Physique des Particules Elementaires
Amphi Lagarrigue W 1030-1200, 1530-1700

Yubo Su

Contents

Chapter 1

10/09/14 — Lecture 1 — Introduction, Notions de base

Ce cours sera enseignée en français. Il nous présent les concept fondamentaux, les observations expérimentales et la théorie des particules élémentaires.

Les Grecs anciens ont cru qu'il y a quatre éléments fondamentaux. Maintenant, nous croyons ça aussi, mais il s'agit des different éléments. Nous savons qu'il y a quatre force fondamentaux, qui ont transmit par les quatres particules, les gluons (force fort), les "intermediate vector bosons" (force faible), les photons (force electromagnetique), les gravitons (force de gravité). *Je ne prends plus des notes sur l'introduction parce que ça ne m'interesse pas, desolée.*

On dit qu'une particule élémentaire n'est pas liée d'autres objects et qu'elle est caracterisée par une masse, une charge et autres nombres quantiques. Une antiparticule élémentaire est la solution d'energie négative dans l'equation

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{1.1}$$
$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{1.2}$$

et son fonction d'onde est la "conjugate" de celui des particules, $\psi_{ap} = \psi^*$. Donc, les charges et nombres quantiques des antiparticules sont opposés à ceux des particules, mais leurs masses restent la même.

Le modèle standard a trois familles de constituants fondamentaux:

	Lepton	Lepton	Quark	Quark
Plus stable	ν_e	electron	up	down
⋮	ν_μ	muon	charm	strange
Moins stable	ν_τ	taon	top	bottom

Il y a aussi trois particules qui sont responsable pour la force faible et le photon; les quatres sont responsable pour la force electrofaible. Finalement il y a huit gluons. Ces trois categories sont le modèle standard.

Les hadrons sont constitués par les quarks; le proton et le neutron sont des hadrons. Toutes les particules libres sont instables sauf le proton, l'électron, les neutrinos et le photon. Le taux de désintégration et determiné par l'amplitude de probabilité A. Soit H le hamiltonien responsable de la transition entre les deux états $|i\rangle$ initial et $|f\rangle$ final, A est au premier ordre $\langle f| H |i\rangle$. Par exemple, la désintégration de neutron est

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{1.3}$$

Notez que la masse des particules n'est pas conservée, a cause de relativité $\Delta m = \Delta(E/\gamma)c^2$.

Les trois force fondamentales (sans la gravitation) obéissent aussi un autre tableau

	Fable	Electromagnetique	Forte
La puissance qui influe l'intensité de force	Saveur	Charge électriqe	"Charge" de couleur
Qui interagit par ce force	Quark, Leptons	particule chargée (toutes sauf neutrino)	Quark
Porteur de force	W^+, W^-, Z^0	Photon γ	Gluons

Pour comprendre les interactions fondamentales, on utilise toujours les diagrammes de Feynman. [1] Selon la théorie classique, un champs est produit instantanément par une particule, mais d'après la modèle standard l'interaction entre deux particules est produit par l'échange d'un particule. Les fontions d'onde deviennent des opérateurs qui crée et détruit les particules appelés champs quantiques.

[1] Je ne peux pas dessiner ça maintenant, mais je l'apprendrai. Maintenant, je vais décrire tout ce que je peux.

Chapter 2

10/09/14 — PC 1 — Additions de moments cinétiques

Apparament les PC sont enseignées en anglais, mais je vais essayer de prendre des notes en français dès que c'est possible, pour la pratique. J'espère bien que mon orthographe ne sera pas trop mal. . .

C'est la thèorème de Noether qu'une symmetrie continue se produit une loie de conservation. Des exemples suivent

Symmetrie	Conservation
L'espace	Le moment du movement
Le temps	L'energie
Le rotation	Le moment cinétique
La charge éléctrique redéfinit dans l'espace phase	La charge éléctrique
La charge baryonique(orth?) redéfinit dans l'espace phase	La nombre Baryonique
La charge leptonique(orth?) redéfinit dans l'espace phase	La nombre Leptonique

Table 2.1: Des symmetries et leurs loies de conservation correspondantes.

Les premier trois sont des symmetries de espace-temps et les dernier quatres sont des symmetries internals.

Nous faisons maintenant quelques rappelsl sur le moment cinétique.

1) Rappels sur le moment cinétique. Soit un espace de Hilbert S

   a) *Quelles sont les règles de commutation des opérateurs $\hat{J}_{x,y,z}, \hat{J}^2$?* — $\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ et $\left[\hat{J}_{x,y,z}, \hat{J}^2\right] = 0$.

   Rappeler que nous pouvons construire les états $|jm\rangle : J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle , J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle$.

   b) *Soit $|\psi\rangle$ un état propre commun à $\hat{J}^2, \hat{J}_z$ et S_ψ le plus petit sous-espace de S qui est stable par $\vec{J}$. Quelle est la dimension de S_ψ, quelles sont les valeurs propres de $\hat{J}_z$ dans S_ψ et à quoi correspond physiquement cet espace?*

   Parce que $|\psi\rangle$ est un état propre de J^2, J_z nous pouvons l'écrire comme $|\psi\rangle = |jm\rangle$ (valeur propre de m). Aussi, nous construisons l'espace $S_\psi = \{|\phi_i\rangle = J_i |\psi\rangle\} , J_i = \{J_\pm, J_z\}$. Finalement rappeler qu'on a les opérateurs $J_\pm : J_+ |jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m+1\rangle$, et donc sur l'espace (j, m) nous avons toutes les points du reseau (lattice points?) qui satisfait ($|m| \leq j$), et donc la dimension $\dim S_\psi = 2j + 1$.

   c) *Montrer que l'orthogonal d'un sous-espace S_1 par $\vec{J}$ est aussi stable par $\vec{J}$* — Nous choissons le sous-espace $S_1 = \{J_i |\psi\rangle\}$ avec $j = j_0$ (j_0 est arbitraire). Donc l'orthogonal de S_1 est defini par $|\phi\rangle \in S_1^\perp \Leftrightarrow \langle\psi \mid \phi\rangle = 0$, ou $j \neq j_0$.

   Donc il suffit de montrer que $J_i |\phi\rangle \Rightarrow \langle\psi|_i |\phi\rangle = 0$. Nous le montrons comme ($J_i = J_i^\dagger$ parce qu'il correspond à un observable)

$$\langle\psi| J_i |\phi\rangle = \langle\phi| J_i^\dagger |\psi\rangle^* \tag{2.1}$$

$$= \langle\phi| J_i |\psi\rangle^* = 0 \tag{2.2}$$

   parce que $J_i |\psi\rangle \in S_1$. Autrement dit, J_i ne change pas j et tous les états avec j different sont orthogonals.

2) Deux moments cinétiques — Nous avons deux moments cinétiques $\vec{J}_1, \vec{J}_2$

   a) *Quelles sont les relations de commutations des divers opérateurs?* — $[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_{1k}$, $[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_{2k}$, $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$.

   b) *Soit un espace $S = \{|j_1m_1\rangle \otimes |j_2m_2\rangle : S_1 \otimes S_2\}$. Quelle est la dimension de S?* — Nous savons que les dimensions de S_1, S_2 sont $2j_1 + 1, 2j_2 + 2$ et donc $\dim S = (2j_1 + 1)(2j_2 + 2)$.

c) *On définit le moment cinétique total par $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Vérifier que $\vec{J}$ est bien un opérateur de moment cinétique et les relations de commutation de J^2 avec J_1^2, J_{1z}, J_z.* — Nous pouvons confirmer tout facilement que $[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ et alors nous avons un opérateur de moment cinétique après.

Nous devons donc maintenant verifier que $\left[J^2, J_1^2\right] = \left[J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2, J_1^2\right] = 0$ et que

$$\left[J^2, J_{1z}\right] = \left[J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2, J_{1z}\right] \tag{2.3}$$

$$= 2\left[J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y}, J_{1z}\right] \tag{2.4}$$

$$= 2i\hbar\left(-J_{1y}J_{2x} + J_{1x}J_{2y}\right) \neq 0 \tag{2.5}$$

et donc $\left[J^2, J_{1z}\right] \neq 0$.

3) Additions des moments cinétiques

a) On a déjà montré que $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ forment une base de S. On veut aussi montrer que $|jm\rangle$ forment une base complète. Par exemple, soit un espace S dans lequel $j_1 = \dfrac{3}{2}, j_2 = 1$. Alors $\dim S = 12$.

Aussi, nous savons que $m = m_1 + m_2$, et donc $m \in \left[-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ avec ses dégénérescence. Graphiquement, nous pouvons le dessiner comme

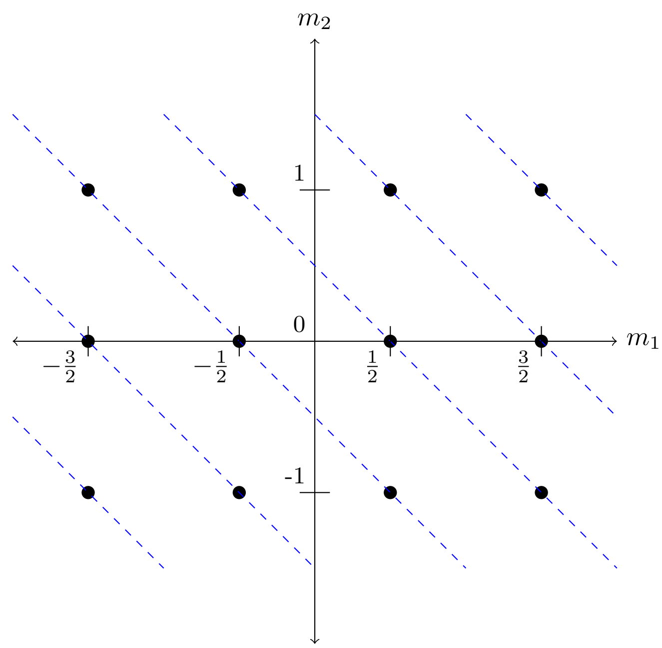

Figure 2.1: Les points sont des points (m_1, m_2) et les lignes sont les lignes de constant $m = m_1 + m_2$.

