金融风险管理介绍(c)

杨静平

北京大学

2019年9月

Outline

风险管理的一些基本方法

在第一节将关注下面的问题:

- 介绍金融风险建模的概率框架;
- 定义风险、利润和损失、风险因子和映射等概念;
- 给出市场风险和信用风险的一些例子.

现代风险管理的中心议题是风险的度量。 在第2节中介绍如下的内容：

- 给出现存的度量风险的办法的总括，讨论他们的优势和不足。
- 重点考虑Value-at-Risk 以及Expected shortfall.

在第3节, 我们将提出一些金融业中所使用的在短期内度量市场风险的基本方法， 如 均值-协方差方法, 历史模拟法以及Monte Carlo 模拟法. 并介绍scaling rules的使用.

本章的概框：

- 风险因子和损失分布
- 风险管理
- 市场风险的基本方法

Outline

一般的定义

考虑股票、债券、衍生品以及风险贷款的组合等。 组合在时刻s的价值记为 $V(s)$，假设在时刻s变量$V(s)$是可观测的。组合在区间$[s, s+\Delta)$的损失记为

$$L_{[s,s+\Delta)} = -(V(s+\Delta) - V(s)),$$

这里Δ为区间长度. 为简单计， 记$V_s = V(s\Delta)$. 我们称 $L_{[s,s+\Delta)}$的分布为损失分布.

Δ 可以取为1天，十天或一年。

利润-损失(P&L) 分布: $V(s+\Delta) - V(s)$.

记为

$$L_{t+1} := L_{[t\Delta,(t+1)\Delta]} = V_t - V_{t+1}.$$

记为

$$V_t = f(t, \mathbf{Z_t}),$$

这里

$$\mathbf{Z_t} = (Z_{t,1}, \cdots, Z_{t,d})'$$

以及 $\mathbf{X_t} = (\mathbf{Z_t} - \mathbf{Z_{t-1}})$. 其中, $\mathbf{Z_t}$ 称为风险因子, 假设在时刻 t是可观测的. 则有

$$L_{t+1} = f(t, \mathbf{Z_t}) - f(t+1, \mathbf{Z_t} + \mathbf{X_{t+1}}).$$

定义函数

$$l_{[t]}(\mathbf{x}) = f(t, \mathbf{Z_t}) - f(t+1, \mathbf{Z_t} + \mathbf{x}).$$

如果f是可导的, 考虑L_t的一阶近似,

$$L^{\Delta}_{t+1} := -f_t(t, \mathbf{Z}_t) - \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t, \mathbf{Z}_t) X_{t+1,i}$$

记

$$l^{\Delta}_{[t]}(\mathbf{x}) := -f_t(t, \mathbf{Z}_t) - \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t, \mathbf{Z}_t) x_i.$$

上式表达式的优良性: 为函数$X_{t+1,i}$的线性组合.

注： 考虑年份和时间区间Δ的映射. 定义

$$f(t, \mathbf{Z_t}) = g(t\Delta, \mathbf{Z_t})$$

其中g为以年度度量的函数. 则有

$$L_{t+1} = -(g((t+1)\Delta, \mathbf{Z_t} + \mathbf{X_{t+1}}) - g(t\Delta, \mathbf{Z_t}))$$

以及

$$L_{t+1}^{\Delta} = -(g_s(t\Delta, \mathbf{Z_t})\Delta + \sum_{i=1}^{d} g_{z_i}(t\Delta, \mathbf{Z_t}) X_{t+1,i}).$$

条件和无条件损失分布

注意到$\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s, s \le t\})$. 条件分布$F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ 定义为

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(x) = P(L_{t+1} \le x|\mathcal{F}_t)$$

- 基于条件损失分布的风险度量方法经常被称为条件损失分布或动态风险度量;
- 基于无条件损失分布的风险度量方法经常被称为静态风险度量。

风险的映射: 一些例子

例1(股票组合):考虑一个d只股票的固定组合，在时刻t股票i的股数为λ_i. 股票i的价格过程被记为$S_{t,i}$. 令 $Z_{t,i} = \ln S_{t,i}, 1 \le i \le d$ 以及 $X_{t+1,i} = \ln S_{t+1,i} - \ln S_{t,i}$. 则有

$$V_t = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i exp(Z_{t,i})$$

和

$$L_{t+1} := -V_t \sum_{i=1}^{d} w_{t,i} X_{t+1,i}$$

这里

$$w_{t,i} = \frac{\lambda_i S_{t,i}}{V_t}$$

例子2(欧式看涨期权): 现在我们考虑一个衍生证券组合的简单的例子， 一个标准的欧式看涨期权，无红利支付的价格为S, 到期日为T, 交割价格为K. 则期权价格为

$$C^{BS}(s, S; r, \sigma, K, T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-s)}\Phi(d_2)$$

