清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：基于压缩感知的频谱感知算法研究与仿真

系 别：电子工程系

专 业：电子信息科学与技术

姓 名：沈睿哲

指导教师：王军

2017年5月46日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

**(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)**

签 名： 导师签名： 日 期：

中文摘要

随着无线通信技术的发展及人类对信息量需求的增大，无线通信频谱之稀缺已成一迫在眉睫的问题。然而据通信官方部门譬如FCC亦或Ofcom报道，实际应用中，于同一时间内，有极大部分部分频谱未能得到使用，频谱的实际利用率极低（甚至低至10%）。

在此情况下，认知无线电技术（CR）应运而生，CR通过对频谱进行感知测量，选取空闲信道进行动态访问，以实现频谱的高效率利用。而在对于宽带频谱感知，无损恢复所要求的高奈奎斯特采样率一直受着ADC（Analog Digital Converter）硬件采样率性能瓶颈般缓慢的发展速度牵连与制衡。于是研究者们便萌生将压缩感知的技术利用于频谱感知中的想法，即所谓压缩频谱感知（CSS），该技术通过以低于奈奎斯特采样率对信号进行采样（通常为非线性）获得压缩观测值，再通过相应恢复算法进行处理而获取还原的信号。理论和实践均已证明，若待感知信号在某一正交基域满足稀疏性（实际应用中信号在频域满足稀疏性已是事实，即傅里叶基上的稀疏信号。本文之后所述“稀疏信号”均指此类信号），则通过压缩感知进行信号的压缩感知和恢复，能几近完美的恢复原信号。

本文首先对频谱感知技术进行了理论研究，之后通过matlab进行对800MHZ宽带信号的压缩感知与恢复的仿真。本文通过比较不同种类压缩采样器（亦称AIC，模信转换器）、利用三种类型的恢复算法并对调控参数（如判决阈值）等进行了仿真并且给出了良好的在亚奈奎斯特采样率下的压缩感知恢复结果。通过变动稀疏度、压缩率、信噪比作出了侦测/虚警概率变化趋势图，并且从信号类型、实际需求、复杂度和侦测性能上综合分析，给出了宽带频谱压缩感知对于各种不同恢复算法性能一般性的结论的同时，在IRLS恢复算法上建立高斯噪声模型并通过仿真得到了一个最佳判决门限比，为实际频谱压缩感知提供了帮助。

**关键词**：宽带频谱感知；压缩感知；模信转换器（AIC）；迭代加权最小二乘法；

目 录

[第1章 引言 6](#_Toc483498929)

[1.1 课题研究背景 6](#_Toc483498930)

[1.2 研究现状概述 7](#_Toc483498931)

[1.3 解决的问题及实用价值 8](#_Toc483498932)

[第2章 系统原理介绍 9](#_Toc483498933)

[2.1压缩感知技术基础 9](#_Toc483498934)

[2.1.1 信号的稀疏表示 9](#_Toc483498935)

[2.1.2 压缩感知应用条件 9](#_Toc483498936)

[2.1.3 信号重建与恢复 9](#_Toc483498937)

[2.2 频谱压缩感知整体模型 9](#_Toc483498938)

[2.3 压缩采样器（AIC）的选择——随机解调器 11](#_Toc483498939)

[2.3.1 随机解调器标配的信号模型——离散谐波信号 11](#_Toc483498940)

[2.3.2 等价的矩阵形式描述 11](#_Toc483498941)

[2.3.3 非理想情况的处理 11](#_Toc483498942)

[2.4 压缩感知恢复算法 11](#_Toc483498943)

[2.4.1 优化法 11](#_Toc483498944)

[2.4.2 贪心法 11](#_Toc483498945)

[第3章 具体设计与仿真 12](#_Toc483498946)

[3.1 信号模型 12](#_Toc483498947)

[3.1.1 宽带OFDM信号 12](#_Toc483498948)

[3.1.2 信道组划分 12](#_Toc483498949)

[3.1.3 可调稀疏度：重建性能-稀疏度关系 12](#_Toc483498950)

[3.1.4 虚警概率的设置 13](#_Toc483498951)

[3.2 噪声模型 13](#_Toc483498952)

[3.2.1 信号无噪声直观模型 13](#_Toc483498953)

[3.2.2 复数高斯噪声 14](#_Toc483498954)

[3.2.3 侦测概率-信噪比曲线 14](#_Toc483498955)

[3.3 压缩采样与重建 15](#_Toc483498956)

[3.2.1 可调压缩率：重建性能-压缩率关系 15](#_Toc483498957)

[3.2.2 能量判决门限：判决门限对侦测/虚警概率的影响，最优经验门限比 15](#_Toc483498958)

[第4章 各种压缩感知恢复算法性能比较 16](#_Toc483498959)

[4.2.1 性能比较 16](#_Toc483498960)

[4.2.2 复杂度比较 16](#_Toc483498961)

[4.2.3 收敛性比较 16](#_Toc483498962)

[第5章 总结 17](#_Toc483498963)

[声 明 20](#_Toc483498964)

# 第1章 引言

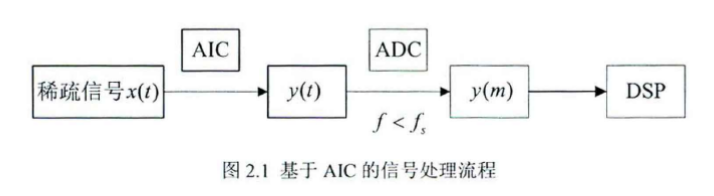
## 1.1 课题研究背景

近年来，随着无线通信的迅速发展、无线频谱资源的稀缺成为了一个紧要的问题。然而根据美国通信委员会（FCC）以及英国通信局（Ofcom）的报道，很大百分比的频谱资源没有被利用（利用率低至10%）。认知雷达（CR）技术应运而生，其通过允许次用户对当前空闲频谱进行访问利用。