Donc la dégénérescence maximum est $3 = 2j_2 + 1$.

b) *Soit $|\psi\rangle$ un état correspondant à la valeur maximale de J_z. Montrer que $|\psi\rangle$ est également état propre de J^2, determiner la valeur correspondante de j, et determiner la dimension de S_ψ, le sous-espace engendré par $\vec{J}$ sur $|\psi\rangle$.* — On sait qu'il n'y a qu'un état avec la valeur propre $(j_1 + j_2)\hbar$. Si on écrit alors

$$J_z J^2 |\psi\rangle = J^2 J_z |\psi\rangle = (j_1 + j_2)\hbar J^2 |\psi\rangle \tag{2.6}$$

et donc on sait que $|\psi\rangle = |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$ (sinon, $J_+ |j, j_1 + j_2\rangle \sim |j, j_1 + j_2 + 1\rangle$ qui n'éxist pas parce que on a déjà dit que $j_1 + j_2$ est l'état avec la valeur j maximum. Alors $j = j_1 + j_2$).
Après ça on sait que $\dim S = 2(j_1 + j_2) + 1$.

Chapter 3

17/09/14 — Lecture 2 — Les neutrinos

Les neutrinos interagit seulement par la force faible, et c'est très rare. Ils changent leur états spontanément. Les leptons (l'électron et le neutrino) n'interagit pas par force fortes.

Les neutrinos n'ont pas de charge électrique ou baryonique, et ils ont de spin $-\frac{1}{2}$ (donc il est un fermion); ils ne peuvent pas avoir un spin $+\frac{1}{2}$. Ils sont stables.

Les neutrinos sont produit par les supernovaes (ils peuvent venir de très loin parce qu'il n'interagit pas beaucoup!) et artificiellement.

Il y a trois saveurs de neutrons, e, μ, τ. Chaqu'un n'interagit que avec les électrons, les muons, et les taons. Il y a aussi trois états propres de propagation d'Hamiltonien H_0 de propagation des neutrinos, $|v_{1,2,3}\rangle$, et $|v_{1,2,3}\rangle \neq |\nu_{e,\mu,\tau}\rangle$ parce que $[H_{faible}, H_0] \neq 0$. La signification de ça c'est que quand on produit et détecte un neutrino c'est par H_{faible} mais quand le neutrino propage c'est par H_0; c'est ça l'oscillation de saveurs! Les oscillations suivent la règle du matrice de mélange de Pontecorvo Maki Nakagawa Sakata

$$|\nu_e(t)\rangle = C_{11}e^{-iE_1t/\hbar}|\nu_1\rangle + C_{12}e^{-iE_2t/\hbar}|\nu_2\rangle + C_{13}e^{-iE_3t/\hbar}|\nu_3\rangle \tag{3.1}$$

$$|\nu_\mu(t)\rangle = C_{21}e^{-iE_1t/\hbar}|\nu_1\rangle + C_{22}e^{-iE_2t/\hbar}|\nu_2\rangle + C_{23}e^{-iE_3t/\hbar}|\nu_3\rangle \tag{3.2}$$

$$|\nu_\tau(t)\rangle = C_{31}e^{-iE_1t/\hbar}|\nu_1\rangle + C_{32}e^{-iE_2t/\hbar}|\nu_2\rangle + C_{.3}e^{-iE_3t/\hbar}|\nu_3\rangle \tag{3.3}$$

Nous savons que $E_i = c\sqrt{p^2 + m_i^2c^2} \approx cp + \frac{m_i^2c^3}{2p}$ ou on présume que la masse du neutrino est quasiment nulle. On peut faire la calculation à 2 saveurs (les calcus avec 3 sont prèsque la même chose), et donc

$$|\nu_\mu\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle \qquad |\nu_\tau\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle \tag{3.4}$$

$$|\psi(t=0)\rangle = |\nu_\mu\rangle \qquad |\psi(t)\rangle = \cos\theta e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}|\nu_2\rangle \tag{3.5}$$

$$P_{\nu_\tau} = |\langle\nu_\tau \mid \psi(t)\rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2\frac{(E_2-E_1)t}{2\hbar} \qquad P_{\nu_\mu} = 1 - P_{\nu_\tau} \tag{3.6}$$

θ est l'angle de mélange. Si $\theta = 0$ ou $m_i = 0$ alors aucune oscillation ne sera observée, mais on les a observées.

Le soleil produit beaucoup des neutrinos à l'échelle d'énergie de $0.1 - 10$MeV (c'est la même échelle que les réacteurs nucléaires). Il y a aussi des interactions des rayons cosmmiques dans l'atmosphère a l'échelle de $1 - 20$GeV (un peu plus que les accélérateurs).

Chapter 4

17/09/14 — PC 2 — Détection des neutrino solaires

4.1 Revue de taux des oscillations

Dans le soleil les neutrinos ν_e, ν_μ sont produits. Mais on sait que les états propres de la propagations ne sont pas $|\nu_{e,\mu,\tau}\rangle$; les états de la propagations sont reliés auquelles de productions par

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Donc si un neutrino est produit $|\psi(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle$, quel est $|\psi(t)\rangle$? Nous savons que la propagation agit sur les neutrinos comme

$$|\nu_1(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\nu_1(0)\rangle \tag{4.2}$$

$$|\nu_2(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\nu_2(0)\rangle \tag{4.3}$$

où nous présumons que $E_i = pc + \dfrac{m_i^2 c^3}{2p}$ avec $p_1 = p_2 = p$. Donc

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle - \sin\theta\,|\nu_2\rangle \tag{4.4}$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\nu_1\rangle - \sin\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\nu_2\rangle \tag{4.5}$$

$$P_{e\to e} = |\langle \nu_e \mid \nu_e(t)\rangle|^2 = \left|\cos^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \sin^2\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right|^2 \tag{4.6}$$

$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\cos^2\theta\cos\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t \tag{4.7}$$

$$\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t = \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^3 t}{2\hbar p} \tag{4.8}$$

Etant que les neutrinos ont une velocité quasiment égal à c, on peut écrire $L = ct$ la distance que le neutrino bouge pendant t. Et donc on a

$$\frac{E_1 - E_2}{\hbar}t = \frac{\Delta m^2 c^2 L}{2\hbar p} \tag{4.9}$$

$$\equiv \frac{2\pi L}{L_0}, L_0 = \frac{4\pi\hbar p}{c^2\Delta m^2} \tag{4.10}$$

$$P_{e\to e} = \frac{1+\cos^2 2\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\cos\frac{2\pi L}{L_0} = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi L}{L_0}\right) \tag{4.11}$$

$$P_{e\to\mu} = \frac{\sin^2 2\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi L}{L_0}\right) \tag{4.12}$$

On appelle L_0 la longueur d'oscillation. Si on le calcule, on trouve que $L_0 \approx 2.5\times 10^6$km.

4.2 Cinématique de la réaction

1. Dans le référentiel du centre de mass,

$$s = \left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i c\right)^2 \tag{4.13}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 \tag{4.14}$$

parce que dans le référentiel du centre de mass la somme des moments est 0.

Pour chaque particule on a le 4-moment $p_i^\mu = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i\right)$ et la somme $P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$ et parce que c'est un 4-vector $P^\mu P_\mu$ est indépendante du référentiel.

2. On peut supposer que l'électron incident est au repos dans le référentiel du laboratoire parce que l'énergie cinétique de l'électron est ~ 13.6eV, beaucoup moins que $m_e c^2 \sim 0.5$MeV,

Pour trouver l'énergie dans le référentiel du centre de masse, on calcule s selon (4.13).

$$s = (E_\nu + E_e)^2 - c^2 (\vec{p}_\nu + \vec{p}_e)^2 \tag{4.15}$$

$$= \left(p_\nu c + m_e c^2\right)^2 - p_\nu^2 c^2 \tag{4.16}$$

$$= m_e c^2 \left(m_e c^2 + 2E_\nu\right) \tag{4.17}$$

$$E^* = \sqrt{s} = \sqrt{m_e c^2 \left(m_e c^2 + 2E_\nu\right)} \approx 2.9\text{MeV} \tag{4.18}$$

avec E^* l'énergie dans le referentiel du centre de masse.

3. Avec une particule, $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = (\gamma m c, \gamma m \vec{v})$ et donc on trouve $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} c^2 \underset{v \ll c}{\approx} \frac{\vec{p}}{m}$. Et donc la vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}^* = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i \frac{E_i}{c^2}} \tag{4.19}$$

4. Pour la collision νe on a

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{p_\nu} + \vec{p}_e}{\frac{E_\nu}{c^2 + \frac{E_e}{c^2}}} \tag{4.20}$$

$$= \frac{\vec{p_\nu}\left(=\frac{E_\nu}{c}\right)}{\frac{E_\nu}{c^2 + m_e}} \tag{4.21}$$

$$\frac{\vec{v}^*}{c} = \frac{E_\nu}{E_\nu + m_e c^2} \approx 0.94 \tag{4.22}$$

La vitesse du neutrino est vraiment proche de la vitesse de la lumière. Donc dans le référentiel du centre de masse, $\vec{v}_e^* = -\vec{v}^*, v_\nu = c$.

5. Maintenant soit un électron émit avec un angle θ^* par raapport au neutrino incident dans le centre de masse. Quel est l'angle θ dans le référentiel du laboratoire?

On fait un boost pour aller au référentiel du laboratoire du référentiel CM, $P_e^\mu = \Lambda_\nu^\mu P_e^{*\mu}$. Le boost est avec velocité $-v^*$, alors

$$P_e = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ p\cos\theta \\ p\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v^*}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v^*}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_e^{*\mu} = \begin{bmatrix} \frac{E^*}{c} \\ p^*\cos\theta^* \\ p^*\sin\theta^* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$P_e = \begin{bmatrix} \gamma\left(\frac{E^*}{c} + \frac{v^*p^*}{c}\cos\theta^*\right) \\ \gamma\left(\frac{v^*E^*}{c^2} + p^*\cos\theta^*\right) \\ p^*\sin\theta^* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$E = \gamma E^*\left(1 + \frac{v^{*2}}{c^2}\cos\theta^*\right) \qquad \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma p^*\left(1+\cos\theta^*\right) \\ p^*\sin\theta^* \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta^*}{1+\cos\theta^*} \tag{4.26}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}\tan\frac{\theta^*}{2} \tag{4.27}$$

Note que $\frac{1}{\gamma} \ll 1$ et donc même si θ^* suit une distribution aléatoire θ est très contracté.

