

2020-2021 学年第 1 学期计算机科学与技术学院

线性代数课程期中考试 A 卷

考试时间：60 分钟

命题人：2020 年线性代数助教组

授课教师：栾峻峰

姓名：

学号：

班级：

【第 1 题】利用行初等变换求解下列线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

【第 2 题】求矩阵 A 的逆

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

【第 3 题】利用克拉默法则求解下列线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 &= 1 \end{aligned}$$

【第 4 题】选择与填空

(1) 设矩阵 A 经过若干次初等列变换变成矩阵 B，则 ( )

A 存在矩阵 P，使得  $PA = B$

B 存在矩阵 P，使得  $BP = A$

C 存在矩阵 P，使得  $PB = A$

D 方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  有非零解

(2) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，且  $n \geq 2$ ，则  $A^n - 2A^{n-1} =$  \_\_\_\_\_

【第 5 题】

(1) 求证：  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

其中，A 为可逆矩阵， $k \neq 0$

(2) 已知  $AB = A + B$ ，且 A 和 B 均为 n 阶方阵 求证：  $BA = AB$

提示 1:  $AA^{-1} = E$  (其中 E 为单位阵，A 为 n 阶方阵)

提示 2: 对于  $x, y \in R$ ，有  $(x-1) * (y-1) = (y-1) * (x-1) = xy - (x+y) + 1$ ，将该式子类比到矩阵乘法即可证明。比如：实数 x 可以类比为矩阵，那么实数 1 可以类比为哪个矩阵呢？（看一下提示 1）

【第 6 题】证明

若向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表示, 但  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$  线性表示, 试判断  $\alpha_r$  是否可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$  线性表示并给出详细证明过程。

【第 7 题】求  $A$  的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

【第 8 题】设  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ , 当  $a, b$  为何值时, 存在矩阵  $C$  使得  $AC - CA = B$  ?