

Astrophysique Stellaire  
Amphi Cauchy M 1030-1200, 1330-1530  
Frédéric Daigne, Roland Lehoucq CPHT-X

Yubo Su

# Contents

<b>1</b>	<b>Idées essentiel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Resumé du livre</b>	<b>4</b>
2.1	Description des étoiles . . . . .	4
2.2	Formation des étoiles . . . . .	4
2.2.1	Le milieu interstellaire . . . . .	4
2.2.2	Formation Stellaire . . . . .	4
<b>3</b>	<b>14/09/14 — Introduction, des petits trucs</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>14/09/14 — PC1, Problèmes concernant la radiation</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>22/09/14 — Le milieu interstellaire, La formation des etoiles</b>	<b>10</b>
5.1	Le milieu interstellaire . . . . .	10
5.2	La formation des étoiles . . . . .	11
<b>6</b>	<b>22/09/14 — PC2</b>	<b>12</b>
6.1	Assombrissement centre-bord, “limb darkening” . . . . .	12
6.2	Sphère de Strömgren . . . . .	13
<b>7</b>	<b>29/09/14 — La stabilité des étoiles.</b>	<b>15</b>
7.1	Qu’est-ce que c’est une étoile? . . . . .	15
7.2	Théorème du viriel . . . . .	15
7.3	Modèle stellaire . . . . .	16
7.4	Hélioséismologie et astroséismologie . . . . .	16
<b>8</b>	<b>29/09/14 — PC3</b>	<b>17</b>
8.1	Raie à 21cm de l’hydrogène . . . . .	17
8.2	L’effet de Maser . . . . .	18
<b>9</b>	<b>06/10/14 — Physique Nucléaire</b>	<b>19</b>
9.1	Desintégration nucléaire . . . . .	19
9.2	Section efficace . . . . .	20
<b>10</b>	<b>06/10/14 — PC4</b>	<b>21</b>
10.1	Physique Nucléaire générale . . . . .	21
10.2	Age du système solaire . . . . .	22
<b>11</b>	<b>13/10/14 — Makeup:Physique Nucléaire, la fusion (en anglais)</b>	<b>24</b>
11.1	Calculating quantum cross section . . . . .	24
11.2	Thermonuclear fusion . . . . .	24
<b>12</b>	<b>03/11/14 — Fusion dans les étoiles</b>	<b>25</b>
<b>13</b>	<b>03/11/14 — PC 6 — Fusion thermonucléaire</b>	<b>26</b>
13.1	Fusion thermonucléaire au cœur du soleil . . . . .	26
13.2	Processus $3\alpha$ . . . . .	27

<b>14</b>	<b>10/11/14 — Makeup: Les naines blanches</b>	<b>28</b>
14.1	Un gaz fermionique dégénéré . . . . .	28
14.1.1	Gaz de photons, ou gaz bosonique . . . . .	28
14.2	Les naines blanches . . . . .	29
<b>15</b>	<b>10/11/14 — PC 7 — Supernovae, naines brunes</b>	<b>30</b>
15.1	Supernovae de Type 1A . . . . .	30
15.2	Naines brunes . . . . .	30
<b>16</b>	<b>17/11/14 — PC 8 — Neutronisation, Interaction nucléaire dans les étoiles à neutrons</b>	<b>32</b>
16.1	Neutronisation . . . . .	32
16.2	Interaction nucléaire dans les étoiles à neutrons . . . . .	34
<b>17</b>	<b>24/11/14 — PC 9 — Statistique nucléaire</b>	<b>35</b>
17.1	Equilibre statistique nucléaire . . . . .	35
17.2	Nucléosynthèse primordiale . . . . .	35

# Chapter 1

## Idées essentiel

- A l'angle d'une seconde, les deux jambes du triangle sont 1UA et 1pc.
- Equation de transfert  $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$  ou avec  $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$  on a  $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$ .  $j$  c'est la source et  $I$  la luminosité.
- Selon ci-dessus, épaisseur optique  $\tau_\nu = \int \alpha_\nu ds$ .
- $x = \frac{P_F}{mc} = (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{\hbar c}{mc^2} \right) n^{1/3}$ . Si  $x \ll 1$  on est non-relativiste, et si  $x \gg 1$  on est ultra-relativiste.
- Le théorème du viriel  $P = -\frac{E_g}{3V} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}$ .
- La pression pour un gaz non-relativiste est  $P = \frac{K}{m} n^{5/3}$  et pour un gaz ultra-relativiste  $P = \frac{K}{m} n^{4/3}$ . Aussi, pour les deux cas ce sont  $P = \frac{2}{3}u, \frac{1}{3}u$  respectivement.