这里

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - s)}{\sigma\sqrt{T - s}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - s},$$

$\Delta = \frac{1}{250}$。

记

$$Z_t = (\ln S_t, r_t, \sigma_t)'$$

则有

$$V_t = C^{BS}(t\Delta, S_t; r_t, \sigma_t, K, T)$$

以及

$$X_{t+1} = (\ln S_{t+1} - \ln S_t, r_{t+1} - r_t, \sigma_{t+1} - \sigma_t)'$$

我们可以得到

$$L_{t+1}^{\Delta} = -(C_s^{BS}\Delta + C_S^{BS}S_tX_{t+1,1} + C_r^{BS}X_{t+1,2} + C_\sigma^{BS}X_{t+1,3}).$$

black-scholes option-pricing function 的导数通常被称为Greeks:
C_s^{BS}: 期权的theta值;
C_S^{BS}: 期权的delta值;
C_r^{BS}: 期权的rho值;
C_σ^{BS}: 期权的vega.
Delta-Gamma 逼近: 当使用一阶和二阶导数进行逼近时，C_{SS}^{BS} 被称为期权的gamma值.

例子3(债券组合):

考虑由d只无违约风险的零息债券的组合，到期日分别为T_i价格为$p(s, T_i)$. 年为时间度量的单位.

记λ_i 为到期日为T_i的债券的比重. 注意到$p(T, T) = 1$以及记

$$y(s, T) = -\frac{1}{T - s} \ln p(s, T).$$

则有

$$X_{t+1,i} = y((t+1)\Delta, T_i) - y(t\Delta, T_i)$$

以及

$$V_t = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i p(t\Delta, T_i)$$

定义风险因子$Z_{t,i} = y(t\Delta, T_i)$. 则有

$$X_{t+1,i} = y((t+1)\Delta, T_i) - y(t\Delta, T_i).$$

假设

$$y(s, T) = y(s), y(s+\Delta, T) = y(s) + \delta$$

则有

$$L_{t+1}^{\Delta} = -V_t(y(t\Delta)\Delta - D\delta)$$

这里

$$D = \sum_{i=1}^{d} \frac{\lambda_i p(t\Delta, T_i)}{V_t}(T_i - t\Delta),$$

其中D称为债券组合的久期。
久期是在传统的债券组合里或资产负债匹配中一个重要的工作。

例子4(货币远期):
考虑一个货币远期的看涨头寸的影射. 外汇互换远期合约 (FX) 是一个合约， 在买方和卖方之间签署一个协议，可以买卖一个事先确定的额度为$\bar{V}$ 的外币，在未来某一个时刻$T > s$以固定的汇率$\bar{e}$来进行。未来的买方称为多头，另外一方称为合约的空头。
令$p^f(s, T)$ 为美国零息债券(foreign)的美元价格, $p^d(s, T)$ 为对应的国内价格(domestic), USD/euro 的即期汇率定义为$e(s)$.

合约的多头等价与一个外汇的多头和国内零系债券的空头。
考虑一个欧元的投资者， 持有一个看多头寸的货币远期， 额度为$\bar{V}$，基于USD/euro的汇率。定义$p^f(s,T), p^d(s,T)$为美元和欧元的零息债券的价格。USD/euro的即期汇率记为$e(s)$. 这样考虑在时刻T的组合中，$\lambda_1 = \bar{V}$的外币， 和$\lambda_2 = -\bar{e}\bar{V}$的国内货币。则在到期日的本币价值为

$$V_T = \bar{V}(e_T - \bar{e}).$$

下面考虑持有一个看空头寸的货币远期。 令

$$Z_t = (\ln e_t, y^f(t\Delta, T))'.$$

则有美国零息债券的价值为

$$\begin{aligned} V_t &= \bar{V} e_t \exp(-(T - \Delta t) y^f(t\Delta, T)) \\ &= \bar{V} exp(Z_{t,1} - (T - t\Delta) Z_{t,2}) \end{aligned}$$

以及

$$L^{\Delta}_{t+1} = -V_t(Z_{t,2}\Delta + X_{t+1,1} - (T - t\Delta) X_{t+1,2})$$

例子5(Stylized portfolio of risky loans): 一个贷款组合面临诸多风险，如违约风险、利率风险以及信用价差的上升带来的风险.

