АЛКТГ дз 2

Татаринов Георгий

7 октября 2021 г.

j

Задание 1

Рассмотрим граф-цикл длины 3. В нём степень каждой вершины равна 2. Предположим, что он 2 раскрашиваемый. Тогда среди 2 вершин найдётся 2 одного цвета, при этом в цикле длины 3 любые 2 вершины сосоедние. Тогда раскраска неправильная. Противоречие. Ответ: неверно

Задание 2

Дерево на $2n$ вершинах имеет 2-расскраску, при этом, вершин хотя бы одного из 2 цвтеов хотя бы n. Выберем n вершин одного цвета. Так как раскраска правильная, среди них нет 2 вершин, соединённых ребром, то есть раскраска правильная.

Задание 3

Пусть в дереве на 2021 вершинах 3 имеют степень 1, x имеют степень 3, y имеют степень хотя бы 4, $2018 - x - y$ имеют степень 2. Тогда сумма всех степеней равна удвоенному количеству рёбер и равна 4040. Тоесть, $3+(2018-x-y)*2+x*3+y*4 \leq 4040$, из чего следует, что $x+2*y \leq 1$, отсюда, если $y \geq 1$, то $x+2*y \geq 2$ - противоречие, тогда $y=0$, то есть, $3+(2018-x-y)*2+x*3 = 4040$, то есть, $x=1$. Ответ: 1

Задание 4

Пусть существуют такие 2 деерва. Так как диаметр каждого из них рааен d, то в каждом из них есть путь длины d. Добавим между ними ребро так, чтобы диаметр полученного графа стал равен d. Для каждой из двух половин этого графа рассмотрим пути от принадлежащей этой половине графа вершины этого ребра до концов путей длины d. Каждый из этих путей состоит из пути от вершиныи общего ребра до пути длины d и из части пути длины d. Тогда сумма длин этих двух путей до концов пути длины d больше либо равна d, так как состоит из длины пути d и удвоенной длины до этого пути, что значит, что хотя бы один из двух путей не короче чем $d/2$. Возьмём эти пути для каждой из двух половин графа и ребро между половинами. Полученный путь будет иметь длину $d+1$ - противоречие. Ответ: не сучествует.

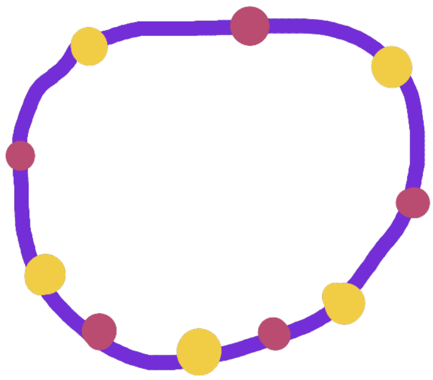
Задание 5

Будем красить вершины по очереди. На каждой вершине смотрим, какие соседи уже раскрашены, смотрим, какие там цвета, так как соседей не более d, то они раскрашены не больеее, чем в d цветов, то есть есть хотя бы 1 цвет, в который не покрашен никто из соседей. В этот цвет красим рассматриваемую вершину. Если до покраски вершины не было ребра с вершинами одного цвета, то и после покраски вершины не будет. Изначально их небыло, значит, и в конце их не будет и раскраска будет правильной.

Задание 8А

Если n делится на 2, то при соединении противоположных вершин образуется цикл v_1, v_2, ..., $v_n 1$, v_1 длины $n+1$, то есть цикл нечётной длины. Из чего следует, что граф не 2-раскрашиваемый.

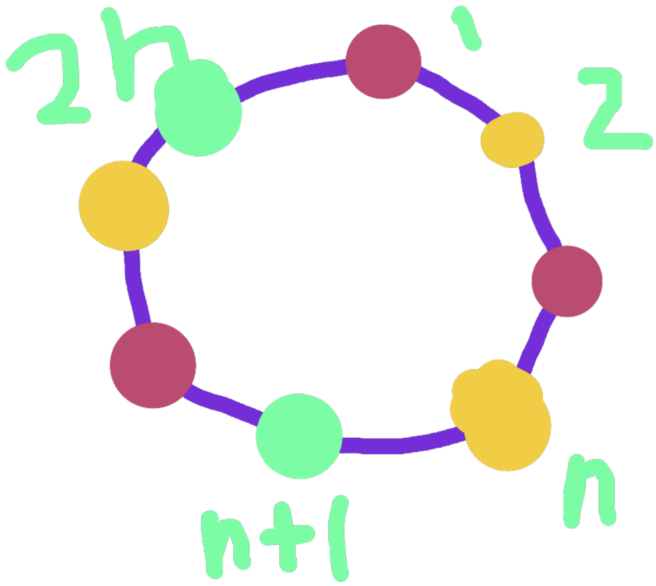
Если n не делится на 2, то раскрасим граф по кругу в 2 цвета чередуя цвета. Рёбра, соединяющие противоположные вершины будут соединять вершины разного цвета и раскраска будет правильной.



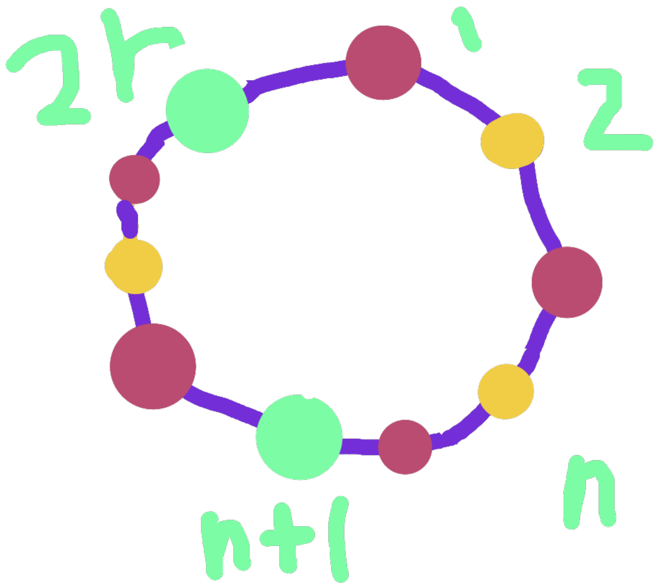
Ответ: при n не делится на 2.

Задание 8Б

Если n делится на 2, то раскрасим граф по кругу в 2 цвета чередуя цвета. После этого, поменяем (среди этих 2 цветов) цвета у всех вершин с номерами большими n, а вершины $n+1$ и $2n$ покрасим в 3 цвет. Рёбра, соединяющие противоположные вершины будут соединять вершины разного цвета и раскраска будет правильной.



Если n не делится на 2, то раскрасим граф по кругу в 2 цвета чередуя цвета, а вершины $n+1$ и $2n$ покрасим в 3 цвет. Рёбра, соединяющие противоположные вершины будут соединять вершины разного цвета и раскраска будет правильной.



(точка отмеченная n на самом деле $n-1$) Ответ: при n не делится на 2.