2020-2021 学年第 1 学期计算机科学与技术学院
线性代数课程期中考试 A 卷

考试时间：60 分钟　　命题人：2020 年线性代数助教组　　授课教师：栾峻峰

姓名：　　　　　　学号：　　　　　　班级：

---

15 【第 1 题】利用行初等变换求解下列线性方程组

$$x_1 + 4x_2 - x_4 = -1$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$$
$$x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 7$$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

或 $x = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

15 【第 2 题】求矩阵 A 的逆

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15 【第 3 题】利用克拉默法则求解下列线性方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$
$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 1$$

$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -15 \\ x_3 = 6 \end{cases}$

【第 4 题】选择与填空

5 (1) 设矩阵A经过若干次初等列变换变成矩阵B，则（ B ）

A 存在矩阵P，使得$PA = B$　　B 存在矩阵P，使得$BP = A$

C 存在矩阵P，使得$PB = A$　　D 方程组$Ax = 0$和$Bx = 0$ 有非零解

5 (2) 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且$n \geq 2$，则$A^n - 2A^{n-1} =$ ___0___

【第 5 题】

(1) $(kA) \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = k \cdot \frac{1}{k} \cdot A \cdot A^{-1} = E$

4 **(1)** 求证：　$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$　　　　其中，A为可逆矩阵，$k \neq 0$

6 **(2)** 已知$AB = A + B$，且A和B均为n阶方阵　　求证：$BA = AB$

(2) 交换律扣2分 / 直接证结4分

提示 1：$AA^{-1} = E$（其中E为单位阵、A为n阶方阵）

提示 2：对于$x, y \in R$，有$(x-1)*(y-1) = (y-1)*(x-1) = xy - (x+y) + 1$，将该式子类比到矩阵乘法即可证明。比如：实数$x$可以类比为矩阵A，那么实数1可以类比为哪个矩阵呢？（看一下提示 1）

(2)：$(A-E)(B-E) = AB - (A+B) + E \overset{\text{代入已知条件}}{=} 0 + E = E$

$\Rightarrow (A-E)^{-1} = (B-E)$　（互为逆矩阵）

$\Rightarrow (B-E)(A-E) = E \overset{\text{已证}}{=} (A-E)(B-E)$

$\Rightarrow AB = BA$

① $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$

② β不能由$\alpha_1 \sim \alpha_{r-1}$线性表示 $\Rightarrow k_r \neq 0 \Rightarrow \alpha_r = \cdots$

12

【第 6 题】证明

若向量β可由向量组α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_r线性表示，但β不能由α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_{r-1}线性表示，试判断α_r是否可由α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_{r-1}，β线性表示并给出详细证明过程。

10

【第 7 题】求A的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$|A| = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

13

【第 8 题】设$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$，当$a, b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC - CA = B$？

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

$\cancel{b^2(b^2-4a^2)}$

2020-2021 学年第 1 学期计算机科学与技术学院

线性代数课程期中考试 B 卷

考试时间：60 分钟　　命题人：2020 年线性代数助教组　　授课教师：栾峻峰

姓名：　　学号：　　班级：

【第 1 题】利用行初等变换求解下列线性方程组

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\
5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

【第 2 题】求矩阵 A 的逆

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

【第 3 题】利用克拉默法则求解下列线性方程组

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 2 \\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

【第 4 题】选择与填空

(1) 设A为n阶矩阵，且$|A| = 0$，则A（　　）

A 必有一列元素全为 0　　B 必有两列元素对应成比例

C 必有一列是其余列的线性组合　　D 任一列是其余列的线性组合

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$A$中所有元素的代数余子式之和为________

【第 5 题】证明

(1)设$n \in Z$，求证：$(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

(2)设A是n阶可逆方阵，将A的第i列和第j列对换后得到的矩阵记为B，证明B可逆

【第 6 题】证明

设 n 维实向量 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\ \alpha_{in})^T$，$i=1,2,\ldots,\ r$，$r<n$，且 α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_r 线性无关，$\beta=(b_1,b_2,\ldots,\ b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots\alpha_{1n}x_n=0\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots\alpha_{2n}x_n=0\\ \qquad\cdots\\ \alpha_{r1}x_1+\alpha_{r2}x_2+\ldots\alpha_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零解向量，试判断 α_1，$\alpha_2,\ldots$，α_r，β 是否线性无关并给出详细证明。

【第 7 题】求A的行列式

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & b & a\\ a & 0 & a & b\\ b & a & 0 & a\\ a & b & a & 0\end{bmatrix}$$

【第 8 题】已知四阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为四维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解