EXAME DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS - ÉPOCA NORMAL

07 de Julho de 2022 **Versão 101** Duração: 2h30min

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução **trabalhe com 4 casas decimais** (pelo menos);
- Na resolução de todas as questões que **não sejam** de escolha múltipla justifique todos os cálculos e deduções.

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.75$, $\mathrm{P}(B/\overline{A}) = \frac{3}{7}$ e $\mathrm{P}(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $\mathrm{P}(B)$ é:

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{26}{35}$ **(D)** $\frac{9}{35}$

(3.0) **2.** Uma empresa de desenvolvimento de *software* efetuou um estudo sobre o comportamento dos seus clientes aquando dos pedidos de orçamentos. Verificou que a 40% dos clientes que propõem alterações ao pedido inicial, é feito um aditamento ao orçamento; a 15% dos clientes que não propõem alterações ao pedido inicial, não é feito um aditamento ao orçamento e que 65% dos clientes propõem alterações ao pedido inicial.

(a) O João afirmou que, escolhendo um cliente ao acaso, é mais provável que esse cliente proponha alterações ao pedido inicial sem ser feito um aditamento ao orçamento, do que seja feito um aditamento ao orçamento e não tenham sido propostas alterações ao pedido inicial. Indique, justificando, se o João tem razão.

(b) O João efetuou um aditamento a um orçamento. Ele apostou então que o cliente tinha proposto alterações ao pedido inicial. Qual é a probabilidade do João ganhar a aposta?

(c) Os acontecimentos, "o cliente propõe alterações ao pedido inicial" e "é efetuado um aditamento ao orçamento" são independentes? Justifique.

(1.0) **3.** O guarda redes de uma dada equipa de futebol defende 10% das grandes penalidades. A final da taça vai ser decidida pela marcação de 5 grandes penalidades. A probabilidade de que o guarda redes defenda pelo menos uma grande penalidade na final da taça é igual a:

(A) 0.5905 **(B)** 0.0086 **(C)** 0.4095 **(D)** 0.0815

(1.0) **4.** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes tais que $X \sim \mathcal{P}(0.2)$ e $Y \sim \mathcal{P}(0.4)$. Determine $\mathrm{P}(X + Y = 3)$.

(4.5) **5.** Considere o vetor aleatório (X, Y) que representa o número de consultas anuais que um grupo de utentes requereu no serviço público, X, e no serviço privado, Y, caracterizado pela seguinte função de probabilidade conjunta.

X \ Y	2	3	4
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

a) Determine as leis de probabilidade marginal do número de consultas no serviço público e no serviço privado.

b) Construa a função de probabilidade do número de consultas no serviço privado, apenas para os utentes que tiveram 2 consultas no público.

c) Qual a probabilidade de, ao escolher um utente ao acaso, este ter tido 2 consultas no serviço privado, sabendo que teve menos de 6 consultas, ou seja, $\mathrm{P}(Y = 2/X + Y \leq 5)$?

d) Será que o número de consultas no serviço público é independente do número de consultas no serviço privado? Justifique.

(2.5) **6.** Uma pequena estação de serviço de aldeia é abastecida com gasolina todos os sábados à tarde. O seu volume de vendas semanal, em milhares de litros, é uma variável aleatória X com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

sendo o seu valor esperado igual a 0.5 com uma variância de 0.05.

(a) Se numa dada altura da semana já foram vendidos 200 litros de gasolina, a probabilidade de se venderem menos de 750 litros nessa semana é:

(A) 0.7396 **(B)** 0.8256 **(C)** 0.8438 **(D)** 0.1744

(b) Analisando as vendas realizadas no último ano (52 semanas), determine a probabilidade do número médio de vendas semanais ter sido inferior a 600 litros. **Observação:** *Nos cálculos que efetuar conserve 4 casas decimais.*

(2.5) **7.** Uma empresa produtora de equipamentos para realidade virtual dispõe de dois protótipos independentes, A e B, para o fabrico de óculos e pretende compará-los no que diz respeito à sua velocidade de produção. Sabe-se que os tempos de produção dos dois protótipos A e B seguem distribuições normais de médias 9.5 minutos e 10.4 minutos, respetivamente, e que os desvios-padrão são 1 minuto e 1.25 minutos, respetivamente.

(a) Determine a probabilidade do tempo de produção do protótipo A ser inferior ao tempo de produção do protótipo B.

(b) O número mínimo de produtos que a empresa tem de testar em cada protótipo para garantir, com 95% de probabilidade, que o tempo médio de produção do protótipo A é inferior ao tempo médio de produção do protótipo B é:

(A) 9 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 13

(4.5) **8.** O tempo de vida de um componente eletrónico, em milhares de horas, tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & , \quad 0 \leq x \leq \theta, \quad \theta > 0 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

Para conhecer o comportamento desta variável aleatória, a empresa observou as durações de 50 componentes escolhidos aleatoriamente da produção diária, tendo verificado que

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 273 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1732.5$$

(a) Prove que o valor médio da variável aleatória X é dado, em função de θ, por $\dfrac{2}{3}\theta$.

(b) Determine uma estimativa cêntrica para θ.

(c) Determine um intervalo com 95% de confiança para a média do tempo de vida do componente eletrónico.

