2020-2021 学年第 1 学期计算机科学与技术学院
线性代数课程期中考试 B 卷

考试时间：60 分钟　　命题人：2020 年线性代数助教组　　授课教师：栾峻峰

姓名：　　　　　　学号：　　　　　　班级：

【第 1 题】利用行初等变换求解下列线性方程组

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$
$$3x_1+2x_2+x_3+x_4=0$$
$$x_2+2x_3+2x_4=3$$
$$5x_1+4x_2+4x_3+3x_4=4$$

【第 2 题】求矩阵 A 的逆

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

【第 3 题】利用克拉默法则求解下列线性方程组

$$x_1+x_2-x_3=1$$
$$2x_1-3x_2+5x_3=2$$
$$3x_1+x_2-x_3=1$$

【第 4 题】选择与填空

（1）设A为n阶矩阵，且$|A|=0$，则A（　　　）

A 必有一列元素全为 0　　　　B 必有两列元素对应成比例

C 必有一列是其余列的线性组合　　　D 任一列是其余列的线性组合

（2）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$A$中所有元素的代数余子式之和为__________

【第 5 题】证明

(1)设$n\in Z$，求证：$(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$

(2)设A是n阶可逆方阵，将A的第i列和第j列对换后得到的矩阵记为B，证明B可逆

【第 6 题】证明

设 n 维实向量 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots，\alpha_{in})^T$，$i=1,2,\ldots，r$，$r<n$，且 α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_r 线性无关，$\beta=(b_1,b_2,\ldots，b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots\alpha_{1n}x_n=0\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots\alpha_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ \alpha_{r1}x_1+\alpha_{r2}x_2+\ldots\alpha_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零解向量，试判断 α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_r，β 是否线性无关并给出详细证明。

【第 7 题】求A的行列式

$$A=\begin{bmatrix}0&a&b&a\\a&0&a&b\\b&a&0&a\\a&b&a&0\end{bmatrix}$$

【第 8 题】已知四阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为四维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解