Frequência 2 - Métodos Estatísticos - 16.06.2023 -

versão 102/101

Ex1:

X = "tempo entre a chegada de autocarros"

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$; $E(X) = 0.5$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda} = 0.5$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$

$\therefore X \sim \mathcal{E}(2)$; $f(x) = 2e^{-2x}, x \geq 0$; $E(X) = 0.5$; $V(X) = 0.25$

a) 30 segundo = 0.5 min

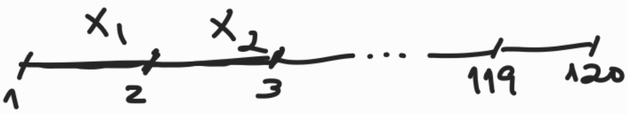
$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big]_0^{0.5}$$

$$= -e^{-1} + 1 = 0.6321$$

$$P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big]_{0.5}^{x\to+\infty} = e^{-1} = 0.3679$$

opção C

B



b) n=120 autocarros

$\bar{X}$ = "tempo médio entre as chegadas de 120 autocarros"

$$\bar{X} = \frac{1}{119}\sum_{i=1}^{119} X_i \quad , \quad X_i \text{ i.i.d para } i = 1, \dots, 119$$

Pelo T.L.C

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \quad \text{com} \quad E(\bar{X}) = E(X) = 0.5$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{119} = \frac{0.25}{119}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} \overset{a}{\sim} N\left(0.5, \sqrt{\frac{0.25}{119}}\right)$$; 20 segundo = $\frac{1}{3}$ min

30 segundos = $\frac{1}{2}$ min

$$P\left(\frac{1}{3} < \bar{X} < \frac{1}{2}\right) \cong \text{normalcdf}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0.5, \sqrt{\frac{0.25}{119}}\right) = 0.4999$$

Ex 2:

X = " peso dos bagagens numa viagem de autocarro"

$X \sim N(800, 200)$; carga máxima do autocarro = 1500 kg

Os pesos das bagagens dos passageiros e' independente.

a) $P(X \leq 760 / X > 500) = P(500 < X < 760) / P(X > 500)$

$$P(X > 760 / X > 500) = \frac{P(X > 760 \cap X > 500)}{P(X > 500)}$$

$$= \frac{P(X > 760)}{P(X > 500)} = \frac{\text{normalcdf}(760, \infty, 800, 200)}{\text{normalcdf}(500, \infty, 800, 200)}$$

$$= \frac{0.5793}{0.9332} = 0.6208 \quad \text{opção B}$$

$$= \frac{0,3539}{0,9332} = 0,3792 \quad \text{opção A}$$

b)

$$P(X \leq p) = 0,1$$

$$\Leftrightarrow p = \text{invNorm}(0.1, 800, 200) = 543.6897 \text{ kg}$$

c) Y = " peso da bagagem de um passageiro"

$Y \sim N(25, 10)$

$$P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{55} Y_i}\ \overset{>}{\leq} 1500\Big) = \text{normalcdf}(\overset{1500}{-\infty}, \overset{+\infty}{1500}, 1375, 74.162)$$

$$= 0,9541$$

$$0,0459$$

Y_i são independentes e seguem $N(25, 10)$

logo, pelo est. do normal,

$$\sum_{i=1}^{55} Y_i \sim N(1375, \sqrt{5500})$$

$$= N(1375, 74.162)$$

Ex3:

X = "tempo, em minutos, que um passageiro demora a retirar a sua bagagem do autocarro"

$X \sim U[0,\theta]$, $\theta \geq 0$

a) Se $X \sim U[0,\theta]$ então $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} , & x \in [0,\theta] \\ 0 , & x \notin [0,\theta] \end{cases}$

$E(X) = \frac{\theta}{2}$; $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

Pelo método dos momentos

$\theta = 2E(X) \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$

$\hat{\theta}$ é um estimador cêntrico para estimar θ

pois $E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$

b) $n = 50$

$\sum_{i=1}^{50} x_i = 440$; $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 4660$

i) um estimador cêntrico para o tempo médio é $\bar{X}$

uma estimativa cêntrica " " " " "

$\bar{x} = \frac{44\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 8.8$ minutos

um estimador cêntrico para $\hat{\theta}$ é, a), $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

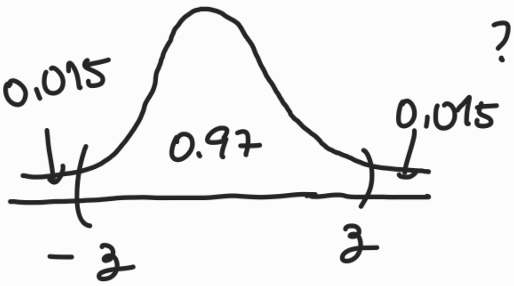
uma estimativa cêntrica para $\hat{\theta}$ é $\hat{\theta}_{50} = 2 \times 8.8$
$= 17.6$ minutos

ii) int. conf. a 97% para μ com σ desconhecido

Passo 1:

$$Z = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{S} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