在CR技术中，频谱感知技术乃第一步，其通过感测当前频谱中空洞，在不对主用户带来任何干扰干涉情况下用以给次用户访问。

在最近的研究中宽带频谱感知逐渐吸引了研究者的兴趣。一个最直接的感知方法即是通过以奈奎斯特采样率进行采样之后通过插值滤波器/DFT恢复时域/频域信号。而在频谱为宽带情形下最大的问题不在于数字信号处理等数值计算模块，而在于对极高采样率ADC的要求，根据调研，现状是数字信号处理软硬件性能的进步速度都高过ADC采样率性能瓶颈般的提高速度。

于是压缩感知的技术被利用至宽带频谱感知中，用以克服高速ADC代价昂贵的问题。压缩感知本质是通过对信号在一组正交稀疏基上进行投影获取压缩测量量，其数学描述可视作一个观测矩阵与信号矢量的相乘。在一般压缩感知问题中，问题仅仅是观测矩阵的设计（该观测矩阵虚满足正交性、约束等距条件等，通常以随机矩阵实用，会在后文中详尽分析），在矩阵确认之后直接将其与带压缩信息相乘。但在频谱压缩感知中问题并非如此易，因为我们需要在ADC采样之前完成信息的压缩，而不是违背初心：用一个高速ADC采样后再去与观测矩阵相乘——这完全没有减轻ADC的压力。于是AIC（Analog Information Converter）应时而生,其位置处于ADC之前，将信息先通过一类非线性处理之后通过低速ADC采样获得压缩观测值。



通过上图，我等可以理解。故于整个压缩采样过程最精妙之处在于设计合理且巧妙的AIC，即要利用实际可行的硬件对信号进行处理（AIC部分）再通过ADC采样，获得压缩测量量。即是说，要用可行的模拟器件（如乘法器滤波器）加埋低速ADC完成一个等效观测矩阵！

上段所述是关于压缩测量过程，目前对于AIC的设计大致可分为随机调制器和非均匀采样器等类型，关于此器的设计刚处于初级阶段，事实上亦可说对于整个频谱压缩感知实践刚处于初级阶段。就AIC设计而言，目前这需要极之巧妙的设计、高妙的数学分析手段结合可实现的物理器件的条件。本文在之后对于AIC的比较与选取有详尽研究与论述。

除去压缩测量，留低即是压缩恢复过程。关于压缩感知恢复算法已经有较为多的研究，毕竟仅系一纯数学问题。目前常见的几类恢复算法可以分为：贪婪算法，优化算法，混合算法等。其利弊优劣复杂度分析均有在后文中分析、仿真。

在恢复完信号后，我们目的是为了满足认知雷达CR的选取空闲信道的功能，便有一个信道是否空闲的判决过程，本次我们建立的模型采用能量检测法设置阈值进行判决。

## 1.2 研究现状概述

自美籍华人学者陶哲轩（亦是笔者儿时偶像）等人提出压缩感知这一概念来，压缩感知理论研究吸引学术领域关注，而对于频谱压缩感知的实际应用仅处于起步阶段。根据笔者文献调研，本章节主要叙述了几种压缩感知测量与恢复方法的研究现状。

根据上一节，我们知压缩采样部分主要在于实用AIC（Analog Information Converter）的设计，目前常用几类AIC：

1. 非均匀采样器（Nonuniform Sampling）[1]:器如其名，通过对待压缩带限信号进行非均匀采样以获取压缩采样值。其优劣均十分明显，优即实现简单：仅需要控制标准ADC的时钟，无需任何附加硬件。劣即对时钟抖动十分铭感，拥有较低信噪比。
2. 随机解调器（Random Demodulator）[2]：J.A Tropp教授代表之作之一，首次将连续信号用于压缩感知中。随机解调器通过待恢复信号与奈奎斯特频率伪随机信号相乘再按低奈奎斯特频率通过积分器后通过低速ADC采样。其精妙构造使它能完美恢复多谐波稀疏信号；一定程度性能上近似恢复任意实际频域稀疏信号。优点是性能相比于其它AIC（如非均匀采样器）有着较好的SNR性能且稳定性好，劣势在于需要额外硬件支持。目前来说，由于其综合性能与可实现性，这是用得最广泛的一类AIC。
3. 随机卷积器（Random Demodulator）[3]:与随机解调器类似，其区别在于将调制换成卷积，将积分换成滤波，由于性能等各种原因其使用不及RD广泛。
4. 基于多带系统相关等，如并行解调系统、亚线性FFTs，此等在本文中并未涉及，故不作详述。。

几种压缩感知恢复算法：

1. 贪心（追踪）算法[2]:
2. 凸松弛算法

## 1.3 解决的问题及实用价值

本课题基于导师实验室项目中频谱感知算法研究部分，通过调研与仿真、计算选取了当前常用的一种AIC进行压缩采样并使用了三种不同的恢复算法进行信号重构，对比了几种恢复算法的性能、优劣、适定情况。通过以高斯过程建模建立能量判决门限与侦测/虚警概率之间关系，在对理论门限验证后，通过仿真改变门限比率获取恢复性能，得到了基于IRLS（加权最小二乘）恢复算法的最佳门限比的经验值，为之后进一步进行CSS研究提供了理论、经验分析和仿真结果。

# 第2章 系统原理介绍

## 2.1压缩感知技术基础

### 2.1.1 压缩感知简介与信号的稀疏表示

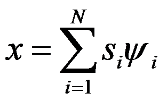
所谓压缩感知，与本文涉及有关的指的即是在亚奈奎斯特采样率下完成对信号的采样和恢复。