4.3 Analyse des vrais données

1. Il y a une variation saisonnière des neutrinos parce que la distance entre le Soleil et la Terre change, et $\Phi \sim L^{-2}$.

2. Les barres d'erreur s'arrivent parce que l'interaction est mecanique quantique, et donc c'est une probabilité; on peut baisser les barres d'erreur en prenant plus des mésures mais on ne peut pas l'eliminer.

3. Soit p la probabilité par unité de temps de détecter un neutrino. Donc, la probabilité de detecter un neutrino pendant un temps dt est

$$n(dt) = \begin{cases} 1 & \text{Prob } p\ dt \\ 0 & \text{Prob } 1 - p\ dt \end{cases} \tag{4.28}$$

Donc $\langle n\rangle(dt) = p\ dt$ et $\left\langle n^2\right\rangle(dt) = p\ dt = \langle n\rangle$ et donc $\sigma^2 = \left\langle n^2\right\rangle - \langle n\rangle^2 = p\ dt + O(p^2) \approx \langle n\rangle$.

Pendant un temps fini, on peut le diviser en deux parties, alors $\langle n\rangle = \langle n_1\rangle + \langle n_2\rangle$ et $\Delta n^2 = \Delta n_1^2 + \Delta n_2^2$. Enfin $\delta = \frac{\Delta n}{\langle n\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle n\rangle}}$, et la seule mannière qu'on peut baisser les barres d'erreurs est de augmenter la probabilité de detection.

Chapter 5

01/10/14 — Lecture 3 — Production et désintégration des particules

Les quarks ne s'apparaissent jamais libre, seulement en paires (quark + antiquark) ou en groupes de trois (proton, neutron).

On introduit des nombres leptoniques et baryoniques qui sont toujours conservées. Toutes les quarks ont une nombre baryoniques $\frac{1}{3}$, et les antiquarks ont $B = -\frac{1}{3}$. Les baryons ont $B = 1$ (e.g. uud ou quelque chose comme ça) et les mésons ont $B = 0$ (e.g. $u\bar{d}$). Les bayons et les mésons sont des hadrons.

On observe après beaucoup d'éxperiences que les quantités de matière et de l'anti-matière produites sont toujours égal, mais on ne voit pas les "anti-Terres" ou des "anti-galaxies." C'est bizzare pour nous.

5.1 La règle d'or de Fermi

Rappeler la théorie des perturbations du premier ordre $A_{if} = \langle f|\,\Omega\,|i\rangle$ et du deuxième ordre $A_{if} = \sum_{k\neq i} \frac{\langle f|\,\Omega\,|k\rangle\,\langle k|\,W\,|i\rangle}{E_i - E_k}$. Noter que dans la théorie quantique des champs les états intermédiates $|k\rangle$ sont les bosons intermédiates; ils sont des vrais états, et pas seulement des idées mathématiques!

La regle d'or de Fermi est donnée par $\delta P_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\,\Omega\,|i\rangle\right|^2 \rho\left(E_f\right)$ ou ρ est la densité d'états où $E_i = E_f$.

On peut maintenant dèfinir une section efficace σ qui règle la probabilité de l'interaction. Si on a une projectile et une cible avec la taille de cible S, on definit $P_{i\to f} = \frac{\sigma}{S}$, donc σ et liée est liée avec la probabilité de l'interaction comme $P_{i\to f} = \delta P_{i\to f} \times \Delta t$. On voit que le flux et donné par $\Phi = \frac{v_i}{V_0}$, v_i la velocité et V_0 la volume, et donc $\delta P_{i\to f} = \sigma\Phi$.

On examine souvent la section efficace différentielle, comme $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ou $\frac{d\sigma}{d\theta}$. Noter que σ et vraiment une surface; l'unité qu'on utilise pour l'aire dans la physique d'haute energie est le *barn*: $1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$.

On fait un exemple de calcul de la section efficace différentielle dans une diffusion élastique (pas de production/désintégration des particules) par un potentiel V. Par exemple, on tire un proton vers un noyau. Ils vont s'interagir par la force electrique; on a la formule

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\Phi_i}\left|\langle f|\,V\,|i\rangle\right|^2 \rho(E_f) \tag{5.1}$$

$$\tilde{V} = \int e^{-i(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\cdot\vec{r}}V(\vec{r})\;d\vec{r}^3 \tag{5.2}$$

$$\rho(E) = \frac{E^2 d\Omega L^3}{\left(2\pi\right)^3} \tag{5.3}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2\left|\tilde{V}\right|^2}{\left(2\pi\right)^2} \tag{5.4}$$

Si on examine la diffusion de Rutherford, le potentiel coulombien $V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}$, on trouve que $|\vec{p}_i - \vec{p}_f| = |\vec{p}| = 2E\sin\frac{\theta}{2}$ et on peut calculer que $\tilde{V} = -\frac{4\pi\alpha}{\vec{p}^2}$ et alors on trouve la resultat de Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \tag{5.5}$$

Selon la règle d'or de Fermi on a le taux de désintégration $\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|\,\Omega\,|i\rangle\right|^2 \rho(E_f)$ et la nombr des particules décroître comme $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ et la moyenne durée de vie est $\tau = \lambda^{-1}$.

On peut calculer la distribution de la probabilité d'énergie, et c'est un Lorentzion, ou la loi de Breit-Wigner.

Chapter 6

01/10/14 — PC3 — Théorie des perturbations dépandant du temps

On commence en discutant l'opérateur d'évolution $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$. On note $\langle x|\,\hat{U}(t,t_0)\,|x_0\rangle = U\,(t,x,t_0,x_0)$. Ça veut dire quoi? On le voit par

$$\langle x \mid \psi(t)\rangle = \int dx_0\ \underbrace{\langle x|\,\hat{U}(t,t_0)\,|x_0\rangle}_{U(t,x,t_0,x_0)}\langle x_0 \mid \psi(t_0)\rangle \tag{6.1}$$

$$\psi(t,x) = \int dx_0\ \hat{U}(t,x,t_0,x_0)\psi(t_0,x_0) \tag{6.2}$$

et donc on voit que mettre $\hat{U}(t,x,t_0,x_0)$ sous l'intégrale on obtient l'évolution du temps de $\psi(t_0,x_0)$.

On suppose qu'il s'agit d'une periode de temps $\left[\pm\frac{T}{2}\right]$. Soit notre hamiltonien

$$\hat{H} = \begin{cases} \hat{H}_0 & t < -\frac{T}{2}, t > \frac{T}{2} \\ \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}(t) & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases} \tag{6.3}$$

avec $\hat{H}_0$ le hamiltonien pour une particule libre. Soit ψ_i une onde plane (fonction propre de $\hat{H}_0$), et soit $\psi_{f,k}$ une autre onde plane arbitraire sortant. Après $t > \frac{T}{2}$, ψ_i devient une superposition des ondes planes, et on veut calculer $A_{fi} = \left\langle \psi_f \mid \psi\left(\frac{T}{2}\right)\right\rangle$.

1) *Montrer que* $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$ *où* $\hat{U} = \sum_k |\psi_k(t)\rangle\,\langle\psi_k(t_0)|$. *Qu'est-ce qui se passe si* $\hat{H}_0$ *est indépendant du temps?*

On commence en ecrivant $|\psi(t_0)\rangle = a_k\,|\psi_k(t_0)\rangle$ ou $a_k = \langle\psi_k(t_0) \mid \psi(t_0)\rangle$. Et donc on sait aussi que $|\psi(t)\rangle = a_k\,|\psi_k(t)\rangle$ par linéarité, et donc

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k \langle\psi_k(t_0) \mid \psi(t_0)\rangle\,|\psi_k(t)\rangle \tag{6.4}$$

$$= \sum_k (|\psi_k(t)\rangle\,\langle\psi_k(t_0)|)\,|\psi(t_0)\rangle \tag{6.5}$$

$$= U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle \tag{6.6}$$

ou on peut réorganiser parce que $\langle\psi_k(t_0) \mid \psi(t_0)\rangle$ est une constante.

Si $\hat{H}_0$ est indépendant du temps on regarde l'équation de Schrodinger $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_k = E_k\psi_k$ et pance que H est indépandent du temps on trouve $\psi_k(t) = e^{i\frac{E_k}{\hbar}(t-t_0)}\psi_k(t_0)$, et donc

$$\hat{U}(t,t_0) = \sum_k |\psi_k(t)\rangle\,\langle\psi_k(t_0)| = \sum_k |\psi_k(t_0)\rangle\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_k(t-t_0)}\,\langle\psi_k(t_0)| \tag{6.7}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)} \tag{6.8}$$

2) *Soit une particule libre avec des conditions aux limites périodiques sur $[0, L]$. Trouver $U(t, x, t_0, x_0)$ en choisissant la base des ondes planes.*

La base qu'on va utiliser est $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{2n\pi\hbar}{L}x - Et\right)}$. On peut donc calculer $U(t, x, t_0, x_0) = \langle x| U(t, t_0) |x_0\rangle$ par

$$U(t, x, t_0, x_0) = \sum_k \langle x \mid \psi_k(t)\rangle \langle\psi_k(t_0) \mid x_0\rangle = \sum_k \psi_k(t, x)\psi_k^*(t_0, x_0) \tag{6.9}$$

$$= \frac{1}{L}\sum_n e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{2n\pi\hbar}{L}(x-x_0) - \frac{p_n^2}{2m}(t-t_0)\right]} \tag{6.10}$$

Quand $L \to \infty$ on remplace $\frac{1}{L}\sum_n \to \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp$. Si on note $\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{L}$, alors la nombre des Δp entre $(p, p + dp)$ est donnée par $dn = \frac{L}{2\pi\hbar}dp$. La somme est en effet une intégrale de dn, et donc on a la resultat qu'on voulait. Finalement

$$U(t, x, t_0, x_0) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{2n\pi\hbar}{L}(x - x_0) - \frac{p^2}{2m}(t - t_0)\right)\right] \tag{6.11}$$

3) *On revient au cas général. Soit $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}(t)$, une perturbation. Trouver $|\psi(t)\rangle$.*

On commence avec la solution (ouais, c'est bizzare...)

