1. 判断题

(a) 错 向量组只包含一个向量 a 时，a 为 0 向量，则说 A 线性相关；若 a≠0，则说 A 线性无关。

(b) 错 基要求线性无关

(c) 对 可逆矩阵，线性无关

(d) 错 基是一个尽可能小的生成集

(e) 对 基是一个尽可能大的线性无关集

(f) 错 基要求是最大的线性无关集，而不是任意线性无关集

(g) 错 阶梯形的主元列通常不在原矩阵的列空间中

(h) 对

2. 证明：

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & -9 & -9 \\ -4 & 5 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & -4 & -9 & -9 \\ 9 & 7 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & -23/2 & 11 & 26 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

解为$[15/2 \quad 3 \quad 11/2]$

有解，w可由这几个向量线性表示，则w在由 v_1，v_2，v_3生成的R^4的子空间中

3.

（1）w是否在$Col\ A$中

$$[A\ w] \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ -8 & -2 & -9 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有解，则w是否在$Col\ A$中

（2）w是否在$Nul\ A$中

$$A\,w = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w是否在$Nul\ A$中

4.

（a） $Nul\ A$的定义如下，每个解必须需要 3 个数，则 k=3

$$\mathrm{Nul}\,A = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

(b) $Col\ A$的定义如下，每个列向量有 4 个数，则 k=4

5.

$$\begin{bmatrix} -8 & 8 & -8 & 1 & -9 \\ 7 & -7 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & -9 & 4 & 9 & -4 \\ 5 & -5 & 5 & 6 & -1 \\ -7 & 7 & -7 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -3 & -2 & \frac{78}{8} & \frac{-86}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元列是第 1、2、4 列，则向量组的基为$\{v_1, v_2, v_4\}$

6. 原理：$\mathrm{x} = \mathrm{B}[\mathrm{x}]_B$

(1)

$$x = 5\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

7. (1) $Nul\ A$中向量个数即自由变量个数，即 2

(2) $Col\ A$中向量个数即主元列个数，即 3

8. (a) A 的秩为 3，即主元列个数为 3，自由变量个数为 8-3=5

则$dim\ Nul\ A = 5$, $dim\ Row\ A$=3 和$rank\ A^T = 3$

(b) 每个列都有 4 个数，所以$Col\ A = R^4$，每个解有 7 个数，则 $Nul\ A\ = R^7$ 这个的R^n表示的是一个向量含有的数，而维数是一组向量的个数，注意区分两者概念

(c) 零空间的维数即自由变量的个数有 5 个，则主元列的个数有 6-5=1

(d) 3 3

(e) 矩阵的主元列最多有 4 个，变量总个数也是 4，则$Nul\ A$的最小可能的维数是 0

9. A 的秩为 2，$dim\ Nul\ A = 2$

10. 证明：

(a) $dim\ Row\ A\ =\ dim\ Col\ A^T\ = dim\ Col\ A$

又 $dim\ Col\ A\ +\ dim\ Nul\ A = n$

则 $dim\ Row\ A\ +\ dim\ Nul\ A = n$

(b) $dim\ Col\ A =\ dim\ Col\ A^T$

又 $dim\ Col\ A^T +\ dim\ Nul\ A^T = m$

则 $dim\ Col\ A +\ dim\ Nul\ A^T = m$