第二次作业答案

1. 证明题

（一）证明两个或更多个向量的集合$S=\{v_1,\ldots,v_p\}$中至少有一个向量是其他向量的线性组合时，集合S线性相关。

充分性：不妨设 $v_j(1\le j\le p)$是其他向量的线性组合，那么其系数$c_j\neq 0$，可得到$v_j=-(\frac{c_1}{c_j}v_1+\frac{c_2}{c_j}v_2+\ldots+\frac{c_p}{c_j}v_p)$，即存在一组不全为 0 的系数使得等式成立，则$S$线性相关。

必要性：若S线性相关，则满足一组不全为 0 的系数，使得$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_pv_p=0$，不妨设$c_j\neq 0(1\le j\le p)$，则有$v_j=-(\frac{c_1}{c_j}v_1+\frac{c_2}{c_j}v_2+\ldots+\frac{c_p}{c_j}v_p)$，至少有一个向量可以由其余向量表示。

（二）若 S 线性相关，$v_1\neq 0$ 则存在不全为 0 的系数使$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_pv_p=0$ ，**设 j 是使$c_j\neq 0$的最大下标**，若 $j=1$ 则$c_1v_1=0$，这是不可能，因为要求$v_1\neq 0$，所以 $j>1$而$c_1v_1+\ldots+c_jv_j+\ldots+0v_p=0$ 则有$v_j=-(\frac{c_1}{c_j}v_1+\frac{c_2}{c_j}v_2+\ldots+\frac{c_{j-1}}{c_j}v_{j-1})$。

2. 判断题

（1）错误；至少有一个向量是其他向量的线性组合，不一定是倍数。

（2）错误；平凡解满足所有$Ax=0$；**仅有**平凡解时才是线性无关的。

（3）错误；应该是至少存在一个向量是其余向量的线性组合，而不是每一个都可以被线性表示，因为有一些向量相当于基向量

（4）正确；$v_3=2v_1+v_2$说明 $\{v_1，v_2,v_3\}$线性相关，$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$也相关，可以使v_4的系数为 0，即$2v_1+v_2-v_3+0\cdot v_4=0$

（5）错误；若向量集的个数多于每个向量所含元素个数时，它是线性相关的，反之，则不一定，若向量个数少于每个向量所含元素个数，不影响向量集中的向量由其他向量线性组合。

Eg: $v_1=[1,2,3,4]$ $v_2=[2,4,6,8]$ 向量集合个数少于每个向量元素个数，此时仍然线性相关。

3.判断向量组是否线性相关

参考：

例 1 设

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

a. 确定向量组 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 是否线性相关.

b. 可能的话，求出 v_1,v_2,v_3 的一个线性相关关系.

解 a. 我们需要确定方程（1）是否有非平凡解，把增广矩阵进行行变换，得

$$\begin{bmatrix}1&4&2&0\\2&5&1&0\\3&6&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

显然，x_1 和 x_2 为基本变量，x_3 为自由变量．x_3 的每个非零值确定（1）的一组非平凡解，因此 v_1,v_2,v_3 线性相关.

（1）$\begin{bmatrix}5&7&9&0\\0&2&4&0\\0&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5&7&9&0\\0&1&2&0\\0&1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5&7&9&0\\0&1&2&0\\0&0&-4&0\end{bmatrix}$

仅有平凡解，线性无关

（2）$\begin{bmatrix}0&0&-3&0\\0&5&4&0\\2&-8&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-8&1&0\\0&5&4&0\\0&0&-3&0\end{bmatrix}$

仅有平凡解，线性无关

（3）$\begin{bmatrix}1&-3&0\\-3&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&0\\-1&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

有自由变量，有无穷个解，线性相关

（4）$\begin{bmatrix}-1&-2&0\\4&-8&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&-2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&-4&0\end{bmatrix}$

仅有平凡解，线性无关

4.判断矩阵是否线性无关

参考

例 2 确定矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&2&-1\\5&8&0\end{bmatrix}$ 的各列是否线性无关.