# Chapter 2

## Resumé du livre

### 2.1 Description des étoiles

On mesure la distance des étoiles en *parsec*, la distance ou la variation annuelle d'une étoile est une seconde d'arc. Il fait  $1\text{pc} = 206265\text{ua}$  unités astronomiques.

Les masse des étoiles sont mesurer en masse solaire  $1M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}\text{kg}$ . On le déduit pour les étoiles du systeme binaire en mesurant la période de révolution et le demi-grand axe  $a$  de l'orbit, après qu'on peut calculer la masse par la troisième loi de Kepler.

On appelle la magnitude apparente la quantité  $m = -2.5 \log \frac{F}{F_0}$  la luminosité des étoiles.  $F$  est le flux lumineux et  $F_0$  est un flux de référence quelconque. En prenant l'étoile Véga comme  $F_0$ , le Soleil a une magnitude apparente de  $m = -26.7$  et les objets les plus faibles ont  $m = 31.0$ . L'oeil nu ne peut pas voir plus faible que  $m = 6.0$ .

Les étoiles rayonnent selon deux loi. La loi de Stefan  $\phi = \sigma T^4$  donne l'intensité du flux de l'étoile. La loi de Wein  $\lambda_0 T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  donne le maximum du flux comme fonction de la longueur d'onde.

Les étoiles se classifient par 7 catégories O B A F G K M en ordre de la temperature décroissant, chaque types comporte 10 subdivisions numérotées 0 à 9.

Si on place les étoiles sur une diagramme de la magnitude absolue  $M$  en fonction de la couleur, on trouve qu'ils ne se distribuent pas n'importe comment mais de la forme d'un  $\lambda$  tournée. Les deux groupes sont la séquence principale (qui forme une diagonale décroissant) et les [super-]géantes au-dessus de cette séquence. On appelle ce diagramme le *diagramme de Herzsprung-Russel*.

L'intérieure des étoiles est restée longtemps une mystère, mais récemment on a commencé d'étudier les oscillations de la surface du Soleil avec les satellites comme Kepler. Ca nous donne des détails de l'intérieure du Soleil.

### 2.2 Formation des étoiles

#### 2.2.1 Le milieu interstellaire

On parle d'abord du milieu interstellaire, duquel toutes étoiles viennent. En première approximation il s'agit de trois phase en équilibre, la phase froide, la phase chaude, et la phase très chaude. Le chauffage du milieu interstellaire est dû à l'irradiation par les étoiles, et le refroidissement à la conversion d'énergie cinétique en photons.

Soit  $P_{eq}$  la pression où les deux processus sont en équilibre, la stabilité de l'équilibre entre les deux processus dépend  $\frac{dP_{eq}}{dn}$ . Si  $\frac{dP}{dn} < 0$ , alors ça veut dire que si on fait une petite perturbation  $\delta n < 0$ ,  $\delta P_{eq} > 0$  et on se trouve dans une région où le chauffage domine. Ca augment encore  $P_{eq}$  et on trouve que l'équilibre n'est pas stable par cet effet.

#### 2.2.2 Formation Stellaire

Aux échelles astronomiques, la gravitation domine. Un corps de la densité  $\rho$  s'effond au temps caractéristique  $\tau = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho}}$ . Si l'étoile ne s'effond pas, il faut qu'il y aie une force qui réagit contre la force de gravitation; on sait que c'est la pression interne. On va analyser dans quelles conditions les étoiles forment.

Le temps caracteristique de la force de pression interne est donné par  $t_s = \frac{R}{c_s}$  où  $R$  est le rayon du système et  $c_s$  est la vitesse du son dans le milieu. Lorsque  $\tau \gg \tau_s$  on trouve l'effondrement et lorsque  $\tau_s \ll \tau$  on trouve que la pression réagit plus vite que la gravitation et on ne trouve pas l'effondrement. Donc l'égalite  $\tau_s = \tau$  définit une taille critique  $R_c = \frac{c_s}{\sqrt{4\pi G \rho}}$  au-delà de laquelle l'effondrement peut avoir lieu.

Encore plus précisément, on étudie l'effondrement par les lois de la dynamique des fluides. On commence avec un système en équilibre et on le perturbe et calcule la stabilité de cette perturbation. On trouve l'équation qui s'agit de cette perturbation, qu'on prend comme une onde plane, est

$$\frac{d^2\delta_k}{dt^2} + (c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0) \delta_k = 0 \quad (2.1)$$

Lorsque  $(c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho) > 0$  on trouve  $\delta_k$  reste en forme de l'onde plane. Par contre si  $(c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho) < 0$  on trouve  $\delta_k$  prend la forme des exponentielles réelles et la perturbation est donc instable. Comme ça on trouve la masse et la taille de Jeans, plus desquelles on trouve l'effondrement du milieu interstellaire et la formation stellaire.

