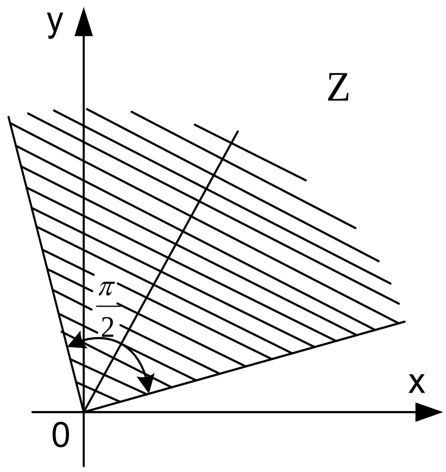
Министерство образования и науки России

Севастопольский государственный университет

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей дневной формы обучения



Севастополь
2015

УДК 519.442

Теория функций комплексного переменного. Методические указания и варианты контрольных заданий по теме модуля в дисциплине «Высшая математика» для студентов технических специальностей дневной формы обучения / Сост. Е.Г. Бойко, Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. – 32 с.

Целью настоящих методических указания является помощь студентам при изучении модуля по теме «Теория функций комплексного переменного» дисциплин «Высшая математика» и «Математический анализ». При работе над этой темой рекомендуется использовать литературу, приведенную в конце методических указаний.

Данные методические указания содержат пример решения нулевого варианта, содержащего задания аналогичные индивидуальным заданиям для самостоятельного решения с краткими теоретическими сведениями, а также варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения, которые можно использовать по теме «Теория функций комплексного переменного» для проведения модульного контроля.

Методические указания предназначены для студентов дневной формы обучения инженерных специальностей.

Методические указания утверждены на заседании кафедры высшей математики, протокол № 6 от 01.07.2015 г.

Допущено учебно-методическим центром и научно-методическим советом СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент – Ледяев С.Ф., канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Определить и построить на комплексной плоскости Z линии, заданные уравнениями: а) $|z+2-3i|=2$, б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$

Решение. а) Чтобы определить, какая линия задана уравнением $|z+2-3i|=2$, воспользуемся определением модуля комплексного числа. С учетом, что $z=x+iy$, получим:

$$|z+2-3i|=|x+iy+2-3i|=|x+2+i(y-3)|=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}\ ,$$

тогда,

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=2 \text{ или } (x+2)^2+(y-3)^2=4.$$

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $z_0=-2+3i$ радиуса 2 (рисунок 1).

б) Преобразуем заданное уравнение. Так как $z=x+iy$, получим:

$$\frac{z-1}{z-i}=\frac{x+iy-1}{x+iy-i}=\frac{(x-1)+iy}{x+i(y-1)}=\frac{\big((x-1)+iy\big)\big(x-i(y-1)\big)}{\big(x+i(y-1)\big)\big(x-i(y-1)\big)}=$$

$$=\frac{x^2-x+y^2-y+i(x+y-1)}{x^2+(y-1)^2},$$

следовательно,

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i}=\frac{x^2-x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}=2.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$x^2-x+y^2-y=2x^2+2(y^2-2y+1)\Rightarrow\ (x+0{,}5)^2+(y-1{,}5)^2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$ является уравнением окружности радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $z_0=-0{,}5+1{,}5i$ (рисунок 2).

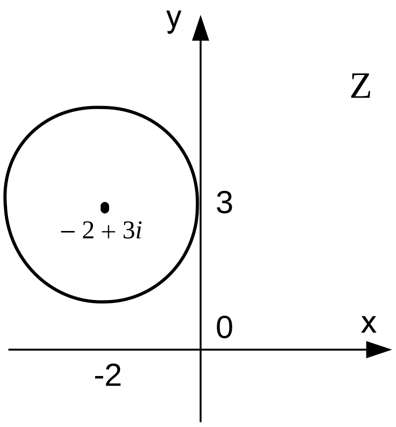


Рисунок 1 – Линия, заданная уравнением $|z+2-3i|=2$

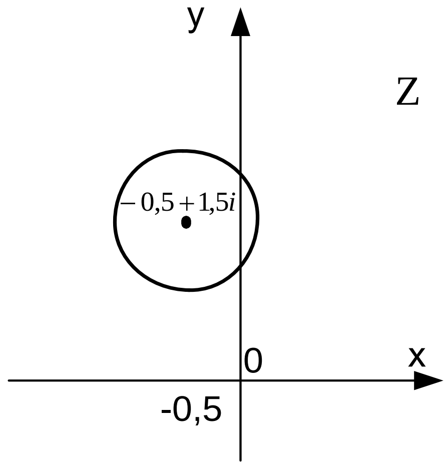


Рисунок 2 – Линия, заданная уравнением $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$

ЗАДАНИЕ 2. Изобразить на комплексной плоскости Z множества точек, определяемые следующими неравенствами или системами неравенств:

а) $1 \le |z-3+2i| < 2$, б) $\left|\arg z - \dfrac{\pi}{3}\right| < \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. а) Искомое множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям: $1 \le |z-3+2i|$ и $|z-3+2i| < 2$. Пользуясь определение модуля комплексного числа и учитывая, что $z = x+iy$, преобразуем выражение $|z-3+2i|$:

$$|z-3+2i| = |x+iy-3+2i| = |x-3+i(y+2)| = \sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\ .$$

Следовательно, неравенство $1 \le |z-3+2i|$ определяет внешность единичного круга с центром в точке $z_0 = 3-2i$, включая границу окружности, а неравенство $|z-3+2i| < 2$ – круг радиуса 2 с центром в той же точке $z_0 = 3-2i$, без точек окружности, его ограничивающей. Поэтому данное множество точек представляет собой кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0 = 3-2i$ (рисунок 3).

