Тетерин Никита. Семинарская задача 6.1

Постановка задачи:

Оценить число операций умножения и деления, производимых в процессе прямого и обратного хода метода Гаусса.

Решение:

Алгоритм Гаусса (также известный как метод последовательного исключения) – метод решения СЛАУ путем приведения матрицы A, содержащей левую часть матричного уравнения, к верхней треугольной матрице $\tilde{A}$, то есть к матрице, главная диагональ и все элементы под главной диагональю которой равны 0, с дальнейшим определением вектора неизвестных. Он производится в 2 этапа, т. н. прямой и обратный ход. В результате прямого хода получается, собственно, треугольная матрица, а во время обратного последовательно определяются неизвестные величины.

Чтобы привести матрицу к треугольному виду, необходимо последовательно выполнять элементарные преобразования над её строками таким образом, чтобы на i-й итерации диагональный элемента a_{ij} и все под ним стали равны 0. Для этого из каждой строки из $n - i$ строк под главной диагональю надо вычесть текущую, умноженную на некоторый коэффициент. Нетрудно подсчитать, что для строки k потребуется определить $n-k$ множителей m_{ik} вида

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

чтобы обнулить элемент $a_{ik}^{(k)}$, иначе говоря, на шаге k потребуется произвести $n-k$ операций деления и $(n-k)(n-k+1)$ операций умножения (для всех элементов матрицы, лежащих правее и ниже текущего диагонального, и, собственно, его самого). Таким образом, в ходе выполнения прямого хода получаем следующие выражения для числа дорогостоящих операций умножения и деления:

$$(1) \quad D = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,; \quad M = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)$$

Преобразуем:

$$(2) \quad D = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n \cdot \frac{(n-1)\cdot 1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(3) \quad M = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Для дальнейшего упрощения выражения (3) необходимо получить формулу для суммы первых n квадратов натуральных чисел, произведем её вывод по индукции.

Пусть для произвольного $n = m$ $(m \geq 1)$ справедливо следующее:

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Тогда для $m+1$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m^2 + 2m + 1 =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m(m+1) + m + 1 =$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6m(m+1) + 6m + 6}{6} = \frac{(m+1)(m(2m+7)+6)}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(2m+7) + 6 = 2m^2 + 7m + 6 \Rightarrow m = x - 1 \Rightarrow (x+1)(2x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Таким образом, формула доказана. Воспользуемся ей для упрощения выражения (3):

$$(4) \quad M = \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{2n^3 - 2n}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

Отметим, что дробь, полученная в результате преобразований, обязательно является целым числом, поскольку произведение трех подряд идущих целых чисел обязательно кратно 3. Аналогично, число делений суть есть целое число, что довольно закономерно. Можно заключить, что операций умножения в прямом ходе больше в $(2/3)(n+1)$ раз. Похожим образом можно получить выражения и для числа операций в обратном ходе. Так, для определения компоненты x_k вектора неизвестных потребуется $n - k$ перемножений и 1 деление, т. е.

$$(5) \quad D = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n; \quad M = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Можно заключить, что прямой ход метода Гаусса является наиболее ресурсоемким, поскольку число производимых операций умножения $\prec n^3$.