Licenciatura em Engenharia Informática (LEI/LEICE/LEIRP)
Ano Letivo 2022/23

Métodos Estatísticos

Caderno de Exercícios

Deolinda M. L. D. Rasteiro

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática

1. Probabilidades

1. Uma caixa contém 5 lâmpadas das quais 2 são defeituosas. Estas têm os números 3 e 5. Considere a experiência aleatória "extracção de duas lâmpadas ao acaso, uma a seguir à outra, sem reposição da primeira".

   (a) Construa o espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.

   (b) Defina por extenso os acontecimentos:

   $$\begin{aligned} A &= \{\text{saída de lâmpada defeituosa na primeira tiragem}\}; \\ B &= \{\text{saída de lâmpada defeituosa na segunda tiragem}\}; \\ C &= \{\text{saída de duas lâmpadas defeituosas}\}; \\ D &= \{\text{não sair qualquer lâmpada defeituosa}\}; \end{aligned}$$

   (c) Se as lâmpadas forem extraídas ao acaso, os resultados possíveis são equiprováveis. Calcule a probabilidade dos acontecimentos A, B, C e D.

2. Calcule a probabilidade de, ao lançar três vezes uma moeda equilibrada, obter:

   (a) duas caras;

   (b) pelo menos uma cara.

3. Lança-se simultaneamente um dado e uma moeda equilibrados.

   (a) Construa o espaço de resultados associado a esta experiência aleatória.

   (b) Defina por extenso os acontecimentos:

   $$\begin{aligned} A &= \{\text{saída de coroa e número par}\}; \\ B &= \{\text{saída de cara e número ímpar}\}; \\ C &= \{\text{saída de múltiplos de três}\}; \end{aligned}$$

   e determine as respectivas probabilidades.

4. Sejam A, B, e C acontecimentos de Ω tais que:

   $$A \cup B \cup C = \Omega, \quad P(A) = 0.3, \quad P(\overline{B}) = 0.7, \quad P(C) = 0.5 \ \text{ e } \ A \cap B = C \cap B = \emptyset.$$

   Determine $P(A \cap C)$.

5. Sejam A e B acontecimentos de um mesmo espaço de probabilidade Ω, tais que $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.6$ e $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.3$. Calcule:

   (a) $P(\overline{B})$; (b) $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$.

6. Supondo que A e B são acontecimentos independentes com probabilidade não nula prove que os acontecimentos A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B também são independentes.

7. Uma empresa fabrica aparelhos elétricos em duas cadeias de produção A e B. Sabe-se que a probabilidade de um desses artigos ser exportado é 0.2 se produzido pela cadeia A e 0.5 se produzido pela cadeia B. Além disso, a proporção de artigos provenientes da cadeia A é 52%. Escolhe-se, ao acaso, um artigo da produção desta empresa.

   (a) Determine a probabilidade do artigo ser exportado.

   (b) Sabendo que o artigo não foi exportado, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela cadeia B?

8. A central telefónica do INEM de uma grande cidade recebe chamadas, umas genuínas e outras falsas, isto é, correspondentes ou não a verdadeiros acidentes. A central recebe na totalidade 2% de chamadas falsas. Destas, 20% são efectuadas durante o período da manhã, 40% durante o período da tarde e as restantes à noite. Das chamadas genuínas recebidas na central, 30% são feitas durante a manhã.

   (a) Mostre que a percentagem de chamadas recebidas na central durante o período da manhã é de 29.8%.

   (b) Considerando que a probabilidade de uma chamada, recebida na central, ser efectuada no período da tarde é de 40%, calcule a probabilidade de uma chamada ser feita durante a noite dado que é uma chamada genuína.

9. Em determinada linha de montagem 2% das peças ficam mal colocadas. Um programa para detectar falhas de montagem tem as seguintes propriedades:

   - se a peça está mal colocada, o programa indica essa falha com probabilidade 0.99;
   - se a peça está correctamente colocada, o programa indica falha com probabilidade 0.005.

   (a) Determine a probabilidade de, ao ser efectuado o referido teste, o programa indicar falha.

   (b) Se o teste indicar a existência de uma falha, qual a probabilidade de efectivamente existirem peças mal colocadas?

10. Uma empresa de fabrico de válvulas de televisão dispões de três sectores de produção: A, B e C. Sabe-se que:

   - a percentagem de válvulas da marca A é 50%;
   - a percentagem de válvulas defeituosas é 10%;
   - em C não há válvulas defeituosas;
   - 2% das válvulas provêm de B e são defeituosas.

   Escolhe-se aleatoriamente uma válvula de televisão da produção da empresa.

   (a) Mostre que a probabilidade da válvula ser defeituosa, sabendo que provém de A é 0.16.

   (b) Calcule a probabilidade da válvula não provir de B sabendo que é defeituosa.

(c) Sabendo que, das válvulas não defeituosas 40% provêm de C, qual a probabilidade da válvula ser proveniente de C?

11. Dos utilizadores de telefones móveis duma determinada localidade, 50% estão ligados à rede A, 40% à rede B e 10% à rede C. Após um estudo de opinião de mercado conclui-se que:

    - 70% dos utilizadores estão satisfeitos com o serviço;
    - dos utilizadores ligados à rede A, 80% estão satisfeitos;
    - dos utilizadores satisfeitos com o serviço, 10% estão ligados à rede C.

    Determine a percentagem de utilizadores:

    (a) da rede B que estão satisfeitos com o serviço;

    (b) não satisfeitos com o serviço, sabendo que estes não estão ligados à rede C.

12. O fabrico de uma peça consta de duas operações. Inicialmente a peça é moldada numa máquina M e, em seguida, passa por uma de duas impressoras, I_1 ou I_2. A probabilidade de uma peça apresentar defeito de moldagem é 0.4 e 70% das peças são impressas em I_1. Além disso, a probabilidade de surgir um defeito de impressão é de 0.05 para I_1 e de 0.02 para I_2. Note que defeitos de moldagem e de impressão são independentes entre si.

    No final de determinado dia de laboração, da produção total da fábrica retira-se uma peça ao acaso.

    (a) Qual a probabilidade da peça ter defeitos de impressão?

    (b) Qual a probabilidade da peça apresentar um qualquer defeito?

    (c) Supondo que a peça apresenta defeito de impressão, calcule a probabilidade de ter sido impressa em I_1.

1. Probabilidades

1. (c) 0.4; 0.4; 0.1; 0.3
2. (a) 0.375 (b) 0.875
3. (b) 0.25; 0.25; 0.33
4. 0.1
5. (a) 0.4 (b) 0.8; 0.5
6. —–
7. (a) 0.344 (b) 0.3659
8. (b) 0.3
9. (a) 0.0247 (b) 0.8016
10. (b) 0.8 (c) 0.36
11. (a) 0.575 (b) 0.3
12. (a) 0.041 (b) 0.4246 (c)0.8537

2. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Discretas

1. Uma moeda apresenta cara duas vezes mais frequentemente que coroa. Essa moeda é lançada três vezes e X é a variável aleatória que representa o número total de caras que ocorreram.

