Теперин Никита. РК6-54Б. Семинарская задача 5.4.

Постановка задачи:

Требуется записать формулировку метода 2-го порядка, получаемого путем обобщения подхода разложения в ряд Тейлора, и затем применить его для решения задачи Коши (1) для шага $h = 0.2$. Дополнительно требуется найти точное решение данной задачи, продемонстрировать графики точного и численного решений на одной координатной плоскости, а также представить таблицу абсолютных погрешностей вычислений на каждом рассматриваемом шаге.

Задача Коши формулируется следующим образом:

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2, y(0) = 0, t \in [0; 1], \alpha = 3, \beta = 2$$

Ход решения:

Найдем общее решение данного ДУ и решим задачу Коши аналитически:

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \Rightarrow \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = \int dt$$

$$\begin{bmatrix} u = \dfrac{\alpha}{y} - \beta \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{\alpha}{y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow dy = -\frac{y^2}{\alpha} du \Bigg] \Rightarrow \int \frac{dy}{\alpha y - \beta y^2} = -\int \frac{y^2 du}{\alpha y^2 u} = -\frac{1}{\alpha} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{\alpha} \ln u + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) + C_1, \int dt = t + C_2 \Rightarrow = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) + C_1 = t + C_2 \Rightarrow$$

$$-\ln\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) = \alpha t + \alpha(C_2 - C_1) \Rightarrow [C = \alpha(C_2 - C_1),\ C \in \mathbb{R}] \Rightarrow -\ln\left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) = \alpha t + C$$

Из полученного общего интеграла найдем явную зависимость $y(t)$

$$(3) \quad \frac{\alpha}{y} - \beta = e^{-\alpha t - C} \Rightarrow y = \frac{\alpha}{e^{-\alpha t - C} + \beta}$$

Согласно начальному условию, значение C должно равняться $-\infty$! Дело в том, что общим решением данного ДУ является семейство сигмоидальных функций, полученных путем параллельного переноса вдоль оси абсцисс кривой, заданной при $C = 0$. В данном задании предполагалось, что начальное условие будет задавать сигмоидальную функцию, левая асимптота которой будет совпадать с началом координат. Однако, как несложно догадаться, своей асимптоты данная функция достигает только в пределе в $-\infty$! По этой причине было решено произвести сравнение численного и точного решений на интервале $[-4; 4]$ при том, что полученная функция симметрична ($C = 0$). Но перед переходом непосредственно к графикам произведем вывод метода 2-го порядка точности, основываясь на разложении функции в ряд Тейлора. Известно, что для начального условия y_0 и дискретной сетки с шагом h и численного решения w_i в узле t_i можно записать:

$$(4) \quad \begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i) \end{cases}$$

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i)$$

при $n = 2$ получаем

$$(5) \quad T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) = f + \frac{h}{2}(\alpha - 2\beta y)y' = f + \frac{h}{2}(\alpha - 2\beta y)f$$

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{i+1} = w_i + h\left[\alpha y - \beta y^2 + \frac{h}{2}(\alpha - 2\beta y)(\alpha y - \beta y^2)\right] \end{cases}$$

На графике на рис. 1 представлены численное и точное решения задачи Коши при начальном условии (C = 0), то есть при $y(0) = \frac{\alpha}{1+\beta}$