## Chapter 3

# 14/09/14 — Introduction, des petits trucs

On a besoin des télescopes de plus grande taille pour beaucoup de raisons: collecter plus de lumière, baisser la diffraction (les disques d’Airy, par l’équation  $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ).

Comment est-ce que la lumière est atténuée? Par l’équation

$$dI_\lambda = -\alpha_\lambda I_\lambda ds = -\rho \kappa_\lambda I_\lambda ds \quad (3.1)$$

ou  $\alpha_\lambda$  est le coefficient d’absorption et  $\kappa_\lambda$  est l’opacité. Deux procédés contribuent à l’opacité, l’absorption et la diffusion (ou le photon change sa direction). Soit donc  $\tau_\lambda$  la “optical depth”

$$\tau_\lambda = \int_C \alpha_\lambda ds \quad (3.2)$$

Les objets avec  $\tau_\lambda \ll 1$  sont transparents, et lesquelles avec  $\tau_\lambda \gg 1$  sont opaques.

On peut construire une quantité luminosité apparente  $m = -2.5 \log_{10} \frac{E}{E_0}$  (souvent  $E_0$  c’est la magnitude de l’étoile Vega). Par exemple, pour le Soleil  $m = -26.7$ , la lune  $m = -12.9$ , limite à l’œil nu  $m = +6.0$ .

A cause des perturbations atmosphériques les images des télescopes ne sont pas bien; on peut faire des “adaptive optics” pour l’améliorer. On déforme les miroirs en temps réels pour annuler ces perturbations. On utilise un laser pour créer une étoile artificielle dont on peut déterminer les déformations de l’atmosphère en temps réels.

A cause du mouvement de la Terre les étoiles bougent au ciel; ce mouvement angulaire peut être mesurer, et on l’appelle le “parallaxe.”

Il faut observer les mêmes galaxies en beaucoup de longueur d’ondes. Par exemple, quand on regarde la galaxie Andromède en infra-rouge, rayons X, et la lumière visible, on voit beaucoup de différences!

La densité spectrale des photons est écrite comme

$$n(\nu) d\nu = 2 \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (3.3)$$

La dernière partie est la distribution de Bose, parce que les photons sont des bosons. La deuxième partie est la densité des états  $\frac{4\pi\rho^2 d\rho}{h^3}$  dans l’espace de phase, ou  $\rho = \frac{h\nu}{c}$ . Enfin le 2 c’est parce que les photons ont 2 polarisations.

On peut aussi calculer la densité d’énergie  $u = \int_0^\infty h\nu \times n(\nu) d\nu \propto T^4$ .

Selon le spectre d’absorption des étoiles on peut déduire les éléments chimiques qui sont présentes dans les étoiles. En comparant les lignes d’absorption et le spectre d’émission (dont on peut déduire la température de l’étoile) on peut déterminer quels éléments sont présents dans les étoiles de quelle température.

Si on écrit l’énergie d’un système des  $N$  protons et électrons, on a (si on écrit  $d$  pour la distance caractéristique entre un proton et un électron)

$$E(N, d) = N \left( \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{d} \right) \quad (3.4)$$

Mais nous savons que  $p_p \sim p_e \sim \frac{\hbar}{d}$ , et parce que  $m_e \ll m_p$  on supprime la première partie de l’expression et on a

$$E(N, d) = N \left( \frac{1}{2m_e} \left( \frac{\hbar}{d} \right)^2 - \frac{e^2}{d} \right) \quad (3.5)$$

Si on cherche le minimum de cette énergie, nous trouvons que  $d = a_0$  le rayon Bohr! Aussi, le minimum  $E_0(N, d) = -N (\varepsilon_0 = 13.6\text{eV})$  et donc on a tous les resultats de mécanique quantiques.

On peut faire les mêmes calcul pour l'énergie gravitationnelle et on trouve que  $E_0(N) = -N^{7/3} \left( \frac{Gm_p^2}{e^2} \right)^2 \varepsilon_0$ , et donc nous trouvons la limite où la force gravitationnelle peut dominer la force electrostatique,  $N \sim 10^{54}$ .



## Chapter 4

# 14/09/14 — PC1, Problèmes concernant la radiation

### 1) Bilan Radiatif du Corps Humain

- i) *Faites votre bilan radiatif dans une pièce chauffée à 20° C. Vous supposerez que votre corps rayonne comme un corps noir dont la température est celle de la peau, soit environ 27° C.*

On calcule la différence du flux entre le corps et la pièce, et donc  $\Delta \mathcal{P} = \sigma ((293^\circ\text{K})^4 - (300^\circ\text{K})^4) = \boxed{-41.4\text{W m}^{-2}}$ .