能够实现压缩感知对信号本身的前提即是信号能够被稀疏表示。所谓稀疏表示指的是可以利用k（k<<n）个较大的非零系数在某组基或框架下近似表示。恰如其分的是，对于无线通信信号，由于其低的频谱占据率（据英美官方通信局统计：通常在8%左右），我们可以在傅里叶基下将信号稀疏表示。

下面用数学公式作简要说明：

假定离散信号x∈CN是一个N维列矢量，其元素可表示为x[n],n=1,2,3…N.Ψ为N\*N维正交基矩阵Ψ=[ψ1，ψ2，ψ3，。。。ψN]。

而有：



或写为矩阵形式：

**x=Ψs**

其中s中仅有k个较大非零元素，k<<i。

则称x是可稀疏表示的，稀疏基为ψ。在我们研究的无线电信号中，时域采样值对应x,DFT变换基对应ψ。

### 压缩感知应用条件

压缩感知的本质是通过一个观测矩阵与信号矢量做内积，从数学上可以写作：

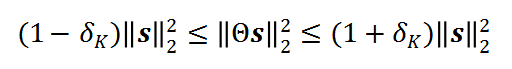


其中Φ=[φ1, φ2,…, φM]维数为M\*N。这可以视作将原信号x从N维空间线性映射到M维空间。

其中Θ=ΦΨ为M\*N矩阵，称之为测量矩阵，y称为压缩观测量。这两者对于我们均为已知。所谓压缩感知的恢复，即是在已知y和Θ的条件下求解s，然而这是个欠定方程，有着无数解。然而，压缩感知理论证明：若信号s可被稀疏表示，我们可以利用M <<N个采样值恢复s，进而恢复原信号x。

综上所述可以看到压缩感知的设计可以归于感知矩阵Θ的设计。为了满足s解的唯一性，Θ必须满足以下几个条件参见**王腾蛟论文**：

1. spark条件：spark(Θ)>2k，其中spark(Θ)=矩阵最小列相关的数量。
2. RIP条件（Restricted Isometry Property，亦称约束等距性）：

即如果矩阵Θ的等距约束常数δk满足δk<1的条件，则称Θ满足RIP条件。δk是使得下式成立的最小值。

其中RIP条件看似复杂实则可以有一种直观的理解，即是：原来空间中等距的矢量被投影至压缩空间后不能有较大的距差，以保证算法的鲁棒性。R.I.P有诸多弱化形式譬如NSP条件，而且观测矩阵RIP常数计算及其复杂，直接进行感知矩阵设计十分复杂。不过幸运的是在实际应用中随机矩阵正好满足要求。譬如在本文中使用的观测矩阵即为随机矩阵它们满足以下三个条件：（灰色）

1. 每列元素归一化
2. 每行有近似相等范数
3. 每行之间正交

该随机矩阵通过AIC生成，经理论和实践证明它完全能满足观测矩阵的要求并成功恢复压缩采样的信号。

### 压缩感知信号的重建与恢复

经过感知矩阵的压缩采样，我们需要从压缩测量量中重建出原信号。目前常见的重建算法分两类：优化算法与贪婪算法。

**优化算法**：

将问题视为求解优化问题：

min||s||0 s.t. y=Θs

其中||?||0表示零范数，即矢量s中非零值数目，亦可称之为稀疏度，其目的就是用最稀疏的表示来还原信号。但由于这是一个NP-hard问题所以通过对问题的松弛，用1范数代替0范数，即写作：

min||s||1 s.t. y=Θs

经数学严谨证明，在信号稀疏的条件下，用1范数的替代0范数方法亦能取得性能逼近0范数的效果。而且将问题转化成了一个凸优化问题，即可以在有理式复杂度得到解。在本文中用到的cvx方法就是利用matlab 自带的凸优化库进行最小1范数计算获得信号恢复。

但是即便是松弛为1范数，运算复杂度依然很高直至N3。在凸优化理论中其实早已有一种能够进一步简化最小一范数的算法IRLS（iteratively re-weighted least squares）通过将一阶问题转为加权二阶问题以获得更好的复杂度。具体可参照（iteratively）。

**贪心算法：（数字信号处理）**

从之前讨论可以发现y是由感知矩阵Θ的列加权而成，故目标即是找出权值。利用贪婪算法该问题会变得很直观。

匹配追踪（matching pursuit,MP）

## 2.2 频谱压缩感知整体模型

基于压缩感知的频谱感知模型可以分为以下四步：

1. 次用户接收稀疏信号
2. 次用户获取压缩测量量
3. 次用户信号恢复
4. 次用户判决

下面拟对四个步骤分别进行介绍：

1. 主用户接收稀疏信号：

假定整个频谱带宽是B Hz，次用户接收到的信号可以表示为：



其中s(t)∈CN\*1是信号的时域表示，h(t)为信道模型冲击相应，ω(t)为高斯噪声~N（0,σ2IN）。在这里为简化，除之后特别指定，我们令h(t)=1。

假若信道被主用户使用s(t)≠0；

假若信道是空闲，s(t)=0;

由此可以建立二元模型：

r(t) =ω(t) if vacant

r(t) =s(t)+ω(t) if occupied

**这公式不知道怎么玩**

以此定义侦测概率λd,以及虚警概率λf：

侦测概率：

λd=P(信道实际被占据且被侦测出)

虚警概率

λf=P(信道实际空闲且被侦测出)

