| | |
|---|---|
| | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**<br>**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**<br>**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**<br>**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

# ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 2

по дисциплине: «Вычислительная математика»

| | |
|---|---|
| Студент | Тетерин Никита Евгеньевич |
| Группа | РК6-54Б |
| Тип задания | Задание к семинару |
| Тема лабораторной работы | Интерполяция |

Студент **_____06.09.2021____ _Тетерин Н. Е.__**
*подпись, дата* *фамилия, и.о.*

Преподаватель **________________ _Соколов А. П. __**
*подпись, дата* *фамилия, и.о.*

Оценка ___________________________________

*Москва, 2021 г.*

# Оглавление

# Задание к семинару

Задача. *Требуется вывести две формулы для аппроксимации значения интеграла (1) используя линейную и квадратичную интерполяции.*

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

# Цель выполнения задания

**Цель выполнения задания** – освоить аппарат кусочно-линейной и кусочно-квадратичной интерполяции.

# Выполненные задачи

1. Произвести линейную интерполяцию подынтегрального выражения
2. Получить первую формулу для аппроксимации (1), проинтегрировав полученное в предыдущем пункте выражение
3. Произвести квадратичную интерполяцию подынтегрального выражения, используя явные формулы для коэффициентов интерполирующего многочлена
4. Произвести квадратичную интерполяцию подынтегрального выражения, используя матричное уравнение
5. Получить вторую формулу для аппроксимации (1), проинтегрировав полученные в предыдущих пунктах выражения, убедиться в их совпадении
6. Визуализация полученных результатов

## 1. Линейная интерполяция

Интеграл (1) – неберущийся, также известен как *функция ошибки* $\mathrm{erf}\,(x)$. Для его аппроксимации необходимо интерполировать подынтегральное выражение с последующим интегрированием. Выберем две точки, принадлежащие интересующей нас функции ( $e^{-t^2}$ ): $t_0 = 0$ , $t_1 = x$ . Тогда значения функции в этих точках соответственно 1 и $e^{-x^2}$ . Интерполируем:

$$f(t) = e^{-t^2}, \begin{cases} t_0 = 0, f(t_0) = 1 \\ t_1 = x, f(t_1) = e^{-x^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\frac{l_1(t) - f(t_0)}{f(t_1) - f(t_0)} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow \frac{l_1(t) - 1}{e^{-x^2} - 1} = \frac{t - 0}{x - 0} \Rightarrow l_1(t) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x} t + 1 \quad (3)$$

## 2. Получение формулы для аппроксимации интеграла (1)

Проинтегрируем выражение (3) по $t$ на интервале $[0; x]$ и подставим результат в (1):

$$L_1(x) = \int_0^x l_1(t)dt = \int_0^x \frac{e^{-x^2} - 1}{x} tdt + \int_0^x 1 \cdot dt = \frac{e^{-x^2} - 1}{2x} x^2 + x =$$

$$= x\left(\frac{e^{-x^2} - 1}{2} + \frac{2}{2}\right) = x\left(\frac{e^{-x^2} + 1}{2}\right) \Rightarrow I_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} L_1(x) = \frac{x(e^{-x^2} + 1)}{\sqrt{\pi}} \quad (4)$$

Получаем выражение (4) для вычисления приближенного $I(x)$ .

## 3. Квадратичная интерполяция подынтегрального выражения с использованием явных формул для параметров полинома

Известно, что для кусочно-квадратичной интерполяции необходимо иметь 3 известные точки для каждого интервала (в этой задаче имеется только один интервал), поэтому кроме использованных ранее 0 и $x$ выберем третью, находящуюся на середине выбранного диапазона. Получаем:

$$\begin{cases} t_0 = 0, f(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 = 1 \\ t_1 = \frac{x}{2}, f(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 = e^{-\frac{x^2}{4}} \\ t_2 = x, f(t_2) = a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 = e^{-x^2} \end{cases} \quad (4)$$

Для неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, a_2$ существуют следующие формулы:

$$a_0 = f(t_0) - a_1 t_0 - a_2 t_0^2$$
$$a_1 = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} - \frac{f(t_1) - f(t_0)}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_1)} \quad (5)$$
$$a_2 = \frac{f(t_2) - f(t_0)}{((t_2 - t_0)(t_2 - t_1))} - \frac{f(t_1) - f(t_0)}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)}$$

