第一题答案

$$\begin{bmatrix}1&4&0&-1&-1\\1&-2&2&3&3\\3&6&2&2&3\\1&-8&4&7&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&0&-1&-1\\0&-6&2&4&4\\0&-6&2&5&6\\0&-12&4&8&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&0&-1&-1\\0&-3&1&2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&4&0&0&1\\0&-3&1&2&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&0&0&1\\0&-3&1&0&-2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

选取x_2为自由变量，令$x_2=0$得特解$(1,0,-2,2)^T$

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-4x_2\\x_2\\-2+3x_2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-4\\1\\3\\0\end{bmatrix}$$

第二题答案

A

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\-3&1&4&0&1&0\\2&-3&4&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&-3&8&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&0\\0&1&-2&3&1&0\\0&0&2&7&3&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&3&1\\0&1&0&10&4&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}8&3&1\\10&4&1\\\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

第三题答案

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}=(3-2)\times(4-2)\times(4-3)=2$$

$$D1=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=[3-(-1)]\times[4-(-1)]\times(4-3)=20$$

$$D2=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&4\\4&1&16\end{vmatrix}=-3\times2\times5=-30$$

$$D3=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\4&9&1\end{vmatrix}=1\times-3\times(-4)=12$$

解得：

$$x_1 = \frac{D1}{D} = 10, x_2 = \frac{D2}{D} = -15, x_3 = \frac{D3}{D} = 6$$

第四题答案

（1）B　　　　　　（2）0

第五题答案

(1)

$$(kA)\frac{1}{k}A^{-1} = k\frac{1}{k}AA^{-1} = E$$

(2)由已知条件，

$$(A-E)(B-E) = (B-E)(A-E) \Rightarrow AB = BA$$

第六题答案

[A]

证明：a_r 可由 $a_1, a_2, \cdots a_{r-1}, \beta$ 线性表示

∵ β 可由 $a_1, a_2, \cdots a_r$ 线性表示

∴ 存在一组数 $k_1, k_2, \cdots k_r$ 使得 $\beta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_r a_r$

若 $k_r = 0$，则 $\beta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_{r-1} a_{r-1}$.

又∵ β 不能由 $a_1, a_2, \cdots a_{r-1}$ 线性表示，

∴ $k_r \neq 0$. $\Longrightarrow a_r = \frac{k_1}{k_r} a_1 + \frac{k_2}{k_r} a_2 + \cdots + \frac{k_{r-1}}{k_r} a_{r-1} - \frac{1}{k_r} \beta$

综上，a_r 可由 $a_1, a_2, \cdots a_{r-1}$，β 线性表示

第七题答案

解 每列元素都是一个 a 与 $n-1$ 个 b，故可把每行均加至第一行，提取公因式 $a+(n-1)b$，再化为上三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

第八题答案

$AC-CA=B$ 变形为 $\begin{pmatrix} -x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4 \\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$，

即得到线性方程组 $\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases}$，要使 C 存在，此线性方程组必须有解，于是对方程组的增广矩阵进行初等行变换如下

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

a=-1
b=0

所以，当 $a=-1, b=0$ 时，线性方程组有解，即存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$.