

EXAME DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

21/06/2019

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO① Acontecimentos: $D_i = \{ \text{peça com defeito } i \}, i=1,2.$

Probabilidades: $P(D_1 \cap D_2) = 0.01, P(D_1 \cap \bar{D}_2) = 0.03,$
 $P(\bar{D}_1 \cap D_2) = 0.23, P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = 0.73$

$$\bullet P(D_2 | D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap \bar{D}_2)} = \\ = \frac{0.01}{0.01 + 0.03} = \frac{0.01}{0.04} = 0.25$$

② $X = \text{nº de clientes que passaram informações úteis, em 20}$ $X \sim H(4, 20, 5)$

$$\bullet P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{15}{4}}{\binom{20}{4}} = 1 - \frac{1365}{4845} = \\ \approx 0.7183 \quad (4 \text{ c.d.})$$

③ $X = \text{nº de acenos a um revide, por minuto}$ $X \sim P(2)$

$$(a) P(X > 2 | X > 0) = \frac{P(X > 2 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(X > 2)}{P(X > 0)} = \\ = \frac{1 - P(X \leq 2)}{1 - P(X \leq 0)} \approx \frac{1 - 0.6767}{1 - 0.1353} \approx 0.3739$$

(b) $X_i = \text{nº de acenos a um revide, no } i\text{-ésimo minuto}, i=1, \dots, 10$

Assumindo X_1, \dots, X_{10} mutuamente independentes e $X_i \sim P(2)$,
 $i=1, \dots, 10$, $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim P(10 \times 2)$, da Aditividade da Poisson.

$$\bullet P(Y \leq 15) \approx 0.1565$$

④ $X = \text{tempo de execução de um algoritmo, em minutos}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{2}{3}x^3 & , 0 \leq x < 1 \\ x - \frac{1}{3} & , 1 \leq x < \frac{4}{3} \\ 1 & , x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{6}]) &= P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{7}{6}) = F(\frac{7}{6}) - F(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{7}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{2^3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

⑤ $X = \text{velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas}$

$$X \sim N(135, \sqrt{100}) \Rightarrow Z = \frac{X - 135}{10} \sim N(0, 1)$$

$$\bullet P(X > 120) = P(Z > -1.50) = 0.9332 \quad (\text{4 c.d.})$$

⑥ $X = \text{mº de engenheiros envolvidos no desenvolvimento de um projeto}$
 $Y = \text{mº de estágiários " " " " " " " " " " }$

$$\text{(a)} \bullet P_X(u) = \sum_y p_{xy}(x,y) , \forall u$$

	0	1	2	C.C.
$P_X(u)$	0.2	0.4	0.4	0

$$\bullet P_Y(y) = \sum_x p_{xy}(x,y) , \forall y$$

	0	1	2	C.C.
$P_Y(y)$	0.15	0.6	0.25	0

$$\text{(b)} \bullet E(X) = \sum_u u * P_X(u) = 1.2 ; \quad E(Y) = \sum_y y * P_Y(y) = 1.1$$

$$\bullet \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.3 - 1.2 \times 1.1 = -0.02$$

• Como $\text{cov}(X, Y) \neq 0$, X e Y não são independentes.

$$\text{(c)} \bullet E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2.3$$

$$\bullet V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) =$$

$$= 0.56 + 0.39 + 2 \times (-0.02) = 0.91$$

$$\text{(d) (i)} \bullet P(2X > Y) = P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,0) + P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2) \\ = 0.1 + 0.3 + 0.65 + 0.2 + 0.15 = 0.8$$

$$\text{(ii)} \bullet P(X \neq Y) = 1 - P(X=Y) = 1 - (P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,2))$$

⑦ X = velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas

$$X \sim N(135, \sqrt{100}) \Rightarrow Z = \frac{X - 135}{10} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} P(X > 150 | X > 135) &= \frac{P(X > 150 \cap X > 135)}{P(X > 135)} = \\ &= \frac{P(X > 150)}{P(X > 135)} = \frac{P(Z > 1.5)}{P(Z > 0.0)} = \frac{0.066807}{0.5} = 0.1336 \end{aligned}$$

(5) X_i = velocidade média (em km/h) do i -ésimo veículo em circulação nas autoestradas portuguesas, $i = 1, 2$.