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_i(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} U(t, t')\lambda V(t') |\psi(t')\rangle\ dt' \tag{6.12}$$

On différencier les deux côt'es

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_i(t)\rangle + U(t, t)\lambda V(t) |\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dU(t, t')}{dt}\lambda V(t') |\psi(t')\rangle\ dt' \tag{6.13}$$

$$= \hat{H}_0 |\psi_i(t)\rangle + \lambda V(t) |\psi(t)\rangle + \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\ \left(\frac{1}{i\hbar}H_0 U(t, t')\right)\lambda V(t') |\psi(t')\rangle \tag{6.14}$$

$$= \hat{H}_0 |\psi_i(t)\rangle + \lambda V(t) |\psi(t)\rangle + H_0 (|\psi(t)\rangle - |\psi_i(t)\rangle) \tag{6.15}$$

$$= (H_0 + \lambda V(t)) |\psi(t)\rangle \tag{6.16}$$

et on a donc l'équation de Schrodinger et on est fini.

4) *On définit le propagateur retardé par $G(t, t') = \Theta(t - t')U(t, t')$ oú $\Theta(t - t')$ est la fonction de Heaviside. Vérifier que le résultat dans l'équation au-dessous.*

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_i(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, t')\lambda V(t') |\psi(t')\rangle\ dt' \tag{6.17}$$

On utilise la théorie des perturbations et on obtient

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_i(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, t')\lambda V(t') |\psi_i(t')\rangle\ dt' + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2\ G(t, t_1)\lambda V(t_1)G(t_1, t_2)\lambda V(t_2) |\psi_i(t_2)\rangle + \dots \tag{6.18}$$

5) *On veut décrire le propagateur en série Fourier. Comme la transformée de Fourier n'est pas définie pour les fonctions oscillantes, on définit au-dessous. Calculer $\langle x| \tilde{G}(\omega) |0\rangle$ pour une particule libre à une dimension.*

$$\tilde{G}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, 0)e^{i\omega t - \epsilon t}\ dt \tag{6.19}$$

On rappelle que $G(t,0) = \Theta(t) U(t,0)$ et donc on a

$$\langle x | \tilde{G}(\omega) | 0 \rangle = \int_0^\infty dt \ \langle x | U(x,t,0,0) | 0 \rangle e^{i\omega t - \epsilon t} \tag{6.20}$$

$$= \frac{1}{L} \sum_n e^{\frac{2ni\pi x}{L}} \int_0^\infty dt \ e^{-\frac{ip_n^2 t}{2m\hbar} + i\Omega t - \epsilon t} \tag{6.21}$$

L'intégrale est élémentaire, $\int_0^\infty dt \ e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}$ et donc

$$\langle x | \tilde{G}(\omega) | 0 \rangle = \frac{1}{L} \sum_n e^{\frac{2ni\pi x}{L}} \frac{i}{\omega - \frac{p_n^2}{2m\hbar} + i\epsilon} \tag{6.22}$$

6) *Calculer* $\langle \psi_{f,n}(t) \mid \psi(t) \rangle$, $\psi_f \neq \psi_i$.

On commence avec l'équation de Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = [H_0 + \lambda V(t)] \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_{f,n}(t) \mid \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi_{out}(t) | \lambda V(t) | \psi(t) \rangle \tag{6.24}$$

$$\langle \psi_{f,n}(t) \mid \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \ \langle \psi_{f,n}(t) | \lambda V(t) | \psi(t) \rangle \tag{6.25}$$

La première terme disparaît parce que $\psi_f \neq \psi_i$ et a la fin on peut remplacer les limites de l'intégrale par $[-\infty, \infty]$ parce que $V(t) = 0$ pour $|t| > \frac{T}{2}$ et on a $t > T/2$ parce que on est déja passé la perturbation.

7) *Calculer l'implitude de transition à l'ordre* 1 *(approximation de Born) et à l'ordre* 2 *en* λ.

On peut simplement utiliser ses resultats de l'équation (6.18) et obtient

$$A_{fi} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} \int dt \ \langle \psi_{f,n}(t) | \lambda V(t) | \psi_i(t) \rangle}_{\text{L'approximation de Born}} + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi_{f,n}(t) | \lambda V(t_1) G(t_1, t_2) \lambda V(t_2) | \psi_i(t_2) \rangle + O(\lambda^3) \tag{6.26}$$

8) *Dans l'approximation de Born, quelles sont les valeurs possible de* E_f *dans la limite* $T \to \infty$*?*

On a dans l'approximation de Born

$$A_{fi}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \ \langle \psi_{f,n}(t) | \lambda V(t) | \psi_i(t) \rangle \tag{6.27}$$

Si on a $V(t) = V_0 \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ et aussi on a $|\psi_i(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t} |\psi_i(0)\rangle, |\psi_{f,n}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_f t} |\psi_{f,n}(0)\rangle$, alors

$$A_{fi}^{(1)} = \frac{1}{2i\hbar} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \ e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \langle \psi_{f,n}(0) | \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \lambda V_0 | \psi_i(0) \rangle \tag{6.28}$$

$$= \frac{1}{2i\hbar} \langle \psi_{f,n}(0) | \lambda V_0 | \psi_i(0) \rangle \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \ e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) \tag{6.29}$$

$$= -i \left[\frac{\sin\left(E_f - E_i + \hbar\omega\right) \frac{T}{2\hbar}}{E_f - E_i + \hbar\omega} + \frac{\sin\left(E_f - E_i - \hbar\omega\right) \frac{T}{2\hbar}}{E_f - E_i - \hbar\omega} \right] \langle \psi_{f,n}(0) | \lambda V_0 | \psi_i(0) \rangle \tag{6.30}$$

Dans la limite $T \to \infty$ on a que la merde dans les crochets reduit à $\delta\left(E_f + E_i + \hbar\omega\right)$.

Chapter 7

08/10/14 — PC4 — Théorème de Landau-Yang

La parité sera très importante aujourd'hui. La parité est la transformation $\vec{r} \to -\vec{r}$. L'opérateur $\hat{P}^2 = 1$ est laquelle de la parité. Notons que $\hat{P}^2 = \hat{I}$. Aussi, $\hat{P}$ a des valeurs propres ± 1.

Aussi, il faut rappeler les rotations, comme par exemple $R_Z(\alpha)$; dans les coordonnées sphériques, $R_z(\alpha) : (r, \theta, \phi) \to (r, \theta, \phi - \alpha)$. En developpant cette difference comme séries de Taylor, on trouve que

$$f(\phi - \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} f(\phi) \tag{7.1}$$

et par ça on voit que $L_z = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \phi}$ engendre les rotations par l'axe z. En MQ on écrit en générale $\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}\vec{n}\cdot\vec{J}}$ avec $\vec{J}$ la vecteur des opérateurs qui engendrent les rotations.

Finalement, on parle de l'hélicité, la projection du spin sur la direction de l'impulsion $\hat{h} = \dfrac{\vec{J}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Les valeurs propres sont dans l'intervale $[-s\hbar, s\hbar]$ avec $2s+1$ valeurs possibles. Notons que l'hélicité est invariant par la rotation mais change la valeur par la parité.

7.1 Spin d'un photon

Une onde electromagnetique qui se propage dans la direction z en général a la forme

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \mathrm{Re}\left(\vec{\epsilon} e^{i(kz - \omega t)}\right) \tag{7.2}$$

avec $\vec{\epsilon}$ la polarization.

a) *Lier la relation entre ω, k et aussi la condition sur $\vec{\epsilon}$.*

On rappele que $\omega = ck$ et aussi que $\vec{\epsilon} \perp \hat{z}$ la direction de propagation.

b) *Determiner $\vec{\epsilon}$ pour les polarizations circulaire droite et gauche.*

Pour les polarizations circulaire droite et gauche respectivement

$$\epsilon_{D,G} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

pour les axes (x, y) respectivement.

c) *Si on a la fonction d'onde d'un photon comme $\psi(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon} e^{i(kz - \omega t)}$, alors quelles sont l'impulsion et l'énergie du photon?*

On trouve l'impulsion $p = \hbar k$ et l'énergie $E = \hbar\omega$.

d) *Montrer que les états de polarisation circulaire sont états propres de J_z et trouver les valeurs propres.*

On commence avec la généralisation de J_z pour les fonctions d'ondes $\vec{\psi}' - \vec{\psi} = -\dfrac{i\phi}{\hbar} J_z \vec{\psi}$. Pour notre fonction d'onde donc on trouve

$$\left(R_z(\phi) - 1\right) \vec{\psi} = -\frac{i\phi}{\hbar} J_z \vec{\psi} \tag{7.4}$$

Pour les rotations infinitésmales on écrit

$$(R_z(\phi) - 1) = \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} - I \tag{7.5}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Donc pour les rotations infinitésmales on trouve (en mettant sa matrice dans (7.4))

$$J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i\hbar & 0 \\ i\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Les valeurs propres sont donc $\pm\hbar, 0$. Les fonctions propres sont respectivement les polarizations circulaire gauche et droite. La dernière fonction propre est $\vec{\epsilon} \propto \hat{z}$ mais ça ne satisfait pas les équations de Maxwell.

La consequence de tout ça c'est que pour les particules avec masse nulle n'ont jamais spin nulle; c'est interdit dans les équations de Maxwell. Donc, même s'il y a en générale trois degrés de liberté pour une particule avec spin 1, c'est seulement deux pour les particules avec masse nulle.

e) *Quels sonts pour le photon le moment orbital L_z et le spin?*

$L_z = 0$, comme on peut déduire simplement par $L_z = xp_y - yp_x = 0$, et donc $S_z = J_z = \pm 1$.

f) *Montrer que ces polarizations circulaires sont aussi les états propres de l'opérateur de l'hélicité et trouver les valeurs propres.*

Parce que le spin est toujours dans la direction de l'impulse, on trouve que les valeurs propres sont les même que lesquelles de J_z.