(d) Averigue com uma significância de 2% se o tempo médio de vida um componente eletrónico é superior a 5500 horas.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática (LEI, LEI-PL, LEICE)
Exame de Métodos Estatísticos - Época Normal

07 de Julho de 2022 **Versão 102** Duração: 2h30min

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução **trabalhe com 4 casas decimais** (pelo menos);
- Na resolução de todas as questões que **não sejam** de escolha múltipla justifique todos os cálculos e deduções.

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.75$, $\mathrm{P}(B/\overline{A}) = \dfrac{3}{7}$ e $\mathrm{P}(B/A) = \dfrac{1}{5}$. O valor de $\mathrm{P}(B)$ é:

(A) $\dfrac{1}{4}$ **(B)** $\dfrac{9}{35}$ **(C)** $\dfrac{26}{35}$ **(D)** $\dfrac{3}{4}$

(3.0) **2.** Uma empresa de desenvolvimento de *software* efetuou um estudo sobre o comportamento dos seus clientes aquando dos pedidos de orçamentos. Verificou que a 40% dos clientes que propõem alterações ao pedido inicial, é feito um aditamento ao orçamento; a 15% dos clientes que não propõem alterações ao pedido inicial, não é feito um aditamento ao orçamento e que 65% dos clientes propõem alterações ao pedido inicial .

(a) O João afirmou que, escolhendo um cliente ao acaso, é mais provável que esse cliente proponha alterações ao pedido inicial sem ser feito um aditamento ao orçamento, do que seja feito um aditamento ao orçamento e não tenham sido propostas alterações ao pedido inicial. Indique, justificando, se o João tem razão.

(b) O João efetuou um aditamento a um orçamento. Ele apostou então que o cliente tinha proposto alterações ao pedido inicial. Qual é a probabilidade do João ganhar a aposta?

(c) Os acontecimentos, "o cliente propõe alterações ao pedido inicial" e "é efetuado um aditamento ao orçamento" são independentes? Justifique.

(1.0) **3.** O guarda redes de uma dada equipa de futebol defende 10% das grandes penalidades. A final da taça vai ser decidida pela marcação de 5 grandes penalidades. A probabilidade de que o guarda redes defenda pelo menos uma grande penalidade na final da taça é igual a:

(A) 0.4095 **(B)** 0.5905 **(C)** 0.0086 **(D)** 0.0815

(1.0) **4.** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes tais que $X \sim \mathcal{P}(0.2)$ e $Y \sim \mathcal{P}(0.4)$. Determine $\mathrm{P}(X+Y=3)$.

(4.5) **5.** Considere o vetor aleatório (X,Y) que representa o número de consultas anuais que um grupo de utentes requereu no serviço público, X, e no serviço privado, Y, caracterizado pela seguinte função de probabilidade conjunta.

X \ Y	2	3	4
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

a) Determine as leis de probabilidade marginal do número de consultas no serviço público e no serviço privado.

b) Construa a função de probabilidade do número de consultas no serviço privado, apenas para os utentes que tiveram 2 consultas no público.

c) Qual a probabilidade de, ao escolher um utente ao acaso, este ter tido 2 consultas no serviço privado, sabendo que teve menos de 6 consultas, ou seja, $\mathrm{P}(Y=2/X+Y\leq 5)$?

d) Será que o número de consultas no serviço público é independente do número de consultas no serviço privado? Justifique.

(2.5) **6.** Uma pequena estação de serviço de aldeia é abastecida com gasolina todos os sábados à tarde. O seu volume de vendas semanal, em milhares de litros, é uma variável aleatória X com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

sendo o seu valor esperado igual a 0.5 com uma variância de 0.05.

(a) Se numa dada altura da semana já foram vendidos 200 litros de gasolina, a probabilidade de se venderem menos de 750 litros nessa semana é

(A) 0.7396 **(B)** 0.8256 **(C)** 0.8438 **(D)** 0.1744

(b) Analisando as vendas realizadas no último ano (52 semanas), determine a probabilidade do número médio de vendas semanais ter sido inferior a 600 litros. **Observação:** *Nos cálculos que efetuar conserve 4 casas decimais.*

(2.5) **7.** Uma empresa produtora de equipamentos para realidade virtual dispõe de dois protótipos alternativos, A e B, para o fabrico de óculos e pretende compará-los no que diz respeito à sua velocidade de produção. Sabe-se que os tempos de produção dos dois protótipos A e B seguem distribuições normais de médias 9.5 minutos e 10.4 minutos, respetivamente, e que os desvios-padrão são 1 minuto e 1.25 minutos, respetivamente.

(a) Determine a probabilidade do tempo de produção do protótipo A ser inferior ao tempo de produção do protótipo B.

(b) O número mínimo de produtos que a empresa tem de testar em cada protótipo para garantir, com 95% de probabilidade, que o tempo médio de produção do protótipo A é inferior ao tempo médio de produção do protótipo B é:

(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 9 **(D)** 13

(4.5) **8.** O tempo de vida de um componente eletrónico, em milhares de horas, tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & , \quad 0 \leq x \leq \theta, \quad \theta > 0 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

Para conhecer o comportamento desta variável aleatória, a empresa observou as durações de 50 componentes escolhidos aleatoriamente da produção diária, tendo verificado que

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 273 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1732.5$$

(a) Prove que o valor médio da variável aleatória X é dado, em função de θ, por $\frac{2}{3}\theta$.

(b) Determine uma estimativa cêntrica para θ.

(c) Determine um intervalo com 95% de confiança para a média do tempo de vida do componente eletrónico.

(d) Averigue com uma significância de 2% se o tempo médio de vida um componente eletrónico é superior a 5500 horas.