线性代数第一次作业

一、中英文概念对照练习

说明：(a)~(u)项为线性代数一些术语的英文形式。试写出其对应的中文，并简述其含义（使用文字和数学符号等简要解释即可）。

(a) linear algebra

(b) linear equations

(c) row

(d) column

(e) matrix

(f) basic variables

(g) free variables

(h) pivot position

(i) general solutions

(j) solution sets

(k) augmented matrix

(l) reduced echelon form

(m) consistent

(n) inconsistent

(o) linear combination

(p) subset

(q) identity matrix

(r) homogeneous linear equations

(s) trivial solution

(t) nontriviall solution

(u) matrix equation

二、概念巩固练习题

1、写出线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的展开形式，其中矩阵$A$为$m$行、$n$列。（提示：以$x_i$为自变量，$a_{ij}$为系数，将方程组展开为$m$个等式。）

2、线性方程组的解有哪三种情况？试举例说明。

3、试写出m行n列的系数矩阵。（提示：展开写，用矩阵表示，可利用省略号表示矩阵内的元素，不能简写为A_{mn}）

4、写出下列方程的增广矩阵形式：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2-8x_3=8 \\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9 \end{cases}$$

5、向量之间有哪几种基本运算方式？可进行相应运算的条件是什么（提示：可结合向量的维度对应关系等进行说明）？

6、

(1) 矩阵和向量的乘法需要满足什么条件才能进行？（提示：考察矩阵和向量的维度）

(2) 若$\boldsymbol{Ax}$存在，则矩阵和向量的维度应满足怎样的关系？

(3) 设矩阵$\boldsymbol{A}$为$m\times n$的矩阵，$\boldsymbol{u}$为$n\times 1$的列向量，$\boldsymbol{v}$为$1\times m$的行向量，则$\boldsymbol{Au}$和$\boldsymbol{vA}$是否可能相等？试判断并写出你的分析。

7、

(1) 简述将矩阵化为阶梯型的基本步骤。

(2) 简述对矩阵进行行初等变换的基本步骤。

三、计算类、综合类练习题

1、利用行初等变换（行简化算法）求解下列线性方程组

(1)

$x_2+4x_3=-5$
$x_1+3x_2+5x_3=-2$
$3x_1+7x_2+7x_3=6$

(2)

$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$
$3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8$
$-4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7$

(3)

$x_1 - 3x_3 = 8$
$2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7$
$x_2 + 5x_3 = -2$

(4)

$x_1 - 3x_2 = 5$
$-x_1 + x_2 + 5x_3 = 2$
$x_2 + x_3 = 0$

2、试求g, h, k 的关系，使以下矩阵是相容方程组的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

3、行简化下列两个矩阵为简化阶梯形，在最终的矩阵和原始矩阵中圈出主元位置，指出主元列。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

4、给出线性方程组的增广矩阵，求其通解。

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5、请解释：

(1) **欠定方程组**

若线性方程组的方程个数少于未知数个数，它称为**欠定方程组**。若一个欠定方程组是相容的，说明它为什么会有无穷多解。

(2) **超定方程组**

若线性方程组的方程个数多于未知数个数，它称为**超定方程组**。这样的方程组是否可能相容？用一个含有 2 个未知数，3 个方程的方程组说明你的答案。

6、计算$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$

(1)

$$u=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$u=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7、写出(1)、(2)问的等价于所给向量方程的线性方程组。

(1)

$$x_1\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(2)

$$x_1\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8、写出(1)、(2)问的等价于所给线性方程组的向量方程。

(1)

$$\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 8x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

9、说明$\boldsymbol{b}$是否为$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$的线性组合。

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

10、用$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$进行线性组合，生成5 个向量，写出生成方式($\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2}$)，并写出这些向量的 3 个元素（即写出这个向量$v$），不用画图。

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11、使用$\boldsymbol{Ax}$的定义把矩阵方程写成向量方程，或反过来。

(1)

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 9 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$x_1\begin{bmatrix}4\\-1\\7\\-4\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-5\\3\\-5\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}7\\-8\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-8\\0\\-7\end{bmatrix}$$

(4)

$$z_1\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}+z_2\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}+z_3\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}+z_4\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}$$

12、给出矩阵$\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，写出对应的矩阵方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵并求解，将解表示成向量形式。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&1&5\\-2&-4&-3\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}-2\\2\\9\end{bmatrix}$$

13、请解释：

(1) 设

$$u=\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}3&-5\\-2&6\\1&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$是否在由$\boldsymbol{A}$的列所生成的$\boldsymbol{R}^3$的子集当中？为什么？

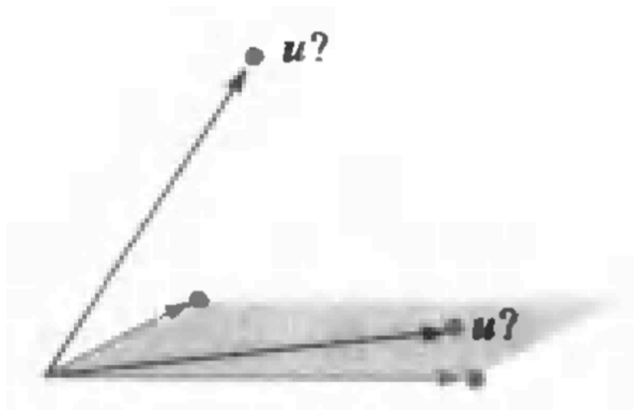

图1 u在何处?

