第一题答案

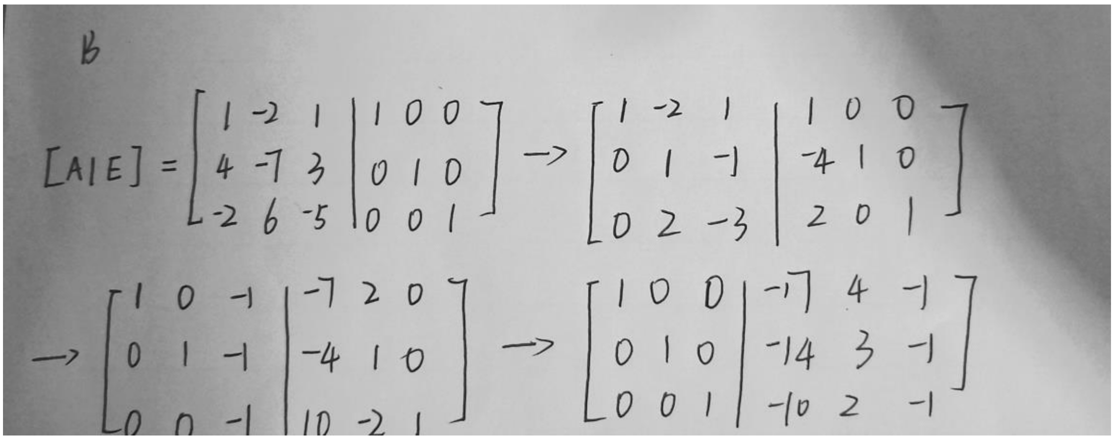
$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&0\\0&1&2&2&3\\5&4&4&3&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-3\\0&1&2&2&3\\0&-1&-1&-2&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&2&2&3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

选取x_4为自由变量，令$x_4=0$得特解$(0,-1,2,0)^T$

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\-1-2x_4\\2\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

第二题答案



B

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\4&-7&3&0&1&0\\-2&6&-5&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&1&1&0&0\\0&1&-1&-4&1&0\\0&2&-3&2&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-7&2&0\\0&1&-1&-4&1&0\\0&0&-1&10&-2&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-17&4&-1\\0&1&0&-14&3&-1\\0&0&1&-10&2&-1\end{array}\right]$$

第三题答案

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-3&5\\3&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-5&7\\0&-2&2\end{vmatrix}=1\times(-10+14)=4$$

$$D1=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-3&5\\1&1&-1\end{vmatrix}=0$$

$$D2=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&2&5\\3&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&2&5\\2&1&-1\end{vmatrix}=2\times(5+2)=14$$

$$D3=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-3&2\\3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&-3&2\\2&1&1\end{vmatrix}=2\times(2+3)=10$$

解得：

$$x_1=\frac{D1}{D}=0,x_2=\frac{D2}{D}=\frac{7}{2},x_3=\frac{D3}{D}=\frac{5}{2}$$

第四题答案

（1）C　　　　　（2）38

第五题答案

(1) 左边按照n次方的定义展开，右边按照逆的乘法性质倒着展开，得证。

(2)显然，对于可逆矩阵，行向量构成极大线性无关组。那么无论如何进行行交换，新矩阵均为可逆矩阵。

第六题答案

[B]

证明：$a_1, a_2 \cdots a_r, \beta$ 线性无关

假设 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r + l\beta = 0$　　　(1)

由于β是方程组的解，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1\beta^T = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2\beta^T = 0 \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = a_r\beta^T = 0 \end{cases}$$

(1)式右乘β^T，得 $k_1a_1\beta^T + k_2a_2\beta^T + \cdots + k_ra_r\beta^T + l\beta\beta^T = 0$.

则 $l\beta\beta^T = 0$.

又∵β是非零解向量，有$\beta\beta^T > 0$，则 $l = 0$.　(1)式可化为

$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ra_r = 0$.

∵ $a_1, a_2 \cdots a_r$ 线性无关.

∴ $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

综上，$a_1, a_2, \cdots a_r, \beta$ 线性无关

第七题答案

解 $$D \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} 2a+b & a & b & a \\ 2a+b & 0 & a & b \\ 2a+b & a & 0 & a \\ 2a+b & b & a & 0 \end{vmatrix} = (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & -a & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b-a & a-b & -a \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & b & a \\ 0 & -b & a-b & b-a \\ 0 & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & b & a \\ 0 & -b & a-b & b-a \\ 0 & 0 & -a & a-b \\ 0 & 0 & a-b & -a \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_4} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+b & a \\ 0 & -b & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -b & a-b \\ 0 & 0 & -b & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} (2a+b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a+b & a \\ 0 & -b & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b \end{vmatrix}$$

$$= b^2(b^2-4a^2).$$

第八题答案

【4.27】 已知四阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解法一 令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$，则由 $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$ 得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理后得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，知

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3=0, \\ -x_1+x_3=0, \\ x_4-1=0. \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}，其中 k 为任意常数.$$