   (a) Determine a função de probabilidade de X e represente-a graficamente.

   (b) Determine a função distribuição de X e represente-a graficamente.

   (c) Qual é a probabilidade de só saírem caras nos três lançamentos? E de saírem, no máximo, duas caras?

2. Suponha que o número de computadores utilizados diariamente numa determinada empresa é uma variável aleatória X com função de probabilidade,

$$P(X=x)=p(x)=\begin{cases} \dfrac{k2^x}{x!} & \text{se} \quad x=1,2,3,4 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

   (a) Determine o valor de k, justificando a sua resposta.

   (b) Defina a função distribuição de X.

   (c) Qual deverá ser o número mínimo de computadores disponíveis no ínicio de cada dia para que a procura diária seja satisfeita com uma probabilidade de pelo menos 0.8?

   (d) Qual é o número médio de computadores utilizados diariamente naquela empresa? E o desvio padrão?

3. A função distribuição de uma variável aleatória (v.a.) X é

$$P(X\le x)=F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x<0 \\ 0.5 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ 0.6 & \text{se} \quad 1\le x<2 \\ 0.8 & \text{se} \quad 2\le x<3 \\ 0.9 & \text{se} \quad 3\le x<3.5 \\ 1 & \text{se} \quad x\ge 3.5 \end{cases} .$$

   (a) Represente graficamente $F(x)$.

   (b) Justifique que a v.a. X é discreta e calcule a sua função de probabilidade.

   (c) Calcule: $P(X\le 1)$, $P(X\ge 2)$, $P(X\ge 3)$, $P(2.5\le X\le 4)$, $P(X\ge 3.5)$ e $P(2.5\le X\le 4/X\ge 1)$.

   (d) Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ e $\sigma(X)$.

   (e) Considere a v.a. $Y=X-1.15$.

      i. Calcule $P(Y\le 1)$.

      ii. Compare as v.a.'s X e Y, em termos de valor esperado e variância.

4. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	$m-1$	m	$m+3$	$m+5$
$P(X=x_i)$	$\frac{k+1}{8}$	$\frac{k}{8}$	$\frac{k-1}{8}$	$\frac{k}{8}$

(a) Determine as constantes k e m sabendo que $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{4}$.

(b) Calcule $\mathrm{E}(X-2)$ e $\mathrm{V}(3X-2)$.

(c) Obtenha a função distribuição da v.a. X.

(d) Calcule: $P(X \leq -5)$, $P(X \leq -1)$, $P(-1 < X \leq 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(X < 4)$ e $P(X \leq 6)$.

5. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{15}$	k	$\frac{1}{3}$

(a) Determine o valor de k por forma a que p seja lei de probabilidade de X.

(b) Deduza a função distribuição de X.

(c) Calcule o valor médio e a variância de X.

(d) Calcule o valor de $P(X^2 = 4/X \leq 1)$.

6. **(Exercício ao cuidado do aluno)** Seja X uma v. a. discreta de Suporte $S \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, com **a** e **b** dois números inteiros positivos à sua escolha.

(a) Gere, aleatoriamente, o suporte de X, S, usando o *Microsoft Excel*:

1 º Numa célula insira o comando **=ALEATÓRIO()*(b-a)+a**

2 º Formate a célula que contém o número obtido em (1 º) :

Formatar células→ Número→Categoria: número→casas decimais=1

3 º Repita a operação até que S tenha dimensão 5.

(b) Considere o suporte de X, S, obtido na alínea anterior, e assuma que a probabilidade de cada valor é igual à sua frequência relativa em S.

i. Calcule as funções de probabilidade e distribuição de X.

ii. Calcule, se possível, as seguintes probabilidades:
(i) $P(X \geq 0)$ (ii) $P(0 < X \leq 7)$
(iii) $P(X \leq 1.5/X \geq 0.5)$ (iv) $P(1 < X < 3/X \geq 2)$

iii. Considere a variável aleatória $g(X) = X^2 - 4$.
Sem usar o suporte de $g(X)$, calcule $E[g(X)]$ e $V[g(X)]$.

7. Uma caixa contém 20 peças das quais 5 são defeituosas. Tiram-se 6 peças da caixa, com reposição da peça extraída em cada tiragem. Seja X o número de peças defeituosas encontradas.

   (a) Identifique, justificando, a lei de probabilidade de X.

   (b) Determine: $P(X \leq 0)$, $P(2 \leq X < 4)$, $P(X > 3)$ e $P(X \leq 7)$.

   (c) Qual é o número esperado de peças defeituosas nas 6 tiragens?

   (d) Assuma agora que a tiragem das 6 peças é feita sem reposição. Qual é a lei de probabilidade de X? Justifique. Qual a probabilidade de nenhuma peça ser defeituosa?

8. Considere o exercício nº 1. A lei da variável aleatória aí definida é especial. Identifique-a, justificando a sua resposta.

9. Uma loja quer vender rapidamente os 100 computadores portáteis que tem em armazém, pelo que realizou uma promoção com descontos oferecendo o sistema operativo. O processo de instalação do sistema operativo não é completamente fiável e 10 dos portáteis necessitarão de assistência complementar.

   Uma empresa comprou na loja 20 portáteis, seleccionados aleatoriamente no armazém.

   (a) Indique (justificando) a lei de probabilidade do número de portáteis comprados pela empresa, que necessitarão de assistência.

   (b) Qual a probabilidade de nenhum dos portáteis apresentar problemas?

   (c) Indique uma expressão matemática que dê a probabilidade de mais de 5 portáteis necessitarem de assistência.

   (d) Cada um dos portáteis é vendido a 1.520 euros e a sua eventual assistência custará à loja 55 euros. Indique o lucro esperado da loja com a venda dos portáteis à empresa.

10. Considere a experiência aleatória "lançamento de um dado equilibrado". Suponha que se efectua uma sucessão de 20 realizações desta experiência. Seja X a v.a. que representa o número de faces 5 que ocorreram nas 20 realizações da experiência. Determine:

    (a) a lei de probabilidade de X;

    (b) a probabilidade de ocorrerem 10 faces 5.

11. De um grupo de 1000 habitantes de certa região, há 20% que são proprietários da casa que habitam. Se se recolher, ao acaso, uma amostra de 10 indivíduos, qual a probabilidade de 6 terem casa própria?

12. Apenas 30% dos habitantes de uma grande cidade pensam que o sistema de trânsito vigente é adequado. Se forem seleccionados 20 habitantes, encontre a probabilidade de, no máximo, 2 concordarem com o sistema de trânsito.

13. Suponha que 10% dos vidros fabricados por certa máquina são defeituosos. Se forem seleccionados, ao acaso, 10 vidros da produção total da máquina, qual a probabilidade de

    (a) nenhum ser defeituoso?

    (b) o número de vidros defeituosos não ser inferior a 2 nem superior a 6?

    Qual é o valor esperado do número de vidros defeituosos entre os seleccionados?