- ii) *Quelle est la puissance nette que vous rayonnez?*

Si on fait l'assumption que l'aire du corps est  $\sim 2\text{m}^2$  on arrive à  $\boxed{\Delta P \approx -80\text{W}}$ .

### 2) Température d'équilibre de la terre et des platètes.

- i) *En ignorant l'atmosphère de la Terre écrire la relation liant la luminosité Soleil  $L_\odot$  à sa température  $T_\odot$  et à son rayon  $R_\odot$ . En déduire le flux reçu par la Terre située à la distance  $D$ .*

Nous savons que  $\mathcal{P}_\odot = \sigma T_\odot^4$  et donc  $L_\odot = \mathcal{P}_\odot \cdot (4\pi R_\odot^2) = \boxed{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}$ . Donc, si on appelle  $D = 1\text{UA}$  (unité astronomique) on sait que le flux reçu par la Terre est  $\Phi_E = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} = \sigma T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{D^2}$ .

- ii) *La Terre réfléchit la fraction  $\alpha = 0.3$  du rayonnement solaire incident (on appelle  $\alpha$  l'albédo). Trouver la relation qui, à l'équilibre, lie la température moyenne de la Terre  $T_E$  à celle du Soleil.*

On commence en écrivant  $P_E = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4$  la puissance de radiation de la Terre. Aussi, on sait que l'aire de la Terre qui reçoit de la radiation du Soleil est  $\pi R_E^2$  et donc  $P_{abs} = (1 - \alpha)\pi R_E^2 \Phi_E$ . On les met égales comme

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = (1 - \alpha)\pi R_E^2 \Phi_E \quad (4.1)$$

$$T_E^4 = \frac{(1 - \alpha)\pi T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{D^2}}{4\pi} \quad (4.2)$$

$$T_E \approx 254^\circ\text{K} \quad (4.3)$$

C'est moins que la vraie température 288°K.

- iii) *Dotons maintenant la Terre d'une atmosphère transparente à la lumière visible mais opaque à la lumière infrarouge. Écrire le bilan radiatif du système Terre+atmosphère et en déduire la nouvelle température d'équilibre de la planète.*

On a maintenant deux équilibres à calculer. Pour l'atmosphère et la Terre respectivement

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = 2 \times 4\pi R_E^2 \sigma T_{atm}^4 \quad (1 - \alpha)\pi R_E^2 \Phi_E + 4\pi R_E^2 \sigma T_{atm}^4 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 \quad (4.4)$$

$$(1 - \alpha)\pi R_E^2 \Phi_E + \frac{4\pi R_E^2 \sigma T_E^4}{2} = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 \quad (4.5)$$

$$2\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = (1 - \alpha)\pi R_E^2 \Phi_E \quad (4.6)$$

$$T_E^4 = \frac{(1 - \alpha) T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{D^2}}{2} \quad (4.7)$$

$$T_E \approx 302 \quad (4.8)$$

(2× à droite de l'équation (4.4) parce qu'il rayonne dans deux directions, à la Terre et au Soleil)

<sup>1</sup>On appelle la taille angulaire du Soleil  $\alpha$  le "apparent radius." C'est très naturelle de définir ça parce que ça apparaît dans l'équation.

3) Estimation de la distance de Sirius par la méthode de Gregory

- i) *Exprimez le flux que Jupiter reçoit du Soleil. En déduire la puissance totale que Jupiter émet vers l'espace en supposant que la planète est parfaitement réfléchissante*

On peut simplement prendre le résultat de la problème précédant,  $P_J = \pi R_J^2 \frac{L_\odot}{4\pi D_J^2}$ .

- ii) *Exprimez maintenant le flux lumineux que la Terre reçoit de Jupiter. En déduire une égalité qui vous permettra d'obtenir la distance de Sirius.*

Soit  $D_{EJ}$  la distance entre la Terre et Jupiter. Donc le flux que la Terre reçoit de Jupiter est

$$\Phi_{EJ} = P_J \frac{R_E^2}{4D_{EJ}^2} \quad (4.9)$$

$$= R_J^2 \frac{L_\odot}{4D_J^2} \frac{R_E^2}{4D_{EJ}^2} \quad (4.10)$$

$$= \pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \frac{R_J^2}{D_J^2} \frac{R_E^2}{4D_{EJ}^2} \quad (4.11)$$

Maintenant en assumant que la luminosité de Sirius et la même que le Soleil, on peut mettre égal les deux expressions

$$\sigma T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{D_S^2} = \pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4 \frac{R_J^2}{D_J^2} \frac{R_E^2}{4D_{EJ}^2} \quad (4.12)$$

Je n'ai pas fini cette exercice mais la réponse est 83190UA.