1. 次用户获取压缩测量量：

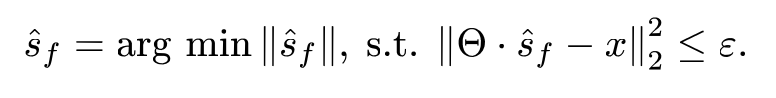


次用户通过压缩感知技术获取压缩测量量，其中Φ∈CP\*N（P≤N）为观测矩阵，其中P/N为压缩率。Θ=φF-1,其中F-1为逆DFT变换矩阵。

我们在上一章也说过，在实际应用中为了产生观测矩阵，通常是采用一个AIC（Analog to Information converter）.在本文中我们采用的是在[]提出的AIC采样器：随机解调器。有关于此的详细介绍会在本章下一节提到。

1. 次用户恢复信号：

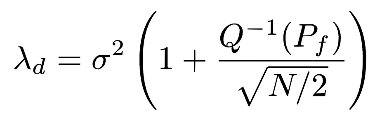
当通过压缩感知以亚奈奎斯特采样率获得压缩测量量之后，为了获得频谱的精准恢复，经过零范数的松弛我们需要解下列的最小一范数问题：



其中ε为噪声容忍度。

即利用本章上一节提到的各种压缩感知恢复算法恢复

1. 次用户判决

当压缩感知的信号sf通过恢复算法求得估计值之后，我们采用能量密度判决法判决频谱是否被占据。其具体方法是：对于每个信道中所有频点能量求平均获取能量密度。将此能量密度与预定义的判决门限λd做比较从而判断该信道是否被其它主用户占据，λd取决于噪声能量与设定的虚警概率值。

此公式的推导可以参考[灰35]。

其中N为信道内频点数的两倍，在实际应用中，噪声能量可以通过对未被占用的信道测量而获得（譬如目前英国TVWS中21信道被设置为空闲）。

## 2.3 压缩采样器（AIC）的选择——随机解调器

### 2.3.1 随机解调器标配的信号模型——离散谐波信号

如前所述，频谱压缩感知最妙之处在于压缩采样器亦或是AIC的设计，通过前面介绍过的几种AIC的比较。本次我们采用的是随机解调器进行模信转换获取压缩测量量。

### 2.3.2 等价的矩阵形式描述

### 2.3.3 非理想情况的处理

## 2.4 压缩感知恢复算法

### 2.4.1 优化法

最小零范数->松弛为一范数（基本凸优化方法）->松弛为加权二范数（迭代加权最小二乘法）

### 2.4.2 贪心法

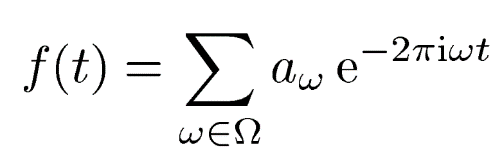
Cosamp（压缩采样匹配追踪）

# 第3章 具体设计与仿真

## 3.1 信号模型

### 3.1.1 宽带OFDM信号

我们采用matlab2016进行仿真，由于实验室项目原要求是能够实现200-600MHZ频谱感知，变换至基带后相当于能对400MHZ的宽带频谱进行感知。本次我们仿真中设定的待处理信号为400MHZ宽带OFDM信号，一共有L=50个信道，每个信道带宽8MHZ,OFDM子载波间隔∆Ω=0.1MHZ。采用QPSK调制。

基带信号可以表示为：

其中:

Ω={0，±1，±2，±3…±(L/2-1,L/2)}\*∆Ω

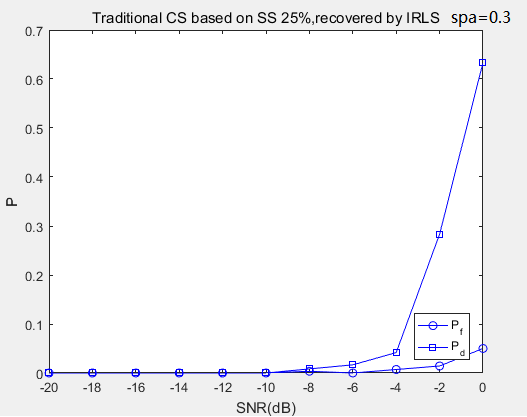
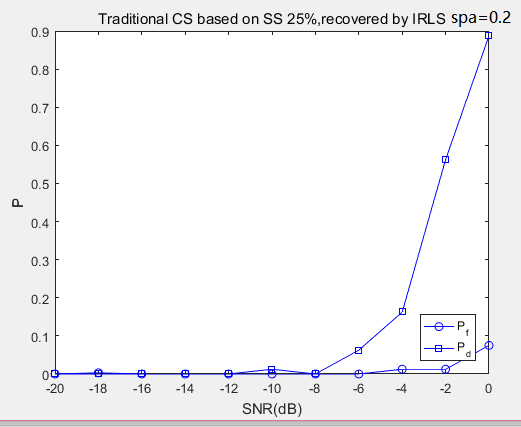
t∈[0,1/∆Ω}

### 3.1.2 信道组划分

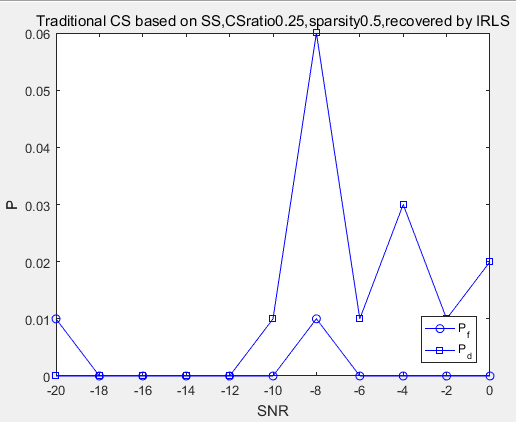
尽管在有了压缩感知之后，我们可以一次性对400MHZ的频谱直接进行感知。但在考虑实验室硬件性能（ADC采样率上限不到60MHZ），故我们采用了一种信道划分的方法：通过将400MHZ带宽的50个信道划分为5个信道组，每个信道组拥有Lg=10个信道。在每一个时段内只感知一个信道组(40MHZ)，这样保证了硬件的可实现性，同时对于只为找到一个空闲信道来接入的情况（即无需找到所有的空闲信道）还带来了额外的复杂度收益。具体推导可见**（灰）**