14. O número de chamadas que chegam num período de 5 minutos à central telefónica de uma empresa é uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de parâmetro 10.

    (a) Calcule a probabilidade de, num período de 5 minutos,

        i. chegarem exactamente 8 chamadas;

        ii. chegarem menos de 5 chamadas;

        iii. chegarem, no mínimo, 3 chamadas;

        iv. não chegar alguma chamada.

    (b) Qual a probabilidade de chegarem à central telefónica 35 chamadas, num período de 10 minutos consecutivos? Justifique.

15. O número de visitantes que entra num *cibercafe* ao longo dos vários períodos diários segue uma lei de Poisson. No entanto, o número médio de visitantes varia consoante o período do dia: no período da manhã espera-se 3 visitantes e no período da tarde 15.

    Assuma independência entre o número de visitantes ao *cibercafe* nos dois períodos diários.

    (a) Qual a probabilidade de numa manhã de um dia qualquer, o número de visitantes ao *cibercafe* ser pelo menos cinco?

    (b) Qual a probabilidade de, num dia qualquer, o número total de visitantes ao *cibercafe* nos períodos da manhã e da tarde ser menor que 31?

    (c) Qual a probabilidade de, num dia qualquer, o número de visitantes na manhã ser igual a 5 e na tarde ser igual a 20?

16. Determinada editora publica um livro com uma tiragem de 100 000 exemplares. A probabilidade de que um dos livros seja encadernado incorrectamente é 10^{-4}. Calcule a probabilidade *aproximada* de que o número de livros mal encadernados da tiragem seja

    (a) exactamente 5;

    (b) pelo menos 4;

    (c) não mais do que 2.

17. O número de petroleiros que chegam em cada dia a determinada refinaria é uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de média 2. As actuais instalações do porto podem atender 3 petroleiros por dia; se acontecer que mais de 3 navios pretendam entrar no porto, os excedentes a 3 deverão seguir para outro destino.

    (a) Em determinado dia, qual a probabilidade de se ter de mandar petroleiros para outro porto?

    (b) Qual o número esperado de petroleiros a chegarem por dia?

    (c) Qual o número mais provável de petroleiros a chegarem por dia?

    (d) De quanto deverão ser aumentadas as actuais instalações do porto para permitir manobrar todos os petroleiros em 95% dos dias?

    (e) Deduza a lei de probabilidade do número de petroleiros a serem *atendidos* por dia.

    (f) Qual o número esperado de petroleiros a serem atendidos por dia?

18. O número de acidentes de trabalho, *por mês*, numa obra de construção civil é uma v.a. com distribuição de *Poisson* de valor médio 2.

    (a) Determine a probabilidade de não ocorrerem acidentes num determinado mês.

    (b) Calcule a probabilidade de ocorrerem pelo menos 6 acidentes em *3 meses*.

    (c) Suponha que a obra foi observada durante 6 meses consecutivos. Qual a probabilidade de não ocorrerem acidentes em exactamente 4 meses?

19. Seja X a v.a. relativa ao número de defeitos encontrados numa unidade de determinado artigo e Y a v.a. que indica o número da fábrica que o produziu. A tabela seguinte representa a função de probabilidade conjunta do vector (X, Y):

Y \ X	0	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

    (a) Determine as leis de probabilidade marginais de X e Y.

    (b) Calcule $P(X = 2)$, $P(X \geq 2)$, $P(X \leq Y)$ e $P(Y = 3)$.

    (c) Determine $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, Cov (X, Y) e ρ_{XY}. (**Nota:** $\mathrm{E}(Y) = 1.5$, $\mathrm{V}(Y) = 0.25$).

    (d) O número de defeitos que um artigo apresenta é independente da fábrica que o produziu?

    (e) Sabendo que determinado artigo foi produzido pela fábrica 2, qual a probabilidade de apresentar defeitos?

20. A tabela seguinte indica a função de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y:

Y / X	-1	0	1
-1	0	p	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

(a) Determine o valor de p, justificando a sua resposta.

(b) Determine as funções de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Calcule $P(X = x/Y = 0)$.

(d) Mostre que $cov(X, Y) = 0$ mas as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

21. Seja $f(x, y) = \frac{x+y}{32}$, $x = 1,\ 2$ e $y = 1, 2, 3, 4$ a função de probabilidade conjunta do par de variáveis aleatórias (X, Y).

(a) Deduza as funções de probabilidade marginais de X e Y.

(b) Calcule $P(X > Y), P(Y = 2X), P(X+Y = 3), P(X \leq 3-Y)$, $P(X \geq 1)$ e $P(0 \leq Y \leq 3)$.

(c) Calcule $P(Y = y/X = 2)$.

(d) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

22. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas 1 e 2, respectivamente X_1 e X_2, têm a seguinte função de probabilidade conjunta:

X_1 / X_2	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X_1 e X_2.

(b) Compare o número médio de vendas diárias de discos das duas marcas.

(c) Calcule a probabilidade de, num dia, a marca 1 ser a mais vendida.

(d) Calcule a função de probabilidade de X_2, nos dias em que não há vendas de discos da marca 1.

(e) As vendas diárias de discos das duas marcas são independentes?

23. De um vector aleatório discreto (X, Y) sabe-se que: X e Y são independentes;

$$X \sim B(2, 0.3); \quad P(Y = y) = \begin{cases} 0.5^y \, 0.5^{1-y} & \text{se} \quad y = 0 \vee y = 1 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Construa a tabela representativa da função de probabilidade conjunta do vector (X, Y).

(b) Determine $P(X > Y)$.

2. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Discretas

1. (a)

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

(b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{27} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{27} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{27} & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$ (c) 0.296; 0.704

2. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{8}{9} & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$ (c) 3 (d) 2.1, 1.01

3. (b) $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se} \quad x = 0 \\ 0.1 & \text{se} \quad x \in \{1, 3, 3.5\} \\ 0.2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}$ (c) 0.6, 0.4, 0.2, 0.2, 0.1,04 (d) 1.15, 1.7025, 1.3048

   (e) i. 0.8 ii. $E(Y) = 0$; $V(Y) = V(X)$

4. (a) $k = 2$, $m = -1$ (b) -1.75, 55.7 (c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -2 \\ \frac{3}{8} & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ \frac{5}{8} & \text{se} \quad -1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{8} & \text{se} \quad 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$

   (d) 0, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{8}$, 1

5. (a) $k = \frac{2}{15}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ \frac{7}{15} & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{8}{15} & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{10}{15} & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$ (c) 0 ; 2.93 (d) 0.5

6. —

7. (a) $X \sim \mathcal{B}(6, 0.25)$ (b) 0.178, 0.4285, 0.0376, 1 (c) 1.5 (d) $X \sim \mathcal{H}(6, 20, 5)$; 0.1291

8. $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{2}{3})$

9. (a) $X \sim \mathcal{H}(20, 100, 10)$ (b) 0.095 (c) $\displaystyle\sum_{x=6}^{10} \frac{C_x^{10}\, C_{20-x}^{90}}{C_{20}^{100}}$ (d) 30.290 euros

