线性代数第七次作业

写在前面

- 从ppt 5.123开始的这部分内容很重要，比如特征值、相似对角化、正交、二次型就挺重要的，我多出几个题（逃
- ps：课后练习题部分，多数题目是基础/经典/重要的
- pps：由于这部分题目期末考试不会出的特别简单，一来分值较多，二来多为大题（计算、证明）和中档/较难的小题（填空/选择），所以作业题也不会特别简单，同时加大了题量。大家要提前做好心理准备，把不理解/不熟练的东西抓紧学会，坚持把作业做完，奥利给！

一、课后练习题

1、本题要求写出每个选项的分析步骤，**只写选项不得分!**

【2.2】 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则______.

(A) $\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

(B) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

(C)对于相同的特征值 λ，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量

(D) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均与同一个对角阵相似

2、本题为计算题，要求写出解答步骤，**只写答案不得分!**

【2.4】 已知

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&2\end{bmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$______.

3、计算题

【2.19】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

4、综合题

【4.32】 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}x & y & z\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}$ 相似，

(1)求 x,y,z 的值；

(2)求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

5、证明题

【2.32】 设 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，而矩阵 B 与 A 有相同的特征值，证明：A 与 B 相似.

6、计算题

题型 2：实对称矩阵的正交相似对角化

【3.8】 将矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ 正交相似对角化，并求出正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ 为对角阵

二、期末真题——证明题

写在前面

大家把基本的概念和性质（比如什么是正交、什么是实对称矩阵、特征向量和特征值的定义）掌握牢固之后再做下面的题目，或者回顾完概念再做题。ps：题目难度是从我自己的角度标注的。

7、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

（1）证明不含零向量的正交向量组一定是线性无关组。（简单题）

（2）证明同一矩阵不同特征值对应的特征向量必定线性无关。（中档题）

8、证明题（简单题）（本题10分）

若n阶方阵A满足$A^2-4A+3I=0$，则A的特征值只能是3或1。

9、证明题（中档题）

证明实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交

10、证明题（难题）

设A为2阶方阵，非零向量α不是A的特征向量，满足$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$. 令矩阵$P=[\alpha\ A\alpha]\in R^{2\times 2}$. 证明$P$可逆，并求$P^{-1}AP$

三、特征值、特征向量、对角矩阵的应用——SVD分解

11、线性代数已经学那么久了，它究竟有什么用呢？下面我们就来看一个能用上它的例子。

题目描述：

SVD分解在信息检索、推荐系统、自然语言处理等领域（这几年喊得那么响的人工智能的研究分支就包括它们，准确说是基于深度学习的IR/RS/NLP。此外做的比较多的还有CV、多模态等）具有广泛的应用。ps：咱们学院3楼的信息检索实验室和4楼的iLearn实验室的研究方向就涵盖NLP、IR、RS、CV、MM等。

大家可以根据第（1）小问的两个链接理解一下SVD是什么，需要用到的数学知识我们已经学过了，应该能看懂。然后第（2）小问完成一个计算实例。

（1）试结合参考链接1和2（博客2为1的阅读笔记），推导矩阵的奇异值分解$A=U\Sigma V$，要求详细说明三个矩阵U,Σ,V中的元素如何确定（如何求出来）。

1、[刘建平-奇异值分解(SVD)原理与在降维中的应用]

2、[知乎-奇异值分解(SVD)(链接1文章的阅读笔记)]

（2）对矩阵A进行SVD分解，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$$