7.2 Désintégration d'une particule en deux photons

Soit la base pour cette désintégration $|GG\rangle, |DD\rangle, |GD\rangle, |DG\rangle$.

a) *On suppose que la particule initiale a un spin $J = 0, 1$. Selon la conservation du moment cinétique, qu'est-ce qu'on peut dire?*

Les états $|GD\rangle, |DG\rangle$ sont intérdites parce que leur spins totales (et moments cinétique totales) sont ± 2. Il faut noter que les photons propagent dans les directions inverses et donc $|GG\rangle, |DD\rangle$ ont les moments cinétique totales nulles.

b) *Comment est-ce que la base transforme dans une rotation π autour l'axe x? Par parité?*

En tournant autour l'axe x on trouve que les états échangent: $|\_D\rangle \to |D\_\rangle$. Alors $|GG\rangle, |DD\rangle$ ne changent pas mais $|GD\rangle, |DG\rangle$ s'échangent.

Par parité on envoie $|\_G\rangle$ vers $|D\_\rangle$ et donc $|DD\rangle \leftrightarrow |GG\rangle$ et $|DG\rangle, |GD\rangle$ restent.

c) *Comment est-ce qu'un état $J_z = 0$ se transforme dans une rotation R_x suivant le moment cinétique total J?*

On commence en examinant l'état $|1, 0\rangle$ (l'état propre avec $J = 1, J_z = 0$). On sait que $|1, 0\rangle \propto Y_{1,0} \propto \cos\theta$ le harmonique sphérique. Comme ça on trouve que $R_x(\pi)Y_{1,0} \to -Y_{1,0}$ et en général $R_x(\pi)|J, 0\rangle = (-1)^J |J, 0\rangle$.

Mais on a trouvé que les seules états permis, $|GG\rangle, |DD\rangle$ sont les fonctions propres de $R_x(\pi)$ avec valeur propre 1! Donc $|1, 0\rangle$ ne peut pas être éxprimer dans notre base et alors c'est interdit. C'es la théorème de Landau-Yang.

d) *Sujet supplémentaire: le meson π^0 peut désintégrer dans deux photons.*

Le meson $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ a une parité intrinsèque négative, donc la fonction d'onde devrait être écrit comme

$$|\gamma\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|GG\rangle - |DD\rangle) \tag{7.8}$$

On se rapelle que $|GG\rangle = \dfrac{1}{2} (|x_1\rangle + i\,|y_1\rangle) \otimes (|x_2\rangle + i\,|y\rangle_2)$, et donc on peut simplement calculer

$$|\gamma\gamma\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|x_1 y_2\rangle + |y_1 x_2\rangle) \tag{7.9}$$

Ca nous montre que les photons ont des polarisations perpendiculaires. Si on avait commencé avec une particule avec une parité intrinsèque positive, on trouverait que les photons aient les polarisations paralleles.

Chapter 8

08/10/14 — Amphi 4 — Makeup: Lois de conservation en physique

8.1 Transformations continues

8.1.1 Théorème de Noether, Règles de sélection

Un opérateur en MQ est invariant par une transformation unitaire U si $U\Omega U^\dagger = \Omega$, ou également $[\Omega, U] = 0$. Une classe des transformations unitaire est lesquelles commes $e^{i\alpha\Omega}$ parametrisé par α continue avec Ω un opérateur hermitien. Quelques exemples:

- L'opérateur de translation dans l'espace est $e^{i\frac{a}{\hbar}P_x}$
- L'opérateur de rotation autour l'axe z est $e^{i\frac{\theta}{\hbar}L_z}$
- L'opérateur de translation temporelle est $e^{i\frac{t}{\hbar}H}$

Si H est invariant par la transformation de générateur g, ça veut dire que $\left[H, e^{-i\epsilon g}\right] = [H, g] = 0$, alors

$$[H, g] = 0 \tag{8.1}$$
$$\left[e^{-i\frac{tH}{\hbar}}, g\right] = 0 \tag{8.2}$$

est les valeurs propres de g sont conservées dans le temps. C'est le *théorème de Noether.*

Les règles de sélection dit simplement que si g commute avec H, les états propres de valeurs propres differentes ne transitionnent pas l'un à l'autre.

8.1.2 Transformation de jauge

On commence avec le nombre baryonique. Soit B l'opérateur nombre baryonique. Alors B est le générateur de la transformation de jauge $e^{-i\alpha B}$, et si $[B, H] = 0$ alors le nombre baryonique est conservé. C'est pareil pour la charge électrique et le nombre leptonique.

8.2 Transformations discrètes

L'opérateur paritè, l'opérateur conjugaison de charge et l'opérateur renversement du temps sont des transformations discrètes. Le théorème de Noether applique quand même: si l'opérateur commute avec H, les valeurs propres sont des quantitès conservées.

On note que $[H_{em}, P] = 0$ avec P l'opérateur de la parité, et alors dans les interactions EM la parité est conservée.

Meme si le le photon est de spin 1 les seules deux états permis sont $\lambda_\gamma = \pm 1$, pas $\lambda_\gamma = 0$ par l'invariance de Lorentz. Comme ça, on peut déduire par exemple que la désintégration $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ force la parité de $\pi^0 = -1$ (sujet du PC).

La parité totale d'une particule est la somme de laquelle du moment cinétique l (qui est $(-1)^l$) et la parité intrinsèque d'une particule. La parité totale de plusieurs particules est simplement la produit.

Chapter 9

15/10/14 — PC5 — Parité en Physique des Particules

On parle d'abord de l'opérateur de la parité. C'est conservée dans les interactions fortes et les interactions EM, mais c'est violée dans les interactions faibles. C'est un opérateur hermitien avec des valeurs propres ± 1. Si la parité est conservée $[H, P] = 0$. On parle aussi de la parité intrinsèque comme $P\psi(\vec{r}) = \eta\psi(-\vec{r}) = \epsilon\psi(\vec{r})$ où η est la parité intrinsèque et ϵ est la parité totale.

La parité est une valeur multiplicative, comme $\epsilon = \prod_i \epsilon_i$. Donc avec plus d'une particule la parité totale c'est la produit des parités de chaque particule. En particulier, si on a des particules de moment cinétique connu l on trouve la parité totale $\epsilon_{ab} = \eta_a \eta_b (-1)^l$.

9.1 Violation de la parité dans les interactions faibles

1. *Montrer qu'une charge e de masse m en mouvement circulaire uniforme obeit la relation $L \propto M$.*

   Notons que $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ et pour le mouvement circulaire $L = rmv$. On rappele que $M = IA$ avec $I = \frac{q}{T}$ l'intensité (T est la période) et $A = \pi r^2$ et donc

$$M = IA = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 \tag{9.1}$$

$$= \frac{1}{2}qrv = \frac{q}{2m}L \tag{9.2}$$

$$\vec{M} = \frac{q}{2m}\left(\vec{L} + \gamma\vec{S}\right) \tag{9.3}$$

   Pour un électron $\gamma = 2$ c'est le rapport gyromagnetique.

2. *Trouver la proportionnalit'e entre M est le spin d'une particule chargée.*

   On rappele que $\vec{\mu} = \frac{q}{2m_p}\vec{S}$.

   On veut aligner les spin nucléaires à un champ magnétique fort. Rappeler que $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ et alors il y a deux énergies $E_\pm = \mp\mu B$. Alors la probabilité après la distribution Boltzmann c'est

$$p_+ \propto e^{-\beta E_+} \qquad p_- \propto e^{-\beta E_-} \tag{9.4}$$

$$= \frac{e^{\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}} \qquad = \frac{e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}} \tag{9.5}$$

   Si on veut aligner les spins alors, il faut que $p_+ \gg p_-$ et alors il faut que $kT \ll \mu B$ et alors $T \lesssim \frac{\mu B}{k} \simeq 2\text{mK}$.

3. L'expérience de la violation de la parité commence avec un état invariant par la parité. Alors si la parité est conservée il faut que létat final reste aussi invariant par la parité. L'expérience qu'on va examiner c'est ${}^{60}_{27}\text{Co} \to {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \overline{\nu}_e$. Alors par la conservation de la parité il faut que la nombre des électrons qui sont émits par (θ, ϕ) soit égales à laquelle qui sont émits par $(\pi - \theta, \phi + \pi)$. Mais aussi par la symmétrie autour l'axe z on voit que la nombre des électrons qui sont émits par (θ, ϕ) doit être égales à laquelle qui sont émits par $(\theta, \phi + \alpha)$ pour quelconque α. Mais l'expérience n'est pas en d'accord avec ça!

9.2 Conservation de la parité dans les interactions fortes et EM

1. *Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de la parité dans l'espace* (x, y, z)*? Dans les états de moment cinétique* l*?*

   On a déjà parlé de ça, valeurs propres $\epsilon = \pm 1$ et $\epsilon = (-1)^l$.

2. *Soit la réaction* $\pi^- + d \to 2n$*.*

   a) *Le pion n'a pas de spin, le deutéron a un spin* 1 *et les deux neutrons ont des spin* $\frac{1}{2}$*. Quels sont les couples* (l, s) *possibles?*

   La conservation du moment cinétique dit que $|l - s| \leq 1 \leq l + s$ et alors les quatres couples possibles sont les suivants: $(1,0), (0,1), (1,1), (2,1)$.

   b) *Quelle restriction est-ce que le principe de Pauli impose?*

   Le principle de Pauli dit que $P\left|\psi\right\rangle = -\left|\psi\right\rangle$ pour les Fermions. Alors $P\left|nn\right\rangle = (-1)^{l+s+1}$; rappelons que les états $s = 1$ sont symmetriques mais l'état $s = 0$ est anti-symmetrique. Alors le principe de Pauli élimine les états dont $l + s$ est impair, $(1,0), (0,1), (2,1)$. Donc le seul état qu'on peut avoir c'est $(1,1)$.

   c) *En comparaisant les parités des états initials et finals trouver la parité intrinsèque de* π^-*.*

   On se rappele que $P = \eta_\pi \eta_d (-1)^l$. On sait que pour le deutéron (pn) l'état avec $l \geq 1$ n'est pas stable et donc le deutéron a $l = 0$. Donc $P_d = \eta_p \eta_n$, et on sait que $\eta_p \eta_n = 1$ parce que les états de parité differente ne s'agissent pas par l'interaction forte, et $P_i = \eta_\pi$. Enfin $P_f = \eta_n^2 (-1)^1 = -1$ car on a trouver ci-dessus que $l = 1$ pour la système en totale et alors $\eta_\pi = -1$.