10. (a) $P(X = x) = C_x^{20}\,(\frac{1}{6})^x\,(\frac{5}{6})^{20-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., 20$ (b) 4.93×10^{-4}

11. 0.0055 (Hipergeométrica); 0.0055 (aproximação à Binomial)

12. 0.0355

13. (a) 0.3487 (b) 0.2639; 1

14. (a) i. 0.1126 ii. 0.0293 iii. 0.9972 iv. 0.5×10^{-4} (b) 0.0007

15. (a) 0.1847 (b) 0.9967 (c) 0.00421

16. (a) 0.0378 (b) 0.9897 (c) 0.0028

17. (a) 0.1429 (b) 2 (c) 1 ou 2 (d) $x = 4$ (mais um petroleiro)

(e)

y_i	0	1	2	3
$p(y_i)$	0.1353	0.2707	0.2707	0.3233

(f) 1.782

18. (a) 0.1353 (b) 0.5543 (c) 0.0038

19. (a)

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$

y_i	1	2
$p(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(b) $\frac{5}{16}, \frac{11}{16}, \frac{7}{16}, 0$ (c) $\frac{30}{16}, \frac{79}{64}, 0.125, 0.225$

(d) Não (e) 0.875

20. (a) $p = \frac{1}{4}$ (b)

x_i	-1	0	1
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

y_i	-1	0	1
$p(y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

(c)

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i/Y = 0)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

21. (a)

x_i	1	2
$p(x_i)$	$\frac{14}{32}$	$\frac{18}{32}$

y_i	1	2	3	4
$p(y_i)$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$

(b) $\frac{3}{32}, \frac{9}{32}, \frac{6}{32}, \frac{8}{32}, 1, \frac{21}{32}$

(c)

y_i	1	2	3	4
$P(Y = y_i/X = 2)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$

(d)Não

22. (a)

x_{1i}	0	1	2
$p(x_{1i})$	0.2	0.65	0.15

x_{2i}	0	1	2
$p(x_{2i})$	0.5	0.36	0.14

(b) $0.95; 0.64$

(c) 0.39 (d)

x	0	1	2
$p(x)$	0.6	0.25	0.15

(e) Não

23. (a)

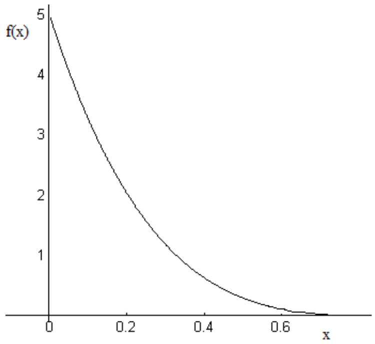
Y X	0	1
0	0.245	0.245
1	0.21	0.21
2	0.045	0.045

(b) 0.3

3. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Contínuas

1. Uma estação de serviço enche os seus depósitos uma vez por semana. A quantidade de combustível procurada por semana é uma variável aleatória (v.a.) X com função densidade f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \vee x > 1 \end{cases} .$$

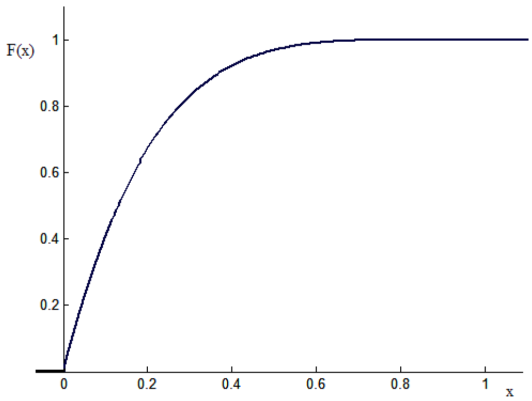


Esboço do gráfico de f

   (a) Qual a probabilidade de, numa semana qualquer, a quantidade de combustível procurada naquela estação de serviço não exceder 0.5 (*unidades de medida*)? Interprete geometricamente o resultado obtido.

   (b) A função distribuição de X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1-(1-x)^5 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



Esboço do gráfico de F

   Usando F, determine:

   i. $P(0.2 < X < 0.5)$;

   ii. a capacidade dos depósitos por forma a que a probabilidade de se esvaziarem numa determinada semana seja de 5%.

2. O tempo diário (em horas) de acesso à *internet* por uma determinada pessoa é representado por uma v.a. X com função densidade e função distribuição dadas, respectivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}\,x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{25}\,(10-x) & \text{se} \quad 5 < x \leq 10 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \vee x > 10 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{50} & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 1 - \frac{(10-x)^2}{50} & , \quad 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & , \quad x > 10 \end{cases}.$$

Assuma que $E(X) = 5$ e $E(X^2) = \frac{175}{6}$.

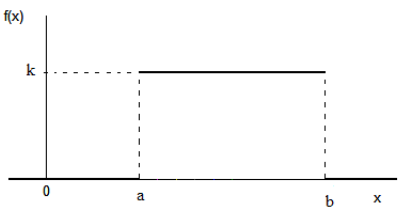
(a) Considere a v.a. $Y = 2X - 5$. Calcule $E(Y)$ e $V(Y)$.

(b) Considere os acontecimentos: $A = \{X \geq 5\}$, $B = \{X < 5\}$ e $C = \{2.5 \leq X < 7.5\}$.

i. Calcule $P(A)$, $P(A/B)$ e $P(A/C)$.

ii. Verifique se A e B são independentes.

3. Seja X uma v. a. com função densidade f, cujo esboço gráfico é apresentado na figura seguinte, onde k, a, e b são constantes reais. Note que $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash [a,\, b]$.



Determine:

(a) o valor da constante k;

(b) o valor esperado, variância e desvio padrão de X;

(c) a função distribuição de X.

4. Alguns cabos utilizados nas instalações de telefones podem ser reaproveitados. Assume-se que o comprimento dos cabos segue uma lei *Uniforme* no intervalo de 1 a 15, $\mathcal{U}_{[1,15]}$, polegadas. Para um cabo escolhido ao acaso, calcule:

(a) o seu comprimento médio e mediana;

(b) a sua variância e desvio padrão;

(c) a probabilidade de que o seu comprimento seja superior a 5 polegadas;

(d) a probabilidade de que o seu comprimento se situe entre 0 e 8 polegadas.

5. A duração de vida, em milhares de horas, de uma componente de certo tipo de aparelho de radar é uma v. a. X com distribuição *Exponencial* de parâmetro 0.1, isto é, com função densidade e distribuição:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 0.1\, e^{-0.1x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 1 - \, e^{-0.1x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(a) Determine a probabilidade de uma componente, escolhida ao acaso, durar menos de 4 mil horas.

(b) Indique a duração média de vida de uma componente e o respectivo desvio padrão.

6. A tensão de corrente X numa instalação eléctrica tem distribuição *Normal* de média $220\,V$ e desvio padrão $2\,V$; $X \sim \mathcal{N}(220, 2)$.