考虑m个不同对手方的贷款组合，对手方i的风险敞口记为e_i。 时间长度Δ假设为一年. 假设所有的贷款在未来$T > t$时刻偿还， 在时刻T之前没有提前偿付。$Y_{t,i}$ 表示对手方i的违约状态

在时刻t这样一笔贷款的价格为

$$exp(-(T-t)(y(t,T)+c_i(t,T))e_i,$$

这里$c_i(t,T)$ 为公司i的对应到期日为T的信用价差. 为简单计，忽略信用质量的变化， 假设对于所有i有$c_i(t,T)=c(t,T)$. 则有

$$V_t=\sum_{i=1}^{m}(1-Y_{t,i})exp\{-(T-t)(y(t,T)+c(t,T))\}e_i$$

其中风险因子定义为

$$Z_t=(Y_{t,1},\cdots,Y_{t,m},y(t,T),c(t,T))'.$$

无法使用前面的展开来讨论。

- 逼近的数学原理：计算的可实现性与准确性
- 一阶逼近的思想
- Basel新资本协议中的极限逼近的思想

Outline

风险度量

实际中风险管理可以应用达到多种目标：

(1)确定风险资本以及资本的充足性. For a financial sector to determine the amount of capital a financial institution needs to hold as a buffer against unexpected future losses on its portfolio in order to satisfy a regulator, who is concerned with the solvency of the institutions. A related problem is the determination of appropriate margin requirements for investors trading at an organized exchange.

(2)管理的工具. Risk measures are often used by management as a tool for limiting the amount of risk a unit within a firm may take.

(3)保险保费. Insurance premiums compensate an insurance company for bearing the risk of the insured claims.

风险管理的方法

度量金融头寸的风险的方法可以归为四类:

- 面值方法 (Notional-amount approach,)
- 因子的敏感性度量 (Factor-sensitivity measures,)
- 基于损失分布的风险度量 (Risk measures based on loss distributions),
- 基于场景的风险度量 (Scenario-based risk measures).

(a)**面值方法 (Notional-amount approach)**; 组合的风险定义为组合中的个体证券的面值的和, 其中每个面值可以通过一个因子加权代表该资产类别的风险评估。 这种方法在Basel Committee rules on banking regulations的标准法中还在使用。

不足之处:
(1)No netting;
(2)没有反映组合的总体风险的分散化的影响;
(3)在处理衍生品的组合时会出现问题.

(b)**因子敏感性分析 (Factor-sensitivity measures)**. 给出在某个风险因子以一预先设定的比例变化的情况下组合价值的变化。
如债券组合的久期以及衍生品组合的Greeks.

不足之处:
(1)无法度量一个头寸的整体风险.
(2)对于组合风险来说, 这些度量无法用于确定资本的充足性.

(c)**基于损失分布的风险度量.** 最现代的组合的风险度量方法是统计方法， 刻画组合在一个确定区间的条件或非条件损失分布。

方差，VaR, Expected shortfall (ES).

(d)**基于场景的风险度量 (Scenario-based risk measures).** 在基于场景的风险度量中， 考虑风险因子的一系列的可能的变化（称之为场景）。

给定风险因子可能的取值集合 $\chi = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 以及向量权重$\omega = (w_1, \cdots, w_n)' \in [0,1]^n$. 考虑一个风险证券的组合， 定义$l_{[t]}$为对应的损失算子。组合的风险可以如下来度量

$$\psi_{[\chi,\omega]} := \max\{w_1 l_{[t]}(x_1), w_2 l_{[t]}(x_2), \cdots, w_n l_{[t]}(x_n))\}.$$

基于场景的风险度量的概率表示

定义δ_x为一个概率测度， 为在$x \in R^d$点取值的概率为1对应的概率测度。 令

$$\mathcal{P} = \{w_i \delta_{x_i} + (1 - w_i)\delta_0, i \leq n\}.$$

假设$l_{[t]}(0) = 0$. 则有

$$\Psi_{X,w} = \max\{E^P(l_{[t]}(X)) : P \in \mathcal{P}\}.$$

对于风险因子的集合小的情况，基于场景的风险度量是很有用的风险度量工具。 其中主要的问题是确定相应的场景集和权重因子.
例子: 基于场景的风险度量的概率论表示。Chicago Mercantile Exchange (CME)

Value-at-Risk

VAR 在金融机构中广泛使用，已经被应用到Basel II 的资本充足性的框架.

给定置信水平$\alpha \in (0,1)$. 置信水平$\alpha \in (0,1)$的组合VaR为最小的l，满足

$$VaR_\alpha = \inf\{l : F_L(l) \geq \alpha\}$$

比较常用的α的取值为$\alpha = 0.95$或$\alpha = 0.99$. VaR 实际上是损失分布的分位点。

VaR 为最大损失概念的一种推广。

Mean-VaR:

$$VaR_\alpha^{mean} = VaR_\alpha - E(L).$$

引理 一个点 x_0为分布F的α-分位点当且仅当下面的两个条件成立：$F(x_0) \geq \alpha$ 并且对所有$x < x_0$有$F(x) < \alpha$.

