

Model default risk (KMV)

杨静平

北京大学数学科学学院

2019年11月

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

Abstract

- 违约风险是指这样的一种不确定性，是指公司偿还其债务和尽其责任的能力的一种不确定性。
- 在违约前，是无法区别哪些公司将违约和哪些公司将不违约的。
- 可以进行概率化的违约可能性的评估。
- 其结果是，公司在无违约利率的基础上支付价差，该价差与违约概率成比例，来弥补这种不确定性。

违约风险建模

- 1. 概述
- 2. 度量违约概率: 问题所在
- 3. 度量违约概率: 实用方法
 - (1)估计资产价值和波动性;
 - (2)计算违约距离;
 - (3)计算违约概率;
 - (4)综合上述的结果.

- 4. 更进一步的关注计算EDF credit measures
- 5. 计算长期的EDF credit measures
- 6. 关于EDF credit measures的常见问题
- 7. 检验违约度量方法的表现
- 8. 总结与讨论

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

总括

- 违约风险是指这样的一种不确定性，是指公司偿还其债务和尽其责任的能力的一种不确定性。
- 在违约前，无法区别哪些公司将违约和哪些公司将不违约。可以进行概率化的违约可能性的评估。

- 其结果是, 公司在无违约利率的基础上支付价差, 该价差与违约概率成比例, 来弥补这种不确定性。
- 违约是稀有事件, 不同公司的违约概率有些区别.
- 违约造成的损失通常是usually significant, 主要是由特别的合同或要约确定. (Recovery rate)

- 在债务合同的违约条款中, 常假设对于一个公司的各个类别的违约概率是相同的。然而, 公司的各个类别的违约事件造成的损失是很强的依赖于他们的本质 (证券, 组合, 优先级等)
- Although in general a poor investment strategy, it is possible to be rewarded for taking on large concentrations of risk in equities because these concentrations at times produce large returns.
- 风险聚集与分散化 (Concentration and diversification) .

除了需要已知违约概率和LGD, 违约风险的组合管理也需要度量违约的相关性。

- **个体风险:** 违约概率, LGD, 信用等级变化风险
- **组合风险:** 违约相关性, 风险暴露.

其中最重要的和最困难的是确定违约概率.

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

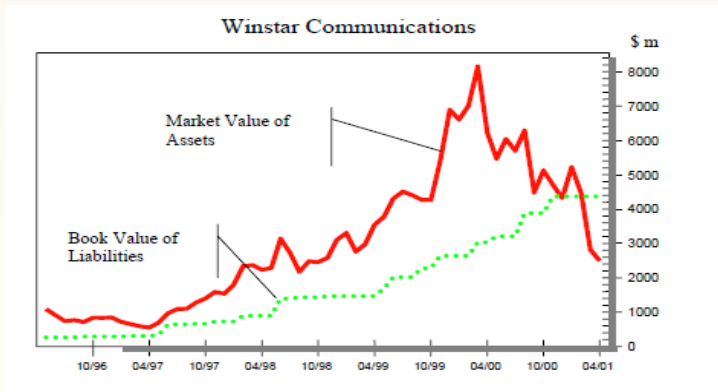
度量违约概率: 问题

有三个要素用来确定一个公司的违约概率:

- (1)资产价值过程: the market value of the firm's assets;
- (2)资产风险过程: the uncertainty or risk of the asset value;
- (3)负债水平 (Leverage) 的过程: 公司合约的负债程度。公司的资产水平的度量可以使用他们的市场价值来度量。 公司的负债水平是公司未来必须支付的额度。

Winstar communications, a New York Telephone company that filed for Chapter 11 bankruptcy protection in April 2001.

Figure: Winstar Communications



违约点(The default point), 定义为公司将违约的资产价值, 通常介于总负债和目前或短期负债之间.