4) Performance de détection selon la taille du collecteur de lumière. La magnitude limite visible à l'oeil nu est  $m_0 = 6$ .

- i) *Rappelez que  $m = -2.5 \log_{10} \frac{\Phi}{\Phi_0}$ . Calculez le flux reçu d'une étoile de la magnitude  $m_0$  sachant que la magnitude apparente du Soleil est de  $m_\odot = -26.72$ .*

on sait que  $m_0 - m_\odot = -2.5 \log_{10} \frac{\Phi_0}{\Phi_\odot} = 6 + 26.72 = 32.72$ . Donc on écrit

$$\log_{10} \frac{\Phi_\odot}{\Phi_0} = 13.1 \quad (4.13)$$

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_\odot}{10^{13.1}} \quad (4.14)$$

Si on utilise  $\Phi_\odot = \Phi_E = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} \approx 1358.12 \text{ W m}^{-2}$  on voit que  $\Phi_0 \approx 1.08 \times 10^{-10} \text{ W m}^{-2}$ .

- ii) *Quelle est la puissance nette que reçoit l'oeil?*

La diamètre de la pupille est d'environ  $6 \text{ mm} = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$  et donc

$$P_0 = 1.08 \times 10^{-10} (6 \times 10^{-3})^2 \pi \quad (4.15)$$

$$= 1.22 \times 10^{-14} \text{ W} \quad (4.16)$$

- iii) *En supposant que le seul paramètre influant  $m_0$  est le diamètre du collecteur, exprimer  $m_0(D)$  en fonction de ce diamètre  $D$ .*

Notez que  $m_0(D) = -2.5 \log_{10} \frac{P_0/\pi D^2}{\Phi_0}$ . Si on l'exprime en fonction de  $m_0^{oeil}$  on obtiens

$$m_0(D) = -2.5 \left( \log_{10} \frac{P_0/\pi D^2}{P_0/\pi d_{oeil}^2} \right) + m_0^{oeil} \quad (4.17)$$

$$= 5 \log_{10} \frac{D}{d_{oeil}} + m_0^{oeil} \quad (4.18)$$

# Chapter 5

## 22/09/14 — Le milieu interstellaire, La formation des étoiles

### 5.1 Le milieu interstellaire

Dans l'atmosphère, la densité des particules est  $10^{19}$  ("dix puissance dix-neuf"), et laquelle entre les étoiles est  $10^{-3} - 10^6$ . On dit  $C_{IV} = C^{3+}$ ,  $O_{III} = O^{2+}$ . Parce qu'il y a beaucoup de rayons jeté par les Soleil qui interagit avec le milieu interstellaire, il y a beaucoup de phénomène qu'on peut décrire; on va les parler tout simplement!

Il y a trois catégories de température dans le milieu interstellaire

- Froid — Neutre, beaucoup de molécules et de poussière (*dust*), température  $10 - 100K$ .
- Chaud — Gaz ionisé ou gaz neutre, des nuages de matière, température  $8000K$ .
- Brûlant — Très ionisé, produit par les supernovae, température  $10^6K$ .

A l'équilibre de pression, le milieu interstellaire froid et au centre, ensuite lequel chaud neutre, ensuite lequel chaud ionisé, et finalement lequel brûlant. En réalité c'est beaucoup plus complexe! Il y a beaucoup d'équilibres qui se battent; aucun ne domine! Par exemple, à l'équilibre de pression on a des chauffages et des refroidissements entre les différents milieux interstellaires. Quelques mécanismes:

- Chauffage — absorption des photons UV, ionisation
- Refroidissement  $T < 10000K$  — excitation de  $C_{II}$  par des collisions avec des électrons et émission des photons
- Refroidissement  $T > 10000K$  — excitation ou ionisation de  $H_I$  par des collisions avec des électrons et émission des Lyman  $\alpha$

Nous commençons la solution avec l'équation du transfert radiatif

$$\frac{dI_\nu}{dx} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (5.1)$$

On change les variables et appelle  $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$  la fonction de source. À l'équilibre, la source est la fonction de Planck

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (5.2)$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau')e^{-(\tau_\nu - \tau')} d\tau' \quad (5.3)$$

La première terme est la source d'arrière-plan qui n'est pas absorbée, et la deuxième est l'émission et l'adsorption dans le nuage de la matière. En 1D, la solution est  $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ .

Le rayonnement de CMB est presque exactement un "blackbody" de  $2.725K$ .