正态分布的VaR
假设损失分布F_L为期望为μ和方差为σ^2的正态分布. 则对于 $\alpha \in (0,1)$, 我们有

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

以及

$$VaR_\alpha^{mean} = \sigma \Phi^{-1}(\alpha).$$

学生t 分布 称随机向量X 服从自由度为v的 t-分布， 如果有

$$X = \mu + \frac{Z}{\sqrt{W/v}}$$

这里

$$Z \sim N(0, \sum), \quad W \sim \chi_v^2.$$

其中Z和W相互独立. 分布函数可以表示为

$$F_{v,\sum}(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma((v+d)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{(\pi v)^d |\sum|}}$$
$$(1 + \frac{(X-\mu)' \sum (X-\mu)}{v})^{-(v+d)/2} dx_1 \cdots dx_n.$$

注意到

$$Cov(X, X) = v/(v-2) \sum$$

学生t 分布的VaR

假设$\frac{L-\mu}{\sigma}$为一个学生t分布， 自由度为v, 记为 $L \sim t(v, \mu, \sigma^2)$. 注意到

$$var(L) = v\sigma^2/(v-2).$$

因此有

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma t_v^{-1}(\alpha)$$

市场风险的the internal model(IM)方法： 对于使用 The internal model(IM)方法的银行， 使用下面的公式

$$RC_{IM}^{t}(MR) = \max\{VaR_{0.99}^{t,10}, \frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{0.99}^{t-i+1,10}\} + C_{SR}$$

其中$VaR_{0.99}^{j,10}$代表10-天 VaR， 置信水平为99%， 在日期 j计算, 其中t代表今天. C_{SR}表示特殊的风险， 如与签定者有关的风险。

基于损失分布的其他风险度量

方差，以及下面的度量。

Lower and upper partial moments: 给定$k \geq 0$ 以及参考点q， the upper partial moment UPM(k,q) 定义为

$$UPM(k,q) = \int_q^{\infty} (l-q)^k dF_L(l)$$

Expected shortfall: 对于$E(|L|) < \infty$的损失L， 分布记为 F_L, 则置信水平$\alpha \in (0,1)$的the expected shortfall 定义

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du,$$

这里$q_u(F_L)$为F_L的分位点函数.

引理 对于一总体损失L，具有连续分布函数为F_L 。考虑 $\alpha \in (0,1)$，则有

$$ES_\alpha = E(L|L \geq VaR_\alpha).$$

对于非连续的损失分布F_L,

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}(E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1-\alpha-P(L \geq q_\alpha)))$$

Gaussian 损失分布为Expected shortfall

$$ES_\alpha = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

student t 损失分布的Expected shortfall 假设损失L 满足$\tilde{L} = (L-\mu)/\sigma$为自由度为$v$的t分布. 假设$v > 1$. 则有

$$ES_\alpha = \mu + \sigma ES_\alpha(\tilde{L}).$$

并且我们可以发现

$$ES_\alpha(\tilde{L}) = \frac{g_v(t_v^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\left(\frac{v + (t_v^{-1}(\alpha))^2}{v-1}\right)$$

这里g_v为标准 t分布的密度函数.

引理 对于i.i.d. rvs $l_i, i \geq 1$，具有共同分布函数F_L， 则我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} L_{i,n}}{[n(1-\alpha)]} = ES_\alpha, \text{a.s.}$$

其中$L_{1,n} \geq L_{2,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$ 为$L_1, \cdots, L_n$的次序统计量，这里$[n(1-\alpha)]$表示 $n(1-\alpha)$的整数部分.

例子 考虑在一个股票头寸上的日损失. 头寸当前的价值为 $V_t = 10000$. 以及$L_t^{\Delta} = -V_t X_{t+1}$, 这里$X_{t+1}$ 为股票的日收益的对数。假设X_{t+1} 的均值为0，标准差为 $\sigma = 0.2/\sqrt{250}$. 比较正态分布和t分布（$v = 4$，标准差为 σ).

