INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA

Departamento de Física e Matemática — Engenharia Informática (LEI, LEI-CE, LEI-PL)

Exame de Métodos Estatísticos — 21 de junho de 2019

Duração 2h30m+30m

- **Indique na sua prova, obrigatoriamente, o código deste teste: E2N01.**
- **Nas perguntas de escolha múltipla, indique apenas a opção escolhida. A cotação deste grupo será penalizada em $0,5$ valores por cada duas respostas erradas. Nas restantes perguntas, justifique convenientemente as suas respostas.**

(1.0) 1. Uma peça de certo tipo é classificada de acordo com dois tipos de defeitos: defeito 1 e defeito 2. Num grande lote composto por peças deste tipo, verificou-se que: 1% tem defeito 1 e defeito 2; 3% tem defeito 1 e não tem defeito 2; 23% não tem defeito 1 e tem defeito 2; 73% não tem defeito 1 nem defeito 2. Escolhida ao acaso uma peça do lote com defeito 1, a probabilidade de ter defeito 2 é igual a:

(A) 0.01 **(B)** 0.24 **(C)** 0.25 **(D)** 0.27

(1.0) 2. Um pequeno fabricante de aparelhos elétricos possui uma carteira de 20 clientes entre os quais 5 possuem informações úteis para melhorar o processo de fabrico dos aparelhos. Selecionados ao acaso 4 clientes dessa carteira, a probabilidade de pelo menos um deles possuir informações úteis é igual a (usando 4 c.d.):

(A) 0.2617 **(B)** 0.7383 **(C)** 0.6836 **(D)** 0.7183

3. Suponha que o número de acessos a um servidor, por minuto, é descrito por uma variável aleatória com distribuição *Poisson* de parâmetro 2.

(1.0) (a) A probabilidade de o número de acessos, num dado minuto, ser superior a 2, sabendo que houve efetivamente acessos nesse minuto, é igual a (usando 4 c.d.):

(A) 0.1353 **(B)** 0.3233 **(C)** 0.3739 **(D)** 0.5940

(1.0) (b) A probabilidade de o número total de acessos ao servidor em dez minutos não exceder 15 é igual a (usando 4 c.d.):

(A) 0.1049 **(B)** 0.1565 **(C)** 1 **(D)** *outra*

(1.0) 4. O tempo de execução de um algoritmo, em minutos, é representado pela variável aleatória X com a seguinte função distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \dfrac{2}{3}x^3 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x - \dfrac{1}{3} & , \ 1 \leq x < \dfrac{4}{3} \\ 1 & , \ x \geq \dfrac{4}{3} \end{cases} .$$

A probabilidade de o tempo de execução do algoritmo variar no intervalo $]1/2, 7/6]$ (min.) é igual:

(A) 5/6 **(B)** 3/4 **(C)** 11/12 **(D)** *outra*

(1.0) 5. Suponha que a variável aleatória que representa a velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas tem distribuição normal, com valor esperado e variância iguais a 135 e 100, respetivamente.

A probabilidade de um veículo circular a uma velocidade média superior a 120 km/h é igual a (usando 4 c.d.):

(A) 0.9332 **(B)** 0.9052 **(C)** 0.5596 **(D)** 0.0668

6. Num pequeno laboratório trabalham dois engenheiros e dois estagiários. Suponha que as variáveis aleatórias X e Y representam, respetivamente, o número de engenheiros e o número de estagiários envolvidos no desenvolvimento de um projecto selecionado ao acaso. Admita que a função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada pela tabela seguinte:

X \ Y	0	1	2
0	0	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0
2	0.05	0.2	0.15

(1.0) (a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

(0.75) (b) Sabendo que $E(XY) = 1.3$, calcule $Cov(X, Y)$. X e Y são independentes?

(1.25) (c) Obtenha o valor esperado e a variância do número total de engenheiros e estagiários envolvidos no desenvolvimento de um projecto selecionado ao acaso.

(1.0) (d) Calcule a probabilidade de, no desenvolvimento de um projecto selecionado ao acaso:
(i) o dobro do número de engenheiros ser superior ao número de estagiários;
(ii) o número de engenheiros ser diferente do número de estagiários.

7. Suponha que a variável aleatória que representa a velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas tem distribuição normal, com valor esperado e variância iguais a 135 e 100, respetivamente.

(1.0) (a) Calcule a probabilidade de um veículo circular a uma velocidade média superior a 150 km/h, sabendo que foi selecionado aleatoriamente de entre os 50% de veículos com maior velocidade média de circulação nas autoestradas portuguesas.

(1.75) (b) Admitindo que as velocidades médias de veículos distintos em circulação nas autoestradas portuguesas são variáveis independentes, calcule a probabilidade da diferença entre as velocidades médias de dois desses veículos, escolhidos aleatoriamente, exceder 20 km/h.

(1.75) 8. O tempo de execução de um algoritmo, em minutos, é representado pela variável aleatória X, com $E(X) = 8/9$ e $V(X) = 1/15$. Determine um valor aproximado para a probabilidade de o tempo médio de 100 execuções do algoritmo não exceder 0.9 minuto (deve indicar todas as hipóteses que terá de assumir para responder à questão).

9. Para estudar o consumo de combustível em automóveis de um dado modelo, considerou-se a variável aleatória X denotando a quilometragem efetuada por litro (km/litro) de combustível por um automóvel do modelo. Assume-se que X possui distribuição normal.

Tendo sido selecionados ao acaso 8 automóveis daquele modelo, registado as respetivas quilometragens efetuadas por litro de combustível, obteve-se uma média e variância iguais a 24.34 e 0.5, respetivamente.

(1.5) (a) Determine um intervalo de confiança 95% para o valor esperado de X.

(1.5) (b) Teste ao nível de significância de 10% a hipótese do valor esperado da quilometragem efetuada por litro de combustível em automóveis daquele modelo ficar abaixo de 24.5 km/litro.

(1.5) (c) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão de X.

(1.0) 10. Seja $(X_1, X_2, ..., X_{12})$ uma amostra aleatória de uma população X.

Considerando $T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i$ e $T_{12} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i$, comente a seguinte afirmação:

$$E(T_2) = E(T_{12}) \text{ mas } V(T_2) < V(T_{12}).$$