第五次作业 向量空间

1. 判断题
   (a) 单独一个向量是线性相关的
   (b) 若$H = Span\{b_1,\cdots,b_p\}$,则$b_1,\cdots,b_p$是$H$的一个基
   (c) 一个$n \times n$可逆矩阵的列构成R^n的一个基
   (d) 基是一个尽可能大的生成集
   (e) 基是一个尽可能大的线性无关集
   (f) 子空间H中一个线性无关集是H的一个基
   (g) 若B是矩阵A的阶梯形，则B的主元列构成$Col\ A$的一个基
   (h) V是一个非零有限维向量空间，若S生成V，T是V的一个子集且含有向量个数多于S中向量个数，则T是线性相关的

2. 证明w在由 v_1，v_2，v_3生成的R^4的子空间中

$$w = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3. 令

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   判定w是否在$Col\ A$中，w是否在$Nul\ A$中.

4. 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) 求 k 使得$Nul\ A$是R^k的一个子空间
   (b) 求 k 使得$Col\ A$是R^k的一个子空间

5. 求给出向量v_1，…，v_5生成的空间的一个基

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ -9 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. 已知基B和坐标向量$[x]_B$,求向量x

1. $B=\left\{\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}\right\},[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$
2. $B=\left\{\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\right\},[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}8\\-5\end{bmatrix}$
3. $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\\0\end{bmatrix}\right\},[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$
4. $B=\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\\3\end{bmatrix}\right\},[\mathbf{x}]_B=\begin{bmatrix}-4\\8\\-7\end{bmatrix}$

7. 求出矩阵 A 的$Nul\ A$和$Col\ A$的维数

$$A=\begin{bmatrix}1&-6&9&0&-2\\0&1&2&-4&5\\0&0&0&5&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

8. 求下列题目：
   (a) 若3×8矩阵A的秩为 3，求$dim\ Nul\ A, dim\ Row\ A$和$rank\ A^T$
   (b) 假设一个4×7矩阵A，有 4 个主元列，$Col\ A=R^4$吗？$Nul\ A=R^3$吗？并给出理由
   (c) 若5×6矩阵A的零空间是 5 维的，A的列空间的维数是多少？
   (d) 若A是4×3矩阵，A的秩最大可能是多少？若A是 3× 4矩阵，A的行空间的维数最大可能为多少？并给出理由
   (e) 若A是一个6×4矩阵，$Nul\ A$的最小可能的维数是多少？

9. 假设A行等价B，写出$rank\ A$和$dim\ Nul\ A$

$$A=\begin{bmatrix}1&-4&9&-7\\-1&2&-4&1\\5&-6&10&7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&-1&5\\0&-2&5&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

10. 证明以下等式：
    A 是一个$m\times n$矩阵

    a. $\dim \mathrm{Row}\ A+\dim \mathrm{Nul}\ A=n$ A 的列数
    b. $\dim \mathrm{Col}\ A+\dim \mathrm{Nul}\ A^{\mathrm{T}}=m$ A 的行数