数值结果：

α	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
$Var_\alpha(normal)$	162.1	208.1	247.9	294.3	325.8
$Var_\alpha(tmodel)$	137.1	190.7	248.3	335.1	411.8
$ES_\alpha(normal)$	222.0	260.9	295.7	337.2	365.8
$ES_\alpha(tmodel)$	223.4	286.3	356.7	465.8	563.5

Outline

1. 风险管理的一些基本方法
   - 风险因子和损失分布
   - 风险度量
   - Long-term capital management (LTCM)的启示
   - 市场风险的标准方法
2. 一致风险度量
   - 一致风险度量的公理化
   - Value-at-risk
   - 基于损失分布的一致风险度量
   - 基于推广场景的一致风险度量

美国长期资本管理公司成立于1994年2月，总部设在离纽约市不远的格林威治，是一家主要从事定息债务工具套利活动的对冲基金。

自创立以来，LTCM一直保持骄人的业绩，公司的交易策略是"市场中性套利"即买入被低估的有价证券，卖出被高估的有价证券。

LTCM将金融市场的历史资料、相关理论学术报告及研究资料和市场信息有机的结合在一起，通过计算机进行大量数据的处理，形成一套较为完整的电脑数学自动投资系统模型，建立起庞大的债券及衍生产品的投资组合，进行投资套利活动，LTCM凭借这个优势，在市场上一路高歌。

1996年，LTCM大量持有意大利、丹麦 、希腊政府债券，而沽空德国债券，LTCM模型预测，随着欧元的启动上述国家的债券与德国债券的息差将缩减， 市场表现与LTCM的预测惊人的一致，LTCM获得巨大收益。

LTCM的数学模型，由于建立在历史数据的基础上，在数据的统计过程中，一些概率很小的事件常常被忽略掉， 因此，埋下了隐患–一旦这个小概率事件发生，其投资系统将产生难以预料的后果。

所谓Black-Scholes-Merton 公式仍以正态分布为基础（这是因为该公式涉及Wiener 过程，而Wiener 过程的定义涉及正态分布), 故"长期资本"的风险投资策略仍以"线性"和"连续"的资产价格模型为出发点。具体来说，该对冲基金的核心策略是"收敛交易" (convergence trading)。此策略并不关心某一股票或债券的价格是升还是降，而是赌在相关股票或债券的价格向"常态"收敛上。

"长期资本 "的一项赌注下在美国29年国库券和30年国库券的价格收敛上（卖空前者，买入后者)，本以为可以不论价格升降都稳操胜券。 不料，亚洲和俄国的金融危机使惊恐的投资者一窝蜂地涌向似更安全吉祥的29年国库券(flight to quality)，结果造成29年国库券和30年国库券的价格发散，而非收敛。类似的其它几个"收敛交易"也都以发散而告终。

1998年，金融危机降临亚洲金融市场，LTCM模型认为：发展中国家债券和美国政府债券之间利率相差过大，LTCM预测的结果是： 发展中国家债券利率将逐渐恢复稳定，二者之间差距会缩小。
同年8月，小概率时间真的发生了，由于国际石油价格下滑，俄罗斯国内经济不断恶化， 俄政府宣布卢布贬值，停止国债交易，投资者纷纷从发展中市场退出，转而持有美国、德国等风险小，质量高的债券品种。 由于LTCM做错了方向，它到了破产的边缘。9月23日，美林、摩根出资收购接管了LTCM。

LTCM营造的海市蜃楼

投机市场中不存在百战百胜的法宝，任何分析方法与操作系统都有缺陷与误区。 美国长期资本管理公司的故事是最新最有说服力的证据。
LTCM营造的海市蜃楼

- 1、四大天王: 美国长期资本管理公司创立于1994年，主要活跃于国际债券和外汇市场， 利用私人客户的巨额投资和金融机构的大量贷款，专门从事金融市场炒作。 它与量子基金、老虎基金、欧米伽基金一起被称为国际四大"对冲基金"。

- 2、梦幻组合: LTCM掌门人是梅里韦瑟（Meriwehter),被誉为能"点石成金"的华尔街债务套利之父。 他聚集了华尔街一批证券交易的精英加盟：1997年诺贝尔经济学奖得主默顿（Robert Merton)和舒尔茨（Myron Schols),他们因期权定价公式荣获桂冠；前财政部副部长及联储副主席莫里斯（David Mullis)；前所罗门兄弟债券交易部主管罗森菲尔德（Rosenfeld)。 这个精英团队内荟萃职业巨星、公关明星、学术巨人，真可称之为"梦幻组合 "。

- 3、骄人业绩：在1994–1997年间，LTCM业绩辉煌骄人。 成立之初，资产净值为12.5亿美元，到1997年末，上升为48亿美元，净增长2.84倍。 每年的投资回报率分别为：1994年28.5%、1995年42.8%、1996年40.8%、1997年17%。
- 4、"致富秘笈"：长期资本管理公司以"不同市场证券间不合理价差生灭自然性"为基础， 制定了"通过电脑精密计算，发现不正常市场价格差，资金杠杆放大，入市图利" 的投资策略。舒尔茨和默顿将金融市场历史交易资料， 已有的市场理论、学术研究报告和市场信息有机结合在一起，形成了一套较完整的电脑数学自动投资模型。 他们利用计算机处理大量历史数据，通过连续而精密的计算得到两种不同金融工具间的正常历史价格差， 然后结合市场信息分析它们之间的最新价格差。 如果两者出现偏差，并且该偏差正在放大，电脑立即建立起庞大的债券和衍生工具组合， 大举套利入市投资；经过市场一段时间调节，放大的偏差会自动恢复到正常轨迹上， 此时电脑指令平仓离场，获取偏差的差值。