公司的对应的净值是公司资产的市场价值减去公司的违约点:

资产的市场价值-违约点

公司的市场净值到达零点时公司可能出现违约. 如公司的资产价值一样, 公司的净值的市场度量必须在公司商业风险的框架下来讨论.

- Figure 2 给出 Compaq Computer and Anheuser- Busch 的资产价值和违约点的变化过程.
- Figure 3 给出每年违约概率的变化进程: One-year default rates, and are displayed on a logarithmic scale.
- Table 1 给出了资产的市场价值和违约点. 21% 表示资产的一个标准差的变化将为资产价值44.1 bn增加9 bn.
- Figure 4 给出几个行业的资产波动性

Figure: Market net worth

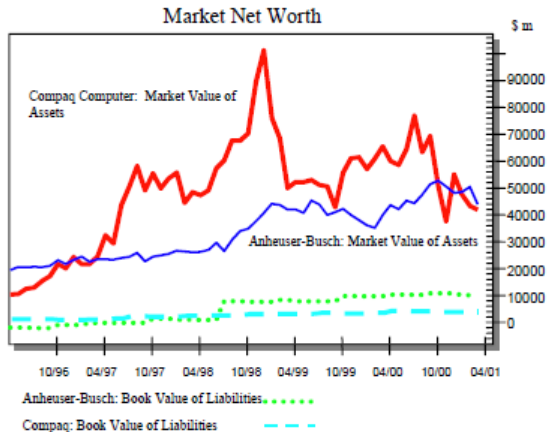


FIGURE 2 Evolution of asset values and default points for Compaq and Anheuser-Busch

Figure: Default Probability

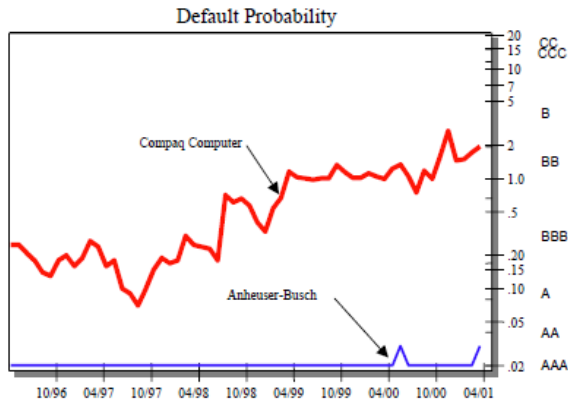
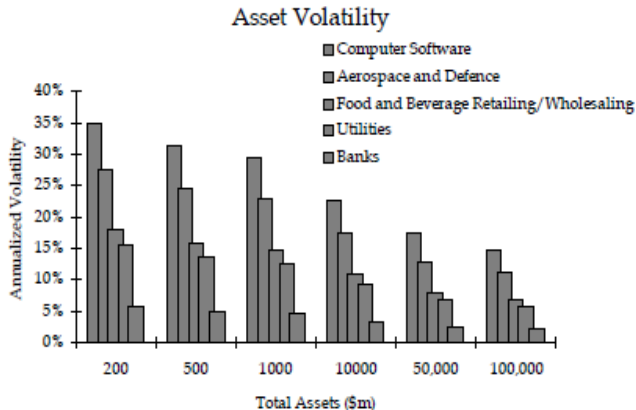


FIGURE 3 Corresponding evolution of the annual default probabilities

	Anheuser-Busch	Compaq Computer
资产的市场价值	44.1	42.3
违约点	5.3	12.2
市场净值	38.8	30.1
资产波动性	0.21	0.39
违约概率	0.0003	0.0197

Figure: Asset Volatility



资产风险是通过资产的波动性来度量, 通过年百分比资产价值变化的标准差来刻画.