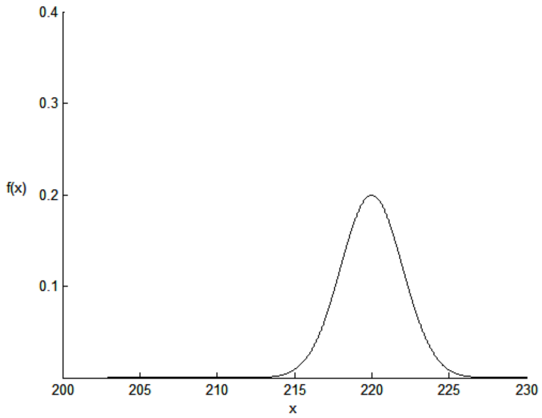


Gráfico da densidade da lei $\mathcal{N}(220, 2)$

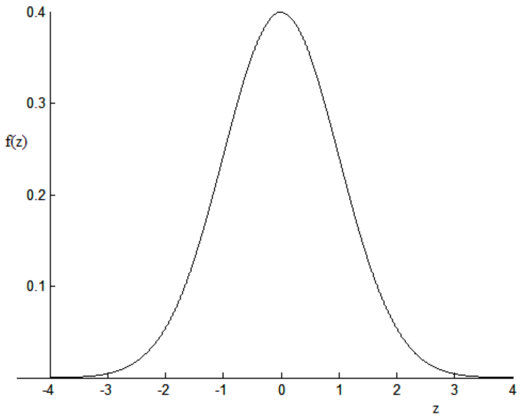


Gráfico da densidade da lei $\mathcal{N}(0, 1)$

Recorrendo à lei *Normal standard*, calcule:

(a) $P(X > 223)$; (b) $P(220 < X < 223)$; (c) $P(X < 218)$; (d) $P(X \leq 223/X > 221)$.

7. Uma empresa fabrica parafusos cujo comprimento é uma v. a. X com distribuição normal de média $0.25\ cm$ e desvio padrão $0.02\ cm$. Considera-se defeituoso um parafuso cujo comprimento não pertença ao intervalo $]0.2, 0.28[$. Calcule a proporção de parafusos defeituosos.

8. O erro de medição do comprimento do raio de um circulo, em mm, é uma variável aleatória X com distribuição normal de média zero e desvio padrão σ.

   (a) Calcule σ de modo a que 9.85% das medições apresentem erros superiores a $6.45\ mm$.

   (b) Determine a percentagem de medições cujo erro varia entre -1 e $1\ mm$.

9. Determinada empresa opera no mercado da União Europeia na área da distribuição de encomendas. A entrega de encomendas é executada em duas etapas. O tempo de entrega duma encomenda na primeira etapa tem distribuição normal de média 24h e desvio-padrão 4h, enquanto que o tempo de entrega na segunda etapa, que leva finalmente a encomenda ao destinatário, segue distribuição normal de média 8h e desvio-padrão 3h. Os tempos nas duas etapas são independentes.

   (a) Calcule a probabilidade do tempo de entrega duma encomenda na primeira etapa exceder 12h.

   (b) Sabendo que na primeira etapa uma encomenda demorou mais de 24h, qual a probabilidade de ser entregue ao destinatário durante as próximas 8h?

   (c) Qual a probabilidade duma encomenda ser entregue ao destinatário num período superior a dois dias após o seu envio?

10. O tempo de combustão de uma fita de magnésio de diâmetro A é normalmente distribuído de média $\mu_A = 420\,seg$ e desvio padrão $\sigma_A = 80\,seg$; para outra fita de diâmetro B, o tempo de combustão é também normalmente distribuído mas com $\mu_B = 280\,seg$ e $\sigma_B = 45\,seg$. Admitindo independência entre os tempos de combustão das fitas tipos A e B, calcule:

    (a) a probabilidade de o tempo de combustão de uma fita tipo A variar entre 400 e $480\,seg$;

    (b) a probabilidade de o tempo de combustão de uma fita de diâmetro B ser superior ao de uma fita de diâmetro A.

11. O peso de uma peça, produzida com determinado material, segue uma distribuição normal de média $140\,g$ e variância $625\,g^2$.

    (a) Determine a probabilidade de uma peça ter peso superior a $120\,g$, sabendo que o seu peso não excede $150\,g$.

    (b) As peças deste tipo são embaladas em caixas contendo 50 unidades. O peso de cada caixa também é aleatório, normalmente distribuído de média $1\,kg$ e desvio-padrão $20\,g$.

        Determine a probabilidade de o peso de uma caixa *completa* exceder $8.5\,kg$.

    (c) Qual a probabilidade de, numa caixa completa, no máximo uma das peças ter peso superior a $150\,g$?

12. Suponha que o consumo de água num dado dia da semana, numa determinada localidade, segue uma distribuição normal de média 200 m^3 e desvio padrão 10 m^3. A capacidade do reservatório que abastece a localidade (e apenas esta) é de 4240 m^3. Sempre que o nível de água no reservatório cai 10% abaixo da sua capacidade é accionado um sistema de alarme.

    (a) Qual a probabilidade de o consumo de água, num dado dia da semana, estar compreendido entre 200 e 210 m^3?

    (b) Suponha que num dado dia a quantidade de água no reservatório se situa 5 % abaixo da sua capacidade; o abastecimento do referido reservatório processa-se, nesse dia, a uma taxa que segue uma distribuição normal de média 100 m^3 e desvio padrão 30 m^3. Supondo que consumo e abastecimento são independentes, qual a probabilidade de o alarme ser accionado?

13. Um inspector de controlo de qualidade rejeita qualquer lote de rolamentos esféricos se 3 ou mais defeituosos são encontrados num lote de 20 testados. Admita que a probabilidade de um rolamento ser defeituoso é 20%.

    (a) Determine a probabilidade de o lote ser rejeitado.

    (b) Qual o número esperado de rolamentos defeituosos num lote?

    (c) Admitindo que vai analisar um lote de 100 rolamentos, calcule um valor *aproximado* para a probabilidade de encontrar pelo menos 24 defeituosos.

14. O número de vírus detectados por mês por um departamento de informática segue uma lei de *Poisson* de média 5.

    (a) Se num determinado mês se detectaram menos de 5 vírus, qual a probabilidade de terem sido detectados exactamente 4 vírus?

    (b) Identifique a distribuição do número de vírus detectados durante um ano (12 meses consecutivos). Para esse período de tempo, calcule um valor *aproximado* para a probabilidade de se detectarem pelo menos 40 vírus.

3. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade Contínuas

1. (a) 0.9688 (b) i. 0.2965 ii. 0.45
2. (a) 5; $\frac{50}{3}$ (b) i. 0.5, 0, 0.5 ii. Não.
3. (a) $\frac{1}{b-a}$ (b) $\frac{b+a}{2}$, $\frac{(b-a)^2}{12}$, $\frac{b-a}{\sqrt{12}}$ (c) $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \leq x < b \\ 1 & , \quad x \geq b \end{cases}$
4. (a) 8; 8 (b) 16.33; 4.04 (c) 0.7143 (d) 0.5
5. (a) 0.33 (b) $10; 10$ (milhares de horas)
6. (a) 0.0668 (b) 0.4332 (c) 0.1587 (d) 0.7835
7. 0.073
8. (a) 5 (b) 0.1586
9. (a) 0.99865 (b) 0.5 (c) $1 - 0.999313 \simeq 0$
10. (a) 0.3721 (b) 0.063
11. (a) 0.6766 (b) 0.0025 (c) $\simeq 0$
12. (a) 0.3413 (b) 0.2×10^{-3}
13. (a) 0.7939 (b) 4 (c) $\simeq 0.16$
14. (a) 0.3984 (b) $P(60)$; $\simeq 0.995$

4. Amostragem e Distribuições Amostrais

1. A quantidade de chuva que cai por dia, expressa em litros por metro quadrado, pode ser descrita por uma v. a. X com distribuição contínua, admitindo a densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{21}{8192\times 10^7}\left(40x^5 - x^6\right) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Admita que $E(X) = 30$ e $V(X) = 33.33$.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ uma amostra aleatória de X, com X_i a quantidade de chuva, em litros por metro quadrado, que cai no i-ésimo dia, $i = 1, ..., 100$.

(a) Indique as propriedades de que as v. a.'s que constituem a amostra aleatória de X gozam.

(b) Considere a v.a. $\overline{X}_{100} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i$.

i. Calcule o valor médio e a variância de $\overline{X}_{100}$.

ii. Justifique que $\dfrac{\overline{X} - 30}{0.577} \stackrel{\cdot}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

iii. Calcule uma aproximação para o valor de $P\left(28.5 < \overline{X}_{100} \leq 31.5\right)$. Interprete o resultado.

2. A energia em *Joules* (J) de qualquer partícula de um sistema é uma variável aleatória com distribuição *Exponencial* de parâmetro 2. A energia do sistema é a soma da energia das suas partículas que são independentes. Admita que determinado sistema β contém 1600 partículas.

(a) Indique, justificando, a lei aproximada da energia do sistema β.

(b) Calcule a probabilidade (aproximada) da energia do sistema β variar entre 780 e 840 J.

3. O erro de medição do comprimento do raio de um circulo, em *mm*, é uma variável aleatória X com distribuição normal de média zero e desvio padrão 5. Considere uma amostra aleatória $X_1, X_2, ..., X_{10}$, daquela população, e as seguintes estatísticas:

$$T_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \qquad T_2 = \frac{5X_1 + 5X_{10}}{10}$$

(a) Indique (justificando) as distribuições amostrais de T_1 e de T_2.

(b) Calcule e interprete $P(T_1 > 3)$.

4. Seja X uma medida aleatória de valor esperado $\dfrac{2}{3}$ e variância $\dfrac{8}{9}$. Considere uma amostra aleatória de X, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, e a média dessa amostra $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, qual a lei de $\overline{X}_n$? Justifique.

(b) Qual deverá ser a dimensão mínima da amostra para que $P(\overline{X}_n > 0.8) \leq 0.0119$?

5. As normas ambientais em vigor exigem que a concentração diária de certo poluente não exceda 120 ng/m^3 (*nanogramas por metro cúbico*). Admita que essa concentração segue uma lei normal de valor esperado 100 e desvio padrão 9.71 ng/m^3, e que as concentrações em dias distintos são independentes.

(a) Mostre que em 1.97% dos dias as normas ambientais não são cumpridas.

(b) Qual a probabilidade da concentração média em 15 dias, escolhidos aleatoriamente, exceder 120 ng/m^3?

4. Amostragem e Distribuições Amostrais

1. (b) i. 30; 0.3333   ii. $\overline{X}_{100} \dot{\sim} N(30,\, 0.577)$ iii. 0.9906
2. (a) $\frac{S-800}{\sqrt{400}} \dot{\sim} N(0,1)$ (b) 0.8185
3. (a) $T_1 \sim N(0,\, \frac{5}{\sqrt{10}})$; $T_2 \sim N(0,\, \sqrt{12.5})$ (b) 0.0294
4. (a) $\overline{X}_n \dot{\sim} N(\frac{2}{3},\, \sqrt{\frac{8}{9n}})$ (b) 256
5. (b) $\simeq 0$

5. Estimação

1. Uma fábrica produz cabos eléctricos cujo diâmetro X (em milímetros) segue uma lei *Uniforme* no intervalo de 5 a $5+\theta$, $X \sim \mathcal{U}_{[5,\,5+\theta]}$, onde θ é um parâmetro real desconhecido.

Considere uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X $(n \in \mathbb{N})$.

   (a) Considere o estimador de θ, dado por

$$\hat{\Theta}_n = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 5\right).$$

   Prove que $\hat{\Theta}_n$ é um estimador cêntrico de θ.

   (b) Seleccionaram-se aleatoriamente **20** cabos eléctricos da produção da fábrica e registaram-se os respectivos diâmetros. Estes foram posteriormente classificados como indicado no quadro seguinte:

classes	$]5, 5.2]$	$]5.2, 5.4]$	$]5.4, 5.6]$	$]5.6, 5.8]$	$]5.8, 6]$
efectivos	4	3	5	4	4

   i. Determine a média e a variância desta amostra.

   ii. Indique uma estimativa cêntrica para θ, com base nesta amostra.

2. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n, $n \in \mathbb{N}$, de uma população X cuja lei de probabilidade é caracterizada pela seguinte função densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta}\left(1 - \dfrac{x}{\theta}\right) & \text{se} \quad 0 < x < \theta \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}, \text{onde} \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

   Assuma que $E(X) = \frac{\theta}{3}$.

   (a) Mostre que $\hat{\Theta}_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é um estimador enviesado de θ.

   (b) Construa, a partir de $\hat{\Theta}_1$, um outro estimador de θ, $\hat{\Theta}_2$, que seja cêntrico.

   (c) Suponha que se recolheu, ao acaso, uma amostra de X, de dimensão 100, $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$, para a qual se constatou que $\overline{x} = 20.2$. Indique uma estimativa cêntrica de θ. Sugira uma estimativa para $E(X)$.

3. Uma máquina de parafusos está regulada para produzir em série peças de diâmetro médio 150 mm. Admite-se que os diâmetros são normalmente distribuídos. Uma amostra aleatória de 20 parafusos, extraída da população, forneceu os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2900; \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 432500.$$

   Em face destes valores e utilizando um grau de confiança de 0.95, verifique se será de admitir irregularidade de produção na máquina supondo:

   (a) σ conhecido e igual a 25 mm;

   (b) σ desconhecido.

4. Para estudar a tensão de ruptura de certo tipo de algodão fizeram-se 10 observações com os seguintes resultados, em Kg:

   7.4; 7.8; 7.1; 6.9; 7.3; 7.6; 7.3; 7.4; 7.7; 7.3

   Admitindo que a tensão de ruptura segue uma distribuição normal com variância 0.08, determine:

   (a) uma estimativa para a tensão de ruptura média;

   (b) um intervalo com 95% de confiança para a tensão de ruptura média;

   (c) se pretender que o erro dessa estimativa não ultrapasse 0.07, em 95 % dos casos, quantos elementos deveria incluir na amostra?

