线代第 2 次作业

覆盖范围：Section 1.1-1.7　2.1

Due Date：北京时间 10 月 21 日（周三）18:00

1 请证明：两个或多个向量的集合 $S=\{v_1,\ldots,v_p\}$ 线性相关，当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合。

继续证明：事实上，若 S 线性相关，且 $v_1 \neq 0$，则某个 v_j（ $j>1$ ）是它前面几个向量的线性组合。

2 判断下列说法是否正确，并说明理由。

（1）若向量组线性相关，则其中至少有一个向量是另一个向量的倍数。

（2）若方程组 $Ax=0$ 有平凡解，则矩阵 A 的各列线性无关。

（3）若 S 是线性相关集，则 S 中每个向量都是其余向量的线性组合。

（4）若 $v_1,\ldots,v_4$ 属于 R^4，则 $v_3=2v_1+v_2$，则 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 线性相关。

（5）某一个向量集的向量个数少于每个向量所含元素个数，则它线性无关

3 判断下列向量组是否线性相关，给出理由。

（1）$\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\4\\-8\end{bmatrix}$　　（2）$\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\\-8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\9\end{bmatrix}$　　（4）$\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-8\end{bmatrix}$

4 判断矩阵是否线性无关，并给出理由。

（1）$\begin{bmatrix}0&-8&5\\3&-7&4\\-1&5&-4\\1&-3&2\end{bmatrix}$　　（2）$\begin{bmatrix}-4&-3&0\\0&-1&4\\1&0&3\\5&4&6\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -14 & 14 & 2 \end{bmatrix}$ （4）$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

5 若线性方程组$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$=0 有非零解，求$a$的值。

6 设线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = -\lambda^2 \end{cases}$，求$\lambda$等于何值时，方程组

（1）有唯一解 （2）无解 （3）有无穷多解

7 Prove the following statements

(a) Prove that the column vectors of every 3×5 matrix A are linearly dependent.

（证明任何一个3×5矩阵的列向量集是线性相关的）

(b) Prove that the row vectors of every 5×3 matrix B are linearly dependent.

（证明任何一个5×3矩阵的行向量集是线性相关的）

Hint（提示）: 可以看一下作业 1 中的超定方程组和欠定方程组的概念来思考

-----------------------------------以下是内容讲解---

Example

对于三种初等行变换（倍加、倍乘、交换），我们可以这样观察。例如：

对于矩阵 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

我现在对矩阵A进行 3 次行变换，分别是

① 1-2 行交换（交换）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

② 第二行乘 2 加到第一行上（倍加）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

③ 第三行乘以 3（倍乘）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}$$

实际上，每一种初等行变换，都等价于**左乘**一个**经历过相同行变换**的矩阵，这个矩阵由单位矩阵变换而来。

我们再来看一下①:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

其中，对于（维度上满足乘法要求的）3×3 单位矩阵 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，对其做①中要求的行变换（即 1、2 行交换），并将这个（经历过相同行交换的单位矩阵）左乘到矩阵A上，矩阵乘积就是直接对 A 进行 1、2 行交换的结果。

同理，我们再来看一下②:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

可以看到，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 是单位矩阵 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 经历了“第二行乘 2 加到第一行上”这种行变换后的结果，与矩阵A左乘之后，就实现了直接对矩阵A进行该行变换的结果。

③同理，不再详述。

那么，如果我对矩阵A做一系列行变换呢？

一样的道理，对A做一系列行变换就相当于在A的左边连续左乘一系列（经历过相应行变换的）矩阵，这个矩阵由相应维度的单位矩阵变换而来。（注意，要按顺序左乘，因为进行的行变换也是按照顺序依次进行的），大家可以动手自己试试。

既然行变换等价于左乘一系列矩阵，那右乘是啥呢？

与之对应，自己可以试一下，右乘是列变换。

---------------------------------------内容讲解结束---------------------------------------

8 通过上面的内容，请完成以下问题。

If A, B, C are three $m \times n$ matrices such that A is row-equivalent（行等价） to B and B is row-equivalent to C, then can we conclude that A is row-equivalent to C ?

If so, then prove it. If not, then provide a counterexample.（反例）

9 用两种方法计算乘积 AB

(a) 根据定义分别计算 Ab_1, Ab_2 （b_i是矩阵B的第i列）

(b) 利用计算 AB 的行列法则

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

---例题--------------------------------------

Example

Find a nonzero 3×3 matrix A such that $A^2 \neq O$ and $A^3 = O$, where O is the 3×3 zero matrix.

Solution

For example, let A be the following 3×3 matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Then A is a nonzero matrix and we have

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$$

The third power（三次幂） of A is

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Thus, the nonzero matrix A satisfies the required conditions $A^2 \neq O, A^3 = O$

---例题结束-------------------------------------

10 Please prove the following two problem.

(1) Let A and B are matrices such that the matrix product（乘积） AB is defined(means product AB is existed) and AB is a square matrix.（方阵）

Is it true that the matrix product BA is also defined and BA is also a square matrix?

If it is true, then prove it. If not, find a counterexample.（反例）

Hint(提示): Let A be an $m \times n$ matrix……Let B be an $r \times s$ matrix……

(2) Let A and B be $n \times n$ matrices. Suppose that the matrix product $AB = O$, where O is the $n \times n$ zero matrix.

Is it true that the matrix product with opposite order BA is also the zero matrix?

If so, give a proof. If not, give a counterexample.

Hint: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11 Prove the following identity(等式) for any positive integer(正整数) n

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

Hint: Give **mathematical induction** a glance

---------------------------------------作业结束---

PS：关于 1.8-1.9 节的说明

1.8-1.9 主要讲了矩阵作为线性变换的作用，以空间中点的变换和二维图形的变换来举例。这部分在软件学院的线代课上也是不讲的，但是很推荐去看。矩阵的实质作用是空间变换，而 1.8-1.9 节是一个非常好的例子。这部分不留作业，但是很推荐阅读。