资产风险, 商业风险和leverage三者可以定义一个风险度量, 用来比较市场净值 与资产价值的一个标准差的变化额度 (a single measure of default risk which compares the market net worth to the size of a one standard deviation move in the asset value) .

$$\text{违约距离} = \frac{(\text{资产的市场价值} - \text{违约点})}{\text{资产的市场价值} \times \text{资产波动性}}$$

违约距离综合了三个核心的信用问题: 资产风险, 商业风险和负债水平三者

In April 2001 Anheuser-Busch was approximately 4.2 standard deviations away from default while, in contrast, Compaq Computer was only 1.8 standard deviations away from default.

如果资产的分布已知, 可以直接从违约距离计算违约概率。

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

违约距离：实际方法

有三类基本的可获得的信息，与公司的违约概率有关。

- 财务报表,
- 公司债务和股权的市场价格（market prices of the firm's debt and equity）,
- 公司前景和风险的主观评价（subjective appraisals of the firm's prospects and risks）.

最有效的违约度量, 使用市场价格和财务数据来建立模型。

- Oldrich Vasicek and Stephen推广了Black-Scholes-Merton 框架，得到了违约概率模型，称为Vasicek-Kealhofer (VK) model.
- 该模型假设the firm's equity 是a perpetual option，其中违约点作为一个公司资产的吸收点。
- 当公司的资产触及违约点时，假设公司违约。

- 可以对多类别的负债建模：短期负债，长期负债，可转换债券，优先股和普通股。
- 此外，现金支付，如红利，也在VK模型中。一个违约数据库被用来得到与违约概率的违约距离相关的经验分布。
- MKMV 应用VK模型计算Expected Default Frequency credit measure（为下一年度或几年的违约概率）。
- MKMV's EDF credit measure 假设违约被定义为无法支付任何计划的支付、本金或利息。

有三个步骤确定公司的违约概率：

- (1)估计资产价值和波动性：市场价值，股权的波动性和负债的帐面价值；
- (2)计算违约距离；
- (3)计算违约概率. The default probability is determined directly from the distance-to-default and the default rate for given levels of distance-to-default.

估计资产价值和波动性

如果股权的市场价格可以得到，资产的市场价格和波动性可以直接根据期权定价方法得到，其中将股权作为一个该公司的标的资产的看涨期权。

考虑一个简化的例子，只有一个类别的资产和一个类别的股权。

Figure: 资产和负债

Assets	Liabilities
100	80
	20

The VK model 使用这种股权的期权特点得到标的资产的价值和波动性，由股权的市场价值和波动性、以及债务的帐面价值来确定。

Assume that the firm is actually a type of levered mutual fund or unit trust. The assets of the firm are equity securities and thus can be valued at any time by observing their market prices. Further, our firm will be wound up （结束） after five years and that we can ignore the time value of money.

我们初始投资20， 另外从银行借贷80. 总额100投资到股票市场.
下面的图形从公司的市场价值来确定股权价值。 5年后公司的股权价值是多少？ 曲线B代表了公司的股权的价值。

Figure: Asset Liabilities

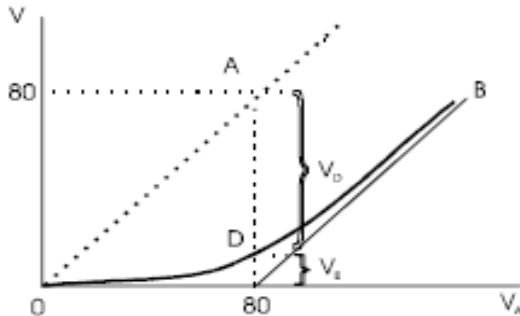
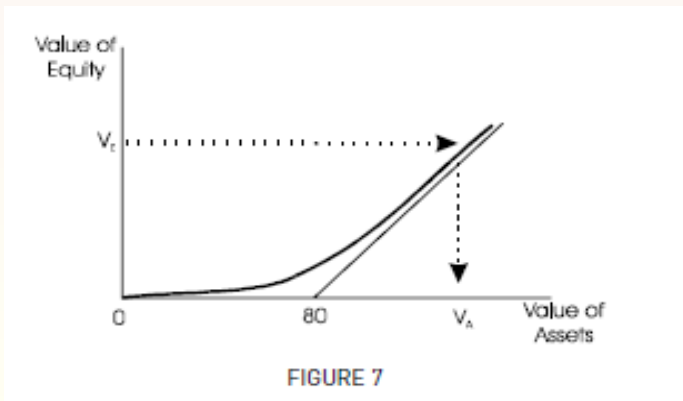