- 5、法宝之瑕: 但是不能忽视的是，这套电脑数学自动投资模型中也有一些致命之处： （1）模型假设前提和计算结果都是在历史统计基础上得出的，但历史统计永不可能完全涵盖未来现象； （2）LTCM投资策略是建立在投资组合中两种证券的价格波动的正相关的基础上。 尽管它所持核心资产德国债券与意大利债券正相关性为大量历史统计数据所证明， 但是历史数据的统计过程往往会忽略一些小概率事件，亦即上述两种债券的负相关性。

- 6、阴沟翻船: LTCM万万没有料到，俄罗斯金融风暴引发了全球的金融动荡， 结果它所沽空的德国债券价格上涨，它所做多的意大利债券等证券价格下跌，它所期望的正相关变为负相关，结果两头亏损。它的电脑自动投资系统面对这种原本忽略不计的小概率事件， 错误地不断放大金融衍生产品的运作规模。LTCM利用投资者那儿筹来的 22亿美元作资本抵押，买入价值3250亿美元的证券，杠杆比率高达60倍。由此造成该公司的巨额亏损。 它从5月俄罗斯金融风暴到9月全面溃败，短短的150天资产净值下降90%， 出现43亿美元巨额亏损，仅余5亿美元，已走到破产边缘。9月23日，美联储出面组织安排， 以美林、摩根为首的15家国际性金融机构注资37.25亿美元购买了LTCM的90%股权，共同接管了该公司，从而避免了它倒闭的厄运。

LTCM兴衰的启示

- 1、投机市场中不可能出现神圣，任何人都会犯错误。长期资本管理公司， 拥有世界上第一流的债券运作高手梅里韦瑟和罗森菲尔德，拥有世界上第一流的科研天才默顿和舒尔茨， 拥有国际上第一流的公关融资人才莫里斯。但是这个"梦幻组合"中每个人物都应对LTCM的重挫负有责任。
- 2、投机市场中不存在致胜法宝，任何分析方法与操作系统都有缺陷与误区。LTCM曾经以为自己掌握了致富秘笈， 在国际金融市场上连连得手，自信满满。可是偏偏出现了他们所忽视的小概率事件，使其造成巨额亏损已近破产。
- 3、在投机市场上生存与发展，控制风险是永恒的主题。正因为在证券市场上任何人任何方法都可能出错， 所以控制风险是应终生牢记在心的铁律。

Outline

市场风险的标准方法

一些标准的用于度量市场短期风险. 考虑损失变量

$$L_{t+1} = l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1}),$$

我们主要考虑VaR 和expected shortfall.

Variance-Covariance methods

假设

$$\mathbf{X_{t+1}} \sim N_d(\mu, \sum).$$

$$L^{\Delta}_{t+1} = l^{\Delta}_{[t]}(\mathbf{X_{t+1}}) = -(c_t + b'_t\mathbf{x}) \sim N(-c_t - b'_t\mu, b'_t \sum b_t)$$

为了估计μ 和$\sum$,可以基于历史风险因子的变化数据 $\mathbf{X_{t-n+1}}, \cdots, \mathbf{X_t}$.

无条件损失分布: 考虑样本$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$。定义 $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ 以及

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})'.$$

则$\bar{Y}, \frac{nS}{n-1}$ 为期望和协方差矩阵的无偏估计。

条件损失分布

假设

$$X_{t+1}|\mathcal{F}_t \sim N_d(\mu_{t+1}, \sum_{t+1}).$$

可以使用Exponentially weighted moving-average (EMWA) procedure来研究。

EMWA:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{n-i}^2$$

其中的权数随指数递减。若$\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, 则

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

方法的不足: 比较简单的假设，线性化和正态假设.
方法的拓展: 注意到多元正态的线性组合服从Gaussian 分布.
线性运算的封闭性: 多元t分布，多元正态分布和multivariate generalized hyperbolic distributions.

