1+\sum_{0<j<r}P_{ij}\sum_{n=1}^{\infty}\pi_j=1\ (0<i<r)$，代入①，得 $d(i)=1+\sum_{0<j<r}P_{ij}(dj)$

因此，$d(1)=1+pd(2)$，$d(i)=1+qd(i-1)+pd(i+1)$，$d(r-1)=1+qd(r-2)$

设 $d^*(i)=d(i)-\frac{i}{q-p}$，则 $d^*(1)=pd^*(2)$，$d^*(i)=qd^*(i-1)+pd^*(i+1)$

$d^*(r-1)=qd^*(r-2)-1-\frac{pr}{q-p}$

设 $d^*(i)=A+B(\frac{q}{p})^i$，代入原方程组可解得 $A=\frac{r}{(q-p)(1-\frac{q}{p})^r}$，$B=-A$

即 $d^*(i)=-\frac{r}{q-p}\times\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^r} \Rightarrow d(i)=\frac{i}{q-p}-\frac{r}{q-p}\times\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^r}\ (p\neq\frac{1}{2})$

当 $q=p$ 时，$d(1)=1+\frac{1}{2}d(2)$，$\frac{1}{2}[d(i)-d(i+1)]-\frac{1}{2}[d(i-1)-d(i)]=1$，

$d(r-1)=1+\frac{1}{2}d(r-2)$

解得 $d(i)-d(i+1)=2i+1-r$.

经累加法可知 $d(i)=i(r-i)$，$(p=\frac{1}{2})$ 综上所述，得证。

2、设 P 是不可约，且 $P^2=P$，证明 $\forall i$ 和 j，$P_{ij}=P_{jj}$，且 P 是非周期的。

解：$\because P^2=P$ $\quad\therefore P^n=P$ 即 $P_{ij}^n=P_{ij}$，$P_{jj}^n=P_{jj}$

$\because P$ 不可约 $\therefore P$ 常返 $\quad\therefore \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n=\lim_{n\to\infty} P_{jj}^n=P_{ij}=P_{jj}$

$\therefore P$ ~~的~~是非周期的，得证。

4. $P_{ij}=\begin{cases}\mu_i, & j=i-1\\ \lambda_i, & j=i+1\\ 1-\lambda_i-\mu_i, & j=i\end{cases}$，假设 $\mu_0=\lambda_0=\mu_N=\lambda_N=0$，且 $\mu_i,\lambda_i>0$，初始状态是 k，试确定 0 和 N 的吸收概率

解：设 P(被0吸收) $=\pi_k(0)$，则 $\pi_k(0)=\pi_k^1(0)+\sum_{1\le j\le N-1}P_{kj}\,\pi_j(0)$

故 $\cancel{\pi_i(0)}\ \pi_1(0)=\mu_1+(1-\lambda_1-\mu_1)\pi_1(0)+\lambda_1\pi_2(0)$

$\pi_i(0)=\mu_i\pi_{i-1}(0)+(1-\mu_i-\lambda_i)\pi_i(0)+\lambda_i\pi_{i+1}(0)$

$\pi_{n-1}(0)=(1-\lambda_{n-1}-\mu_{n-1})\pi_{n-1}(0)+\mu_{n-1}\pi_{n-2}(0)$

解得 $\pi_{i-1}(0)-\pi_i(0)=\dfrac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{i-1}/\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1}}{\sum_{k=1}^{N-1}\mu_1\mu_2\cdots\mu_k/\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}$

令 $P_0=1$，$P_i=\dfrac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_i}$，则 $\pi_i(0)=1-\pi_i(N)=\dfrac{\sum_{i=k}^{N-1}P_i}{\sum_{i=0}^{N-1}P_i}$

6、$P_{ij}=C_N^j\pi_i^j(1-\pi_i)^{N-j}$，$\pi_i=\dfrac{1-e^{-2ai/N}}{1-e^{-2a}}\ (a>0)$，0和N是吸收态，