б) Так как неравенство $\left|\arg z-\frac{\pi}{3}\right|<\frac{\pi}{4}$ равносильно неравенству $-\frac{\pi}{4}<\arg z-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}$, то ему удовлетворяют все точки z, лежащие внутри угла, равного $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$, не включая его границы, с вершиной в начале координат (рисунок 4).

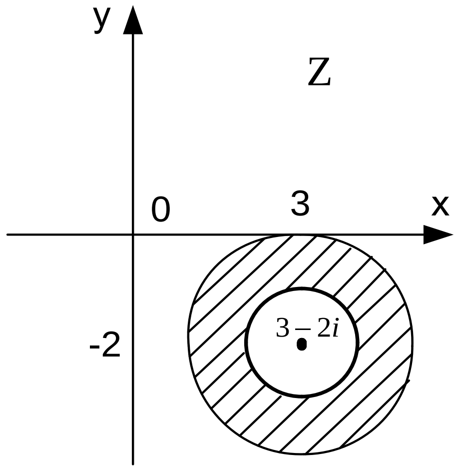


Рисунок 3 – Множество точек, определяемых системой неравенств

$1\le|z-3+2i|<2$

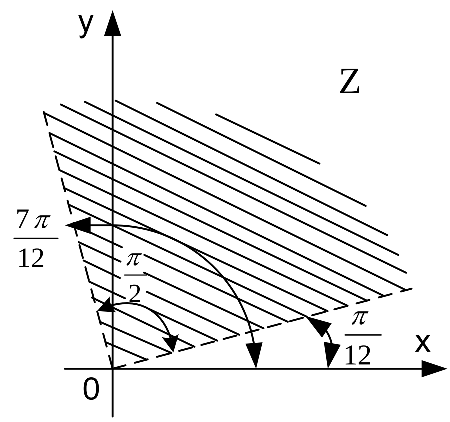


Рисунок 4 – Множество точек, определяемых неравенством

$\left|\arg z-\frac{\pi}{3}\right|<\frac{\pi}{4}$

ЗАДАНИЕ 3. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию $w=f(z)$, найти ее производную, если она существует: а) $w=\sin 2z$; б) $w=(z+2)\operatorname{Re}(z-1)$.

Решение. Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена в некоторой точке z и ее окрестности. Если существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$

то он называется производной функции $f(z)$ точке z и обозначается $f'(z)$, а функция $f(z)$ называется дифференцируемой в $f(z)$ [1].

Пусть действительные функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности точки $z = x + iy$.

Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, определенная в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, была дифференцируема в точке z, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

С учетом условий Коши-Римана (1) производную функции $f(z)$ можно находить по формулам:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема не только в данной точке z, но и некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется аналитической в этой области.

Если для функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в области D функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны, то выполнения условий (1) достаточно, чтобы функция $w = f(z)$ была аналитической в этой области [2].

Производная аналитической функции может быть найдена по правилам дифференцирования функции действительного переменного. Для следующих элементарных функций комплексного переменного справедливы формулы: $(z^n)' = nz^{n-1}$; $(e^z)' = e^z$; $(\cos z)' = -\sin z$; $(\sin z)' = \cos z$; $(\ln z)' = 1/z$; $(\arcsin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$; $(\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}$; $(\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2)$; $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$; $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

а) Определим действительную и мнимую части функции $w=\sin 2z$. Так как $z=x+iy$, то

$$w=\sin 2z=\frac{e^{i2z}-e^{-i2z}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{-2y+i2x}-e^{2y-i2x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)-e^{2y}(\cos 2x-i\sin 2x)\right)=$$

$$=\frac{-i}{2}\left(\cos 2x(e^{-2y}-e^{2y})+i\sin 2x(e^{-2y}+e^{2y})\right)=$$

$$=\sin 2x\frac{e^{-2y}+e^{2y}}{2}+i\cos 2x\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}=\sin 2x\,\mathrm{ch}2y+i\cos 2x\,\mathrm{sh}2y.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\sin 2z=u(x,y)=\sin 2x\,\mathrm{ch}2y, \qquad \operatorname{Im}\sin 2z=v(x,y)=\cos 2x\,\mathrm{sh}2y.$$

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos 2x\,\mathrm{ch}2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2\cos 2x\,\mathrm{ch}2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y.$$