历史模拟

除在特殊的X_{t+1}的参数模型下估计$L = l^{\Delta}_{[t]}(X_{t+1})$ 的分布,历史模拟方法是在数据$X_{t-n+1}, \cdots, X_t$的经验分布下估计损失算子 的分布. 则有

$$\{\tilde{L}_s = l_{[t]}(X_s) : s = t-n+1, \cdots, t\}$$

注意到

$$F_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^{t} I_{\{l_{[t]}(X_s) \le l\}} \to P(l_{[t]}(X_s) \le l) = F_L(l)$$

可以使用empirical quantile estimation 估计VaR. 定义次序统计量 $\tilde{L}_{n,n} \le \cdots \le \tilde{L}_{1,n}$, 则 $VaR_\alpha(L)$的一个估计量为$\tilde{L}_{[n(1-\alpha)],n}$.
极值理论可以应用于估计损失分布的尾.

Monte Carlo

第一步是选择模型，并根据$X_{t-n+1},\cdots,X_t$的变化数据拟合模型。
然后生成下一个时间段的m 个独立的风险因子的变化量，这里记为
$\tilde{X}_{t+1}^{(1)},\cdots,\tilde{X}_{t+1}^{(m)}$ 和 $\tilde{L}_{t+1}^{(i)}=l_{[t]}(\tilde{X}_{t+1}^{(i)})$.
这些模拟的损失数据可以用来估计风险度量值.

多区间的损失以及scaling

基于单个区间的损失得到几个区间的损失分布以及风险度量.

假设我们对于每日的风险因子的变化建模来计算日VaR和expected shortfall. 我们要获得一个星期或一个月的损失分布， 假设组合在考虑的区间保持不变。

比例化. 根据单区间的风险度量计算h-区间的风险度量$h > 1$.

We denote the loss from time t over the next h periods by $L^{(h)}_{t+h}$. Then

$$
\begin{aligned}
L^{(h)}_{t+h} &= V_t - V_{t+h} \\
&= f(t, Z_t) - f(t+h, Z_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}) \\
&=: l^{(h)}_{[t]}(\sum_{i=1}^{h} X_{t+i})
\end{aligned}
$$

For simplicity, let $l^{(h)}_{[t]} = l_{[t]}(x)$. We look at the simpler problem of scaling for risk measures applied to the linearized loss distribution

$$
L^{(h)\triangle}_{t+h} = l^{\triangle}_{[t]}(\sum_{i}^{h} X_{t+i}) = \sum_{i=1}^{h} b'_t X_{t+i}.
$$

Example (square-root-of-time scaling， 时间的平方根比例法). 假设风险因子的变化向量是iid的服从$N_d(0,\sum)$. 则有

$$\sum_{i=1}^{h} X_{t+i} \sim N_d(0, h\sum)$$

因此我们可以得到

$$L_{t+h}^{(h)\Delta} \sim N(0, hb_t' \sum b_t).$$

以及

$$VaR_{\alpha}^{(h)} = \sqrt{h} VaR_{\alpha}^{(1)}, ES_{\alpha}^{(h)} = \sqrt{h} ES_{\alpha}^{(1)} = \sqrt{h}\sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

The scaling rule is quite commonly used in practice and is easily implemented in the context of the variance-covariance method.

Backtesting (回测)

方法连续使用了一段时间后，我们可以检测方法的效果以及比较其相对的表现。这种检测过程被称为回测。

Suppose that at time t we make estimates of both VaR and expected shortfall for one period and h periods. We denote the true one-period risk measures by VaR_α^t and ES_α^t and the true h-period risk measures by $VaR_\alpha^{t,h}$ and $ES_\alpha^{t,h}$. At time $t+1$ we have the opportunity to compare to compare our one-period estimates with what actually happened. At time $t+h$ we have the opportunity to compare to compare our h-period estimates with what actually happened.

We introduce

$$\hat{I}_{t+1} := I_{\{L_{t+1} > \hat{VaR}^{t}_{\alpha}\}}, \hat{I}^{(h)}_{t+1} := I_{\{L_{t+1} > \hat{VaR}^{t,h}_{\alpha}\}}$$

If our estimation method is reasonable then these indicators should behave like Bernoulli random variables with success probability close to $1-\alpha$.

一致风险度量

第一节我们考虑组合风险的度量.

Outline

一致风险度量的公理化

Denote by $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ the set of all rvs on $(\Omega, \mathcal{F})$. Financial risks are represented by a set $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ of rvs. It is assumed that $\mathcal{M}$ is a convex cone. That is, $L_1 \in \mathcal{M}, L_2 \in \mathcal{M}$, then $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}, \lambda L_1 \in \mathcal{M}$ for any $\lambda > 0$.

We interpret $\rho(L)$ as the amount of capital that should be added to a position with loss given by L, so that the position becomes acceptable to an external of internal risk controller. Position with $\rho(L) \leq 0$ are acceptable without injection of capital.