FIGURE 6

下面的图形从公司的股权价值来确定市场价值。

Figure: Asset Liabilities



假设我们需要由资产的市场价格确定股票的市场价格。实际上,我们需要考虑现实中更复杂的资本结构和情况。例如, 我们需要考虑各种债务的各种期限的特点, the perpetuity nature of equity, 货币的时间价值, and of course we also have to solve for the volatility of the assets at the same time.

股权价值=OptionFunction(资产价值, 资产波动性, 资本结构, 利率水平)

股权波动性=OptionFunction(资产价值, 资产波动性, 资本结构, 利率水平)

股权价值和股权波动性是已知的量.

Calculate the distance-to-default

有六个变量用来确定公司在一段时间内的违约概率, from now until time H :

- 当前的资产价值 (1)
- 资产价值在时刻 H 的分布 (2)
- 资产价值在时刻 H 的波动性 (3)
- 违约点的水平, 负债的帐面价值 (4)
- 在时间段内资产价值的预计增加水平 (5)
- 区间长度 H (6)

Figure: Asset Liabilities

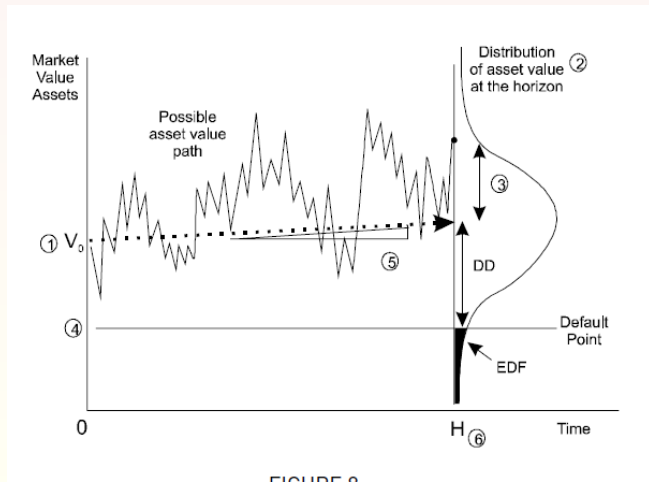


FIGURE 8

前四个变量是相当核心的变量.

如果distance-to-default的未来分布已知，违约概率(Expected Default Frequency, or EDF value) 将为最后的资产值落在违约点下的可能性。

- 在实际中违约距离的分布是很难度量的.
- 通常的正态或对数正态假使无法使用.
- MKMV first measures the distance-to-default as the number of standard deviations the asset value is away from default and then uses empirical data to determine the corresponding default probability

计算违约概率

KMV从历史的违约数据和破产频率得到distance-to-default 和default probability的关系。数据包括250000 company-years of data, 4700 incidents of default or bankruptcy. 使用这个数据, a lookup or frequency table 可以被产生, 建立违约的可能性和各种违约距离水平之间的关系。

例如, 我们要确定一个公司的下个年度的违约概率, 使用了7 standard deviation way from default.

为了确定这个EDF值, 我们检查公司的违约历史, 这些公司是具有seven standard deviations away from the default, 并且在下一年度违约。结果是5 basis points(bp) (0.05%)。

综合各个环节的结果

可分三步计算EDF credit measure:

- (1)估计公司资产的当前的市场价值和波动性;
- (2)确定公司距离违约多远，既考虑distance-to-default
- (3)将distance-to-default转换为违约概率

Consider Philip Morris Companies Inc.

