线性代数最后一次作业

注记：本次作业主要覆盖内容为

Slides 6.124 内积、正交集 **和** 施密特方法

Slides 7.1-7.2 对称矩阵对角化 **和** 二次型

8th assignment deadline：23:59 11 Dec 2020

在评改完本次作业之后，将会统计计算大家的平时作业分。

预备知识

0.1 对称矩阵特征向量和特征值的性质

设 A 是实对称矩阵，则

(1) A 的特征值为实数，A 的特征向量为实向量；

(2) A 的不同特征值所对应的特征向量正交；

(3) A 的 k 重特征值所对应的线性无关的特征向量恰有 k 个；

(4) A 相似于对角阵，且存在正交矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值.

(5) 实对称矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

0.2 实对称矩阵正交对角化的步骤

(1) 求出矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$；

(2) 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们正交化、单位化，得 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1+\cdots+k_i=n$，故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

(3) 把这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 P，便有 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$. 注意 Λ 中对角元的排列次序应与 P 中列向量的排列次序相对应.

1 格莱姆-施密特方法

用施密特方法将下面的向量组正交化

$$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,3),\alpha_3=(1,4,9);$$

2 对称矩阵的对角化

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，求 A 的特征值及对应的特征向量，矩阵 A 是否与对角矩阵相似，若相似，写出对角阵 Λ，并计算 $A^{10}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$.

（需要注意的是，本题中，只要求进行相似对角化即可，并没有要求正交相似对角化。通过计算，你能体会到矩阵的相似对角化是有利于降低矩阵**幂**的计算复杂度的）

3 对称矩阵的正交对角化

将矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$ 正交相似对角化，并求出正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ 为对角阵.

（题目中要求为正交相似对角化，这里你需要使用**施密特正交化方法**对特征向量进行正交化）

4 二次型

设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$，则二次型的矩阵是____

（分析所求出的矩阵的特征值的正负，你可以发现**矩阵的正定与否和该矩阵对应的二次型的正定与否**是一致的）

5 选做题，主要考察正定矩阵相关性质（正定矩阵的特征值均大于 0）

Suppose *A* is a positive definite(正定) symmetric(对称) *n*×*n* matrix.

(a) Prove that *A* is invertible(可逆的).

(b) Prove that A^{-1} is symmetric(对称的).

(c) Prove that A^{-1} is positive-definite(正定的).

(*MIT, Linear Algebra Exam Problem*)

写在最后

本学期的TA 助教工作接近尾声，连续 2 个月的作业也将随着这一次作业的发布宣告结束：线性代数即将迎来Final Exam，请各位着手复习，看一看课件， 翻一翻作业，做一做往年题，这是十分必要的。

希望第一年级第一学期的学习，能让各位体会到中学和大学的巨大差异：

自我学习、自律学习、主动学习、研究学习等等是十分必要的，良好的学习习惯在时以日长的学习时段中所体现出的效果也是足够客观的。李熙、刘宗殿、雷艳、卢昊和我真切的希望你们可以从我们的工作中获益，对于平时工作的不足之处，也请各位海涵。

学无止境，气有浩然。

5 December 2020 15:16