Le milieu interstellaire est adiabatique au rayonnement UV, mais il est diaphane au rayonnement infrarouge. On ne peut pas observer les rayons gamma, et les rayons-X sont très difficile à réfléchir.

## 5.2 La formation des étoiles

Considérer une nuage sphérique de masse  $M$ ; une particule sur la surface tombe par l'équation  $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$ , et après trouver la solution on trouve qu'il tombe d'un "timescale"  $\tau \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}}$ .

Il y a trois sources de pression interne: température, magnétisme, et turbulence. Toutes les trois décroissent comme  $M^{-1}$  ou  $M^{-2}$ , et donc plus lourd que l'étoile, moins fort les autres sources de pression. C'est naturel qu'il y a une masse maximum ou  $\rho$  la densité accroît exponentiellement.. En faisant beaucoup des assumptions on peut calculer cette masse, la masse de Jean.

Cette masse est  $\sim 10^8 M_\odot$ . Si on est plus lourd que ça, on collapse. Pendant la collapse, la masse de Jean décroît, et à cause de ça beaucoup des petites pièces forment. Eventuellement, la nuage devient adiabatique à la radiation, et le système devient fermée.

# Chapter 6

## 22/09/14 — PC2

Noter qu'un parsec est la distance ou la parallax est un arcsecond,  $\approx 206265 \text{UA} \approx 3 \times 10^{18} \text{cm} \approx 3.26 \text{LY}$ . Noter qu'un arcsecond est  $\frac{1}{60}$  d'une minute qui est  $\frac{1}{60}$  d'un degré.

### 6.1 Assombrissement centre-bord, “limb darkening”

- i) *On construit un premier modèle simple pour expliquer cette phénomène: l'émission est en partie absorbée par une atmosphère d'épaisseur optique  $\tau_\nu$  dans la direction radiale. Calculer  $I(\theta)$  en assumant que le Soleil rayonn à une intensité  $I_0$ .*

A un angle  $\theta$  de la ligne de visée la rayon traverse une distance augmentée par  $\frac{1}{\cos \theta}$  dans l'atmosphère, et donc c'est une diminution exponentielle, comme  $I = I_0 e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}}$ . C'est évidemment pas correcte; c'est pas la diminution qu'on observe.

- ii) *On raffine le modèle précédent en considérant le milieu solaire comme un milieu continu dans lequel émission et absorption ont à la fois lieu. Qualitativement, est-ce que ça résout la problème?*

Il faut au premier noter qu'il y a une limite de profondeur optique. Donc, la plus  $\theta$ , la plus froide est la limite de la profondeur optique, et on retrouve l'assombrissement centre-bord.

- iii) *Ecrire l'équation du transfert du rayonnement pour  $I(\tau_\nu, \cos \theta)$ . On définit  $d\tau_\nu = -\alpha_\nu dr$ , soit  $dr$  la épaisseur de la couche infinitésimale. Noter que  $s$  et la direction radiale et  $r$  est la direction vers l'observateur.*

On commence avec

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds + j_\nu ds \quad (6.1)$$

$$= -\alpha_\nu ds (I_\nu - S_\nu) \quad (6.2)$$

$$= -\alpha_\nu \frac{dr}{\cos \theta} (I_\nu - S_\nu) \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

ou on utilise souvent  $S_\nu = B_\nu(T)$  la radiation d'un corps noir. On continue en écrivant une intégrale

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{I_\nu}{\cos \theta} - \frac{S_\nu}{\cos \theta} \quad (6.5)$$

On utilise un “integrating factor”  $e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}}$  et obtient

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left( I_\nu e^{-\tau'/\cos \theta} \right) d\tau = \int_{\tau_\nu}^{\infty} -\frac{S_\nu(\tau')}{\cos \theta} e^{-\tau'/\cos \theta} d\tau' \quad (6.6)$$

$$I_\nu = \int_{\tau_\nu}^{\infty} \frac{S_\nu(\tau')}{\cos \theta} e^{(\tau_\nu - \tau')/\cos \theta} d\tau' \quad (6.7)$$

On voit que plus profonds que sauf une profondeur mince sur la surface le Soleil est adiabane.

