

第一次作业答案

一、中英文概念对照

(a)线性代数 (b)线性方程组 (c)行 (d)列 (e)矩阵 (f)基本变量 (g)自由变量
(h)主元位置 (i)通解 (j)解集 (k)增广矩阵 (l)简化阶梯行 (m)相容的
(n)不相容的 (o)线性组合 (p)子集 (q)单位矩阵 (r)齐次线性方程组 (s)平凡解
(t)非平凡解 (u)矩阵方程

二、概念巩固习题

1、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2、

无解，唯一解，无穷多解。例子不唯一

(1) 无解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

(2) 唯一解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

(3) 无穷多解

$$x_1 + x_2 = 1$$

3、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4、

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

5、

矩阵运算分为线性运算和乘法运算，线性运算包括加、减法和数乘运算。

加、减法要求两个运算的矩阵维度对应相等，数乘为一个实数和一个矩阵相乘，无具体维度要求。

乘法运算要求第一个矩阵的列数和第二个矩阵的行数相等。即

$$A_{mn}B_{nk}$$

6、

(1) 参考第五题答案，行向量可以看成 $1 \times N$ 的矩阵，列向量可以看成 $M \times 1$ 的矩阵

(2) $A_{m \times n}$ 和 $x_{k \times 1}$ ，其中 $n = k$

(3) Au 的维度为 $m \times 1$, vA 的维度为 $1 \times n$ ，若要相等，则 $m = n = 1$

7、

(1) 略

(2)

行初等变换

1. (倍加变换) 把某一行换成它本身与另一行的倍数的和。[⊙]
2. (对换变换) 把两行对换。
3. (倍乘变换) 把某一行的所有元素乘以同一个非零数。

三、

1、

(1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

显然无解。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & -7 & 7 & -8 \\ -4 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & -6 & 15 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

显然无解。

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

2、

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & k+2g \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & k+2g+h \end{bmatrix} \Rightarrow k+2g+h=0$$

3、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元位置已标红。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4、

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

令 $x_2 = 0$ ，可得特解为 $x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 3$. x_2 为自由变量

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 3x_2 \\ x_2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 \text{ 为任意实数}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 0$, 可得特解为 $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 0$. x_3 为自由变量

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 5x_3 \\ 5 + 6x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \text{ 为任意实数}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 为自由变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4x_2 - 2x_3}{3} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \text{ 为任意实数}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = x_5 = 0$, 可得特解为 $x_1 = 5, x_2 = 1, x_4 = 4$. x_3, x_5 是自由变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 3x_5 \\ 1 + 4x_5 \\ x_3 \\ 4 - 9x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_5, x_3 \text{ 为任意实数}$$

5、

(1)

假设增广矩阵有 $k(k \leq m)$ 个主元列, 则增广矩阵经过行初等变换之后可以化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵存在多个自由变量, 所以有无穷多解。

(2)

可能,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ 4x_2 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

6、

(1)

$$u + v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + 2v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$u + v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + 2v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7、

(1)

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = -7 \\ 5x_1 = -5 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

8、

(1)

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

9、

$$[a1 \ a2 \ a3 \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从矩阵可以看出该方程组有解，所以b为a1,a2,a3的线性组合。

10、

举一个例子，权重全为1，

$$v1 + v2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

11、

(1)

$$5 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(2) 略

(3)

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -8 \\ 7 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(4) 略

12、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13、

(1)

利用方程组的思想，实质是求 $Ax = u$ 的解，其增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组有解，所以在。

(2)

本问题的实质是找一个b使得 $Ax = b$ 无解，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a1 \\ 0 & -1 & 0 & a2 \\ -1 & 0 & 0 & a3 \\ 0 & 1 & -1 & a4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a1 \\ 0 & -1 & 0 & a2 \\ 0 & 0 & 1 & a3 + a1 \\ 0 & 0 & 0 & a4 + a2 + a3 + a1 \end{bmatrix}$$

由矩阵可知, $a1 + a2 + a3 + a4 \neq 0$.

(3)

$$Ax = w = y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) \implies x = x_1 + x_2$$

14、

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

无非平凡解。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 39 \end{bmatrix}$$

有非平凡解。

15、

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \text{ 为任意实数}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 为自由变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \text{ 为任意实数}$$

16、

$$\begin{matrix} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \text{ 为任意实数} \end{matrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_3 \text{ 为任意实数}$$