故对于目前的模型，只需将上一节公式中L改成Lg即可。

### 3.1.3 可调稀疏度：重建性能-稀疏度关系

由于压缩感知性能受稀疏度影响明显，我们在仿真中增加了待处理信号稀疏度设置选项。无论是理论和仿真结果都可以证明：稀疏度越低的信号，压缩感知重建性能越好。

如上二图，均为利用IRLS方法在压缩率为0.25情形下，侦测/虚警随信噪比SNR的变化曲线图。其中左图信号稀疏度为0.2，右图信号稀疏度0.3。可以从仿真结果看到：在其他条件一致的情况下，稀疏度为0.2的信号新能优于0.3。而当稀疏度高至一个较高的值0.5时，从下图可见，恢复性能衰减明显：



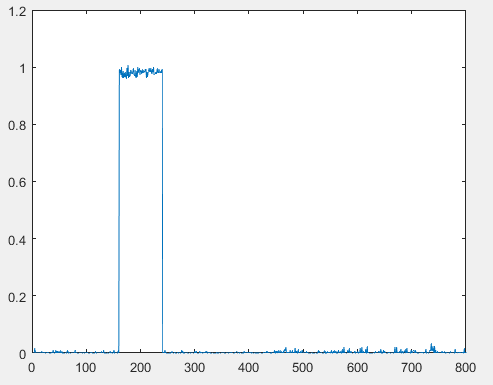
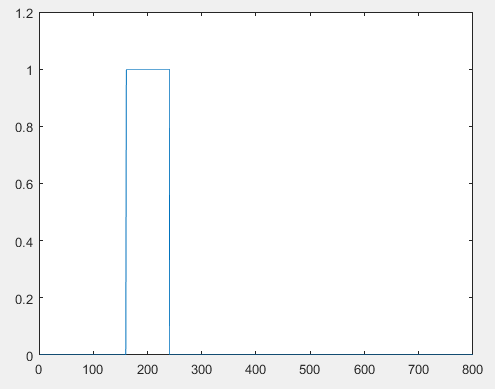
### 3.1.4 虚警概率的设置

由于恢复之后判决门限取决于**上一节公式，**虚警概率的设置也不容忽视。这里的设置取决于实际情况，由于本实验室项目的涉及的频谱感知主要目的是为了军用中有效接入空闲频谱，在军用中避免冲突以及通信干扰应放在首要考虑位置。所以我们把Pf0设置为0.01，使得虚警（冲突）概率尽可能低。（在本文中之后所涉及的所有部分若未加特殊说明，均有Pf0=0.01）。

而在实际仿真中，我们不仅使用设置的Pf得到能量判决门限后计算出Pd，反过来我们亦可以利用门限计算出实际Pf与设定Pf做对照已验证理论的正确性。

## 3.2 噪声模型

### 3.2.1 信号无噪声直观模型

若不考虑任何噪声影响，即完全按照上一节的信号模型完成压缩感知和恢复过程。相当于一个SNR=+∞的模型，可以直接从频域波形看出：

左图为无噪原信号频谱，右图为利用压缩感知恢复后的频谱(method：cvs in matlab,sparsity=0.1,compress ratio=0.3，无噪声).

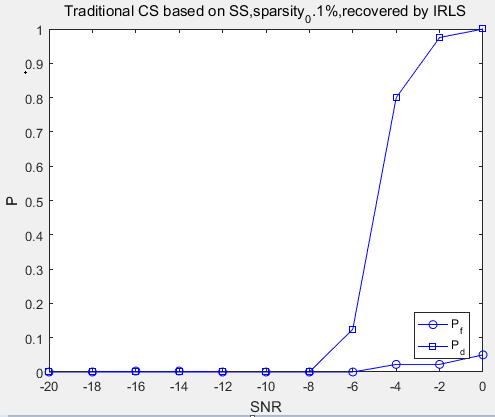
### 3.2.2 复数高斯噪声

但是在实际系统中，非理想情况无可避免的存在。信道多径/衰落、接收机热噪声等使得接收机获取的信号离原来的s(t)相去甚远，由于恢复出的频谱值是我们最终需要利用的数据，我们把这所有的非理想因素均归至于我们最终要恢复出的频谱上。即我们直接在频域上添噪声至原始信号频谱并以此计算信噪比。

由于正交调制/解调的存在，频域值在其复包络下为以复数值。我们给每一个频点上添加了一个复数Gauss噪声ε~N(0,σ2).