Для краткости введем обозначения $m = e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ и $s = x/2$ . Тогда $e^{-x^2} = m^4$, $x^2 = 4s^2$ . Получаем:

$$a_2 = \frac{m^4 - 1}{(2s - 0)(2s - s)} - \frac{m - 1}{(s - 0)(2s - s)} = \frac{m^4 - 1 - 2m + 2}{2s^2} = \frac{m^4 - 2m + 1}{2s^2} \quad (6.1)$$

$$a_1 = \frac{m - 1}{s - 0} - \frac{m^4 - 2m + 1}{2s^2}(s + 0) = \frac{2m - 2 - m^4 + 2m - 1}{2s} = \frac{-m^4 + 4m - 3}{2s} \quad (6.2)$$

$$a_0 = 1 - (\dots) \cdot 0 - (\dots) \cdot 0 = 1 \ (6.3)$$

## 4. Квадратичная интерполяция с использованием матричного уравнения для интерполирующего полинома общего вида

Продолжим пользоваться обозначениями раздела 3. После введения набора из 3 точек аналогично пункту 3 получаем СЛАУ (7). Утверждение о ранге матрицы (8) истинно, поскольку были выбраны 3 попарно несовпадающие точки $t_i \neq t_j$, $i \neq j$ . Найдем обратную матрицу $T^{-1}$ для решения СЛАУ (7).

$$\begin{cases} f_0 = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 \\ f_1 = a_1 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 \\ f_2 = a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 \end{cases} \Rightarrow f = Ta \Rightarrow T^{-1} f = T^{-1} T a = a \quad (7)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}, \qquad rg(T) = 3 \quad (8)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & t_0 & t_0^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & t_0 & t_0^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_1^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & t_2 & t_2^2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & s^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2s & 4s^2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & s^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2s^2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2s^2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{2s} & \dfrac{2}{s} & -\dfrac{1}{2s} \\ \dfrac{1}{2s^2} & -\dfrac{2}{2s^2} & \dfrac{1}{2s^2} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{x} & \dfrac{4}{x} & -\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2}{x^2} & -\dfrac{4}{x^2} & \dfrac{2}{x^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$a = T^{-1} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{x} & \dfrac{4}{x} & -\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2}{x^2} & -\dfrac{4}{x^2} & \dfrac{2}{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-m^4 + 4m - 3}{x} \\ \dfrac{2(m^4 - 2m + 1)}{x^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Заметим, что вектор $a$ в выражении (10) совпадает с точностью до переобозначений ($2s = x$) с выражениями (6.1–6.3) для коэффициентов полинома 2 степени, вычисленным по формулам в явном виде. Также стоит отметить, что подобным образом можно определить неизвестные коэффициенты при кусочной интерполяции функции полиномом степени $n$. При этом лишь увеличивается размерность матриц $T$ и $T^{-1}$ , и, соответственно, возникает требование к числу точек, поскольку обратная матрица существует лишь при ненулевом детерминанте, т. е. при выборе $n + 1$ несовпадающих точек.

## 5. Получение второй формулы для аппроксимации

Подставим полученные коэффициенты в выражение для параболы, проходящей через точки $t_0, t_1, t_2$ и проинтегрируем почленно, переходя обратно от $s$ к $x$:

$$L_{2(x)} = \int_0^x l_2(t)dt = x\frac{2(m^4 - 2m + 1)}{3} + x\frac{-m^4 + 4m - 3}{2} + x =$$

$$= \frac{x}{6}(4m^4 - 3m^4 - 8m + 12m + 4 - 9 + 6) = \frac{x}{6}(m^4 + 4m + 1) \Rightarrow I_2(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x(m^4 + 4m + 1)}{6} =$$

$$I_2(x) = \frac{x(e^{-x^2} + 4e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + 1)}{3\sqrt{\pi}} \quad (7)$$

Аналогичный результат получается при интегрировании полинома с коэффициентами, полученными в ходе решения матричного уравнения в п.4:

$$I_2(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \left(\frac{2(m^4 - 2m + 1)}{x^2}t^2 + \frac{-m^4 + 4m - 3}{x}t + 1\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(x\frac{2(m^4 - 2m + 1)}{3} + x\frac{-m^4 + 4m - 3}{2} + x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x(m^4 + 4m + 1)}{6} = (7)$$

## 6. Визуализация результатов

Графики для выражений (4) и (7) будем строить с помощью модуля *matplotlib* языка *Python*. Также в исходном коде программы используются модули *math* для математических вычислений и *numpy* для работы с массивами. Исходный код можно найти в папке *src*. На рис.1 приведен полученный график, на нем изображена библиотечная функция math.erf() (которую в данном случае будем считать эталоном), 2 графика аппроксимации, построенные на основе выражений (4) и (7), а также график на основе первых 4 элементов ряда (12).

