Investigação Operacional

Folha de Exercícios nº1

Modelização matemática e resolução gráfica

1. Formule o modelo de programação linear para cada um dos seguintes problemas:

a) Um carpinteiro dispõe de 6 peças de madeira e de 28 horas livres por mês para construir dois modelos diferentes de bancos. Cada banco do modelo I requer 2 peças de madeira e exige 7 horas de trabalho. Cada banco do modelo II requer 1 peça de madeira e exige 8 horas de trabalho. Os lucros unitários dos bancos do modelo I e II são de 120 e 80 unidades monetárias (UM), respetivamente. Quantos bancos de cada modelo deve o carpinteiro fabricar mensalmente, de forma a maximizar o lucro resultante das suas vendas? (Considere que o carpinteiro vende todas as unidades que fabricar.)

b) Um talho prepara tradicionalmente as suas almôndegas misturando carne de vaca com carne de porco. A carne de vaca contém 20% de matéria gorda e custa 12 UM por Kg, enquanto a carne de porco contém 32% de gordura e custa 6 UM por Kg. Qual a quantidade de carne de vaca e de carne de porco que cada Kg de almôndegas deve conter, de modo a minimizar o custo e a conservar o teor de gordura nunca superior a 25%?

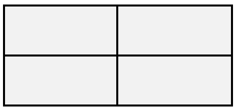
c) No serviço de urgências de uma dada clínica, que funciona 24 horas por dia, os requerimentos mínimos de pessoal de enfermagem nas diferentes horas do dia são os seguintes:

Horas	Requerimentos mínimos
0 - 4	4
4 - 8	6
8 - 12	10
12 - 16	8
16 - 20	12
20 - 0	6

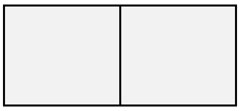
Cada enfermeiro trabalha 8 horas consecutivas por dia e os turnos iniciam-se de 4 em 4 horas a partir das 0 horas da madrugada.

Qual o número mínimo de enfermeiros que a clínica deve possuir nos seus quadros, para satisfazer os requisitos anteriores (considerando que cada enfermeiro trabalha num único turno e que esse turno é fixo)?

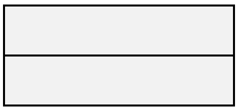
d) Um carpinteiro recebe mensalmente encomendas de 10000 peças de madeira com dimensões de 40x20 cm^2, 8000 peças de madeira com dimensões de 40x40 cm^2 e 5000 peças de madeira com dimensões de 20x80 cm^2. Dado que as peças de madeira originais (matéria-prima) têm dimensões de 40x80 cm^2, existem 5 maneiras diferentes de as cortar de modo a obter peças com as dimensões das encomendas, tal como mostra a figura abaixo.



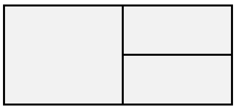
Padrão 1



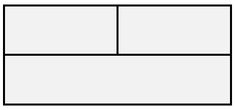
Padrão 2



Padrão 3



Padrão 4



Padrão 5

O carpinteiro deseja saber qual é a melhor combinação de padrões de corte que deve usar, de modo a satisfazer exatamente as encomendas mensais e a minimizar a quantidade de matéria-prima utilizada.

e) Um determinado artífice dedica os seus fins-de-semana ao seu *hobby* favorito: construção de instrumentos musicais. Como estes instrumentos são difíceis de encontrar no mercado e as encomendas são normalmente feitas com bastante antecedência, ele pretende fazer o planeamento da produção de violinos e violoncelos para o próximo ano.

A madeira usada na construção destes instrumentos tem de ser de muito boa qualidade sendo necessária madeira específica para determinadas componentes. Para o braço de cada um desses instrumentos é necessária uma madeira muito rara da qual apenas é possível obter 4800 cm^2 por ano. Cada violino necessita em média de 200 cm^2 dessa madeira e cada violoncelo de 1600 cm^2. Sabe-se que no próximo ano o artífice apenas trabalhará 48 fins-de-semana. Sabe-se ainda que cada violino requer 4 fins-de-semana de trabalho e que cada violoncelo requer 8 fins-de-semana. O lucro a obter com a venda dos instrumentos de corda é de 2000 UM por cada violino e de 8000 UM por cada violoncelo.

O artífice quer saber quantos violinos e violoncelos deve produzir no próximo ano para maximizar o lucro resultante das suas vendas (considerando que consegue vender todas as unidades que produzir).

f) Uma fábrica de brinquedos produz dois tipos de carros telecomandados designados por A e B. Cada carro do tipo A requer o dobro do tempo de mão-de-obra relativamente aos do tipo B e sabe-se que se todos os carros fossem do tipo B a fábrica teria disponibilidade, em termos de mão-de-obra, para produzir, diariamente, um máximo de 400 carros.

Sabe-se que as vendas médias diárias dos carros dos tipos A e B não excedem 150 e 200 unidades, respetivamente.