3. *Le méson neutre* η *ne désintègre jamais en deux pions, seulement en trois* 50% *des cas. On veut montrer que* $\eta_\eta = -1$ *la parité intrinsèque peut l'expliquer.*

   On sait que S, J initials sont nulles (par le referentiel du centre de masse) et donc S, J sont nulles dans l'état final aussi par la conservation du moment cinétique. Si le méson désintègre dans deux pions la parité finale est $+1$ mais la parité initiale est -1 et donc cette désintègration est interdit.

   Pour trois pions on sait par la conservation de l'impulsion $\sum_i \vec{p}_i = 0$. On construit l'opérateur $\hat{S} = Pe^{-i\frac{\pi J_z}{\hbar}}$ ("mirror symmetry") la rotation avec la parité. On trouve que l'état initial a une valeur propre de -1 par cet opérateur parce que la parité intrinsèque est -1 et la parité orbitale est 1 parce que dans le referentiel du centre de masse l'état initial est nulle c'est trivialement invariant. Pour l'état final on peut calculer que la parité intrinsèque est η_π^3 et la parité orbitale est invariant, et parce qu'on sait déjà que $\eta_\pi = -1$ on truove que l'action du $\hat{S}$ est conservée.

Chapter 10

22/10/14 — Amphi 5 — Lois de non-conservation dans les interactions faibles

On se rappele que les trois forces forte, EM et faible obeissent les lois de conservation de l'énergie-impulsion, le moment cinétique, la charge électrique, et les nombres leptonique et baryonique. On examine maintenant la conservation de la saveur, la conjugaison de charge, et la parité pour chacun des trois forces.

On definit maintenant la saveur des quarks: l'etrangeté, la charme, et la beauté, tel que les quarks étrange ont $S = -1$, les quarks charmant ont $C = +1$ et les quarks beau ont $B = -1$ et 0 pour tout les autres. Il faut noter que les désintégrations faibles ne conservent pas toujours la saveur, mais les autres deux la conserve.

Aussi, il y a la conjugaison de charge qu'on peut examiner, qui envoie les particules vers ses propres antiparticules. On voit encore que la interaction faible ne respect pas l'invariance par la conjugaison de charge.

Finalement, la parité, Toutes les force respectent la parité, sauf encore l'interaction faible.

Chapter 11

22/10/14 — PC6 — Introduction à l'interaction faible

Les désintégrations classiques pour étudier les des interaction faibles sont $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e, \mu^- \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e$ et $\tau^- \to \nu_+ \tau e^- + \overline{\nu}_e$. On va discuter la première équation.

Fermi a posé que l'amplitude de probabilité de la désintégration pour toutes interactions est donné par

$$A_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^3x \int_{-T/2}^{T/2} dt \; \psi_1 \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^* \tag{11.1}$$

oú G est une constant, la constante de Fermi, et T et l'intervale de temps de l'interaction. On sait maintenant que cet universalité est lié à la transformation des quarks. La force faible n'est pas vraiment faible, mais p.q. il suit le potentiel $V(r) \sim \frac{1}{r} e^{-r/\lambda}$ avec $\lambda = \frac{\hbar}{m}$ tres petit et alors le potentiel décroît tres rapidement.

1. *Quelle est la dimension de G?*

   On note que A_{fi} est sans dimension et les fonctions d'onde sont de dimension $m^{-3/2}$. On commence dans les unités SI et on trouve la dimension de G est ML^5T^{-2}.

   On introduit un autre système des unités, le système naturel: l'énergie, $\hbar$, et c.

2. *Si les particules $2, 3, 4$ sont de masse nulle, montrer que la taux de désintégration est de la forme $\Gamma = aG^2 M^n \hbar^p c^q$ ou a est une constant sans dimension.*

   On sait que Γ, lié à la probabilité de désintégration, doit suivant $\Gamma \sim \frac{|A_{fi}|^2}{T}$. On peut simplement comparer donc les deux quantités et on obtient $\Gamma = aG^2 M^5 \hbar^{-7} c^4$.

3. *Le muon μ^- se désintègre suivant $\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e$ et le taon $\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \overline{\nu_e}$ avec un taux de brachement de $17,8\%$. Déduire une relation entre les durées de vie et les masses.*

   On peut simplement diviser les taux $\frac{T_\mu}{T_\tau} = \frac{\Gamma_\mu}{0.178\Gamma_\tau} = \frac{1}{0.178} \left(\frac{M_\tau}{M_\mu}\right)^5$. C'est en bon accord avec les éxperiences.

4. *Notons $\vec{p}_i, Ei$ les impulsions et les énergies des particules, $i = 1, 2, 3, 4$. Calculer A_{fi}, verifier que l'impulsion est conservée et que l'énergie est conservée dans la limite $T \to \infty$.*

   On met les particules dans une boîte de L^3. Les conditions limites forcent $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}$. On le calcule alors

$$A_{fi} = -\frac{iG}{\hbar L^6} \int_{-T/2}^{T/2} dt \; e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E t} \int_0^L dx \; e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p_x x} \int_0^L dy \; e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p_y y} \int_0^L dz \; e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p_z z} \tag{11.2}$$

$$\int_0^L dx \; e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta p_x x} = \int_0^L dx \; e^{-2\pi i \frac{x}{L}\Delta n_x} = L\delta_{\Delta n_x, 0} \tag{11.3}$$

$$A_{fi} = -\frac{iG}{\hbar L^6} \int_{-T/2}^{T/2} dt \; e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E t} L^3 \delta_{\Delta \vec{n}, 0} \tag{11.4}$$

Ce δ de Kronecker montre que l'impulsion est conservée, car $\Delta\vec{n} = 0$ dans toutes désintégration. On continue

$$A_{fi} = -\frac{iG}{\hbar L^3}\delta_{\Delta\vec{n},0}T\frac{\sin\frac{T\Delta E}{2\hbar}}{\frac{T\Delta E}{2\hbar}} \tag{11.5}$$

La dernière terme est un function sinc, avec une taille $\sim \frac{\hbar}{T}$. On voit donc que l'énergie n'est pas nécessairement conservée sauf si $T \to \infty$. C'est la principe d'incertitude d'Heisenberg.

5. *Calculer la probabilité de désintégration par unité de temps, Γ, dans la limite $T \to \infty$.*

   On calcule

$$p_{fi} = |A_{fi}|^2 = \frac{G^2}{\hbar^2 L^6}\delta_{\Delta\vec{p},0}T^2\left(\frac{\sin\frac{T\Delta E}{2\hbar}}{\frac{T\Delta E}{2\hbar}}\right)^2 \tag{11.6}$$

   On s'interesse par la dernière partie. On sait que dans la limite $T \to \infty$ l'expression $\frac{\sin^2 x}{x^2} \propto \delta(\Delta E)$. On le calcule précisement

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{T\Delta E}{2\hbar}}{\frac{T\Delta E}{2\hbar}}\right)^2 d\Delta E = \frac{2\hbar}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \tag{11.7}$$

$$= \frac{2\pi\hbar}{T} \tag{11.8}$$

$$\left(\frac{\sin\frac{T\Delta E}{2\hbar}}{\frac{T\Delta E}{2\hbar}}\right)^2 = \frac{2\pi\hbar}{T}\delta(\Delta E) \tag{11.9}$$

   où l'intégrale dans l'équation (11.8) est donné. Alors on trouve que

$$p_{fi} = \frac{G^2}{\hbar^2 L^6}\delta_{\delta\vec{p},0}T^2\frac{2\pi\hbar}{T}\delta(\Delta E) \tag{11.10}$$

$$\frac{p_{fi}}{T} = \frac{2\pi G^2}{\hbar L^6}\delta_{\delta\vec{p},0}\delta(\Delta E) \tag{11.11}$$

   et comme ça on trouve la conservation de l'énergie dans la limite $T \to \infty$.

   Mais pour l'instant on a une dépendence sur L^6. La résolution de cette dilemme est qu'il faut prendre la somme de toutes les $\vec{p}_{2,3,4}$, comme $\Gamma = \sum_{\vec{p}_{2,3,4}}\frac{p_{fi}}{T}$. Rappelons qu'on a un delta de Kronecker dans l'expression p_{fi} et alors on peut faire $\sum_{\vec{p}_{2,3,4}}\delta_{\vec{p},0} \to \sum_{\vec{p}_{2,3}}$ car la somme est fixée par le delta.

   Car on veut prendre la limite $L \to \infty$ on remplace la somme par l'integrale $\sum_{\vec{p}_{2,3}} \to \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^6\int d^3\vec{p}_{2,3}$ et finalement onobtient

$$\Gamma = \frac{2\pi G^2}{\hbar}\int\frac{d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3}{(2\pi\hbar)^6}\delta(E_2 + E_3 + E_4 - E_1) \tag{11.12}$$

6. *On s'interesse maintenant des collisions élastiques. Qu'est-ce qu'il faut changer dans l'équation* (11.1)*?*

   Il faut tout simplement changer $\psi_2^* \to \psi_2$.

7. *On s'agit de la collision $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$ dans le centre de masse dans la limite ou l'énergie de la collision est très supérieure à la masse de l'électron. Montrer la forme de $\sigma = aG^2E^n\hbar^p c^q$.*

   On trouve par l'analyse des dimensions que $\sigma = a(\hbar c)^{-4}G^2E^2$. On peut l'écrire dans le référentiel du laboratoire et on trouve que

$$S = (E_\nu + E_e)^2 - c^2(\vec{p}_\nu + \vec{p}_e)^2 \tag{11.13}$$

   Car $\vec{p}_\nu = \vec{p}_e = E_\nu = 0$ on voit que $S \approx 2E_e$. C'est ce qu'on observe par les éxperiences, $\sigma \sim E_e$.

