线性代数第三次作业

一、判断题

请判断下列说法是否正确，并简述理由。（题目中涉及到的所有矩阵均为方阵） 题目比较多，这十几个判断可以不写理由。

a. 若 A 是 2×2 矩阵且其行列式为 0，则 A 的一列是另一列的倍数.

b. 若 3×3 矩阵 A 的两行相等，则 $\det A=0$.

c. 若 A 是 3×3 矩阵，则 $\det 5A=5\det A$.

d. 若 A，B 均为 $n\times n$ 矩阵，满足 $\det A=2$，$\det B=3$，则 $\det(A+B)=5$.

e. 若 A 为 $n\times n$ 矩阵且 $\det A=2$，则 $\det A^3=6$.

f. 若 B 由 A 中交换两行生成，则 $\det B=\det A$.

g. 若 B 为由 A 中第 3 行乘以 5 生成，则 $\det B=5\cdot\det A$.

h. 若 B 为通过 A 中任意 $n-1$ 行的线性组合加到另一行生成，则 $\det B=\det A$.

i. $\det A^{\mathrm{T}}=-\det A$.

j. $\det(-A)=-\det A$.

k. $\det A^{\mathrm{T}}A\geqslant0$.

l. 任意一个 n 个未知数 n 个方程的方程组均可由克拉默法则解出.

m. 若 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 属于 $\mathbb{R}^2$，且 $\det[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}]=10$，则平面中顶点为 $\mathbf{0}$，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 的三角形面积为 10.

n. 若 $A^3=\mathbf{0}$，则 $\det A=0$.

o. 若 A 是可逆的，则 $\det A^{-1}=\det A$.

p. 若 A 是可逆的，则 $(\det A)(\det A^{-1})=1$.

Hint：m.题需要你知道行列式在几何上的体现；你可以用二维平面上的两个向量构成一个$2*2$ 矩阵，然后计算一下行列式，再计算一下这 两个列向量构成的平行四边形的面积，进而进行判断；在此基础上，你可以往高维空间想一下，$n*n$ 矩阵的行列式代表什么？如果你有想法，可以来答疑，我想 我们对于行列式的几何角度理解将会产生一个印象深刻的讨论。

二、计算、证明题

1.Find the inverse matrix of

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

if it exists. If you think there is no inverse matrix of A, then give a reason.

2.Let A,B,C be the following 3×3 matrices.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&0\\1&0&5\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&5&6\\3&0&1\end{bmatrix}$$

Then compute and simplify the following expression.

$$(A^T-B)^T+C(B^{-1}C)^{-1}$$

3.Let A and B are $n\times n$ matrices with real entries.Assume that $A+B$ is invertible.Then show that

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

4.Let A be an $n\times n$ invertible matrix.Prove that the inverse matrix of A is uniques.

5.Let

$$A=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$$

Show that

(1)

$$A^n=\begin{bmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{bmatrix}for\quad any\quad n\in N$$

(2)Let $B = S^{-1}AS$,where S be an invertible 2×2 matrix.Show that $B^n = S^{-1}A^nS$ for any $n \in N$.

Hint :Use mathematical induction.

6.Consider the system of linear equations

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(a). Find the coefficient matrix A for this system.

(b). Find the inverse matrix of the coefficient matrix found in (a)

(c). Solve the system using the inverse matrix A^{-1}.

7.Determine the values of x so that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

is invertible. For those values of x, find the inverse matrix A^{-1}.

8.Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Then find the value of

det$(A^2B^{-1}A^{-2}B^2)$

(Hint：Without a proof, you may assume that A and B are invertible matrices.)

9.Find the determinant of the matix

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 101 & 102 & 103 \\ 102 & 103 & 104 \end{bmatrix}$$

10.

设

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}2 & -3 & 1 & 0 & -4\\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1\\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ B=\left[\begin{array}{cc}6 & 4\\ -2 & 1\\ -3 & 7\\ \hline -1 & 3\\ 5 & 2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

请验证：用**分块矩阵乘法**和**矩阵乘法（按行列计算）**这两种方法计算出来的矩阵乘积是一样的。并说明，使用分块矩阵来计算矩阵的乘积需要注意什么？（就是计算 AB 的时候，从**对 A 的列的分法**和对 **B 行的分法** 的角度来说明）