Assumindo que cada carro do tipo A origina um lucro de 4000 UM e cada carro do tipo B um lucro de 2500 UM, quantos carros de cada tipo deve a fábrica produzir de modo a maximizar o lucro diário (considerando que esta vende todas as unidades que produzir)?

g) Uma fábrica de artigos para cabeleireiros produz 3 tipos de lacas: fixação normal, fixação forte e fixação ultra-forte. Para a sua produção são usados 4 produtos base, do modo indicado no quadro:

	Quantidade de material (em unidades) necessária para a produção de uma unidade de laca			**Quantidade máxima de material (em unidades) disponível por mês**
Material	Normal	Forte	Ultra-Forte	
A	2	1	1	1500
B	1	2	3	1200
C	2	0	1	300
D	0	1	3	900

Sabendo que cada embalagem de laca normal origina um lucro de 75 UM, de laca forte um lucro de 80 UM e de ultra-forte um lucro de 100 UM, quantas unidades de cada tipo de laca deve a fábrica produzir mensalmente de modo a maximizar o lucro (considerando que esta vende todas as unidades que produzir)?

h) A indústria papeleira FAZPAPEL S.A. iniciou a sua produção em 2005 e já conquistou o seu espaço no mercado português, tendo estabelecido contratos de fornecimento para os três tipos de papel que fabrica: cartolina, papel Jornal e papel Kraft. Toda a produção é efetuada em duas unidades fabris, uma localizada em Coimbra e a outra em Viseu. De acordo com os contratos estabelecidos, a empresa tem que fornecer 8 toneladas de cartolina, 3 toneladas de papel Jornal e 14 toneladas de papel Kraft. Devido à elevada qualidade dos produtos da FAZPAPEL, existe uma procura extra para cada um dos tipos de papel que garante o fácil escoamento de quaisquer excedentes de produção. A fábrica de Coimbra tem um custo de produção diário de 100.000,00€ para uma capacidade produtiva de 4 toneladas de cartolina, 0,5 toneladas de papel Jornal e 1 tonelada de papel Kraft. Por seu lado, a fábrica de Viseu tem um custo de produção diário de 200.000,00€ para uma capacidade produtiva de 1 tonelada de cartolina, 0,5 toneladas de papel Jornal e 3,5 toneladas de papel Kraft.

A FAZPAPEL pretende determinar quantos dias deve cada fábrica operar de modo a satisfazer as encomendas ao menor custo possível.

i) Uma pequena fábrica de brinquedos de madeira pretende produzir três novos brinquedos: comboios, cavalos e cabanas. A produção destes brinquedos requer mão-de-obra especializada de carpintaria e acabamentos. A produção de um comboio requer 1 hora de carpintaria e 1 hora de acabamentos. A produção de um cavalo requer 3 horas de carpintaria e 2 de acabamentos. A produção de uma cabana requer 2 horas de carpintaria e 1 de acabamentos. A fábrica tem 10 empregados na secção de carpintaria e 7 na secção de acabamentos, sendo o horário semanal de qualquer um dos empregados, de 40 horas. Com a venda dos comboios, cavalos e cabanas a fábrica tem lucros unitários de 20€, 50€ e 25€, respetivamente.

A fábrica pretende saber quais as quantidades de cada tipo de brinquedo que deve produzir de forma a maximizar o seu lucro semanal (assumindo que a fábrica vende tudo o que produzir).

j) A Comerbem, empresa da área alimentar, pretende divulgar um dos seus novos produtos e para isso contratou a firma Bestinform, especializada em marketing, para organizar a sua campanha publicitária. A Comerbem quer que a divulgação seja feita via TV e via Rádio e que tenha como público-alvo clientes de três grupos etários: mais de 40 anos, entre 25 e 40 anos, e menos de 25 anos de idade.

Segundo a Bestinfom, um minuto de publicidade na TV custará 7.000€ e, previsivelmente, chegará a uma média de 16000 espectadores no grupo acima de 40 anos, a 12500 no grupo de 25 a 40, e a 8600 no grupo sub-25. Por outro lado, a Bestinform estima que um minuto de publicidade na Rádio chegará a 4500 ouvintes na faixa etária de mais de 40 anos, a 8000 na faixa etária de 25 a 40, e a 14000 no grupo sub-25, e custará 2.500€.

A Comerbem pretende que a campanha publicitária no seu global (TV e Rádio) lhe permita uma exposição mínima diária a um total de 65.000 pessoas no grupo de mais de 40 anos, a um total de 80.000 pessoas na faixa etária de 25-40, e a um total de 70.000 pessoas no grupo sub-25. Por outro lado, exige que a publicidade, na sua totalidade, não exceda um quarto de hora de duração diária.

A Bestinform pretende determinar o esquema de publicidade diária que permitirá satisfazer as pretensões da Comerbem ao menor custo possível.

2. Resolva cada um dos seguintes problemas pelo **método gráfico**:

a) Maximizar $z = x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \leq 2 \\ x_2 & \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 & \leq 3 \\ x_1 + x_2 & \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

b) Minimizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1 - x_2 & \geq -3 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

c) Maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1 - x_2 & \geq -3 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

d) Minimizar $z = 15x_1 + 20x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 & \geq 10 \\ 2x_1 - 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 + x_2 & \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

e) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 12 \\ x_1 \quad & \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \,,\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

f) Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{rrl} 2x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ x_1 & +5x_2 & \geq 10 \\ -x_1 & +3x_2 & = 6 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0} \end{array}$$

g) Maximizar $z = 3x_1 - x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{rrl} 2x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ x_1 & +3x_2 & \geq 3 \\ & x_2 & \leq 4 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0} \end{array}$$

h) Minimizar $z = 10x_1 + 20x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{rrl} -x_1 & +2x_2 & \leq 15 \\ x_1 & +x_2 & \leq 12 \\ 5x_1 & +3x_2 & \leq 45 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0} \end{array}$$

i) Minimizar $z = -2x_1 + 2x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \end{array}$$

j) Maximizar $Z = x_1 + 2x_2$
sujeito a

$$\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \end{array}$$