Хочется отметить тот факт, что интеграл (1) можно аппроксимировать и другим способом, а именно разложив экспоненту под знаком интеграла в ряд Маклорена и также проинтегрировав почленно:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \quad (9)$$

$$\int e^{-t^2} dt = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \quad (10)$$

Нетрудно показать, что (10) сходится по признаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)n!(2n+3)}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-x^2(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}\right| = 0 \quad (11)$$

Аналогично можно вывести итеративную формулу для (10):

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{-x^2(2i-1)}{i(2i+1)}, \qquad (i \geq 1) \Rightarrow I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( x \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{-(2i-1)x^2}{i(2i+1)} \right)$$

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \right) \quad (12)$$

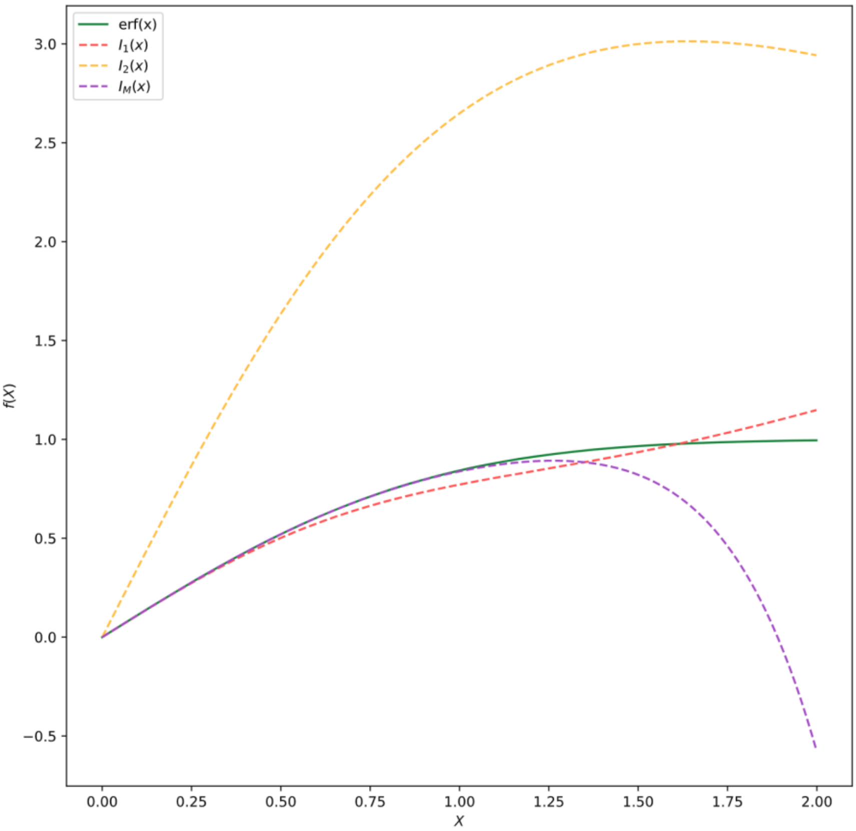


Рис. 1. Графики приближенно вычисленного интеграла (1).
Функция ошибки erf из модуля math, график для формулы (4), графики для формул (7) и (12).

## Заключение

Можно наблюдать, что аппроксимация (4), график которой изображен красным, работает намного лучше аппроксимации (7), абсолютная погрешность на 1-2 порядка меньше (от $o(10^{-2})$ до $o(10^{-4})$ для разных окрестностей 0, против $o(10^{-1})$ и $o(10^{0})$ соответственно), а приближение конечным числом элементов ряда Маклорена ожидаемо хорошо ($a \prec o(10^{-6})$) работает только вблизи 0 (попробую предположить, что $I(x)$ бесконечно дифференцируема и потому может быть приближена этим рядом с неограниченной точностью, в то время как я задействовал только 4 первых элемента ряда).

По непонятной мне причине аппроксимация, построенная с помощью квадратичной интерполяции, дает *очень* большую ошибку. Я допускаю, что мог ошибиться где-то в расчётах, хотя полученный ответ совпал при использовании двух разных методов (п.3, п.4).

## Список использованных источников


1. **Соколов А. П., Першин А. Ю.** Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). // кафедра «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2021.
2. **Першин А. Ю.** Лекции по вычислительной математике. // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования) МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020.
3. **Higham, Nicholas J.** Accuracy and stability of numerical algorithms // University of Manchester, Manchester, England, 2002.