5. Sabe-se que as classificações X de determinado curso são normalmente distribuídas. Foi recolhida uma amostra de 42 classificações para os quais se obteve

$$\sum_{i=1}^{42} x_i = 588 \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{42} x_i^2 = 8400.$$

   (a) Determine estimativas cêntricas para a média e para a variância da população.

   (b) Qual o grau de confiança que permite afirmar que o verdadeiro valor da média se encontra no interior de um intervalo de amplitude 1.224?

6. Mediu-se uma grandeza X 10 vezes, em condições idênticas, tendo-se obtido os seguintes resultados:

   125.3; 124.8; 124.8; 125.1; 125.0; 125.1; 124.7; 125.4; 125.2; 125.0

   Admitindo a normalidade da população, calcule:

   (a) estimativas da média e do desvio-padrão da população;

   (b) um intervalo de confiança para a média da população ao grau 0.98;

   (c) um intervalo de confiança para o desvio padrão da população ao grau 0.95.

7. As medidas dos diâmetros de uma amostra aleatória de 200 rolamentos esféricos apresentam uma média de 0.824 polegadas e desvio padrão de 0.042 polegadas. Determine um intervalo com 99% confiança para o valor médio dos diâmetros.

8. Um ecologista ao pretender investigar o nível de poluição por mercúrio em determinado lago, retirou aleatoriamente 20 peixes do referido lago e mediu a concentração de mercúrio nos mesmos. A amostra recolhida foi resumida no seguinte quadro:

classes	$]0,1]$	$]1,2]$	$]2,3]$	$]3,4]$	$]4,5]$	$]5,6]$
efectivos	1	4	6	4	3	2

   (a) Construa o histograma, e calcule a média e a variância da amostra.

   (b) Admitindo a normalidade da população, determine um intervalo de confiança para a variância da população em estudo, ao grau de confiança de 0.95. Que conclusão pode tirar sobre a variação do nível de poluição de peixe para peixe relativamente ao valor médio deste nível?

9. Num laboratório registaram-se os seguintes pontos de fusão de chumbo (em $^\circ C$) numa amostra proveniente de determinado fornecedor:

   329; 345; 330; 328; 342; 334; 337; 341; 343

   Assumindo a normalidade dos pontos de fusão:

(a) determine estimativas centradas para o ponto de fusão médio do chumbo e variância;

(b) o fornecedor garante que em 98% dos casos o ponto de fusão médio pode ser considerado 335; através da determinação de um intervalo de confiança conveniente, o que pode dizer acerca da garantia do fornecedor?

(c) indique um intervalo de confiança a 99% para o desvio padrão da população.

10. Seja X uma v.a. com distribuição normal $N(\mu, \sigma)$ e $(X_1, X_2, ..., X_9)$ uma amostra aleatória da população X. Uma realização desta amostra conduziu ao seguinte intervalo de confiança para μ, a 90%: $]11.728, 12.472[$.

    (a) Determine estimativas para μ e σ^2.

    (b) Como varia a amplitude do intervalo de confiança para μ se:

        i. aumentarmos apenas o grau de confiança?

        ii. aumentarmos apenas a dimensão da amostra?

    (c) Determine um intervalo de confiança a 90% para o desvio padrão σ da população .

11. Certa empresa opera recentemente no mercado da União Europeia na área da distribuição de encomendas. O tempo de entrega duma encomenda, X, através desta nova empresa ainda não está bem caracterizado.

    (a) Considere duas amostras aleatórias, $X_1, X_2, ..., X_\mathbf{n}$ e $X_1', X_2', ..., X_\mathbf{m}'$, com $\mathbf{m} < \mathbf{n}$, de X.

        i. Defina amostra aleatória.

        ii. Mostre que as médias amostrais, respectivamente $\overline{X}_\mathbf{n}$ e $\overline{X}_\mathbf{m}$, são estimadores centrados para o tempo médio de entrega duma encomenda, e compare-os em termos de eficiência.

    (b) A empresa garante que todas as encomendas chegam ao seu destinatário, **em média**, em menos de 48 horas, com uma **variabilidade** máxima de 8 horas.

    Para avaliar este desempenho, foram recolhidos os tempos (em horas) relativos a uma amostra de 51 encomendas, tendo-se obtido os seguintes resultados:

    $$\sum_{i=1}^{51} x_i = 3250; \ \sum_{i=1}^{51} x_i^2 = 277500.$$

    O que pode concluir, **com confiança 95**%, sobre o desempenho da empresa relativamente às **condições** de entrega **referidas**?

12. De uma população activa de 500 pessoas, de certa região, foram encontrados 41 desempregados. Determine um intervalo de confiança a 95% para a taxa de desempregados dessa região.

13. Um grupo de cientistas defende a tese de que a taxa de mortalidade devida a certa doença é aproximadamente 10%.

    (a) Supondo verdadeira a tese daqueles cientistas, calcule a probabilidade de em 10 pessoas, observadas ao acaso entre as afectadas pela referida doença, haver pelo menos uma que acabe por falecer devido à mesma.

    (b) Com o objectivo de tirar conclusões sobre a veracidade daquela tese, recolheu-se uma amostra de 500 pessoas afectadas pela doença, das quais faleceram 60. Determine um intervalo real que contenha, com uma confiança de 0.9, a proporção de indivíduos que faleceram com tal doença. Terão os cientistas razão?

14. Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão n de uma variável aleatória real X de média μ e variância σ^2.

    (a) Prove que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é um estimador cêntrico de μ.

    (b) Com o objectivo de estudar a duração de vida média de determinado tipo de peças, recolheu-se uma amostra de 110 elementos que se resumiu no quadro seguinte:

Duração (milhares de horas)	]4,4.5]	]4.5,5]	]5,5.5]	]5.5,6]
número de peças	25	35	30	20

        i. Construa o histograma da amostra e calcule estimativas cêntricas para a média e para a variância da população em estudo.

        ii. Supondo que a duração de vida das referidas peças é normalmente distribuída (será razoável?), determine um intervalo de confiança para a sua média, ao grau 0.95.