Axiom 1: 平移不变性. 对于所有的$L \in \mathcal{M}$ 以及 $l \in R$, 有

$$\rho(L+l) = \rho(L) + l.$$

考虑一个头寸L, 其中$\rho(L) > 0$以及$\tilde{L} = L - \rho(L)$,则有

$$\rho(\tilde{L}) = 0.$$

So that the position $\tilde{L}$ is acceptable without further injection of capital.

Axiom 2: 次可加性. 对所有$L_1, L_2 \in \mathcal{M}$, 有

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

- Subadditivity reflects that risk can be reduced by diversification.
- If a regulator uses a non-subadditive risk measure in determining the regulatory capital for a financial institution, that institution has an incentive to legally break up into various subsidiaries in order to reduce its regulatory capital requirements.
- Subadditivity makes decentralization of risk-management systems possible.

Axiom 3: 正齐次性. 对于所有$L \in \mathcal{M}$以及$\lambda > 0$, 我们有

$$\rho(\lambda L_1) = \lambda \rho(L_1).$$

Axiom 4: 单调性. 对所有$L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ 以及$L_1 \leq L_2$, 有

$$\rho(L_1) \leq \rho(L_2).$$

一致风险度量. 一个风险度量ρ whose domain includes the convex cone $\mathcal{M}$， 称为一致风险度量如果它满足公理1-4.

Convex risk measures:

$$\rho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq \lambda\rho(L_1) + (1-\lambda)\rho(L_2), \lambda \in [0,1].$$

Outline

Value-at-risk

VAR 具有评议不变性， 正齐次性和单调性。

例子.考虑一个公司债组合， 由$d = 100$债券组成。 假设不同债券的违约是相互独立的， 具有相同的违约概率2%. 债券当前的价格是100元. 如果没有违约发生，债券发行人在$t + 1$时刻支付105元，否则没有任何支付。组合A由100只相同的债券组成， 债券B由100只不同的债券组成。

假设违约的示性算子Y_i可以表示为

$$P(Y_i = 1) = 0.02, P(Y_i = 0) = 0.98,$$

以及损失函数

$$L_A = 100 * (105Y_1 - 5), L_B = \sum_{i=1}^{100} (105Y_i - 5).$$

则有

$$VaR_{0.95}(L_A) = -500, VaR_{0.95}(L_B) = 25.$$

Elliptical (椭球） risk factors. We said that

$$X = \mu + AY$$

has an elliptical distribution, if Y is an Spherical （球形） distributions. That is, $UY =^d Y$ for each orthogonal map.
Lemma X has a spherical distribution if and only if

$$X =^d RS$$

where S is uniformly distributed on the unit sphere $\{s \in R^d : s's = 1\}$, $R \geq 0$ is a random variable independent of S.

Theorem (Subadditivity of VaR for elliptical risk factors). Suppose that $X \sim E_d(\mu, \sum, \psi)$ and define

$$\mathcal{M} = \{L : L = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i, \lambda_i \in R.\}$$

Then for any two losses $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ and $0.5 \leq \alpha < 1$,

$$VaR_\alpha(L_1 + L_2) \leq VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2).$$

Outline

基于损失分布的一致风险度量

命题 Expected shortfall 是一致风险度量.

The translation invariance, positive homogeneity and monotonicity properties follow from the equation

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du.$$

Consider a generic sequence of rvs $L_1, \cdots, L_n$ with associated order statistics $L_{1,n} \geq L_{2,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$. Using the property

$$\sum_{i=1}^{m} l_{i,n} = sup\{L_{i_1} + \cdots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n\}$$

and setting $m = [n(1-\alpha)]$ we can prove the result.

A coherent premium principle

$$\rho_{[\alpha,p]}(L) = E(L) + \alpha||(L - E(L))_+||_P$$

Outline

基于推广场景的一致风险度量

使用$\mathcal{P}$来表示一个概率测度集，对于所考虑的测度空间的一个概率测度集, 假设

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{L : E^{Q}(|L|) < \infty \quad \text{for all } Q \in \mathcal{P}\}.$$

令，

$$\rho_{\mathcal{P}}(L) = sup\{E^{Q}(L) : Q \in \mathcal{P}\}.$$

定理 (1)对于任意$(\Omega, \mathcal{F})$上的概率测度集$\mathcal{P}$， 风险度量$\rho_{\mathcal{P}}$为$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$上的一致风险度量；
(2)假设Ω具有有限元素$\{\omega_1, \cdots, \omega_d\}$， 且令$\mathcal{M} = \{L : \Omega \to R\}$. 则对于$\mathcal{M}$上的任一风险度量$\rho$， 存在一个$\Omega$上的概率测度集$\mathcal{P}$满足$\rho = \rho_{\mathcal{P}}$.