作业七答案

一、课后练习题

1、

【2.2】 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则______.

(A)$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

(B)$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

(C)对于相同的特征值 λ，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

(D)$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均与同一个对角阵相似

解 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，显然特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$. 而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$，故非(A).

计算得当 $\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(0,1,1)^T$，而 $\boldsymbol{B}$ 对应于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(0,1,0)^T$，显然 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，故非(C).

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 未必能相似对角化，故非(D).

故应选(B).

2、

【2.4】 已知

$$A \sim B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

则 $r(A-E)+r(A-3E)=$______.

解 由 $A\sim B$,存在可逆阵 P,使得 $P^{-1}BP=A$,故

$$r(A-E)+r(A-3E)=r(P^{-1}BP-E)+r(P^{-1}BP-3E)$$

$$=r(P^{-1}(B-E)P)+r(P^{-1}(B-3E)P)=r(B-E)+r(B-3E)$$

$$=r\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & 2\\0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\right)+r\left(\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & -4 & 2\\0 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\right)$$

$$=2+3=5.$$

故应填 5.

3、

题型 3:求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角阵

【2.19】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$,求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时,解 $(-2E-A)x=0$ 得基础解系 $\eta_1=(-1,1,1)^T$,即为属于 $\lambda_1=-2$ 的线性无关的特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,解 $(E-A)x=0$ 得基础解系:

$$\eta_2=(0,0,1)^T,\qquad \eta_3=(-2,1,0)^T,$$

即为属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量.

因此 A 可对角化.

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$.

点评:注意到若存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵,则 P 的列向量为 A 的 n 个线性无关的特征向量;而对角阵主对角线上的元素为 A 的特征值.事实上,设

4、

解 (1)实对称矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-3),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$.于是,$A$ 与对角矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 相似,又 A 与 B 相似,故 B 也与对角矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 相似,因此,B 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$,且 $r(E-B)=1$.

由 $x+5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5$,得 $x=0$.

由

$$E-B=\begin{bmatrix}1&-y&-z\\0&0&0\\1&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&2+y&z-3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $y=-2,z=3$.

(2)经计算可知,将实对称矩阵 A 化为对角矩阵的相似变换矩阵可取为 $P_1=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,

即

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\ \end{bmatrix};$$

0 0 3

把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为对角矩阵的相似变换矩阵可取为 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，即

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

取

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -4 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}.$$

5、

【2.32】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

又 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$，即 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

点评：本题是方法 3 的一个特殊情形，也是这类问题的常见题型，即若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

6、

解 因 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-2\\ -2 & -\lambda-6 & \lambda+2\end{vmatrix}$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ -2 & -\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

令 $|\lambda E-A|=0$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$（二重），$\lambda_2=-7$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$，求得其一个基础解系为 $\eta_1=(-2,1,0)^T$，$\eta_2=(2,0,1)^T$，从而 η_1,η_2 是 A 的属于特征值 2 的两个线性无关的特征向量.

当 $\lambda_2=-7$ 时，解 $(-7E-A)x=0$，求得其一个基础解系为 $\eta_3=(-1,-2,2)^T$，所以 η_3 是 A 的属于特征值 -7 的一个特征向量.

利用施密特正交化方法，把 η_1,η_2，正交化（η_1,η_2 与 η_3 已正交）

$$\beta_1=\eta_1,$$

$$\beta_2=\eta_2-\frac{(\eta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T.$$

再把 β_1,β_2,η_3 单位化

$$\alpha_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\left(\frac{-2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)^T,$$

$$\alpha_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\left(\frac{2}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5}\right)^T,$$

$$\alpha_3=\frac{\eta_3}{\|\eta_3\|}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T.$$

令

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则 Q 是正交矩阵，且

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}.$$

二、期末难度模拟题

7、

（1）

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一个正交向量组，有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

等式两侧与 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$ 作内积得

$$k_i[\alpha_i,\alpha_i]=0,$$

亦即

$$k_i[\alpha_i,\alpha_i]=k_i|\alpha_i|^2=0.$$

由 $\alpha_i\neq 0$ 知，$|\alpha_i|^2\neq 0$，所以 $k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

（2）

如何理解不同特征值对应的特征向量线性无关？

忆臻
哈尔滨工业大学 计算机科学与技术博士在读

问题：为什么不同特征值对应的特征向量线性无关？

解答：首先我们对于矩阵A的特征值 λ_1 ，有等式满足 $Ax_1=\lambda_1 x_1$ ，特征向量为 x_1 .

