	Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 1

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Тетерин Никита Евгеньевич
Группа	РК6-54Б
Тип задания	Задание к семинару
Тема лабораторной работы	Интерполяция

Студент **_____07.09.2021____ _Тетерин Н. Е.__**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель **________________ _Соколов А. П. __**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Оценка ___________________________________

Москва, 2021 г.

Оглавление

Задание к семинару

Задача. *Дана функция (1) и узлы* $x_1 = 0$ *и* $x_3 = 1$. *Требуется найти наибольшее значение* $x_2 \in (0;1)$, *для которого выполняется (2), где* L_2 *обозначает многочлен Лагранжа для функции (1), проходящий через узлы* x_1, x_2, x_3

.

$$f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = L_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \quad (2)$$

Цель выполнения задания

Цель выполнения задания – освоить аппарат интерполяции с помощью полинома Лагранжа, нахождения остаточного члена интерполяции.

Выполненные задачи

1. Произвести анализ функции, привести выражение для полинома Лагранжа степени 2.
2. Выписать выражение для остаточного члена интерполяции, решить полученное уравнение относительно неизвестного x_2 .
3. Визуализация задачи.

1. Интерполяция функции полиномом Лагранжа 2 степени

Приведенная функция (1) определена на участке [0;1] и имеет нули в точках x_1 и x_3 . Таким образом, $f(x_1) = 0$, $f(x_3) = 0$. Выражение для полинома Лагранжа 2 степени можно записать следующим образом:

$$L_2(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (3)$$

Подставляя в (3) известные значения, получаем более простое выражение для полинома Лагранжа (для нашего примера):

$$L_2(x) = 0\cdot(\dots) + f(x_2)\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(x_2-0)(x_2-1)} + 0\cdot(\dots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2(x) = f(x_2)\cdot\frac{x(x-1)}{x_2(x_2-1)} \quad (4)$$

2. Остаточный член интерполяции

Согласно теореме об остаточном члене интерполяции известно, что существует такое значение аргумента ξ , для которого истинно следующее выражение:

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^n}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \quad (5)$$

По условию задачи нам известна правая часть выражения (5), подставляя (4) в её левую часть, получаем уравнение (6) относительно x_2. Кроме того, $f(x_2) = \sqrt{x_2 - x_2^2}$. Решим полученное уравнение относительно x_2:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - L_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f(x_2)\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{x_2(x_2-1)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{f(x_2)}{x_2(x_2-1)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2 + \frac{f(x_2)}{x_2(x_2-1)} = -1 \Rightarrow f(x_2) = 3x_2(1-x_2) \quad (6)$$

$$\sqrt{x_2(1-x_2)} = 3x_2(1-x_2) \Rightarrow m \coloneqq x_2(1-x_2) \Rightarrow \sqrt{m} = 3m^2 \Rightarrow m = 9m^2 \ (x_2 \in [0;1]) \Rightarrow$$

$$m = \frac{1}{9} \Rightarrow x_2 - x_2^2 = \frac{1}{9}, \qquad x_2 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \quad (7)$$

(7) – интересующая нас величина.

3. Визуализация результатов

Графики для исходной функции (1) и полинома (4) будем строить с помощью модуля *matplotlib* языка *Python*. Также в исходном коде программы используются модули *math* для математических вычислений и *numpy* для работы с массивами. Исходный код можно найти в папке *src*. На рис.1 приведен полученный график, на нем также присутствуют точки, по которым производилась интерполяция и вертикальной красной линией отмечено расстояние в 0.25, соответствующее ошибке интерполяции в точке $x = 0.5$.

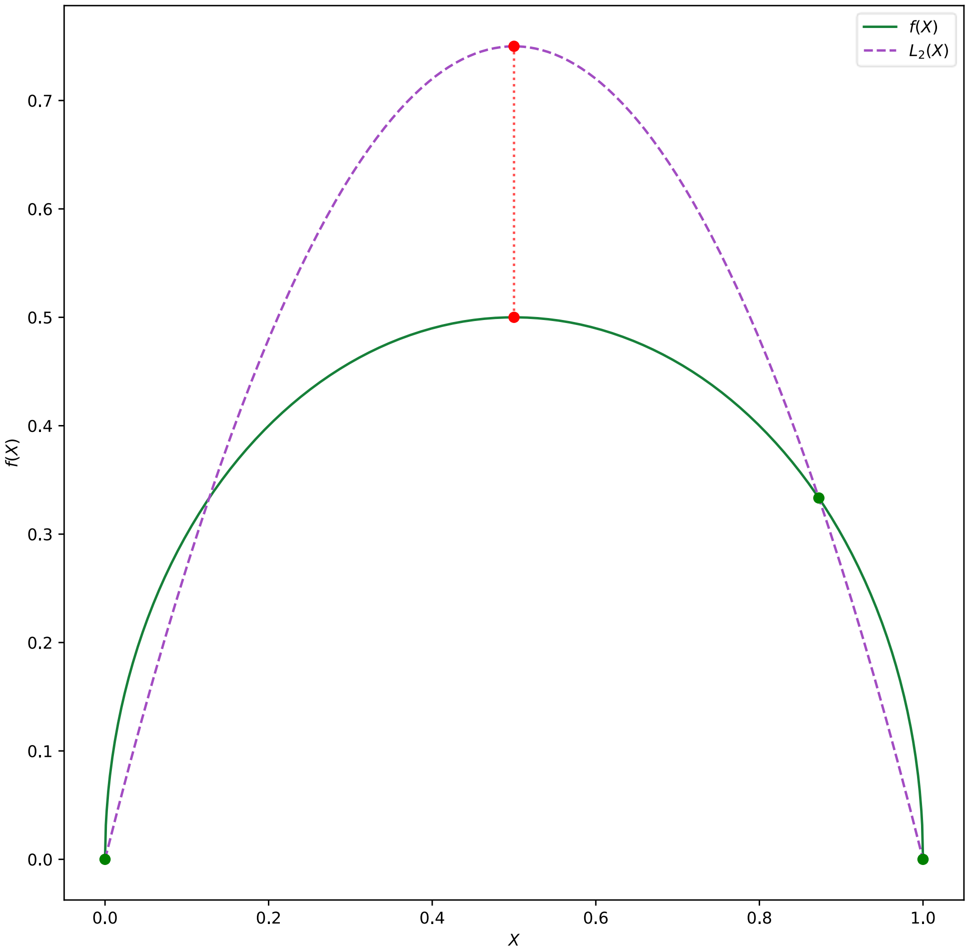

Рис. 1. Исходная функция (зеленая сплошная линия), полином Лагранжа (фиолетовая пунктирная линия), требуемое расхождение между ними для $x = 0.5$. Зеленые точки соответствуют узлам интерполяции, красные значениям функций для $x = 0.5$

Заключение

Удалось решить несложное квадратное уравнение и поупражняться в заполнении отчётов.

Список использованных источников

1. **Соколов А. П., Першин А. Ю.** Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). // кафедра «Системы автоматизированного проектирования» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2021.
2. **Першин А. Ю.** Лекции по вычислительной математике. // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования) МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020.
3. **Higham, Nicholas J.** Accuracy and stability of numerical algorithms // University of Manchester, Manchester, England, 2002.