Admitindo X_1 e X_2 independentes e $X_i \sim N(135, 10)$, $i = 1, 2$,

$$D = X_1 - X_2 \sim N(M_D, \sigma_D^2), \text{ da Estabilidade da Lei Normal,}$$

$$\text{com } M_D = E(X_1) - E(X_2) = 0 \text{ e } \sigma_D = \sqrt{V(X_1) + V(X_2)} = \sqrt{200}$$

$$\begin{aligned} P(D > 20) &= P\left(\frac{D - 0}{\sqrt{200}} > \frac{20}{\sqrt{200}}\right) \\ &\approx P(Z > 1.41), \quad Z \sim N(0, 1) \\ &\approx 0.0793 \quad \hookrightarrow \text{com 2 c.d.} \end{aligned}$$

⑧ X = tempo de execução de um algoritmo, em minutos

$$E(X) = 8/9, \quad V(X) = 1/15$$

X_i = tempo da i -ésima execução do algoritmo, em minutos,
 $i = 1, \dots, 100$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} = \text{tempo médio de 100 execuções do algoritmo.}$$

Admitindo que X_1, \dots, X_{100} são independentes e identicamente distribuídas com X , do T.L.C., $\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0, 1)$, com $E(\bar{X}) = 8/9$ e $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1/15}{100}}$.

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 0.9) &= P\left(\frac{\bar{X} - 8/9}{\sqrt{1/15}} \leq \frac{0.9 - 8/9}{\sqrt{1/15}} \cdot 10\right) \approx P(Z \leq 0.4303) \\ &\approx 0.6665 \end{aligned}$$

⑨ X = quilometragem efetuada por litro (km/l) de combustível por um automóvel

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Amostra: $n = 8$, $\bar{x} = 24.34$ e $s^2 = 0.5$.

(a) Como $X \sim N(\mu, \sigma)$ é descontínuo, $Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

- $\bullet z: P(-z < Z_n < z) = 0.95$, $Z_n \sim t_7$

Logo $z = F_{Z_n}^{-1}(0.975) \approx 2.365$

- Intervalo aleatório de confiança 95% para μ (\dots):

$$IAC_{95\%}(\mu) = \left[\bar{X} - 2.365 \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.365 \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- Concretação: $IAC(\mu) = \left[24.34 - 2.365 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{8}}, 24.34 + 2.365 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{8}} \right]$
 $= [23.75, 24.93] \text{ (km/l)}$

(b). $H_0: \mu = 24.5$ vs $H_1: \mu < 24.5$

- Assumindo H_0 verdadeira, $T = \frac{\bar{X} - 24.5}{s/\sqrt{n}} \sim t_7$

- Região Crítica, R.C. = $]-\infty, z_c]$ com

$$z_c: P(T \leq z_c) = 0.1, \text{ ou rejeita } z_c = F_T^{-1}(0.1) = -1.415$$

(ou $z_c = -F_T^{-1}(0.9) = -1.415$)

R.C. = $]-\infty, -1.415]$

- Como $T_{obs} = \frac{24.34 - 24.5}{s/\sqrt{n}} = -0.64 \notin R.C.$,
 Com um nível de significância de 10% não se rejeita H_0
 (não há evidências para aceitar H_1 ...)

⑨ (c) . $Z_m = \frac{(m-1) S_m^2}{\sigma^2} \sim \chi_{m-1}^2$, con $(m-1) = 7$

- $a, b : P(a < Z_m < b) = 0.95, Z_m \sim \chi_7^2$
- $\begin{cases} a : P(Z_m < a) = 0.025 \\ b : P(Z_m < b) = 0.975 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = F_{\chi_7^2}^{-1}(0.025) = 1.69 \\ b = F_{\chi_7^2}^{-1}(0.975) = 16.01 \end{cases}$

- Intervalo aleatório a 95% para σ (...):

$$IAC_{95\%}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{7 \times S_8^2}{16.01}}, \sqrt{\frac{7 \times S_8^2}{1.69}} \right]$$

- Conjuntos: $I_C(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{7 \times 0.5}{16.01}}, \sqrt{\frac{7 \times 0.5}{1.69}} \right]$

$$= [0.468, 1.439] \text{ (Km/l)}$$

• X_1, \dots, X_{12} são i) independentes e ii) identicamente distribuídos em X .

⑩ • $E(T_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 E(X_i) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{2} \times 2 \times E(x) = E(x)$

• $E(\bar{T}_{12}) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} E(X_i) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{12} \times 12 \times E(x) = E(x)$

$$\therefore E(T_2) = E(\bar{T}_{12})$$

• $V(T_2) \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 V(X_i) \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{4} \times 2 \times V(x) = \frac{1}{2} V(x)$

• $V(\bar{T}_{12}) \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{12^2} \sum_{i=1}^{12} V(X_i) \stackrel{(b)}{=} \frac{1}{12^2} \times 12 \times V(x) = \frac{1}{12} V(x)$

$$\therefore V(T_2) > V(\bar{T}_{12}), \text{ logo}$$

a afirmação é falsa.