需要指出的是，上面所述的噪声指的仅喻指的是接收机获得的信号与原始信号的误差，即接收机处频谱与发射机频谱误差。而信号在次用户接收之后还要经过一些列压缩感知/恢复过程，它们将进一步带来误差，最终所有的效应在恢复频谱对应值上体现。

### 3.2.3 侦测概率-信噪比曲线

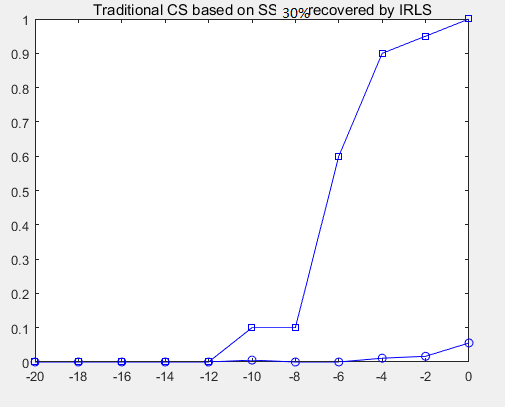
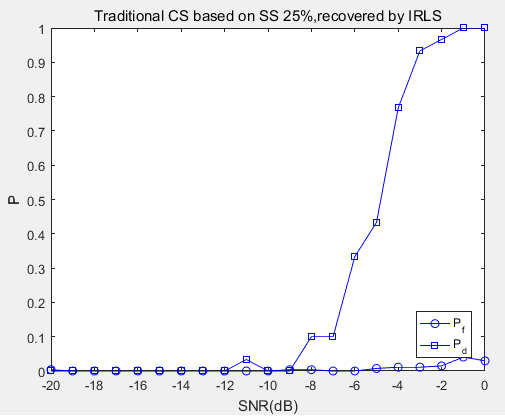
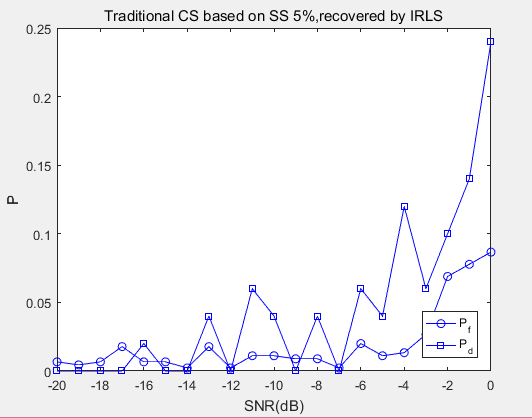
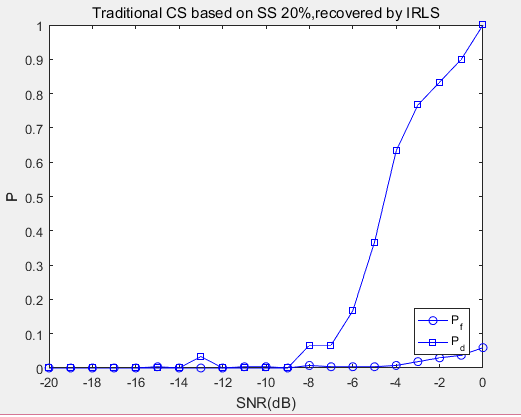
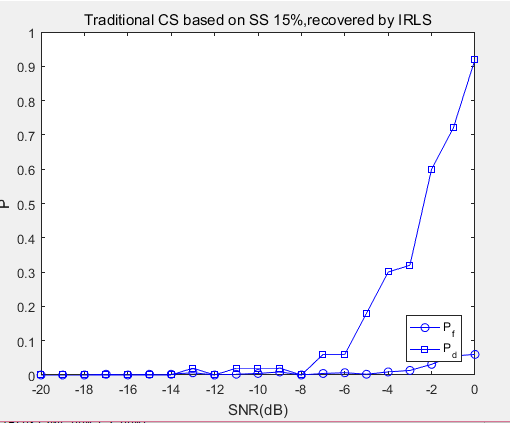
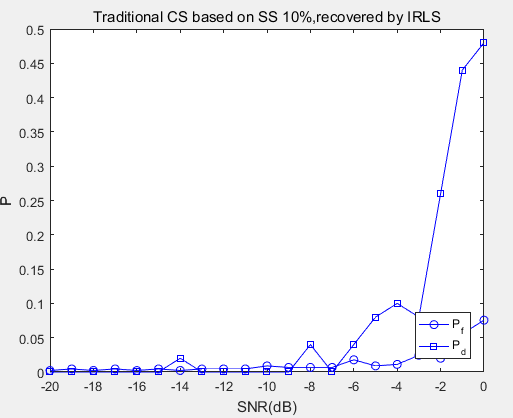
为了从仿真实验中看出信号噪声对恢复信能算法，我们作出了Pd-SNR以及Pf-SNR图：

可以看到，上图为稀疏度0.1的信号经过压缩率为0.3的IRLS恢复算法的Pd-SNR，Pf-SNR图。Pd随着信噪比的增加而增加，（在-8处出现明显变化），而实际Pf基本符合我们预先设置的Pf0=0.01，说明此实验能在虚警概率很小的情况下以高概率侦测到频谱空洞（当SNR=-2db时，Pd已经增至0.97以上）。

## 3.3 压缩采样与重建

### 3.2.1 可调压缩率：重建性能-压缩率关系

所谓压缩率（Compressed Ratio），定义为实际采样率与奈奎斯特采样率的比值.压缩率的高低直接意味着ADC负担的减轻。在仿真中我们研究了压缩率对侦

测性能的影响。

可以从仿真图中看到，当压缩率从0.05逐渐增加至0.5时，Pd曲线愈加上扬，Pf亦愈加趋于稳定。这与与理论结果相吻合：压缩率越高恢复性能越好。亦可从角度直观解释：更多的信息熵拥有更精准表达信息的能力。

### 3.2.2 能量判决门限：判决门限对侦测/虚警概率的影响，最优经验门限比

本次我们采取的是能量判决法，见**第二章式，**通过计算每个信道中频点能量密度与阈值比较获得信道空闲/占据的判决结果。

由于我们之前的理论推导均是基于完美恢复信号的高斯噪声模型，误差仅考虑的是接收机信号的误差，未将之后压缩恢复算法带来的误差考虑进入。虽然直接使用完美恢复高斯噪声模型推导出的判决门限**第二章式**足够获取良好的回复结果，但经推敲可知这个门限不代表着理论最精准门限。而由于各个恢复算法均包含各类非线性迭代步骤，直接计算其误差对于本科生的笔者有一定难度。故本人采取了通过仿真获取经验值来找到最优判决门限的捷径。