股权的市场价值: 110688 (share price \times shares outstanding)

帐面负债: 64062 (资产负债表)

资产的市场价值: 170558 (Option-pricing model)

资产的波动性: 21% (Option-pricing model)

违约点: 47499 (Liabilities payable within one year)

违约距离:

$$\frac{179588 - 47499}{0.21 \times 170588} = 3.5.$$

Figure:

TABLE 2

Variable	Value	Notes
Market value of equity	\$ 110,688 MM	(Share Price) x (Shares Outstanding).
Book Liabilities	\$ 64,062 MM	Balance sheet.
Market value of assets	\$ 170,558 MM	Option-pricing model.
Asset volatility	21%	Option-pricing model.
Default point	\$ 47,499 MM	Liabilities payable within one year.
Distance-to-default	3.5	$\text{Ratio: } \frac{170 - 47}{170 \times 21\%}$ (In this example we ignore the growth in the asset value between now and the end of the year.)

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率：问题
- 违约距离：实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

更细致的对计算EDF credit measures的认识

Merton's general derivatives pricing was the genesis for understanding the link between the market value of the firm's assets and the market value of its equity. MKMV actually implements the VK model to calculate MKMV's EDF credit measure.

本节在BS option-pricing model下， 计算EDF的值。

BS 模型

考虑下面的BS 模型,

$$dV_A(t) = \mu V_A(t)dt + \sigma_A V_A(t)dW_t$$

其中 V_A 是公司的资产价值, μ_A 和 σ_A 分别是公司资产价值的漂移项和波动项, W_t 是Wiener 过程. 则有

$$V_A(t) = V_A(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)t + \sigma_A\sqrt{t}W_t\right\}$$

注意到

	资产	负债
	A	债务: X 股权: E
总额	A	A

在到期 T 的股权价值可以表示为

$$E = \max\{V_A(T) - X, 0\}.$$

在到期日 T 的债务的支付可以表示为

$$D = \min\{V_A(T), X\}.$$

The BS model 考虑两种类型的负债, 一类债务和一类股权。如果 X 是债务在时刻 T 的帐面价值, 则股权的市场价值和资产的市场价值满足如下的关系:

$$V_E = V_A(0)N(d_1) - e^{-rT}XN(d_2),$$

$$V_D = V_A(0)N(-d_1) + e^{-rT}XN(d_2),$$

这里 V_E 是公司股权的市场价值,

$$d_1 = \frac{\ln(V_A(0)/X) + (r + \frac{\sigma_A^2}{2})T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}.$$

可以验证

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \Delta \sigma_A.$$

Example

Consider a firm with a market capitalization of 3 bn, an equity volatility of 40% per annum and total liabilities of 10 bn. $T = 1$ and $r = 5\%$. Then

$$V_E = 3, \sigma_E = 0.4, T = 1, r = 0.05.$$

Using

$$V_E = V_A(0)N(d_1) - e^{-rT}XN(d_2), \sigma_E = \frac{V_A}{V_E}\Delta\sigma_A$$

we can get that

$$V_A = 12.51, \sigma_A = 0.096.$$

违约时间发生， 当公司资产的价值低于违约点，

$$\begin{aligned} & P(V_A(T) \leq X) \\ &= P(V_A(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma_A\sqrt{T}W_T\right\} < D) \\ &= P\left(W_T < -\frac{\ln(V_A(0)/X) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \\ &= N(-DD) \end{aligned}$$

VK model

注意到

$$p_t = P(V_A^t \leq X_t) = P(\epsilon \leq -\frac{\ln(V_A/X_t) + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})t}{\sigma_A\sqrt{t}}).$$

其中 p_t 是时刻 t 的违约概率， $V_A(t)$ 是公司资产在时刻 t 的市场价值， X_t 是公司在时刻 t 的公司负债的帐面价值。

注意到违约距离是一个方差数目，描述一个公司距离违约有多远，因此在BS 模型下有

$$DD = \frac{\ln(V_A/X_t) + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})t}{\sigma_A\sqrt{t}}$$

