АЛКТГ дз 2

Татаринов Георгий

2 декабря 2021 г.

Задание 1

а) $a_k = k$. Тогда производящая функция равна:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k * x^k)$
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ...$
$(\dfrac{1}{1-x})' = 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$
$(\dfrac{1}{1-x})' * x = (1 + 2x + 3x^2 + ...) * x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k$
Ответ: $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ - производящая функция последовательности a_k
б) $a_k = \dfrac{1}{k!}$. Тогда производящая функция равна:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$
Ответ: e^x - производящая функция последовательности a_k

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Пусть f(x)=$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k * x^k = (1+x)^n$
f '(x)=$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k * k * x^{k-1} = n * (1+x)^{n-1}$
f ”(x)=$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k * k * (k-1) * x^{k-2} = n * (n-1) * (1+x)^{n-2}$
f ”(x)=$\sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k * k * (k-1) * x^{k-2} = n * (n-1) * (1+x)^{n-2}$
При x=1
$\sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k * k * (k-1) = n * (n-1) * 2^{n-2}$

Задание 5

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^k * s_k)$$
$$x * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^{k+1} * s_k)$$
$$x * g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k * s_{k-1})$$
$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k * s_{k-1} - x^k * s_k) + s_0$$
$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k * a_k) + s_0$$
$$x * g(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x^k * a_k)$$

Ответ: $x * g(x) - g(x)$

Задание 6

При x$\neq$ 0

$$\lim_{n->\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i+1} = 1/x * \lim_{n->\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i+1}}{i+1} = 1/x * \lim_{n->\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i}{i} = -\frac{ln(1-x)}{x}$$

При x=0

$$\lim_{n->\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i+1} = 1$$

Ответ: $-\frac{ln(1-x)}{x}$ при x$\neq$0 и 1 при x=0