Задача 3.8

Квадратурой Гаусса-Лобатто называется квадратура с максимальной степенью точности для заданного числа узлов n при том, что её крайние узлы x_1 и x_2 равны границам отрезка интегрирования. Как и в случае квадратуры Гаусса, отрезком интегрирования по умолчанию выбирается $[-1; 1]$. Требуется рассмотреть случай трех узлов:

$$\int_{-1}^{1} f(f)dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1),$$

и определить неизвестные коэффициенты w_1, w_2, w_3, x_2. Объяснить полученный результат.

Квадратура Гаусса, построенная на основе n узлов, позволяет без ошибки интегрировать полиномы степени не выше $2n-1$, поскольку настраиваемых параметров в её случае $2n$. В случае же квадратуры Лобатто первая и последняя абсциссы выбраны заранее и в нашем случае равны -1 и 1 соответственно. Получается, что оптимизируемых параметров в этом случае $2n-2$, а максимальная степень многочлена, интегрируемого без ошибки, составляет $2n-3$. Для трех узлов это $2 \cdot 3 - 3 = 3$. Попробуем выразить неизвестные коэффициенты с помощью системы уравнений, полученных исходя из требуемой степени точности квадратуры: она должна возвращать точный результат при интегрировании любого полинома степени не выше 3, то есть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = a_0 \int_{-1}^{1} dx + a_1 \int_{-1}^{1} x dx + a_2 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + a_3 \int_{-1}^{1} x^3\, dx$$

Точно должны вычисляться интегралы в правой части выражения, то есть получаем нелинейную систему алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ -w_1 + w_2 x_2 + w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 x_2^2 + w_3 = 2/3 \\ -w_1 + w_2 x_2^3 + w_3 = 0 \end{cases}$$

Для её решения вычтем 2 уравнение из 4, откуда получаем

$$w_2(x_2^3 - x_2) = 0 \Rightarrow w_2 x_2 (x_2^2 - 1) = 0$$

Отметим, что в левой части последнего выражения скобка не может быть нулевой (в таком случае средний узел будет совпадать с одним из крайних), а также w_2 не может быть нулевой (в таком случае несовместными окажутся уравнения 1 и 3). Получается, что $x_2 = 0$, что неудивительно в силу симметрии. Подставляя это значение в систему, получаем

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ w_1 + w_3 = 2/3 \end{cases} \Rightarrow w_2 = 4/3$$

Далее путем сложения 1 и 2 уравнений получаем

$$w_2 + 2w_3 = 2 \Rightarrow w_3 = \frac{6-4}{3 \cdot 2} = 1/3 \Rightarrow w_1 = 1/3$$

Таким образом, $w_1 = w_3 = 1/3, w_2 = 4/3, x_2 = 0$. Как уже было упомянуто выше, коэффициенты симметричны относительно 0. Результирующую формулу можно записать как

$$\int_{-1}^{1} f(f)dx = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$

В общем случае можно записать выражение для квадратуры Лобатто с весовой функцией $W(x) = 1$ как

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_n f(x_n) + \sum_{i=2}^{n-1} w_i\, f(x_i)$$

Известно, что отличные от крайних абсциссы узлов являются корнями $P'_{n-1}(x)$ (первой производной полинома Лежандра степени $n - 1$). Пользуясь этим фактом, можно записать

$$P'_{3-1}(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

При этом веса крайних узлов могут быть записаны как

$$w_{1,n} = \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

Веса же остальных узлов могут быть вычислены следующим образом:

$$w_i = \frac{2}{n(n-1)[P_{n-1}(x_i)]^2}, \text{ для } i = 2, \dots, n-1$$

Мне не удается получить корректный ответ для w_2 по этой формуле, возможно, она содержит ошибку (w_2 согласно ей равен 3). В целом не совсем ясно, откуда данные выражения получены и какой по большому счету смысл в использовании квадратуры такого вида вместо квадратуры Гаусса, ведь в случае последней максимальная степень полинома, интегрируемого точно, выше на 2.