Сравнивая значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial v}{\partial x}$, видим, что условия Коши-Римана выполняются при всех значениях x и y, поэтому функция $w=\sin 2z$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости Z. Производную функции $w=\sin 2z$ найдем по одной из формул (2):

$$(\sin 2z)'=2\cos 2x\,\mathrm{ch}2\mathrm{y}-i2\sin 2x\,\mathrm{sh}2y=$$

$$=2\left(\cos 2x\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}-i\sin 2x\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}e^{2y}(\cos 2x-i\sin 2x)+\frac{1}{2}e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}e^{2y}e^{-i2x}+\frac{1}{2}e^{-2y}e^{i2x}\right)=2\left(\frac{1}{2}(e^{2y-i2x}+e^{-2y+i2x})\right)=$$

$$= 2\frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{2} = 2\cos 2z.$$

Действительно, если воспользоваться правилами дифференцирования функции действительного переменного, то:

$$(\sin 2z)' = 2\cos 2z.$$

б) Найдем действительную и мнимую части функции $w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1)$ [3]. С учетом, что $z = x + iy$, получим:

$$w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1) = (x+iy+2)\operatorname{Re}(x+iy-1) =$$

$$= \big((x+2)+iy\big)(x-1) = x^2 + x - 2 + i(yx - y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 + x - 2, \quad v(x,y) = yx - y.$$

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана (1), для чего сравним значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $-\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$2x + 1 = x - 1, \; y = 0, \quad \Rightarrow \quad x = -2, \; y = 0,$$

следовательно, функция $w = (z+2)\operatorname{Re}(z-1)$ дифференцируема только в точке $z = -2$ и нигде не является аналитической, так как не существует окрестности точки $z = -2$, в которой функция была бы дифференцируемой.

Производную заданной функции в точке $z = -2$ найдем по одной из формул (2):

$$f'(z) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{\substack{x=-2\\ y=0}} = (2x + 1 + iy)\Big|_{\substack{x=-2\\ y=0}} = -3.$$

ЗАДАНИЕ 4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части, если это возможно: а) $u(x,y) = xe^{x/y}$, б) $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2$.

Решение. Если функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются гармоническими функциями, так как каждая из них удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$.

Если для функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, аналитической в некоторой области D, известна одна из гармонических функции $u(x,y)$ или $v(x,y)$, то функцию $f(z)$ можно восстановить с точностью до постоянного слагаемого. Если известна гармоническая функция $v(x,y)$, то

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} dy + C, \tag{3}$$

Если известна гармоническая функция $u(x,y)$, то

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy + C, \tag{4}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ – произвольная точка. Следовательно, искомая аналитическая функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Если заменить x и y по формулам:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \tag{5}$$

то получим функцию переменной z [4].

а) Функцию $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ можно восстановить только в том случае, если заданная функция $u(x,y) = xe^{x/y}$ является гармонической на всей плоскости. Проверим это:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x/y} + \frac{x}{y}e^{x/y} = e^{x/y}\left(1 + \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y}e^{x/y}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}e^{x/y} = \frac{1}{y}e^{x/y}\left(2 + \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}e^{x/y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}e^{x/y}+\frac{x^3}{y^4}e^{x/y}=\frac{x^2}{y^3}e^{x/y}\left(2+\frac{x}{y}\right).$$

Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\neq 0$, то заданная функция $u(x,y)=xe^{x/y}$ не является гармонической. Таким образом, невозможно восстановить аналитическую функцию $f(z)$.

б) Проверим, является ли гармонической функция $v(x,y)=x^2-y^2+2$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2.$$

Так как $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, то заданная функция $v(x,y)$ является гармонической. Функцию $u(x,y)$ найдем по формуле (3), в которой положим $x_0=0,\ y_0=0$:

$$u(x,y)=\int_0^x(-2y)\Big|_{y=0}dx-\int_0^y 2x dy+C=-2xy+C.$$

Следовательно, искомая функция будет иметь вид:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=-2xy+C+i(x^2-y^2+2).$$

Заменим x и y по формулам (5), чтобы получить функцию переменной z:

$$f(z)=-2\frac{z+\bar z}{2}\cdot\frac{z-\bar z}{2i}+C+i\left(\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^2+2\right)=$$

$$=i\frac{1}{2}\left(z^2-\bar z^2\right)+C+i\frac{1}{4}\left(\left(z^2+2z\bar z+\bar z^2\right)+\left(z^2-2z\bar z+\bar z^2\right)+8\right)=C+i\left(z^2+2\right).$$

Таким образом, $f(z)=C+i(z^2+2)$.

ЗАДАНИЕ 5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, указать правильную и главную часть ряда Лорана: $f(z)=(z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}},\ z_0=2$.

Решение. Всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри кольца $r<|z-z_0|<R$ $(0\le r<R\le\infty)$ с центром в точке z_0, разлагается внутри этого кольца в ряд Лорана, который состоит из двух частей:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Первая часть ряда Лорана $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, называется правильной частью ряда Лорана.