基于直觉和最原始的想法，我们考虑假定最优判决门限是**第二章式**Lr (lamda\_ratio)倍，通过仿真改变Lr的值评估Pd、Pf的性能。

最终我们得到，对于三种不同的算法。Lr最优值如下表：

|  |  |
| --- | --- |
| 恢复算法 | Lr\_optimal |
| Normal CVX | 0.9 |
| IRLS | 1.2 |
| Cosamp | 不恒定 |

# 各种压缩感知恢复算法性能比较

### 先验知识

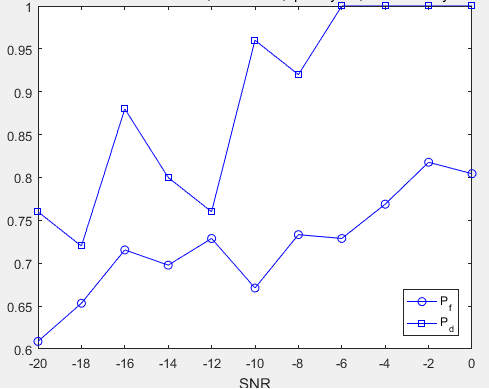
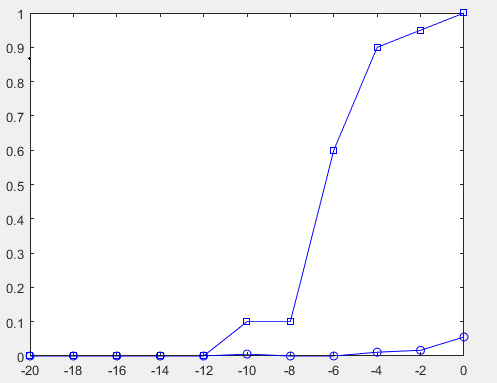
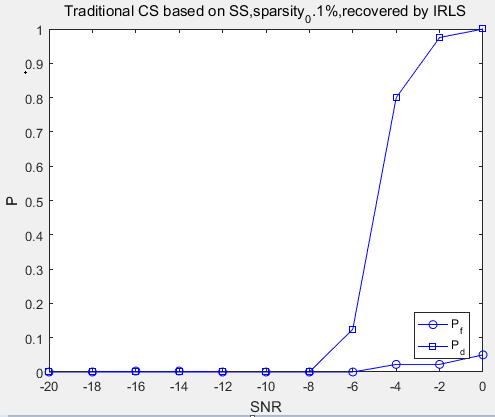
根据调研所拥有的先验理论知识我们知道对于压缩感知而言。

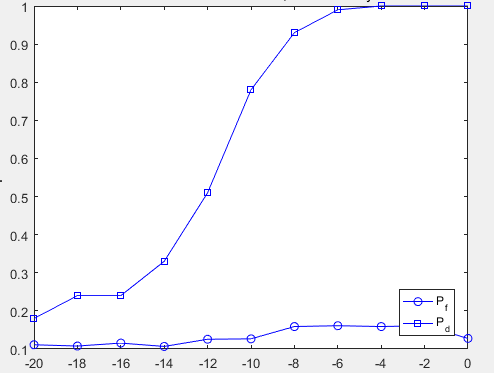
贪心法（对应于本文用的CoSamp算法）思路基于观测值y是通过感知矩阵Θ列的值加权二乘，通过利用一定的先验信息：稀疏度值，找到矩阵最佳投影的权值。贪心法相比于优化法有着更低的运算复杂度，且对于极低稀疏度的信号模型有着更好的恢复效果，但需要利用的信息量更多（即需要更高的压缩率）。

而优化法是基于求解最小稀疏度的优化问题来获得精准的恢复值，其无需任何的先验信息，只要求信号是稀疏的，却拥有极佳的的数学恢复效果。然而背后的代价却是高额的运算复杂度。尽管其初衷：最小稀疏度（即最小零范数）是一个NP-hard问题，研究者仍是想出了一些方法来松弛问题。首先是将最小零范数松弛为最小一范数（对应着本文所使用的cvx方法），进一步亦提出了一种加权二范数方法（对应IRLS）来松弛问题使得计算复杂度进一步降低。

因此对于本文所使用的三种方法：CoSamp、IRLS、cvx，我们能够先验的预估到其恢复效果同埋计算复杂度均是呈递增关系。

### 性能、复杂度比较



三张图分别是信号稀疏度0.1，压缩率0.3时cvx，IRLS，CoSamp方法的恢复结果。可以看到cvx和IRLS方法均能良好恢复信号（其虚警概率处于正常值），cvx的侦测性能略高于IRLS。而CoSamp尽管有着较高的Pd值，但同时其Pf也远高于我们预先的设定值0.01，无法正常恢复信号，这是因为贪心法对于正常恢复需要的数据率更高，当我们把压缩率提升至0.5时，CoSamp恢复曲线如下，此时可以正常恢复信号。

三种方法matlab记录的运行时间比为23:14:1，与理论预测相吻合。解优化问题所需的复杂度远高于贪心方法，IRLS将cvx进一步松弛为二阶优化问题以略微的性能代价降低了时间复杂度。