5. Estimação

1. (a) $E(\hat{\Theta}_n) = \theta$ (b) i. $\overline{x} = 5.51$; $s_n^2 = 0.082$ ii. $\hat{\theta}_{20} = 1.02$
2. (b) $E(\hat{\Theta}_1) = \frac{n\theta}{3}$ (c) $\hat{\Theta}_2 = \frac{3}{n}\hat{\Theta}_1$ (d) 60.6; 20.2
3. (a) $IC_\mu =]134.04; 155.96[$ (b) $IC_\mu =]133.24; 156.76[$
4. (a) $\hat{\mu} = 7.38$ (b) $IC_\mu =]7.205; 7.555[$ (c) $n \geq 63$
5. (a) $\hat{\mu} = \overline{x} = 14\,;\ \ \hat{\sigma}^2 = s_n^2 = 4.098$ (b) 0.95
6. (a) $\overline{x} = 125.04\,;\ \ s_n = 0.227$ (b) $IC_\mu =]124.84; 125.243[$ (c) $IC_\sigma =]0.156; 0.4144[$
7. $IC_\mu =]0.8163; 0.8316[$
8. (a) $\overline{x} = 3\,;\ \ s_n^2 = 1.947$ (b) $IC_{\sigma^2} =]1.124; 4.152[$
9. (a) $\overline{x} = 336.56\,;\ \ s_n^2 = 42.772$ (b) $IC_\mu =]330.247; 342.87[$ (c) $IC_\sigma =]3.9437; 15.9797[$
10. (a) $\overline{x} = 12.1\,;\ \ s_n^2 = 0.36$ (b) i. aumenta ii. diminui (c) $IC_\sigma =]0.430; 1.023[$
11. (b)$I.C._\mu =]53.435, 74.025[\ ;\ I.C._\sigma =]31.39, 46.63[$
12. $IC_p =]0.058; 0.106[$
13. (a) 0.6513 (b) $IC_p =]0.096; 0.144[$
14. (a) $E(\overline{X}) = \mu$ (b) i. $\overline{x} = 4.955\,;\ s_n^2 = 0.263$ ii. $IC_\mu =]4.859; 5.051[$

6. Testes de Hipóteses Paramétricos

1. Uma empresa garante que, se os seus pneus forem utilizados em condições normais, têm um tempo médio de vida superior a 40000 Km. Uma amostra constituída por 31 pneus, utilizados em condições normais, proporcionou os seguintes dados: $\overline{x} = 43200$ e $s_{31} = 8000$ km.

   Teste, ao nível de significância de 5%, se os pneus têm a vida média que a empresa reivindica.

2. Um molde de injecção tem produzido peças de um determinado material isolante térmico com uma resistência à compressão de valor médio 5.18 kg/cm^2 e variância 0.0625 $(kg/cm^2)^2$. As últimas 12 peças produzidas nesse molde foram recolhidas e ensaiadas, tendo-se obtido para a resistência média à compressão o valor 4.95 kg/cm^2. Assuma que a resistência à compressão tem distribuição normal.

   Poder-se-á afirmar, ao nível de significância de 0.05, que as peças produzidas recentemente são menos resistentes do que o habitual?

3. Considere uma fábrica que produz cabos eléctricos cujos diâmetros são normalmente distribuídos com valor médio μ e desvio padrão $\sigma > 0$. Seleccionaram-se aleatoriamente 20 cabos eléctricos da produção da fábrica e registaram-se os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 130.27; \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 849.98\,.$$

   Com base na informação anterior, teste ao nível de significância de 1%:

   (a) $H_o : \mu = 6.3$ **vs** $\mu \neq 6.3$;

   (b) $H_o : \sigma = 0.5$ **vs** $\sigma = 1$.

4. Certo equipamento de empacotamento automático encontra-se regulado para encher embalagens de 1000 gramas de certo produto. O seu deficiente funcionamento origina prejuízo para a empresa. Aceita-se da experiência passada que o peso das embalagens se comporta normalmente com desvio padrão de 12 gramas. Para verificar a afinação do equipamento, seleccionaram-se aleatoriamente 9 embalagens com os resultados: $\overline{x} = 993.78\,gr$ e $s_9 = 11.29\,gr$.

   Teste, ao nível de significância de 10%, se a máquina está a encher correctamente ou não as embalagens.

5. Numa fábrica de automóveis existe uma secção destinada à produção de determinado tipo de peças, cujo comprimento médio deverá ser aproximadamente de 2.5 cm. A secção de controlo de qualidade da referida fábrica afirma que as peças apresentam comprimentos inferiores aos exigidos.

   Com o objectivo de avaliar a veracidade da afirmação proferida pela secção de controlo de qualidade, seleccionou-se ao acaso uma amostra de 26 peças na produção de um dia, tendo sido obtido os resultados seguintes:

$$\sum_{i=1}^{26} x_i = 52; \qquad \sum_{i=1}^{26} (x_i - \overline{x})^2 = 13\,.$$

   Admitindo a normalidade da população subjacente aos dados, teste, ao nível de significância de 5%, se secção de controlo de qualidade tem razão.

6. Sabe-se que o tempo diário (em horas) de utilização de um determinado terminal de computador é normalmente distribuído. Foram observados os tempos de utilização durante 10 dias consecutivos, tendo sido obtido os resultados seguintes:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 56; \qquad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 129.6\,.$$

   (a) Estime pontualmente o tempo médio diário (em horas) de utilização do referido terminal e a variância.

   (b) Determine intervalos de confiança a 95% para a média e variância da população em estudo.

   (c) Teste, ao nível de significância de 5%:

      (i) se o tempo médio diário de utilização do terminal é superior a 6 horas;

      (ii) se o desvio padrão excede as 8 horas.

7. Um agente de compras de um determinado supermercado testou uma amostra aleatória de 100 latas de conserva na própria fábrica de enlatados. O peso médio (em decagramas) encontrado por lata foi de 15.97 com $s_{100} = 0.15$. O fabricante afirma que o peso líquido médio por lata era de 16. Pode esta afirmação ser rejeitada? (use $\alpha = 0.1$)

8. Uma determinada pessoa, interessada em alugar uma loja, é informada que a renda média na área é de 750 euros. Suponha que, para o tipo de zona em questão, é possível dizer que as rendas têm distribuição aproximadamente normal com desvio padrão 50 euros. Para uma amostra aleatória de 15 lojas, a renda média foi de 800 euros.

   A pessoa em causa está convencida de que o valor de 750 euros para a renda média está desactualizada. Terá a pessoa razão? Justifique convenientemente a sua resposta, utilizando um teste adequado a 2% de significância.

6. Testes de Hipóteses Paramétricos

1. R.C.=$[1.645, +\infty[$; Rejeitar H_0.
2. R.C.=$]-\infty, -1.645]$; Rejeitar H_0.
3. (a) R.C.=$]-\infty, -2.861] \cup [2.861, +\infty[$; Não rejeitar H_0.

   (b) R.C.=$[36.19, +\infty[$; Não rejeitar H_0.
4. R.C.=$]-\infty, -1.645] \cup [1.645, +\infty[$; Não rejeitar H_0.
5. R.C.=$]-\infty, -1.708]$; Rejeitar H_0.
6. (a) $\overline{x} = 5.6$; $s^2_{10} = 14.4$.

   (b) $IC_\mu =]2.8856; 8.3144[$; $IC_{\sigma^2} =]6.821; 48[$.

   (c) R.C.(μ)=$[1.833, +\infty[$; Não rejeitar H_0. R.C.(σ)=$[16.92, +\infty[$; Não rejeitar H_0.
7. R.C.=$]-\infty, -1.645] \cup [1.645, +\infty[$; Rejeitar H_0.
8. R.C.=$[2.06, +\infty[$; Rejeitar H_0.