Passo 2:



$$?\, z \in \mathbb{R}: P(-z < Z < z) = 0.97$$

$$\Rightarrow\ ?\, z \in \mathbb{R}: P(Z < z) = 0.985$$

$$\Rightarrow z = \text{invNorm}(0.985, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow z = 2.1701 \quad (2.17 \text{ na tabela})$$

$$\therefore\ P(-2.1701 < Z < 2.1701) = 0.97$$

Passo 3:

$$-2.1701 < \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{S} < 2.1701$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2.1701\, S}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\mu < \frac{2.1701\, S}{\sqrt{n}} - \bar{X}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - \frac{2.1701\, S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2.1701\, S}{\sqrt{n}}$$

O intervalo aleatório para μ ao grau 0.97 é aproximadamente

$$\left]\bar{X} - \frac{2.1701\, S}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + \frac{2.1701\, S}{\sqrt{n}}\right[$$

Passo 4:

$n = 50$; $\bar{x} = 8.8$; $s^2 = \frac{1}{49} 4660 - \frac{50}{49} 8.8^2$

$= 16.0816$

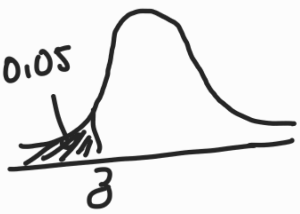
$\Rightarrow s = \sqrt{16.0816} = 4.0102$

Um intervalo de confiança para μ ao grau 0.97 é aproximadamente

$]7.5693, 10.0307[$

iii) $\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu = 9$ vs $H_1 : \mu < 9$



$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim N(0,1)$

R. Crítica $=]-\infty, z[=]-\infty, -1.6449[$

com $z \in \mathbb{R} : P(T < z) = 0.05$

$\Leftrightarrow z = \text{invNorm}(0.05, 0, 1) = -1.6449$

Sob a hipótese Ho

$T_{H_0} = \sqrt{50} \frac{8.8 - 9}{4.0102} = -0.3527$ que não pertence à região crítica, logo, ao nível de 5% não rejeitamos Ho, ou seja, a esse nível não rejeitamos que a média seja 9 minutos.

iv) $\hat{\theta} = 18$ minutos

$X_1, \dots, X_{50}$ são i.i.d com $U[0,18]$

então pelo T.L.C

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \frac{\theta}{2} \simeq 9$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{50} = \frac{\frac{18^2}{12}}{50} = 0{,}54$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} \overset{\cdot}{\sim} N(9, \sqrt{0{,}54})$$

$$= N(9, 0.7348)$$

$$P(\bar{X} < 5) = \text{normalcdf}(-\infty, 5, 9, 0.7348) \simeq 0$$

— / —

<u>Ex 4:</u>

$n = 40$ passageiros ; 10 não possuíam bagagem

a) int. conf. a 95% para a proporção de indivíduos que não possuem bagagem $\overset{10/40}{\downarrow}$

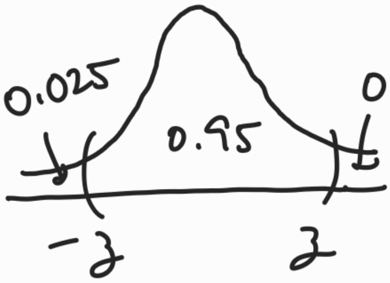
$X_i =$ "o indivíduo possui bagagem" ; $X_i \sim Ber(0{,}25)$

Pelo T.L.C $\bar{X} \overset{\cdot}{\sim} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Variável fulcral

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

$? \, z \in \mathbb{R}: \; P(-z < Z < z) = 0.95$



$\Leftrightarrow \; ? \, z \in \mathbb{R}: \; P(Z < z) = 0.975$

$\Rightarrow \; z = \text{invNorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

$\therefore \; P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$$-1.96 < \sqrt{n} \, \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} < 1.96$$

$$\Leftrightarrow \; \bar{X} - \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} < p < \bar{X} + \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}}$$

O intervalo aleatório para p ao grau 0.95 é

$$\left] \bar{X} - \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + \frac{1.96 \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} \right[$$

$n = 40 \; ; \; \bar{x} = \frac{10}{40} = 0.25$

Um intervalo de confiança para p ao grau 0.95 é

$]0.1158 \, , \, 0.3842[$

b) opção D

A