Тетерин Никита РК6-54б. Задача 5 к семинару 2.

Задача: требуется вывести формулу численного дифференцирования второго порядка для нахождения второй производной функции $f(x)$ с помощью разложения в базисные многочлены Лагранжа, предполагая, что даны значения функции $f(x)$ в узлах x_1 и $x_1 \pm h$, где h - некоторая константа, обозначающая шаг.

Имеем:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - h, f(x_0) = f_0 \\ x_1 = x_1, \qquad f(x_1) = f_1 \\ x_2 = x_1 + h, f(x_2) = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

Требуется найти формулу для $f^{''}(x)$ 2 порядка точности (остаточный член метода $\prec h^2$). Продифференцируем дважды выражение для интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного на узлах (1):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) l_i(x) + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!} f^{(n)}(\xi), \ \ \xi \in (x_0; x_n) \qquad (2)$$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) l_i^{'}(x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!}\right] f^{(n)}(\xi) + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (3)$$

$$f''(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) l_i^{''}(x) + \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!}\right] f^{(n)}\,(\xi) +$$

$$+2\frac{d}{dx}\left[\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!}\right] f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!} f^{(n+2)}(\xi) \qquad (4)$$

В нашем случае $n = 3$. Запишем выражение для второй производной базисного полинома, учитывая тот факт, что в числителе старшая степень полинома равна порядку производной:

$$l_i''(x) = \left[\prod_{i \neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right]'' = \frac{2}{\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)} \quad (5)$$

Обозначим часть остаточного члена, не зависящую от ξ, в выражении (2) как $\sigma(x)$. выразим первую и вторую производные данной функции при условии $n = 3$:

$$\sigma(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}{n!} \Rightarrow \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} \quad (6)$$

$$\sigma'(x) = \frac{(2x - x_0 - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)}{6} \quad (7)$$

$$\sigma''(x) = [2(x - x_2) + (2x - x_0 - x_1) + (x - x_0) + (x - x_1)]/6 =$$
$$= [2x - 2x_2 + 2x - x_0 - x_1 + x - x_0 + x - x_1]/6 = \frac{6x - 2(x_0 + x_1 + x_2)}{6} = (x - x_1) \quad (8)$$

Теперь, когда все предварительные выражения (5–8) выведены, подставим их в (4). Поскольку последнее содержит производную от неизвестной функции, остаточный член можно оценить только в исходных узлах. Заметим, что последний член (4) в таком случае равен 0. В результате (4) без учета остаточных членов (содержащих ξ)можно переписать в следующем виде:

$$f''(x) = f(x_0)\cdot\frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\cdot\frac{2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\cdot\frac{2}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} =$$

$$= \frac{2f_0}{2h\cdot h} + \frac{2f_1}{-h\cdot h} + \frac{2f_2}{2h\cdot h} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} \quad (9)$$

Для краткости обозначим (9) как m и получим уточненную формулу, включающую остаточный член (для значений x в исходных узлах):

$$f''(x) = m + \left[\frac{2x^2 - 6xx_1 + 3x_1^2 - h^2}{3}\right] f^{(4)}(\xi) + (x - x_i)f^{(3)}(\xi) \qquad (10)$$

$$f''(x_1) = m + [3x_1^2 - 6x_1^2 + 3x_1^2 - h^2]\frac{f^{(4)}(\xi)}{3} + 0 = m - \frac{h^2}{3}f^{(4)}(\xi) = m + O(h^2) \qquad (11)$$

$$f''(x_0) = f''(x_1 - h) = m + [3(x_1-h)^2 - 6(x_1-h) + 3x_1^2 - h^2]\frac{f^{(4)}(\xi)}{3} + (x_1 - h - x_1)f^{(3)}(\xi) =$$

$$= m + \frac{2h^2}{3}f^{(4)}(\xi) - hf^{(3)}(\xi) = m + O(h) \qquad (12)$$

$$f''(x_2) = f''(x_1 + h) = m + [3(x_1+h)^2 - 6(x_1+h) + 3x_1^2 - h^2]\frac{f^{(4)}(\xi)}{3} + (x_1 + h - x_1)f^{(3)}(\xi) =$$

$$= m + \frac{2h^2}{3}f^{(4)}(\xi) + hf^{(3)}(\xi) = m + O(h) \qquad (13)$$

Выражения (11–13) содержат значения второй производной в узлах и остаточный член (погрешность). Хочется отдельно отметить, что, строго говоря, только (11) является формулой 2 порядка точности, то есть остаточный член в ней пропорционален h^2. (12) и (13) суть есть формулы первого порядка точности, поскольку содержат остаточный член, пропорциональный h. Подобный результат неудивителен, ведь для получения формулы, ошибка которой будет пропорциональна квадрату шага во всех узлах, нужно использовать 4 узла, а не 3. Такая же ситуация наблюдалась и в выражениях для первой производной: формулы 1 и 2 порядка точности выводились с помощью полиномов, заданных на 2 и 3 узлах соответственно.