这里我们从各个文献中可以参考到各种算法所需的观测值数目以及复杂度，均与实验结果吻合。

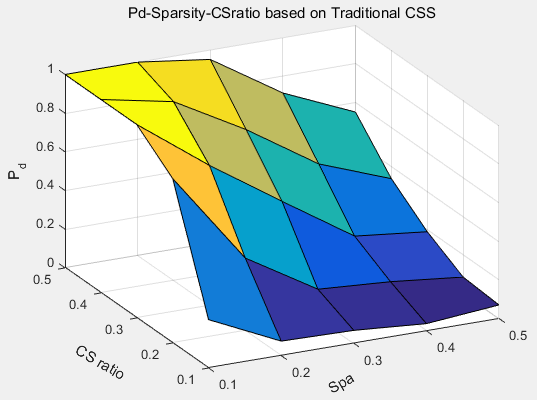
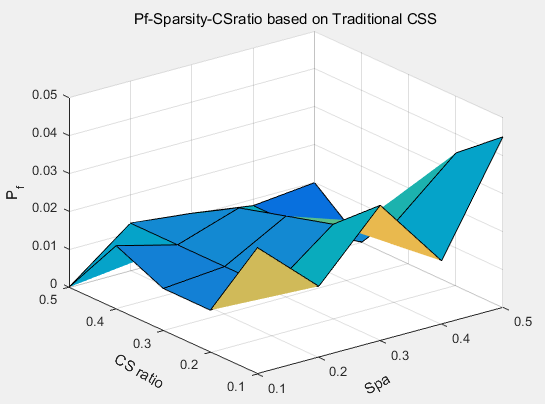
L为采样数，K为稀疏度：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 重构算法 | 观测值数目 | 算法复杂度 |
| 零范数 | K+1 | NP-Hard问题 |
| 一范数 | Klog2(1+L/K) | L3 |
| CoSamp | 2Klog2(L) | LK3 |

### 4.2.3 整体图

通过改变信号稀疏度、和压缩率，我们作出了侦测/虚警概率-信号稀疏度-压缩率关系的三维图：

（method：cvx SNR=-2）

我们可以一目了然地看到，在所有有效稀疏度和压缩率数值的情况下，虚警概率均维持在0.1以下的低数值，证明该算法能在规避冲突的情形下成功完成频谱恢复。而对于Pd图，侦测概率随着压缩率的增加以及稀疏度的减小而增加，与预期理论想吻合。且对稀疏度0.1的信号，我们只需要0.3左右的压缩率就能完成接近1的侦测概率。即系话：对于实际系统中频谱利用率10%左右的频谱，利用我们所给出的算法只需要0.3倍奈奎斯特采样定律就能良好地恢复信号给出频谱占据/空闲状态。也证明我们所研究的理论存在优秀的实际应用价值。

# 总结

本次毕设在实验室项目中所需400MHZ宽带频谱感知要求下，首先通过理论调研与数学推导计算，接着采用了基于压缩感知的频谱感知算法进行了仿真与分析并得到结论。从采用信道组划分以保证实验室硬件的可搭建性、到采用物理可实现的压缩采样器Random Demodulator，到使用与比较两大类三小种不同的压缩感知恢复算法（CoSamp、Normal CVX、IRLS）直至提出了最佳判决门限率以获最优侦测性能，终成此篇拙作。

在整个研究过程中笔者始终目标明确不敢懈怠：在通信技术发达而频谱资源匮乏的今天，解决在ADC性能受限下的宽带频谱感知问题。从采样、到恢复直至判决三大过程步步递进思路清晰却又不失稳重：自始至终贯穿着“可用”“实用”的朴素（从考虑实验室硬件采样率采取的信道组划分方式到采用物理可搭建的AIC到最后分析不同情形下恢复算法的适定性）

对三种不同恢复算法进行理论研究、仿真后进行对比分析后获取有助于实际应用的一般性结论乃本文主体工作，为精益求精得到最佳CSS性能而提出“最优门限比”的概念是本篇的创新小点，犹如深邃浩瀚宇宙中一颗明星的为主体锦上添花。

从我们对三种恢复算法的比较来看，贪心（如本文的CoSamp）法拥有着最小的计算复杂度然而却背负着性能差、压缩率要求高、需要先验知识的黑点。承载最优性能的Normal CVX方法、在压缩感知战场犹如中天马行空斩敌无数，却有着凡人看不到的计算复杂度极高的辛酸与硬件难以实现的汗水。这不得不让人想起量子物理中著名的Uncertainty principle，海森堡用他一行简单的哲学：

**ΔxΔp≥h/4π**

仿佛告诉了我们整个世界的本质：你无法同时获取粒子精准的位置和速度，世事难料，那些握不住的沙，放下也罢？看似简单的道理却难用一两句书面语言阐明。而在古老的东方，或许这个1927年的理论在两千年前已被孟子道出：

**“鱼与熊掌不可得兼？”**

而就在笔者为我智慧的中华文化窃喜之时，但如若各位接着沿着时间线往回拉两百年（实际上只需要顺着自己的内心向里看亦能得此法），伟大的释迦牟尼早已用简单而深刻的佛碣道明了一切：

**“世事无常”**

没错，世事难料，一切无常。那些抓不住的东西，放下吧，放下吧。无论财色还是名利，切莫执着，应无所住，而生其心。此番这次总结说得有点多，说回正题，对于这次毕设中恢复算法的选择，在大多数情形下，在获取良好的恢复性能而又不至于牺牲过度复杂度：在CVX和CoSamp中找到一个均衡点：IRLS。就像我们的人生，在一切的已知或是未知中找到自己最钟意的那个制衡，知足常乐。

插图索引

致 谢

此次毕业设计中，我受到了很多老师、同学的帮助，在此我要向他们致以最诚挚的谢意。

Xxxxx

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**错误！未找到目录项。**表格索引

参考文献

[1]