Вторая часть ряда Лорана $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, называется главной частью ряда Лорана.

Для решения данного задания воспользуемся известным разложением

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots,$$

которое справедливо на всей комплексной плоскости. Положим $u=\frac{1}{z-2}$, тогда:

$$e^{\frac{1}{z-2}}=1+\frac{1}{1!(z-2)}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+\ldots+\frac{1}{n!(z-2)^n}+\ldots,\quad z\ne 2.$$

Умножим каждое слагаемое полученного ряда на $(z-2)^3$. Тогда разложение в ряд Лорана функции $f(z)=(z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}$, в окрестности точки $z_0=2$ примет вид:

$$f(z)=(z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}=(z-2)^3+\frac{(z-2)^2}{1!}+\frac{(z-2)}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!(z-2)}+$$

$$+\frac{1}{5!(z-2)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z-2)^{n-3}}+\ldots,\ z\neq 2.$$

Следовательно, правильная часть ряда Лорана содержит четыре слагаемых:

$$f_1(z)=(z-2)^3+\frac{(z-2)^2}{1!}+\frac{(z-2)}{2!}+\frac{1}{3!},$$

а главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых:

$$f_2(z)=\frac{1}{4!(z-2)}+\frac{1}{5!(z-2)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z-2)^{n-3}}+\ldots,\ z\neq 2.$$

ЗАДАНИЕ 6. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и указать их тип (характер): а) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$, б) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$.

Решение. Точка, в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется особой точкой функции $f(z)$. Особая точка $z=z_0$ функции $f(z)$ называется изолированной особой точкой, если в некоторой ее окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Такая точка называется устранимой, если существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$ $(c_0\neq\infty)$, а ряд Лорана функции $f(z)$ не содержит главной части. Изолированная особая точка $z=z_0\neq\infty$ функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, а разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит в своей главной части конечное число членов. Если $z=z_0\neq\infty$ – существенно особая точка, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, а разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит в своей главной части бесконечное число членов [2].

а) Определим нули знаменателя функции $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$.

$$z^3(z^2+4)^2=0,\ \Rightarrow\quad z_1=0,\quad z_2=2i,\quad z_3=-2i,$$

причем, числитель в этих точках отличен от нуля. Следовательно, точки $z_1 = 0, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = -2i$ – изолированные особые точки функции $f(z)$. Так как $z_1 = 0$ является нулем знаменателя кратности три, то, по теореме о связи между нулем и полюсом функции [2], для заданной функции $z_1 = 0$ является полюсом третьего порядка. Аналогично $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ – полюсы второго порядка.

б) Определим нули функции $\dfrac{\sin z}{z}$. Они совпадают с нулями функции $\sin z$, то есть с числами $z_k = \pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$. Кратность нулей определим из условия: если $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, но $f^{m}(z_0) \neq 0$, то z_0 является нулем кратности m функции $f(z)$. При $k \neq 0$ это нули первого порядка, так как

$$(\sin z)'\Big|_{z_k} = \cos \pi k = (-1)^k \neq 0,$$

следовательно, в этих точках функция $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ имеет простые полюсы. В точке $z = 0$ в нуль обращаются числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z}{\sin z}$, однако существует предел $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\sin z} = 1$, поэтому точка $z = 0$ – устранимая особая точка функции $\dfrac{z}{\sin z}$.

ЗАДАНИЕ 7. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

а) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3z - 1}{z^2(z-2)}$, б) $f(z) = z\,ctg\,3z$, в) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

Решение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, взятого в положительном направлении по окружности L с центром в точке z_0, лежащей в кольце $0<|z-z_0|<R$. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 обозначается $\operatorname{Res} f(z_0)$ и равен коэффициенту при первом члене с отрицательным показателем в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана, то есть $\operatorname{Res} f(z_0)=c_{-1}$. Таким образом, в устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю.

Если изолированная особая точка $z=z_0$ для функции $f(z)$ является полюсом порядка m, то

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right). \tag{6}$$

Для полюсов первого порядка формула (6) принимает вид:

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{7}$$

а) Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{z^2+3z-1}{z^2(z-2)}$ являются простой полюс $z_1=2$ и полюс второго порядка $z_2=0$. Для точки $z_1=2$ найдем вычет по формуле (7):

$$\operatorname{Res} f(2)=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^2+3z-1}{z^2(z-2)}=\lim_{z\to 2}\frac{z^2+3z-1}{z^2}=\frac{9}{4}.$$

Вычет в точке $z_2=0$ найдем по формуле (6) при $m=2$:

$$\operatorname{Res} f(0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{z^2+3z-1}{z^2(z-2)}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{2z(z-2)-(z^2+3z-1)}{(z-2)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^2-z+1}{(z-2)^2}=\frac{1}{4}.$$

б) Особыми точками функции $f(z)=z\,ctg\,3z=\dfrac{z\cos 3z}{\sin 3z}$ являются точки $z_k=\dfrac{\pi k}{3},\ k=0,\pm1,\ldots$. Точка $z_0=0$ для заданной функции – устранимая особая точка, так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\cos 3z}{\sin 3z}=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\operatorname{Res} f(0)=0$. Точки

$z_k = \frac{\pi k}{3},\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ для функции $f(z) = z\,ctg\,3z = \frac{z\cos 3z}{\sin 3z}$ являются простыми полюсами, так как числитель функции $\frac{z\cos 3z}{\sin 3z}$ в них не равен нулю, а $(\sin 3z)'\big|_{z_k} = 3\cos\pi k \neq 0$.

