

АЛКТГ дз 2

Татаринев Георгий

2 декабря 2021 г.

Задание 1

а) $a_k = k$. Тогда производящая функция равна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k * x^k)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' * x = (1 + 2x + 3x^2 + \dots) * x = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

Ответ: $\frac{x}{(1-x)^2}$ - производящая функция последовательности a_k

б) $a_k = \frac{1}{k!}$. Тогда производящая функция равна:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ответ: e^x - производящая функция последовательности a_k

Задание 2

Задание 3

Задание 4

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k * x^k = (1+x)^n$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k * k * x^{k-1} = n * (1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k * k * (k-1) * x^{k-2} = n * (n-1) * (1+x)^{n-2}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^n C_n^k * k * (k-1) * x^{k-2} = n * (n-1) * (1+x)^{n-2}$$

При $x=1$

$$\sum_{k=2}^n C_n^k * k * (k-1) = n * (n-1) * 2^{n-2}$$

Задание 5

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k * s_k)$$

$$x * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^{k+1} * s_k)$$

$$x * g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k * s_{k-1})$$

$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k * s_{k-1} - x^k * s_k) + s_0$$

$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k * a_k) + s_0$$

$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k * a_k)$$

$$\text{Ответ: } x * g(x) - g(x)$$

Задание 6

При $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i+1} = 1/x * \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^{i+1}}{i+1} = 1/x * \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

При $x=0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i+1} = 1$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\ln(1-x)}{x} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } 1 \text{ при } x=0$$