对于特征值 λ_2 ，有等式满足 $Ax_2=\lambda_2 x_2$ 。

下面用反证法进行证明！首先假设不同特征值对应的特征向量线性相关

如果对于不同的 λ_1 ， λ_2 所对应的特征向量线性相关的话，那么满足下面等式：

$k_1x_1+k_2x_2=0$,那么等式两边同时乘以矩阵A，得到 $Ak_1x_1+Ak_2x_2=0$,化简为：

$\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2=0$ ，又因为根据等式 $k_1x_1+k_2x_2=0$ 可以得到， $k_2x_2=-k_1x_1$ ，带入到 $\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2=0$ ，得到 $k_1x_1(\lambda_1-\lambda_2)=0$,又因为 λ_1， λ_2 不相同，**则造成矛盾。**

所以不同特征值对应的特征向量线性相关是错误的。

所以：不同特征值对应的特征向量是线性无关的

8、

证明:

设方阵A的特征方程为 $Ax=\lambda x$，其中 $\lambda \in R$. 下证 $\lambda=1$ 或3、

证: 对 $A^2-4A+3I=0$ 等式两边同时右乘 x，有

$$A^2x-4Ax+3Ix=0$$

代入 $Ax=\lambda x \Rightarrow A\lambda x-4\lambda x+3x=0$

$$\Rightarrow \lambda Ax-4\lambda x+3x=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2x-4\lambda x+3x=0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-4\lambda+3)x=0$$

又特征向量 x 不为零向量，故 $\lambda^2-4\lambda+3=0$.

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$. 证毕.

9、

证明

给定一个 n 维实对称矩阵 S，用 λ,α 表示它的两个不等的特征值，用 x,y 分别表示 S 对应于 λ,α 的特征向量，即：$S^T=S$，$Sx=\lambda x$，$Sy=\alpha y\ (\alpha\neq\lambda)$.

对 $Sx=\lambda x$ 两边转置，得 $x^TS^T=\lambda x^T$，再往两端右乘一个 y，并利用 $S^T=S$，得：

$$x^TSy=\lambda x^Ty \tag{1}$$

对 $Sy=\alpha y$ 两端左乘一个 x^T，得：

$$x^TSy=\alpha x^Ty \tag{2}$$

再用 式(1) 减去 式(2)：

$$0=(\lambda-\alpha)x^Ty \tag{3}$$

已知 $\lambda\neq\alpha$，所以只能是 $x^Ty=0$，即特征向量 x 与特征向量 y 相互正交，故得证：对于实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量相互正交。

10、

方法1（from 2班 高恺琦）

假设$\alpha, A\alpha$线性相关，则存在不全为零的k_1和k_2使得$k_1\alpha + k_2A\alpha = 0$，则必有$k_2 = 0$，否则$A\alpha = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$，从而有$\alpha$是$A$的特征向量，矛盾。所以，$k_1\alpha = 0$，又$\alpha \neq 0$，那么$k_1 = 0$，与$k_1$和$k_2$不全为零矛盾，所以，$\alpha, A\alpha$线性无关。设$\beta = A\alpha$，$A\beta = 6\alpha - \beta$，则$P = [\alpha, \beta]$，由题，令$D = P^{-1}AP$，则$A$与$D$相似，从而只需确定$D$使得$AP = PD$。

由$AP = [\beta, 6\alpha - \beta]$，$PD = [\alpha, \beta]D$。

设$D = [d_1, d_2] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}$，则$PD = [[\alpha, \beta]d_1, [\alpha, \beta]d_2]$，由$AP = PD$

所以，$\begin{cases} d_{11}\alpha + d_{12}\beta = \beta \\ d_{21}\alpha + d_{22}\beta = 6\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_{11}\alpha + (d_{12} - 1)\beta = 0 \\ (d_{21} - 6)\alpha + (d_{22} + 1)\beta = 0 \end{cases}$

又α，β线性无关，所以$d_{11} = 0, d_{12} = 1, d_{21} = 6, d_{22} = -1$

从而$D = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，求解完毕！

方法2

10.