例子 继续前面的例子. 假设

$$\sigma_E = 0.40, V_A = 12.511, L = 10, \mu = 0.07$$

则有

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{12.5116}{10}\right) + \left(0.07 - \frac{0.096^2}{2}\right)}{0.0961} = 0.0013.$$

- 在实际考虑问题中，需要调整distance-to-default，不仅由于级别的变化导致资产价值的增加，同时考虑债务现金流、红利等因素。
- In practice, we need to adjust the distance-to-default to include not only the increases in the asset value given by the rate but also adjust for any cash outflows to serve debt, dividends and so on.
- 此外，正态分布假设对于违约概率来说是很不好的选择。
- 更重要的一点是，违约点实际上是一个随机变量。That is, we have assumed that the default point is described by the firm's liabilities and amortization schedule.
- 公司在负债临近违约点时通常会调整他们的负债额度。

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

计算长期的EDF credit measures

模型推广到长期的情况是直接的。违约点，资产波动性，和预期的资产价值如前面的方式进行计算，同时考虑了长期的因素。

我们需要调整违约点。未来预计的资产价值会增加。

资产方差具有可加性，所以与时间成线性关系。

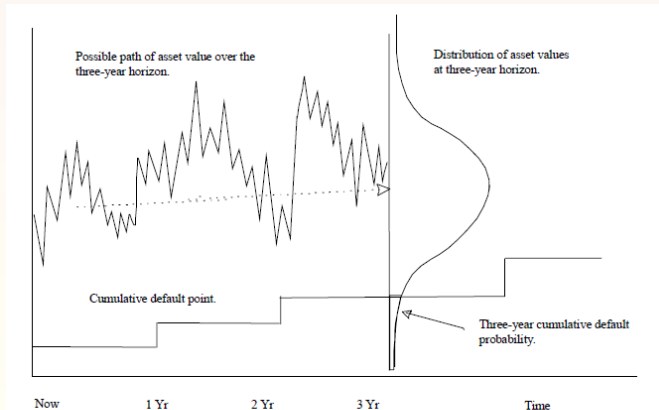
The EDF 通过违约概率可以计算出来，

$$1 - CEDF_3 = (1 - EDF_3)^3$$

All liabilities are assumed to be due in one year, $T = 1$ and the interest rate r is assumed to be 5.

See Figure 9 for example, we are interested in calculating the EDF value for a three-year horizon.

Figure:



Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

检验违约度量的功效

检验违约度量的表现是理论与实际的问题. 我们无法确定哪个公司将违约，哪个公司将不违约。结果, in assessing the performance of a model, we face the task of assessing its ability to discriminate between different levels of default risk.

One measure of a model's performance is the tradeoff between the defaulting firms we avoid lending to and the proportion of firms we exclude. This tradeoff is commonly called the power curve of a model.

For example, in Figure 18 we plot the power curves for EDF credit measures and the senior unsecured debt rating from a major bond rating agency.