求证 $E(e^{-2aX_{t+1}}|X_t)=e^{-2aX_t}$，再证 $P_N(k)=\dfrac{1-e^{-2ak}}{1-e^{-2aN}}$

解：$E(e^{-2aX_{t+1}}|X_t)=\sum_{j=0}^{N}e^{-2aj}\times P_{X_t,j}$

$=\sum_{j=0}^{N}e^{-2aj}\times C_N^j\pi_{X_t}^j(1-\pi_{X_t})^{N-j}$

$=\sum_{j=0}^{N}C_N^j[e^{-2a}\pi_{X_t}]^j(1-\pi_{X_t})^{N-j}$

$=(e^{-2a}\pi_{X_t}+1-\pi_{X_t})^N=e^{-2aX_t}$，即 e^{-2aX_t} 是一个鞅

$\because E(e^{-2aX_t})=E[E(e^{-2aX_{t+1}}|X_t)]=E(e^{-2aX_{t+1}})$

$\therefore$ 递推可知 $E(e^{-2aX_0})=E(e^{-2aX_n})$

~~令 $X_0=k$~~，$\because P(\text{从}k\text{到}N)=P_N(k)$ $\therefore P(\text{从}k\text{到}0)=1-P_N(k)$

$\therefore E(e^{-2aX_0})=E(e^{-2aX_n})=P_N(k)e^{-2aN}+(1-P_N(k))=e^{-2ak}$

$\therefore P_N(k)=\dfrac{1-e^{-2ak}}{1-e^{-2aN}}$

10、i是常返态，证明 $\lim\limits_{N\to\infty}Pr\{X_k\neq i, n+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i\}=0$。如果$i$是正常返状态，试证上述收敛性关于$n$是一致的。

解：$\lim\limits_{N\to\infty}Pr\{X_k\neq i, n+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i\}$

$=Pr\{\lim\limits_{N\to\infty}(X_k\neq i, n+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i)\}$

$=Pr(X_k\neq i, k\geq n+1\mid X_0=i)$

$=Pr(\text{从}i\text{出发仅有限次回到}i)$ ← $\because i$是常返态

$=0$

当i正常返时，要证对n一致：

记 $a_{n,N}=\{X_k\neq i, n+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i\}+\{X_k\neq i, 1\leq k\leq n+N\}$

$=\bigcup\limits_{t=1}^{n}\{X_t=i, X_k\neq i, t+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i\}$ 彼此不相交

$=\bigcup\limits_{t=0}^{n}\{X_t=i, X_k\neq i, t+1\leq k\leq n+N\mid X_0=i\}$

故 $a_{n,N}=\sum\limits_{t=0}^{n}P_{ii}^{t}\cdot(1-\sum\limits_{s=0}^{n+N-t}f_{ii}^{s})$

又$\because i$常返 $\sum\limits_{s=0}^{\infty}f_{ii}^{s}=1$，故 $a_{n,N}=\sum\limits_{t=0}^{n}P_{ii}^{t}\cdot\sum\limits_{s=n+N-t+1}^{\infty}f_{ii}^{s}$

又$\because i$正常返 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}P_{ii}^{n}>0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}nf_{ii}^{n}<\infty$

$a_{n,N}\leq\sum\limits_{t=0}^{n}\sum\limits_{s=n+N-t+1}^{\infty}f_{ii}^{s}=\sum\limits_{s=N+1}^{\infty}\sum\limits_{t=\max\{n+N+1-s,0\}}^{n}f_{ii}^{s}\leq\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}(k-N)\cdot f_{ii}^{k}<\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}k\cdot f_{ii}^{k}$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，使得 $k\geq K$ 时，$\sum\limits_{m=k}^{\infty}mf_{ii}^{m}<\varepsilon$

即 $\forall n$，$a_{n,K}<\varepsilon$，故收敛关于n一致。

3/11