解 研究 $Ax=\mathbf{0}$，把增广矩阵行变换：

$$\begin{bmatrix}0&1&4&0\\1&2&-1&0\\5&8&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&1&4&0\\0&-2&5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&1&4&0\\0&0&13&0\end{bmatrix}$$

（1）$\begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

无自由变量，仅有平凡解，线性无关

（2）$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

无自由变量，仅有平凡解，线性无关

（3）$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

行数少于列数，向量个数少于每个向量所含的元素个数，有自由变量，线性相关

（4）$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & -14 & 14 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

行数少于列数，向量个数少于每个向量所含的元素个数，有自由变量，线性相关

5. 构造增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

但$a+2=0$时，有非零解，即$a=-2$

6. 构造增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda^2 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1+\lambda) \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & \lambda(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

当$\lambda=0$时，即$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，有无穷的解

当$\lambda=-3$时，即$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$，无解

当$\lambda = -1$时，即$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，仅有唯一解

其他情况，都有唯一解

综上所述，（1）$\lambda \neq 0, -3$时，有唯一解 （2）$\lambda = -3$时，无解 （3）$\lambda = 0$，有无穷解

7

(a) Prove that the column vectors of every 3×5matrix A are linearly dependent

注意矩阵 A 的列向量线性相关当且仅当矩阵方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

有非零解（非平凡解） $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$

因为变量的个数比方程数量多，这个方程组一定有自由变量，自然会有无穷组解，也一定有非平凡解。

因此原题可证。

(b) Prove that the row vectors of every 5×3 matrix B are linearly dependent.

当然(b)你可以按照和(a)相似的思路去说明，也可以如下说明。

观察矩阵 B 的各行之间其实是B^T的各列（B^T是 B 的转置），所以B^T是3×5的。

(a)中已经说明，3×5矩阵各列线性相关，那也就是B^T各列组合的集合线性相关。自然，B 的各行线性相关。

8

A 行等价于 B，也就是在矩阵 A 的左边左乘一系列（由单位矩阵经历相同行变换后的）矩阵即可变为 B，也就是:

$$B = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n A$$

同理，B 行等价于 C，也就相当于在矩阵 B 的左边左乘一系列（由单位矩阵经历相同行变换后的）矩阵即可变为 C

$$C = \beta_1\beta_2 \dots \beta_n B$$

下面这个式子中的 B 替换为上面那个式子:

$$C = \beta_1\beta_2 \dots \beta_n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n A$$

因此，C 行等价于 A

9

8.1 用两种方法计算乘积AB；(a) 根据定义分别计算 Ab_1, Ab_2 (b) 利用计算AB的行列法则

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution 8.1

(a) $[Ab_1\ Ab_2] = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$

$Ab_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix}$ $Ab_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $AB = \begin{bmatrix} 4\cdot1+(-2)\cdot2 & 4\cdot3-2(-1) \\ -3\cdot1+0\cdot2 & -3\cdot3+0(-1) \\ 3\cdot1+5\cdot2 & 3\cdot3+5(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$

10

(1) **We prove that the matrix product BA is defined and it is a square matrix.**

Let A be an $m \times n$ matrix and B be an $r \times s$ matrix.

Since the matrix product AB is defined, we must have $n = r$ and the size of AB is $m \times s$.

Since AB is a square matrix, we have $m = s$.

Thus the size of the matrix B is $n \times m$.

From this, we see that the product BA is defined and its size is $n \times n$, hence it is a square matrix.

(2) according to the hint in the second assignment, you should have no problem to solve it. Thus the answer of (2) depends on your counterexample.

11

We prove the identity by induction on n.

The base case $n = 1$ is clear.

Suppose that the identity is true for $n = k$

Then we have

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k+1}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & -\cos\theta\sin k\theta - \sin\theta\cos k\theta\\ \sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\theta + k\theta) & -\sin(\theta + k\theta)\\ \sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}.$$

This proves that the identity holds for $n = k + 1$

Thus by induction, the identity is true for all positive integers n.