① 证明P可逆. 反证法

假设 P 不可逆, 由于 $P\in R^{2\times2}$, 则必 $\exists\lambda\neq0$, s.t. $A\alpha=\lambda\alpha$.

则非零向量 α 为 A 的特征向量. 这与已知 α 不为 A 的特征向量矛盾!

故假设不成立. P可逆.

② 求 $P^{-1}AP$.

$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0 \Rightarrow (A^2+A-6E)\alpha=0 \Rightarrow (3E+A)(2E-A)\alpha=0$ (*)

又 $\alpha\neq0$. 则 $|A^2+A-6E|=0 \Rightarrow |3E+A||2E-A|=0$ (※)

<1> 若 $|3E+A|\neq0$. 则 $|2E-A|=0$.

代入(*)式, 则 $[(2E-A)\alpha](3E+A)=0 \Rightarrow (2E-A)\alpha=0 \Rightarrow A\alpha=2\alpha$.

这与已知 α 不为 A 的特征向量矛盾! 所以 $|3E+A|=0$

<2> 同理易知, 若 $|2E-A|\neq0$, 则有 $A\alpha=-3\alpha$. 与已知矛盾.

由<1><2>知, 只能 $|2E-A|=0$ 且 $|3E+A|=0 \Rightarrow$ A的特征值为 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$.

则 $A=D^{-1}\begin{bmatrix}-3&\\&2\end{bmatrix}D$

又已知 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0 \Rightarrow A(A\alpha)=-A\alpha+6\alpha$

则 $A\left([\alpha\ \ A\alpha]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=[\alpha\ \ A\alpha]\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$.

又 $P=[\alpha\ \ A\alpha]$. 则 $AP\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$. 即 $P^{-1}AP\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$

而 $P^{-1}AP\in R^{2\times 2}$. 设 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. 则 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=6\\d=-1\end{cases} \Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a&6\\c&-1\end{bmatrix}$$

又 $P^{-1}AP$ 与 A 相似，故其特征值之和相等，而 $A=D^{-1}\begin{bmatrix}-3&\\&2\end{bmatrix}D$

则 $a+(-1)=-3+2 \Rightarrow a=0$. 则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&6\\c&-1\end{bmatrix}$

又 $|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$

故 $\begin{vmatrix}0&6\\c&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&0\\0&2\end{vmatrix} \Rightarrow -6c=-6 \Rightarrow c=1$

综上所述，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&6\\1&-1\end{bmatrix}$

三、特征值、特征向量、对角矩阵的应用——SVD分解

11、

（1）

根据个人理解，总结叙述SVD分解的计算步骤，步骤详尽、能求出最终结果即可。

ps：首先，本题不属于期末考试范围，但我们学习线代的目的不只是完成期末考试。本题的目的是应用线性代数解决计算机科学领域的实际问题。大家做完线代期末考试题之后，其中的一些仅适用于考试的题目就再也不会遇到了（当然基础的东西到处都是），以后能用上的多是这种情况（比如你读个论文，看个机器学习/数学类的书，看个博客，写个论文等等）。这里选了个传统的机器学习方法作为应用，如果觉得困难属于正常情况。能够根据自己的已学基础，通过搜索、讨论等途径能够把这题啃下来，就很好了。如果觉得还是很困难也不要太担心，有可能是这个方向的数学基础较为薄弱还需要加强（比如，如果想在研究生阶段选择和数学结合较紧密的领域（比如AI）的话，基础还是要加强的），或者也许你相对更擅长其他数学领域甚至和数学基本无关的领域。这都是没有问题的，大家结合自己的发展规划，扬长避短就可以了。

（2）

我们首先求出A^TA和AA^T

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

进而求出A^TA的特征值和特征向量：

$$\lambda_1 = 3; v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

接着求AA^T的特征值和特征向量：

$$\lambda_1 = 3; u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1; u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \lambda_3 = 0; u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

利用$Av_i = \sigma_i u_i, i = 1, 2$求奇异值：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sigma_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_2 = 1$$

当然，我们也可以用$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$直接求出奇异值为$\sqrt{3}$和1.

最终得到A的奇异值分解为：

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$