(2) 设

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

(v_1,v_2,v_3)是否生成$\boldsymbol{R}^4$？为什么？

(3) 设$\boldsymbol{A}$ 是3×4矩阵，$\boldsymbol{y_1}$,$\boldsymbol{y_2}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y_1}+\boldsymbol{y_2}$, 设对$\boldsymbol{R}^4$中的向量$\boldsymbol{x_1}$和$\boldsymbol{x_2}$，$\boldsymbol{y_1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{y_2}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_2}$, 为什么方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}$相容?

14、确定方程组是否有非平凡解，使用尽可能少的行运算。

(1)

$$\begin{gathered}x_1-3x_2+7x_3=0\\-2x_1+x_2-4x_3=0\\x_1+2x_2+9x_3=0\end{gathered}$$

(2)

$$\begin{gathered}-5x_1+7x_2+9x_3=0\\x_1-2x_2+6x_3=0\end{gathered}$$

15、参照例1、例2，将线性方程组的解集用参数向量的形式表示出来。（示例在题目后给出）

(1)

$$\begin{gathered}x_1+3x_2+x_3=0\\-4x_1-9x_2+2x_3=0\\-3x_2-6x_3=0\end{gathered}$$

(2)

$$\begin{gathered}x_1+3x_2-5x_3=0\\x_1+4x_2-8x_3=0\\-3x_1-7x_2+9x_3=0\end{gathered}$$

例 1 确定下列齐次方程组是否有非平凡解，并描述它的解集.

$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2-4x_3&=0\\ -3x_1-2x_2+4x_3&=0\\ 6x_1+\ \ x_2-8x_3&=0 \end{aligned}$$

解 令 A 为该方程组的系数矩阵，用行化简法把增广矩阵 $[A\ \ \mathbf{0}]$ 化为阶梯形.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0\\ -3 & -2 & 4 & 0\\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 x_3 是自由变量，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非平凡解（对 x_3 的每一选择都有一个解），为描述解集，继续把 $[A\ \ \mathbf{0}]$ 化为简化阶梯形：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{4}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \quad -\frac{4}{3}x_3 &= 0\\ x_2 \qquad\quad &= 0\\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

解出基本变量 x_1 和 x_2 得 $x_1=\dfrac{4}{3}x_3, x_2=0, x_3$ 是自由变量， $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解有向量形式

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3\\ 0\\ x_3 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}=x_3\boldsymbol{v},\ \text{其中}\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} \frac{4}{3}\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}$$

这里 x_3 由通解向量的表达式中作为公因子提出来. 这说明本例中 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的每一个解都是 $\boldsymbol{v}$ 的倍数. 平凡解可由 $x_3=0$ 得到. 几何意义下，解集是 $\mathbb{R}^3$ 中通过 $\mathbf{0}$ 的直线，见图 1-21.

例 2 单一方程也可看作是方程组，描述下列齐次“方程组”的解集.

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \qquad (1)$$

解 这里无需矩阵记号. 用自由变量表示基本变量 x_1. 通解为

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

x_2 和 x_3 为自由变量. 写成向量形式，通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underset{\uparrow \atop \boldsymbol{u}}{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\uparrow \atop \boldsymbol{v}}{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \text{（}x_2, x_3\text{ 为自由变量）} \qquad (2)$$

计算表明，方程（1）的每个解都是向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的线性组合，如（2）式所示. 即解集为 Span$\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$，因为，$\boldsymbol{u}$ 不是 $\boldsymbol{v}$ 的倍数，解集是通过原点的一个平面. 见图 1-22.

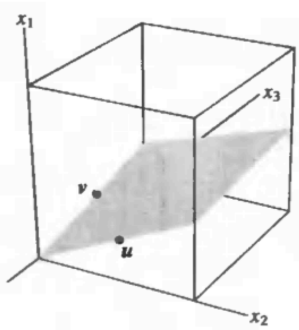

图 1-22 ■

16、说明和比较 $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ 与 $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$ 的解集。

四、注意事项

- **上交日期：下周三（10月14日）**
- 本次作业第一部分共有21个小题，第二部分共有7题，第三部分共有16题，请不要漏做。
- 禁止抄袭，逾期视为未提交作业。