Если в окрестности точки $z = z_0$ функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в этой точке функций: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0)$ имеет в точке $z = z_0$ нуль первого порядка, то вычет можно вычислить по формуле:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{8}$$

Воспользуемся формулой (8):

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi k}{3}\right) = \frac{z\cos 3z}{(\sin 3z)'}\bigg|_{z=\pi k/3} = \frac{z\cos 3z}{3\cos 3z}\bigg|_{z=\pi k/3} = \frac{\pi k}{9},\ \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

в) Функция $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$ имеет особую точку $z = 0$. Разложим заданную функцию в окрестности точки $z = 0$ в ряд Лорана, воспользовавшись известным разложением функции $\sin u$, положив $u = \frac{1}{z}$, тогда:

$$f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \ldots\right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \ldots .$$

Очевидно, что точка $z = 0$ – существенно особая точка, тогда

$$\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = -\frac{1}{6}.$$

ЗАДАНИЕ 8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}\,dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}\,dt$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Решение. а) На рисунке 5 представлена область, ограниченная контуром интегрирования. Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{\cos z}{z(z-2)^2}=\frac{(\cos z)/z}{(z-2)^2}.$$

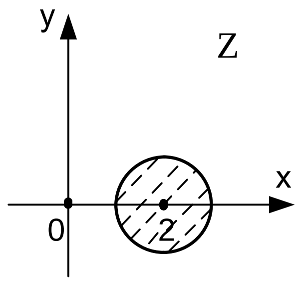


Рисунок 5 – Область, ограниченная контуром интегрирования

В круге $|z-2|\le 1$ функция $\dfrac{\cos z}{z}$ аналитическая, точка $z=2$ лежит в центре этого круга. Для вычисления данного интеграла воспользуемся формулой, являющейся следствием из интегральной формулы Коши:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\ (n=0,1,2,\ldots),$$

где z_0 – точка внутри линии L, направление обхода которой положительное.

Получим:

$$\oint_{|z-2|=1}\frac{\frac{\cos z}{z}}{(z-2)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\cos z}{z}\right)'\Bigg|_{z=2}=2\pi i\left(\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right)\Bigg|_{z=2}=$$

$$=-2\pi i\frac{2\sin 2+\cos 2}{4}=-\frac{2\sin 2+\cos 2}{2}\pi i.$$

б) Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченная контуром L, за исключением конечного числа особых точек $z_k\ (k=1,2,3,\ldots,n)$, лежащих внутри области D, то

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}f(z_k). \qquad (9)$$

Вычислим с помощью вычетов интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}dt$. Если положить $z=e^{it}$, тогда $dz=ie^{it}dt=izdt$, $\cos t=\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\dfrac{z^2+1}{2z}$. При изменении t от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z|=1$. Тогда:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{(5-4\cos t)^2}dt = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz} \frac{(z^2+1)/(2z)}{\left(5-4(z^2+1)/(2z)\right)^2}dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{\left(2z^2-5z+2\right)^2} = I\ .$$

Найдем особые точки подынтегральной функции: $z_1 = 0{,}5$, $z_2 = 2$. Эти точки являются полюсами второго порядка для подынтегральной функции. Только полюс $z_1 = 0{,}5$ находится внутри окружности $|z|=1$. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (9). Найдем вычет подынтегральной функции в точке $z_1 = 0{,}5$:

$$\operatorname{Res} f(0{,}5) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0{,}5}\frac{d}{dz}\left((z-0{,}5)^2\frac{z^2+1}{4(z-0{,}5)^2(z-2)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 0{,}5}\left(\frac{z^2+1}{(z-2)^2}\right)' = \frac{1}{4}\lim_{z\to 0{,}5}\frac{2z(z-2)^2-2(z^2+1)(z-2)}{(z-2)^4} = \frac{8}{27}\,.$$

Тогда, по формуле (9) получим:

$$I = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{\left(2z^2-5z+2\right)^2} = \frac{1}{2i}2\pi i\frac{8}{27} = \frac{8\pi}{27}\,.$$

в) Если $f(z)$ – дробно-рациональная функция, аналитическая на действительной оси и в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, ..., z_n$, лежащих в верхней полуплоскости и $zf(z)\to 0$ при $z\to\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)\,. \tag{10}$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}$, введем функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$, которая на действительной оси, т.е. при $z = x$, совпадает с подынтегральной функцией $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+4)^2}$. Введенная функция – дробно-рациональная, знаменатель которой не имеет действительных корней. Так как выполняется условие $zf(z)\to 0$ при $z\to\infty$, то заданный интеграл может быть вычислен по формуле (10).

Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ имеет полюсы второго порядка $z_1=2i$ и $z_2=-2i$. Нас интересует только тот полюс, мнимая часть которого положительна, то есть $z_1=2i$. Найдем вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ в точке $z_1=2i$:

$$\operatorname{Res} f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2\frac{1}{(z^2+4)^2}\right)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=-\frac{1}{32}i\,.$$

Таким образом, $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{32}i\right)=\frac{\pi}{16}\,.$$

2. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАНИЕ 1. Определить и построить на комплексной плоскости Z линии, заданные уравнениями:

1.1. а) $|z-1-3i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-2}{z+i}=1$.

1.2. а) $|z-3i|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$.

1.3. а) $|z+1+i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z-2i}=3$.

1.4. а) $|z+2-3i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=2$.

1.5. а) $|z+2|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z+i}=2$.

1.6. а) $|z+1-3i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-3}{z-i}=1$.

1.7. а) $|z-4-3i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+4i}=2$.

1.8. а) $|z-3+2i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+i}=3$.

1.9. а) $|z+1-2i|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z-2i}=1$.

1.10. а) $|z-2-i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-2}{z-3i}=2$.

1.11. а) $|z-2-4i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z-2i}=3$.

1.12. а) $|z+1+3i|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+2i}=1$.

1.13. а) $|z+2+i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z-i}=2$.

1.14. а) $|z+2i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-i}=1$.

1.15. а) $|z-1-2i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+2}{z-i}=2$.

1.16. а) $|z+1+i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+2}{z-i}=1$.

1.17. а) $|z-i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+2i}=2$.

1.18. а) $|z-3-i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-2i}=1$.

1.19. а) $|z-1+3i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z-3i}=2$.

1.20. а) $|z+2-i|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+3}{z-i}=2$.

1.21. а) $|z+4-i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z-2}{z-i}=1$.

1.22. а) $|z-1+2i|=3$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z-3i}=2$.

1.23. а) $|z-2-2i|=1$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z+i}=3$.

1.24. а) $|z+2-i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+2}{z+2i}=1$.

1.25. а) $|z-1-4i|=2$, б) $\mathrm{Re}\dfrac{z+3}{z-2i}=2$.

ЗАДАНИЕ 2. Изобразить на комплексной плоскости Z области, определяемые следующими неравенствами или системами неравенств:

2.1. а) $2 < |z+1+3i| \le 3$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.2. а) $1 < |z-1+3i| \le 2$, б) $\left|\arg z + \frac{\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.3. а) $1 \le |z-2+i| < 3$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.4. а) $2 \le |z-1+i| < 3$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.5. а) $1 \le |z+1+i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{4\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.6. а) $1 \le |z-1+2i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.7. а) $2 < |z-1+2i| \le 4$, б) $\left|\arg z + \frac{\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.8. а) $1 \le |z+1-2i| < 2$, б) $\left|\arg z + \frac{2\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.9. а) $2 \le |z+2+2i| < 5$, б) $\left|\arg z - \frac{5\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.10. а) $1 \le |z-1+2i| < 4$, б) $\left|\arg z + \frac{\pi}{12}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.11. а) $1 \le |z-4+2i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{8}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.12. а) $1 \le |z+1+4i| < 3$, б) $\left|\arg z - \frac{5\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.13. а) $3 \le |z-1+2i| < 4$, б) $\left|\arg z + \frac{2\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.14. а) $1 \le |z-1+5i| < 2$, б) $\left|\arg z + \frac{\pi}{8}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.15. а) $2 \le |z-4+2i| < 3$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{12}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.16. а) $3 \le |z-1+2i| < 5$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.17. а) $4 \le |z-3+2i| < 5$, б) $\left|\arg z - \frac{2\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.18. а) $1 \le |z-4+i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{3\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.19. а) $2 \le |z+4+2i| < 3$, б) $\left|\arg z + \frac{3\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.20. а) $1 \le |z-5+2i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{5\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{3}$.

2.21. а) $1 \le |z+4+3i| < 3$, б) $\left|\arg z + \frac{2\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.22. а) $2 < |z+3+2i| \le 3$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{8}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.23. а) $1 \le |z-1+5i| < 2$, б) $\left|\arg z - \frac{3\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

2.24. а) $3 \le |z-5-2i| < 4$, б) $\left|\arg z - \frac{\pi}{8}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

2.25. а) $1 \le |z-4-2i| < 2$, б) $\left|\arg z + \frac{3\pi}{4}\right| \le \frac{\pi}{6}$.

ЗАДАНИЕ 3. Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию $w = f(z)$, найти ее производную, если она существует:

3.1. $w(z) = (z-1)\mathrm{Re}(z+1)$.

3.2. $w(z) = e^{i3z+1}$.

3.3. $w(z) = z^2 - z + 5i$.

3.4. $w(z) = e^z + 3i$.

3.5. $w(z) = e^{3z}$

3.6. $w(z) = 2z^2 - 3z - 4i$.