- iv) On veut utiliser  $S_\nu = B_\nu(T)$ , mais on a une fonction de  $\tau$ ! D'après Eddington, on prend  $S_\nu = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$ . Calculer  $I_\nu(0, \cos \theta)$

$$I_\nu(0, \cos \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^\infty (a_\nu + b_\nu \tau') e^{-\tau'/\cos \theta} d\tau' \quad (6.8)$$

$$= \int_0^\infty (a_\nu + b_\nu u \cos \theta) e^{-u} du \quad (6.9)$$

$$= a_\nu + b_\nu \cos \theta \quad (6.10)$$

- v) Il est insensé de parler de la “temperature” du Soleil; il est seulement possible de définir une “temperature effective” à laquelle un corps noir aura la même flux spectral que le Soleil. On déduit le flux spectral du Soleil  $F_\nu$  et compare à la valeur pour les corps noir  $F_\nu = \pi B_\nu(T_{eff})$ .

$$F_\nu = \int_0^{\pi/2} (a_\nu + b_\nu \cos \theta) \cos \theta 2\pi (-d(\cos \theta)) \quad (6.11)$$

$$= 2\pi \int_0^1 (a_\nu + b_\nu u) u du \quad (6.12)$$

$$= \pi \left( a_\nu + \frac{2}{3} b_\nu \right) = \pi S_\nu \left( \frac{2}{3} \right) \quad (6.13)$$

et donc l'épaisseur optique du Soleil est  $\tau = \frac{2}{3}$ .

Ca montre que l'assombrissement centre-bord du Soleil à  $\tau_\nu = 0$  est le même qu'un corps noir avec  $\tau = \frac{2}{3}$ .

- vi) Il faut noter que  $I_\nu \sim \frac{2}{3} + \cos \theta$  est très proche aux données vraies.

## 6.2 Sphère de Strömgren

On modélise la nébuleuse de la Rosette comme une sphère d'hydrogène ionisé. Il y a une jeune étoile au centre qui émet  $S_*$  photons par seconde, qui ionisent l'hydrogène selon  $H + h\nu \rightarrow p + e$ . Soit  $n_H, n_p, n_e$  les densités volumétriques.

- i) A partir de la conservation de la matière et de la charge, donner deux relations entre  $n_H, n_p, n_e$ .  $n_p = n_e$  et  $n_0 = n_p + n_H$  est constante.
- ii) Ecrire l'évolution de la densité d'hydrogène neutre dans un volume de gaz situé à la distance  $r$  de l'étoile.

On commence avec  $\frac{dn_H}{dt} = -\sigma_0 n_H J + \beta n_p n_e$  avec  $J$  le flux des photons et  $\beta$  la probabilité de recombinaison. On sait que  $J = \frac{S_*}{4\pi r^2}$ .

A l'équilibre  $\sigma_0 n_H \frac{S_*}{4\pi r^2} = \beta n_p n_e$ . On appelle  $n_0 = n_H + n_p = n_H + n_e, x = \frac{n_H}{n_0}$  et alors

$$\sigma_0 n_0 x \frac{S_*}{4\pi r^2} = \beta n_p^2 \quad (6.14)$$

$$= \beta (n_0 - n_H)^2 \quad (6.15)$$

$$= \beta n_0^2 (1 - x)^2 \quad (6.16)$$

Comme ça on peut calculer  $x$ .

- iii) Calculer la taille ou l'ionisation et la recombinaison sont équilibrées.

On voit que les échelles de temps pour l'ionisation et la recombinaison sont  $\frac{1}{\sigma_0 J}, \frac{1}{\beta n_e}$  respectivement. Car  $J \sim r^{-2}$ , on peut les mettre égaux et obtenir la valeur de  $R_S$  où l'ionisation et la recombinaison procèdent à la même taux; on appelle  $R_S$  le rayon de Strömgen. A  $r < R_S$  on voit que l'hydrogène est pour la plupart ionisé, et à  $r > R_S$  on obtient l'hydrogène neutre.

A  $R_s$  on doit aussi avoir  $S_* = \frac{4}{3}\beta n_e n_p \pi R_s^3$  car on doit recombiner la même nombre des hydrogènes qu'on détruit.

- iv) *On s'intéresse à la propagation d'ionisation. Suppose qu'on a une étoile au centre d'une sphère pleine des hydrogènes neutres. Calculer  $R(t)$ , le rayon du sphère d'ionisation.*

Pendant un temps  $dt$  on n'a que  $S_* dt$  photon, et il faut ioniser  $4\pi r_i^2 dR n_0$  molécules d'hydrogène. Donc, sans recombinaison on a  $R(t) = \left( \frac{3}{4\pi} \frac{S_* t}{n_0} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

- v) *Et avec la recombinaison?* On a simplement une équation différentielle  $S_* dt = 4\pi R^2 dR n_0 + \beta n_e n_p \frac{4}{3} \pi R^3(t) dt$ .

# Chapter 7

## 29/09/14 — La stabilité des étoiles.

Toutes les choses qui sont chaud brillent; les humains brillent à l'infrarouge, plus précisément à longueur d'onde  $10\mu\text{m}$ .

