АЛКТГ дз 2

Татаринов Георгий

18 ноября 2021 г.

Задание 1

Расмотрим граф, в котором есть вершины {1,2,3,4} и рёбра {1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{3,4}

тогда циклический маршрут по всем рёбрам по 2 раза это {1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,1}, {1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,1}, {1,3}, {3,1}

При этом, если существует эйлеров маршрут, рассмотрим произвольную вершину. По каждому ребру, соединённому с вершиной маршурт либо входит в вершину, либо выходит из неё. При этом, количество входов и выходов одинаково. Тогда степерь каждой вершины чётна, а в данном графе это не так.

Задание 2

Пусть в графе есть более 1 компоненты связности. Рассмотрим граф, где вершины это компоненты сильной связности исходного. В нём нет циклов, значит, есть сток. В этой компоненте сильной связности рассмотрим произвольную вершину. Все рёбра, исходящие из этой вершины остаются в этой компоненте связности. Тогда там не менее n-2 вершин. Тогда всего компонет связности не более 2. Расмотрим граф, в котором все вершины - остатки по модулю n, из вершины k идут рёбра в врешины k+1,...,k+n-2. Тогда этот грав сильносвязный и в нём 1 компонента сильной свзяности. Рассмотрим граф на n-1 вершине, где каждая пара вершин соединена 2 рёюрами в обе стороны, добавим вершину. из которой будут идти рёбра в n-2 существующих, но не будут в неё. Тогда в графе будет исходящая степерь каждой вершины равна n-2, и 2 компонеты сильной связности.

Ответ: 2

Задание 3

Пусть $A_1, ..., A_n$- самый длинный простой путь. Пусть есть вершина B которая этому пути не принадлежит. Пусть k - максимальное число из {1,...,n+1}такое, что для всех 0<j<k есть ребро A_jB. Тогда если 1<k<n+1, то есть ребро $A_{k-1}B$ и ребро BA_k, если k=1, то есть ребро BA_0, если k=n+1, то есть ребро A_nB. Во всех случаях, вершина B может быть вставлена в путь, значит, путь не самый длинный. Тогда приедположение о существовании точки вне пути неверно.

Задание 4

очки $<_P$ брюки $<_P$ ремень $<_P$ рубашка $<_P$ галстук $<_P$ пиджак $<_P$ нсоки $<_P$ туфли $<_P$ часы

Задание 5

Пронумеруем города произвольным образом. каждое ребро ориентируем так, чтобы оно вело их большего города в меньший. Тогда перемещаясь по рёюрам будем всегда перемещаться от городоа с большим номером к меньшему, значит, никогда не вернёмся в город с исходным номером.

Если есть цикл. то выехав их каждого города и проехав по циклу в него можно вернуться. Тогда циклов нет. В ориентироваом графе без циклов есть сток и исток. Из стока нельзя выехать, для любого города, кроме истока, выполнено, что между ним и истоком есть ребро и оно направлено из истока. Тогда из истока можно добраться до любого города.

Пусть $A_1, ..., A_n$- самый длинный простой путь. Пусть есть вершина B которая этому пути не принадлежит. Пусть k - максимальное число из {1,...,n+1}такое, что для всех 0<j<k есть ребро A_jB. Тогда если 1<k<n+1, то есть ребро $A_{k-1}B$ и ребро BA_k, если k=1, то есть ребро BA_0, если k=n+1, то есть ребро A_nB. Во всех случаях, вершина B может быть вставлена в путь, значит, путь не самый длинный. Тогда приедположение о существовании точки вне пути неверно. Тогда существует путь, проходящий по всем вершинам. Пронумеруем вершины в том порядке. в котором они в этом пути. Пусть есть ещё один путь. Тогда так ак он отличается от того пути, то в нём есть 2 вершины с номерами C и D, причём C<D и D встречается раньше, чем C. Тогда из первого пути возьмём путь из C в D, а из второго из D в C. Тогда можно выйти из C и вернуться в C - проиворечие с предположением о существовании второго пути.

В каждом способе есть единственный путь, проходящий по всем верщинам. Пронумеруем вершины в том порядке, в каком они в пути. Тогда для любых номеров C и D, где C<D, из пути по всем вершинам можно взять путь из C в D. Тогда ребро между ними направлено из C в D, так как иначе можно будет выйти из C, по пути дойти до D, а потом по ребру вернуться. Тогда каждый способ однозначно определяется способом пронумеровать города.

Ответ: n!

Задание 6

Пусть в графе нет a, b, c, что aPb, bPc и cPa. Тогда любые 3 вершины графа это строгий линейный порядок. Докажем по индукции, что любые k врешин это строгий линейный порядок. База для k=1,2,3 уже есть. Переход k-1 -> k: среди k вершин выберем вершину B, а остальные между собой образуют строгий линейный порядок. Пусть это $A_1, ..., A_{k-1}$ причём нумерация в том порядке, в котором задан линейный порядок. Тогда пусть o - максимальный номер вершины из $\{A_1, ..., A_{k-1}\}$, из которой есть ребро в B, p - минимальный номер вершины из $\{A_1, ..., A_{k-1}\}$ в которую есть путь из B. Если $o > p$ то есть путь из A_o в B, из B в A_p, из A_p в A_o, - противоречие. Тогда o<p. При этом для всех $A_{o+1}, ..., A_{p-1}$ не может быть ребра ни в B ни из B. Это возможно только если o+1=p. Тогда есть рёбра из B во все врешины A_{o+1},...,A_{k-1}, так как из них не может быть ребра в B, есть рёбра в B изо всех врешин $A_1, ..., A_{p-1}$, так как в них не может быть ребра из B. Тогда множество $\{B, A_1, ..., A_k\}$ является строгим линейным порядком. Тогда и весь турнир - строгий линейный порядок.

Задание 7

выберем пару, которая будет несравнима (n способов), объявим акое-либо сравнение на оставшихся парах ($2^{C_n^2-1}$ способов). Всего способов $n * 2^{C_n^2-1}$

Ответ: $n * 2^{C_n^2-1}$

Задание 8

Задание 9

Задание 10