3.7. $w(z) = \dfrac{1}{z} + i(3-z)$.

3.8. $w(z) = z\,\mathrm{Re}(z-2i)$

3.9. $w(z) = (1+i)z + 10$.

3.10. $w(z) = z^2 + 5z - 7$

3.11. $w(z) = \cos(iz-1)$

3.12. $w(z) = z^2 + z - 7i$

3.13. $w(z) = \sin 4z$

3.14. $w(z) = z^3 + 3i$.

3.15. $w(z) = 7 - i(e^z - e^z)$.

3.16. $w(z) = z^2 - 3z + 1$

3.17. $w(z) = z^2 + z + 5i$

3.18. $w(z) = -\cos z + 4$.

3.19. $w(z) = e^{3z} - 3i$

3.20. $w(z) = z^2 + z - 4i$

3.21. $w(z) = \sin 2z$

3.22. $w(z) = z^2 + z + 7i$

3.23. $w(z) = sh\,3z$

3.24. $w(z) = z^2 + z - 3i$

3.25. $w(z) = -\cos z + 4i$

ЗАДАНИЕ4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной или мнимой части:

4.1. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

4.2. $u(x,y) = -y(4x+1)$.

4.3. $v(x,y) = y - e^{2x}\sin 2y$.

4.4. $u(x,y) = e^{1-2y}\cos 2x$.

4.7. $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$.

4.8. $v(x,y) = e^{1-2y}\sin 2x$.

4.9. $u(x,y) = \sin 2x\,\mathrm{ch}2y$.

4.10. $v(x,y) = 3xy^2 - x^2 + 5$.

4.5. $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4.6. $v(x,y)=x+y-3$.

4.11. $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4.12. $u(x,y)=x-y+2$.

4.13. $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$.

4.14. $v(x,y)=\cos 2x \operatorname{sh} 2y$.

4.15. $u(x,y)=2(x^2-y^2)-3x$.

4.16. $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

4.17. $u(x,y)=(e^x+e^{-x})\sin y$.

4.18. $v(x,y)=-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+4$.

4.19. $u(x,y)=e^x\cos y$.

4.20. $v(x,y)=3^x\sin(y\ln 3)$.

4.21. $u(x,y)=y+\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4.22. $v(x,y)=e^x\sin y$.

4.23. $v(x,y)=x+y-5$.

4.24. $u(x,y)=3x^2y-y^2$.

4.25. $v(x,y)=\sin x \operatorname{sh} y$.

ЗАДАНИЕ 5. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, указать правильную и главную часть ряда Лорана:

5.1. $f(z)=\sin\dfrac{5}{z-2i}$, $\quad z_0=2i$.

5.2. $f(z)=(z-2)\cos\dfrac{1}{z-2}$, $\quad z_0=2$.

5.3. $f(z)=(z-1)^2e^{\frac{1}{z-1}}$, $\quad z_0=1$.

5.4. $f(z)=z^2\sin\dfrac{2}{z}$, $\quad z_0=0$.

5.5. $f(z)=(z-3)^3e^{\frac{1}{z-3}}$, $\quad z_0=3$.

5.6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^3}\cos(z-i)$, $\quad z_0=i$.

5.7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^4}\sin(z+2)$, $\quad z_0=-2$.

5.8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}e^{(z-1)}$, $\quad z_0=1$.

5.9. $f(z)=(z-\pi)^3 e^{\frac{1}{z-\pi}}, \quad z_0=\pi$.

5.10. $f(z)=(z+1)^4 \sin\dfrac{2}{(z+1)}, \quad z_0=-1$.

5.11. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3i)^5}\cos(z-3i), \quad z_0=3i$.

5.12. $f(z)=z^5 \sin\dfrac{2}{z^2}, \quad z_0=0$.

5.13. $f(z)=(z-4)^2 e^{\frac{1}{z-4}}, \quad z_0=4$.

5.14. $f(z)=(z-3)^5 \cos\dfrac{1}{z-3}, \quad z_0=3$.

5.16. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^2}\sin(z-2), \quad z_0=2$.

5.17. $f(z)=(z-1)^5 e^{\frac{1}{(z-1)^2}}, \quad z_0=1$.

5.18. $f(z)=(z+i)^4 \sin\dfrac{2}{(z+i)}, \quad z_0=-i$.

5.19. $f(z)=(z+3i)^5 \cos\dfrac{1}{z+3i}, \quad z_0=-3i$.

5.20. $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^4}e^{(z-i)}, \quad z_0=i$.

5.21. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)^2}\sin(z+2i), \quad z_0=-2i$.

5.22. $f(z)=z^5 \cos\dfrac{1}{z^3}, \quad z_0=0$.

5.23. $f(z)=(z+1)^3 e^{\frac{1}{z+1}}, \quad z_0=-1$.

5.24. $f(z)=(z-i)^3 \sin\dfrac{3}{(z-i)^2}, \quad z_0=i$.