Chapter 12

05/11/14 — Amphi 6 — Asymétrie matière-antimatière

Les deux kaons neutres sont K^0 et $\overline{K^0}$; les deux autres sont les $K^{\pm}$. Les premiers sont produits lorsqu'on cible des protons avec des des pions, et les derniers sont plus absorbés dans cette matière. Ils ont la meme masse et le meme spin.

Ils se mélangent aussi: $K_0 \leftrightarrow \pi\pi \leftrightarrow \overline{K^0}$ sont possibles. Mais car $|\Delta S| = 2$ c'est à cause de l'interaction faible. Car les mélanges sont possibles, les états propres devraient être les mélanges aussi, comme $K_{L,S} = 1/\sqrt{2}\left(K^0 \pm \overline{K^0}\right)$. Remarquons que ces deux états ont les masses differentes et alors ne sont plus des antiparticules comme le $K^0, \overline{K^0}$.

On note que l'interaction faible ne commute ni avec la parité ni avec la conjugaison de la charge, mais si elle commute avec les deux il faut que le K_L, K_s sont toujours observée ensemble. Ce n'est pas le cas; la symétrie CP est violée, très légèrement, dans les desintégrations faibles.

Chapter 13

05/11/14 — PC7 — L'isospin

L'isospin est une nouvelle nombre quantique qui est conservée dans les interactions fortes. On note que les neutrons et les protons ont les interactions fortes très similaires. Heisenberg en 1932 a proposé qu'on considère le proton et le neutron comme deux états de la même particule.

On examine un espace 2D avec le proton et le neutron comme la base, et on prend $\vec{I} = \vec{\sigma}$ les matrices Pauli. On peut alors construire une base des états avec I^2, I_z (qui ont les valeurs propres $I(I+1), I_3$) comme on faisait pour l'instant cinétique. Donc $I = 1/2$ correspond aux nucléons et $I = 1$ correspond aux pions. La symmetrie des interactions fortes dit que $[H, I] = 0$ et donc les états avec la même nombre isospin ont la même masse et la même énergie. En réalité, les protons et les neutrons ont des masses légèrement differentes, mais c'est une bonne approximation.

On a encore les opérateurs d'echelle $I_\pm = I_x \pm iI_y$. La formalisme de l'isospin dit donc qu'une system peut être décrire comme $|\psi\rangle_{orb} \otimes |\psi_{spin}\rangle \otimes |\psi_{isospin}\rangle$.

13.1 Système de deux nucléons, le deuton

a) *Pour un systéme proton-neutron, pourquoi peut-on choisir des états propres du hamiltonien qui soient symétriques ou anti-symétriques?*

Car $[H, P_{12}] = 0$ pour l'interaction forte, les états propres de le hamiltonien sont aussi les états propres de P_{12} l'opérateur de la parité. Alors les fonctions d'onde symétriques et anti-symétriques sont les états propres de P_{12} et on est fini.

b) *Quelle est la symétrie de la fonction d'onde du deuton (noyau de deutérium)?*

On note que seulement le deuton est permis car $|pp\rangle, |nn\rangle$ ne sont pas des états liés. Car $I_\pm$ ne change pas la valeur propre de I^2 il ne change pas l'énergie de l'état. Alors $I_+ |nn\rangle \sim |np\rangle + |pn\rangle$, mais $|nn\rangle$ n'existe pas! Donc $|np\rangle + |pn\rangle$n'est *pas* le deuton, parce que le deuton existe.

Aussi, car $|nn\rangle$ est anti-symmétrique dans l'espace sans isospin (principe de Pauli, le neutron est un fermion), on voit que $|np\rangle + |pn\rangle$ devrait être symmétrique dans l'espace sans isospin, tel que si on applique I_+ on produit un état $|nn\rangle$ interdit par la principe de Pauli. Ca resout le problème parce que cet état $|np\rangle + |pn\rangle$ a une énergie pas égale à laquelle de $|nn\rangle$ qui est un état pas lié.

c) *Quel est alors le spin du deuton?*

Car $S = 0$ correspond à $|\pm\rangle - |\mp\rangle$ un fonction d'onde anti-symmétrique et $S = 1$ correspond aux fonctions d'onde symmétriques, on voit que le spin du deuton est forcément 1.

Si on veut savoir le moment magnétique du deuton, on a tout simplement $\vec{\mu}_d = \vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n = \mu_N (\gamma_p \vec{\sigma}_p + \gamma_n \vec{\sigma}_n)$ la somme des moments magnetiques du proton et du neutron.

13.2 Le formalisme de l'isospin pour deux nucléons

On est dans la base $|p\rangle, |n\rangle$, et $I_+ |n\rangle = |p\rangle$. Soit H un hamiltonien tel que $[H, I] = 0$.

a) *Quels sont les états d'isospin total $I = 0, 1$?*

Les quatres états sont alors $|nn\rangle, |pp\rangle, |np\rangle \pm |pn\rangle$. Comme ci-dessus, il y a trois états symétriques qui ont $I = 1$, c'est à dire $|pp\rangle, |nn\rangle, |pn\rangle + |np\rangle$ et un état $|np\rangle - |pn\rangle$ tel que $I = 0$.

b) *Quels sont les symmétries pour les systèmes de deux nucléons?*

Les états $|nn\rangle, |pp\rangle$ sont symmétriques par la parité de l'isospin, mais car n, p sont des fermions les fonctions d'onde dans l'espace sans l'isospin pour les deux est anti-symmétriques.

Les autres deux états $|np\rangle \pm |pn\rangle$ sont similaires. $|np\rangle + |pn\rangle$ est symmétrique par l'isospin et alors il est anti-symmétrique et la fonction d'onde dans l'espace est anti-symmétrique. Vice versâ pour $|np\rangle - |pn\rangle$.

c) *Quel est l'isospin du deuton?*

On a trouvé que le fonction d'onde du deuton est symmétrique dans l'espace sans isospin, et alors le deuton doit être $|np\rangle - |pn\rangle$ et donc l'isospin du deuton est $I = 0$. Alors on comprends pourquoi le deuton est le seul état lié de deux nucléons; les autres états ont $I = 1$ et ont alors les même énergies.

d) *Comment se traduit l'équivalence entre proton et neutron dans les interactions fortes dans ce formalisme?*

$[H, I] = 0$ et donc H n'agit pas sur le sous-espace de I. Donc le proton et le neutron sont équivalent aux interactions fortes.

13.3 Généralisation

a) *Les opérateurs d'isospin total commute avec le hamiltonien et l'opérateur d'échange de deux paricules. Quelle dégénérescence a-t-il un système d'isospin total I?*

On a $2I + 1$ états d'isospin total I.

b) *Les seuls états lié de trois nucléons sont le triton et l'hélium 3. Quel est leur isospin?*

On note que les états $|pnn\rangle, |npp\rangle$ sont les états liés permis, mais $|ppp\rangle, |nnn\rangle$ sont interdits. Avec trois nucléons, les seules isospins totals permis sont $1/2, 3/2$. On note que $|ppp\rangle, |nnn\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$. Alors, car si on prend $I_- |ppp\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|npp\rangle + |pnp\rangle + |ppn\rangle)$ on note que ceci devrait ne pas être l'hélium 3 comme avant (ceci ne peut pas correspondre à un état lié), et alors l'hélium 3 doit correspondre à $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Similairement, le triton correspond à $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$. Alors les deux ont le meme isospin total.

On veut maintenant écrire le fonction d'onde pour le triton. On n'utilise pas pour l'instant le formalisme d'isospin, mais $|\psi\rangle = |\psi_{orb}\rangle \otimes |\psi_{spin}\rangle$. On sait que $|\psi_{orb}\rangle$ doit être symmétrique car c'est l'état au moment cinétique minimum. Aussi, par la principe de Pauli on peut échanger les deux neutrons et on trouve que $|\psi_{spin}\rangle$ est anti-symmétrique. Et alors car le spin des deux neutrons doit être 0 (létat anti-symmétrique a un spin 0), le spin du triton a un spin $\frac{1}{2}$ le spin du proton. Alors le fonction d'ondu triton est forcèment

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|++-\rangle - |+-+\rangle) \tag{13.1}$$

On peut aussi munir le proton avec un $|-\rangle$ mais on utilise le $|+\rangle$ pour l'instant. On veut maintenant calculer le moment magnétique du triton, qui est simplement la somme des trois moments magnétiques. Mais car les deux neutrons sont dans un état anti-symmétrique leur contribution est nulle. Alors le moment magnétique total est seulement le moment magnétique du proton. En réalitè, le moment magnétique du triton est $2.98\mu_N$ et le momen magnétique du proton est $2.79\mu_N$ (μ_N est le moment magnétique d'un nucléon), et alors c'est pas mal! C'est pareil pour l'hélium 3.

Chapter 14

19/11/14 — PC8 — Le modele des quarks

Dans les années 1960 on a trouvé beaucoup des particules nouvelles, et on a essayé de les categoriser selon les quantités conservées Q, I, B, S. On a trouvé que $Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$ où $Y = B + S$ est l'hypercharge.

A 1964, Gell-Mann a découvert qu'il y a encore plus de symétrie que laquelle de $SU(2)$ sur les quarks u, d. Il a introduit une troisième quark, le quark étrange. Selon ça, il a expliqué toutes les baryons (qqq) et les mesons $q\bar{q}$. L'espace des mesons est alors de dimension 3×3, mais cet espace n'est pas irréductible. On a trouvé qu'il y a un espace de 8 dimensions qui est irréductible et un espace d'une seule dimension. Les huites particules sont les $(K^0, K^+), (\pi^-, \pi^0 + \eta, \pi^+), (K^0, \overline{K}^0)$ avec les étrangetés $1, 0, -1$ respectivement. La neuvième particule existe aussi, c'est le η'.