Figure: US Bankruptcies

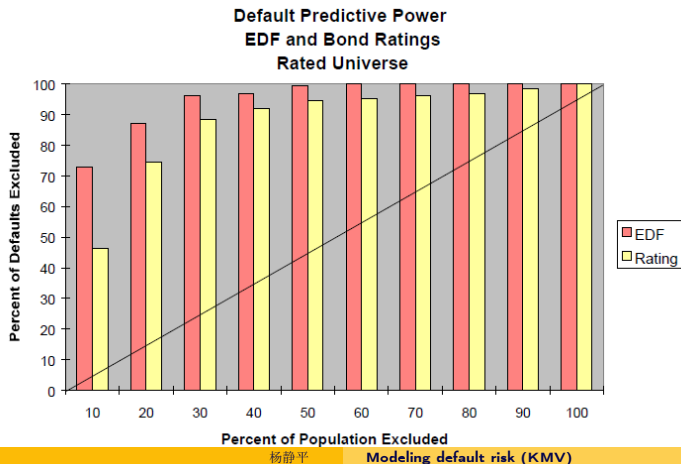


Figure: Median EDF A,BBB,BB and B rated US corporates

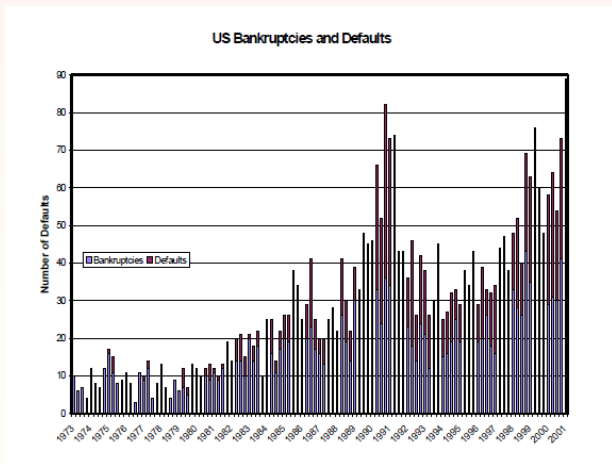


Figure:

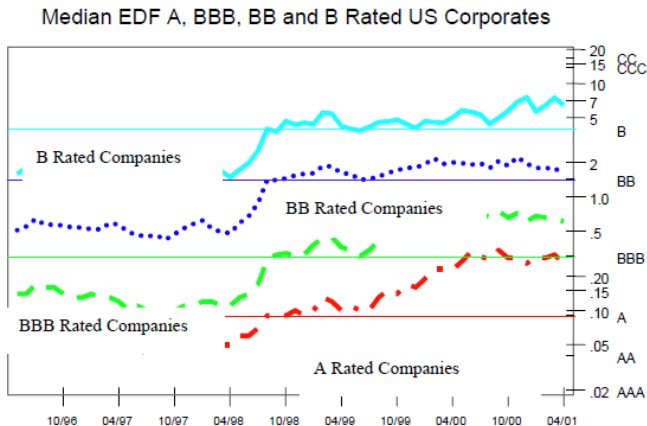


Figure: EDF Prior to default

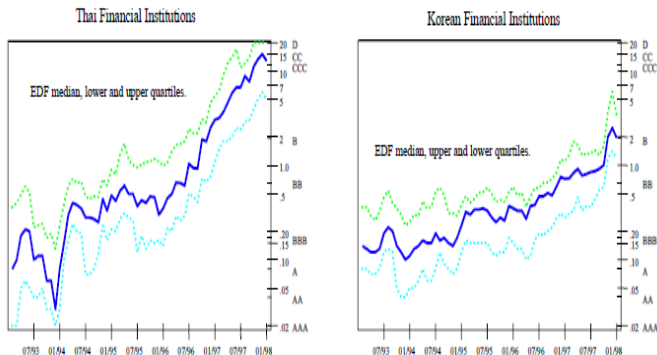


FIGURE 21

Outline

1 违约风险建模

- 总括
- 度量违约概率: 问题
- 违约距离: 实际方法
 - 估计资产价值和波动性
 - 计算违约距离
 - 计算违约概率
 - 综合各个环节的结果
- 更细致的对计算EDF credit measures的认识
 - BS 模型
 - VK model
- 计算长期的EDF credit measures
- 关于EDF Credit measures的常见问题
- 总结与讨论

总结与讨论

三步法在计算MKMV's EDF credit measure中使用.

(1)估计公司资产的市场价值和波动性;

(2)计算违约距离, 公司距离违约标准差的数目

(3)使用经验违约分布, 将distance-to-default转化为expected default frequency (EDF)

Figure: Winstar Communications