5.25. $f(z)=\dfrac{1}{(z+3i)^3}\cos(z+3i), \quad z_0=-3i$.

ЗАДАНИЕ 6. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$ и указать их тип (характер):

6.1. а) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$, б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.

6.2. а) $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-5z+4}$, б) $f(z)=e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

6.3. а) $f(z)=\dfrac{2z^2-1}{z^5(z^2+9)^3}$, б) $f(z)=ze^{-\frac{1}{z^2}}$.

6.4. а) $f(z)=(z+i)\cos\dfrac{1}{z+i}$, б) $f(z)=\dfrac{z}{(z^4+1)^2}$.

6.5. а) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$, б) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$.

6.6. а) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$, б) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$.

6.7. а) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$, б) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$.

6.8. а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^3+z^2-z-1}$, б) $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}$.

6.9. а) $f(z)=(z+1)\sin\dfrac{1}{z^2}$, б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$.

6.10. а) $f(z)=z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$, б) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+i)^2(z^2+4)}$.

6.11. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+\pi)(z^2-1)}$, б) $f(z)=e^{\frac{z}{z+2}}$.

6.12. а) $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$, б) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$.

6.13. а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z^2+4)^2}$, б) $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

6.14. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$, б) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$.

6.15. а) $f(z)=z(e^{\frac{1}{z}}-1)$, б) $f(z)=\dfrac{z}{(z+i)^3(z^2+9)}$.

6.16. а) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, б) $f(z)=z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

6.17. а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z-z^3}$, б) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+1}$.

6.18. а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3+z^2-z-1}$, б) $f(z)=z\,\mathrm{sh}\dfrac{1}{z}$.

6.19. а) $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$, б) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$.

6.20. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z^3-1)^2}$, б) $f(z)=ze^{1+\frac{1}{z^3}}$.

6.21. а) $f(z)=\mathrm{tg}\,2z$, б) $f(z)=\dfrac{ze^{2z}}{z^4+8z^2-9}$.

6.22. а) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$, б) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$.

6.23. а) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)-z}{z^2}$, б) $f(z)=(z+1)\,\mathrm{sh}\dfrac{1}{z+1}$.

6.24. а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3(z^2+4)^2}$, б) $f(z)=e^{\frac{z+1}{1-z}}$.

6.25. а) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, б) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$.

ЗАДАНИЕ 7. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

7.1. $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

7.2. $f(z)=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

7.3. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

7.4. $f(z)=\dfrac{\cos 4z}{(z-2)^6}$.

7.5. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)^2}$.

7.6. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

7.7. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}$.

7.8. $f(z)=\operatorname{ctg}^2 z$.

7.9. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

7.10. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\dfrac{\pi}{2}z^2}$.

7.11. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

7.12. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}$.

7.13. $f(z)=(1-z)e^{\frac{1}{1-z}}$.

7.14. $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

7.15. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

7.16. $f(z)=\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$.

7.17. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$.

7.18. $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{z^3(z-3)}$.

7.19. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

7.20. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^2}$.

7.21. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-2)^2}$.

7.22. $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

7.23. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^5-z^3}$.

7.24. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$.

7.25. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2(z+2)}$.

ЗАДАНИЕ 8. Вычислить интегралы:

8.1. а) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z e^z}{\sin z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4-5\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.

8.2. а) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{(e^z-1)}{z^3-iz^2} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

8.3. а) $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \sin z \frac{1}{z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

8.4. а) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{dz}{(z+1)^2(z^2+9)}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$.

8.5. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t+5}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

8.6. а) $\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^2 z+2}{z^2-4\pi^2} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

8.7. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} dz}{z^2(z^2+4)}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

8.8. а) $\oint\limits_{|z|=1} z\cos^2 \frac{1}{z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)}$.

8.9. а) $\oint\limits_{|z|=1/3} \frac{3-2z+z^2}{z^3} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$.

8.10. а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx$.

8.11. а) $\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+3\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.

8.12. а) $\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

8.13. а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+z^2-2z}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2}+\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2} dx$.

8.14. а) $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

8.15. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx$.

8.16. а) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t - 2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx$.

8.17. а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7}+\cos t)^2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx$.

8.18. а) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{7}\sin t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

8.19. а) $\oint\limits_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin t + \cos t + 2}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} dx$.

8.20. а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2+\cos t}{2-\sin t} dt$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2} dx$.

8.21. а) $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin t + \cos t}{2\sin t + 3} dt$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx$.

8.22. а) $\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}+\cos t}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

8.23. а) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{5+3\cos 2t} dt$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.

8.24. а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t + 6}$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

8.25. а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z} dz$, б) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2t}{5-4\cos t} dt$, в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+16)}$.

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Москва: Наука, 1981. – 303 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / Д.Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2008. – 256 с.
3. Кручкович Г.И. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973. – 576 с.
4. Руководство к решению задач по высшей математике: [в 2ч.]. Ч.2 / [Е.И. Гурский и др.]; под ред. Гурского Е.И. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 400 с.

Заказ №____________ Тираж _________экз.

Изд. №____________

Изд-во СевГУ