Les baryons produit un espace de dimension 27. On peut le decomposer en représentations irréductible comme $10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$. Les huites particules sont $(n, p), (\Sigma^-, \Sigma^0 + \Lambda, \Sigma^+), (\Xi^-, \Xi^0)$ avec les étrangetés $0, -1, -2$ respectivement. Et pour le groupe de dimension 10 Gell-Mann a prédit qu'il y a une dixième particule qu'on ne l'avait pas encore vu à ce moment-là, et c'était decouvert. Les autres représentations irréductible, $8 \oplus 1$ n'existent pas.

14.1 Lois de conservation des interactions fortes

Les interactions fortes conservent le nombre baryonique B et l'étrangeté S.

a) *Quels sont les modes de désintégrations possibles pour chaque particule?*

Supposons qu'on a une particule de masse M qui désintègre aux particules de masse m_i. C'est clair que $M \geq \sum_i m_i$.

Alors, les modes possibles pour la désintégration de Δ^+ sont $\Delta^+ \to p\pi^0[\pi^0], n\pi^+[\pi^0], p\pi^+\pi^-$. Les deux premières ont une rapport de branchement beaucoup plus grande que les autres trois car ils s'agissent seulement de deux particules. On peut le faire pour toutes les autres particules de Δ.

Les autres particules ne désintègrent pas par les interactions fortes, mais par les interactions faibles ou EM; par exemple, $n \to pe^-\overline{\nu}_e$ est une désintégration faible et $\pi_0 \to \gamma\gamma$ est une désintégration électromagnetique. Les désintégrations fortes a lieu beaucoup plus vite que les autres (10^{-24}s en comparaision avec 10^{-8}s).

b) *Quelle énergie minimale faut-il pour produire un $\pi^0, \pi^-, K^+, K^-, \overline{p}$ de deux protons?*

C'est clair que, soit T l'énergie cinétique, $T \geq \left(\sum_n m_n - 2M \right) c^2$.

Avec π^0, la réaction est $pp \to pp\pi^0$ et l'énergie cinétique minimum est 138MeV. Pour π^- la réaction est $pp \to pp\pi^+\pi^-$ avec le seuil énergétique 278MeV et de même pour toutes les autres.

14.2 Baryons de spin $\frac{3}{2}$

a) *Quelle est la symétrie de la fonction d'onde de spin pour un baryon de spin $\frac{3}{2}$?*

On trouve que $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |+++\rangle, \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \propto |-++\rangle + |+-+\rangle + |++-\rangle$. Les deux sont symétriques.

b) *Pourquoi le baryon de spin* $\frac{3}{2}$ *le plus léger devrait avoir la composition uds? Suppose qu'il n'y avait que les degrés de liberté d'espace et de spin.*

L'état le plus léger devrait être symétrique car c'est de moins d'énergie. Alors après la principe de Pauli les saveurs devrait être uds; sinon il faut avoir un fonction d'onde antisymétrique.

c) *Quels baryons de spin* $\frac{3}{2}$ *sont possibles si on introduit un degré de liberté nommé "couleur"?*

Le problème c'est qu'il y a plusieurs particules de spin $\frac{3}{2}$! La plus difficile est $\Delta^{++} = uuu$ qui est directement contre la principe de Pauli. Gell-Mann notait ça et il a introduit la couleur. Alors pour Δ^{+++} qui est complètement symétrique en l'espace et selon ce qu'on a dit ci-dessus est aussi symétrique dans l'espace de spin, il faut qu'il est complètement anti-symétrique en couleur. En faites, toutes particules, même les particules de spin $\frac{1}{2}$ sont complètement anti-symétrique en couleur; c'est la principe d'accouchement.

Alors maintenant toutes combinaisons des quarks sont possibles, et alors on peut appliquer l'opérateur d'isospin et reconstruire toutes les 10 états $uuu \to uud \to udd \to ddd$, $uus \to uds \to dds$, $uss \to dss$, sss, les familles $\Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$.

d) *Car* u, d *ont quasiment la même masse, quelles sont les masses de ces baryons?*

Chaque famille a la même masse.

14.3 Baryons de spin $\frac{1}{2}$

a) *Pourquoi les baryons de spin* $\frac{1}{2}$ *les plus légers ne peuvent pas avoir trois quarks identiques selons les hypothèses plus haut?*

Si c'est totalement symétrique dans l'espace et totalement antisymétrique dans le couleur, il devrait être totalement symétrique dans le spin aussi après la principe de Pauli. Mais si la partie du fonction d'onde du spin est symétrique, c'est un des états dont on a déjà parlé, soit $|+++\rangle$ soit $|-++\rangle + |+-+\rangle + |++-\rangle$ qui sont de spin $\frac{3}{2}$.

b) *Quelle condition doivent vérifier les* λ_i *ci-dessous?*

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \lambda_1 |-++\rangle + \lambda_2 |+-+\rangle + \lambda_3 |++-\rangle \tag{14.1}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

c) *Déterminer les états de spin possible pour un baryon contenant deux quarks identiques.*

Ca devrait être symétriques dans le spin car c'est déjà antisymétrique dans le couleur, alors

$$|\psi_{uud}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(|+-+\rangle + |-++\rangle - 2|++-\rangle\right)$$

d) *Déterminer les états de spin possible pour un baryon contenant trois quarks differentes.*

Il y a deux états qui satisfait ce demande, $\Sigma^0 = uds, \Lambda = uds$. On peut obtenir Σ^0 en appliquant l'opérateur d'isopin sur $\Sigma^{\pm}$ qui sont uus, dds respectivement. Ceci ne change pas le spin, et donc le fonction d'onde pour Σ^0 devrait être $|+-+\rangle + |-++\rangle - 2|++-\rangle$ comme plus haut.

Λ est dans son propre groupe, alors il devrait être orthogonal aux toutes autres particules. C'est simplement

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-+\rangle - |-++\rangle\right)$$

e) *Quelles dégénéresces résultent de la symétrie d'isospin?*

Tout eux ont la même masse s'ils ont le même spin et le même isospin.

f) *Calculer les moments magnétiques de ces baryons.*

Le moment magnétique d'une particule est la somme des moments magnétiques de ces constituant. On appelle $\mu_0 = \frac{q\hbar}{2M_p}$, alors on trouve que les moments magnétiques des quarks u, d sont $2\mu_0, -\mu_0$ respectivement.

On examine d'abord le proton. Donc (car $\mu_u^{(1)} = \mu_u^{(2)}$ parce que le fonction d'onde est symétrique, on peut le simplifier comme ci-dessous)

$$\frac{(\langle +-+| + \langle -++| - 2\langle ++-|)\left(2\mu_u^{(1)} + \mu_d^{(3)}\right)(|+-+\rangle + |-++\rangle - 2|++-\rangle)}{6} = \frac{(2\mu_u + \mu_d) + (-2\mu_u + \mu_d) + 4\,(2\mu_u - \mu_d)}{6} \tag{14.2}$$

$$= \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} = 3\mu_0 \tag{14.3}$$

Le neutron est seulement légèrement différent; on échange $u \leftrightarrow d$ et on trouve $\mu_n = \dfrac{4\mu_d - \mu_u}{3} = -2\mu_0$.En réalité, les moments magnétiques sont $2.79, -1.91$.

Chapter 15

26/11/14 — Moment magnétique du Λ

Doing this one in English for a change!

15.1 Moment magnétique dans le modèle des quarks

We start with the magnetic moment of $\Lambda = uds$, which we got last PC had spin wavefunction depending on its own spin

$$|\Lambda, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|- + +\rangle - |+ - +\rangle\right) \tag{15.1}$$

$$|\Lambda, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|- + -\rangle - |+ - -\rangle\right) \tag{15.2}$$

We recall that the Hamiltonian is given $H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -B\left(\mu_u S_{1,z} + \mu_d S_{2,z} + \mu_s S_{3,z}\right)$, the μ the magnetic moments. We then ask what the matrix elements of H are in the above basis, so we bash (for example)

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda, +| H |\Lambda, +\rangle &= -\frac{B}{2}\left(\langle - + +| - \langle + - +|\right)\left(\mu_u S_{1,z} + \mu_d S_{2,z} + \mu_s S_{3,z}\right)\left(|- + +\rangle - |+ - +\rangle\right) && (15.3)\\
&= -\frac{B}{2}\left(\langle - + +| - \langle + - +|\right)\frac{\hbar}{2}\left[\left(\mu_d - \mu_u\right)\left(|- + +\rangle + |+ - +\rangle\right) + \mu_s\left(|- + +\rangle - |+ - +\rangle\right)\right] && (15.4)\\
&= -\frac{B\hbar}{2}\mu_s && (15.5)\\
\langle \Lambda, -| H |\Lambda, +\rangle &= 0 && (15.6)
\end{aligned}$$

This second one we can skip the calculation since we already calculated $H|\Lambda, +\rangle$ and we can easily examine and find that stuff is orthogonal. We can do similarly to take care of the rest of the matrix elements.

15.2 Production de Λ polarisés

Λ particles are produced by bombarding a Beryllium target with protons, such that $p + Be \to \Lambda +??$.

a) *We observe a very narrow cross section. Why?*

   Relativity, because stuff is ultra-relativistic, so what would have looked like a uniform distribution gets contracted into a small cone.

b) *Show that Λ produced has a non-zero average polarization.*

   Recall that parity is conserved by strong interactions, and this definitely completely obviously trivially shows that $\langle S_x\rangle \neq 0$... Basically, polarization is nonzero only in the x direction because parity about x axis interchanges y, z, and so all non-zero polarization must be carried by the x.

c) *Put Λ through a magnetic field $\vec{B} = B\hat{y}$. How does the polarization evolve with time?*

   Recall $\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu\vec{S} \times \vec{B} = (-\mu B S_z, 0, \mu B S_x)$. We go to complex notation $S = S_z + iS_x$ and we find

$$S(t) = S(0)\exp\left[-i\mu\int_0^t B\, dt'\right] \tag{15.7}$$

   We can then put this into IVP general solution form but I'm too lazy.