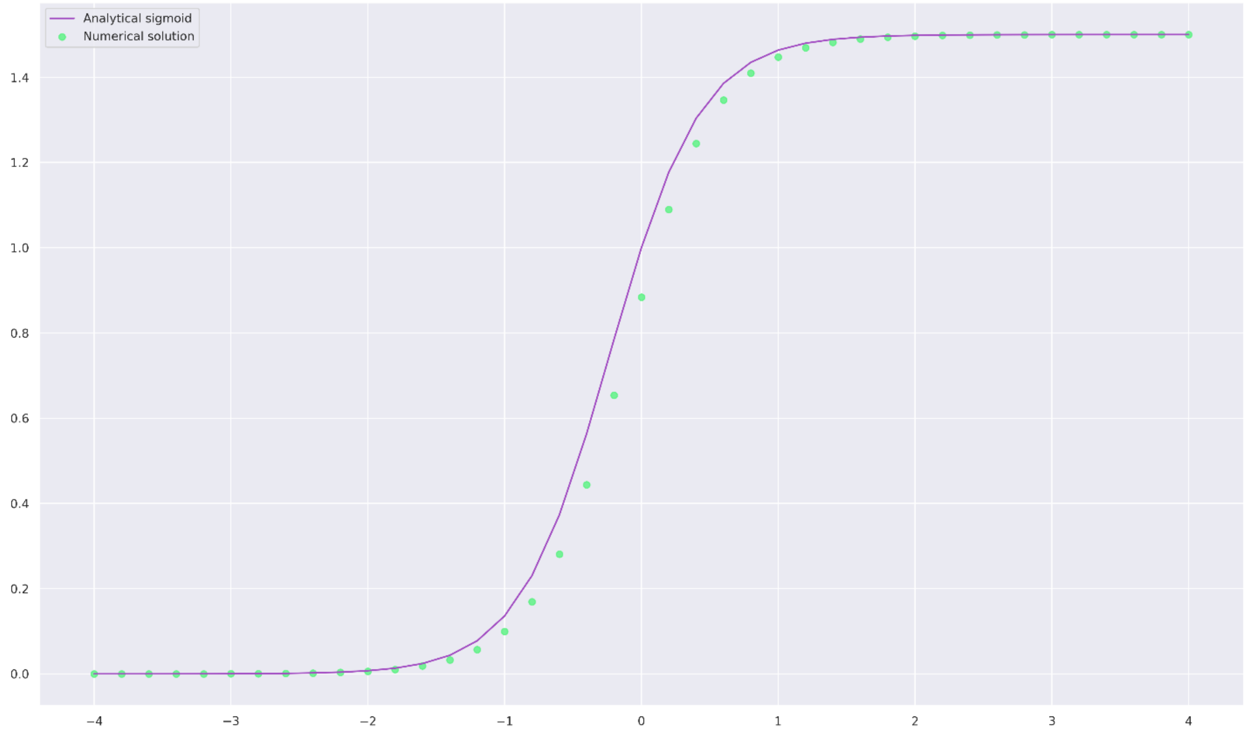

Рис. 1. Аналитическое решение задачи Коши (фиолетовая линия) и дискретное численное решение (зеленые круги).

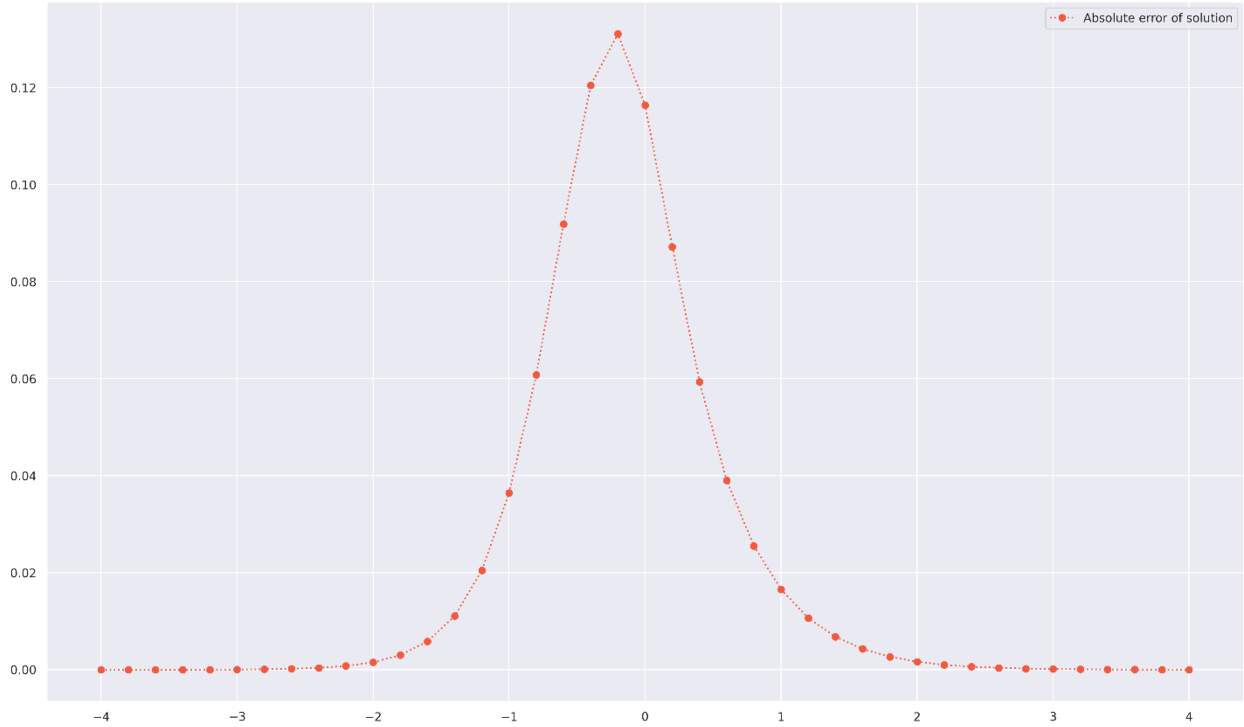

Рис. 2. График абсолютной ошибки численного решения.

t	-4.0	-3.8	-3.6	-0.2	0	0.2	3.6	3.8	4.0
a	0.000e+0	7.762e-7	2.796e-6	1.311e-1	1.163e-1	8.719e-2	2.968e-5	1.769e-5	1.052e-5

Таблица 1. Некоторые значения величины абсолютной погрешности, приведенной на рис. 2.

Можно наблюдать, что абсолютная погрешность растет по мере увеличения величины производной точного решения и вновь уменьшается после смены знака второй производной. Этот факт стоит отметить, ведь наивно можно предположить, что глобальная погрешность может сугубо возрастать.