### 7.1 Qu'est-ce que c'est une étoile?

Que veut dire une étoile? C'est une grande boule de gaz, avec une masse mini et maxi qu'on peut calculer. La composition (par masse) est  $\sim 73,5\%$  hydrogène,  $24,9\%$  hélium et  $1,6\%$  les autres (comme carbone et fer).

On peut créer un diagramme de luminosité versus l'inverse de la température, qui s'appelle un diagramme de *Hertzsprung-Russell*. Rappelons que  $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ . Sur ce diagramme, il y a la séquence principale dans laquelle il y a beaucoup d'étoiles, mais il y a aussi des groupes des naines blanches, et les différents types de géants.

### 7.2 Théorème du viriel

Pour déterminer la structure des étoiles on commence en prenant les étoiles comme sphériques. C'est pas toujours le cas, par exemple Achernar qui tourne très vite ( $\sim 225\text{km/s}$ ). Mais si on assume la sphère on obtient que

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \qquad dM = 4\pi r^2 dr \rho(r) \qquad (7.1)$$

à cause de la gravité. Aussi, la différence de pression doit balancer le poids, comme

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r) \qquad (7.2)$$

Si la pression disparaît, l'étoile va s'effondrer! On peut calculer l'échelle de temps que cette effondrement va prendre par  $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{G}{r^2} \frac{4}{3}\pi r_0^3 \bar{\rho}$  et on obtient que l'échelle c'est  $\tau_{eff} \sim \sqrt{\frac{3}{8\pi G \bar{\rho}}}$ .

La théorème du viriel (orth?) est trouvé comme

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \qquad (7.3)$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 dr \frac{dP}{dr} = -\frac{r}{3} \rho \frac{GM}{r^2} \underbrace{\rho 4\pi r^2 dr}_{dM} \qquad (7.4)$$

$$\int_0^{R_*} V dP = \int_0^{R_*} \frac{1}{3} \left( -\frac{GM}{r} \right) dM \qquad (7.5)$$

$$3PV = -U_G \qquad (7.6)$$

Si on assume un gaz parfait on obtient  $2U + U_G = 0$  et donc l'énergie totale  $E = U + U_G = -U = \frac{U_G}{2}$ . Pour une sphère homogène  $U_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$ .

Parce que  $U_G < 0$  quand l'étoile rayonne d'énergie le rayon diminue (pour diminuer l'énergie).

On dit  $\tau = \frac{U_G}{L_*}$  le temps caractéristique d'une étoile qui rayonne à luminosité  $L_*$ . Pour le Soleil,  $\tau \sim 10^6$  ans, mais on a déjà  $\sim 10^9$  ans! Comment est-ce que c'est possible? On a besoin de plus d'énergie, et la seule source possible c'est l'énergie nucléaire.



## 7.3 Modèle stellaire

On a maintenant 3 équations et 4 inconnu

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r) \qquad g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \qquad dM = 4\pi r^2 dr \rho(r) \qquad (7.7)$$

Si on veut utiliser un gaz, on a une autre équation, l'équation d'état, mais aussi un autre inconnu la température.

On peut assumer une modèle de gaz "polytrophe,"  $P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\rho^\gamma$ . Si on continue avec  $\rho = \rho_c \phi^n$ ,  $P = K\rho_c \phi^{n+1}$  (noter que  $\rho_c$  c'est la densité au centre) on a l'équation Lane-Emden

$$\frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left( u^2 \frac{d\phi}{du} \right) = -\phi^n \qquad (7.8)$$

avec  $u = \frac{r}{\lambda}$ ,  $\lambda^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}$ . Les BC sont  $\phi(0) = 1$  et  $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{du}(0) = 0$ .

Il y a quelques solutions, mais si  $n \geq 5$ ,  $\phi(u)$  n'a pas des zéros ( $\forall u, \phi(u) \neq 0$ ). Les propriétés de l'étoile sont donc

- Rayon —  $\phi(u) = 0$  signifie le rayon d'étoile, et donc  $R \rightarrow \infty$  si  $n \geq 5$ .

- Masse —  $M = 4\pi\lambda^3 \rho_c \left( -u^2 \frac{d\phi}{du} \right) \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}$

On peut calculer beaucoup plus, comme densité, pression au centre,  $U_g$ , température au centre. D'après toutes ces calculs on peut répondre à la question "est-ce que la production d'énergie nucléaire est favorable?" mais on ne fait pas ça au moment.

## 7.4 Hélioséismologie et astroséismologie

Le Soleil est comme une cavité, et aussi les fluctuations du surface du Soleil peut être voir au terre comme des variations de la luminosité du Soleil.

Parce que le Soleil est une sphère, ses variations suivent les harmoniques sphériques. Il y a des sortes des modes, acoustiques et gravitationnelles.

Pour les modes acoustiques, les ondes réfléchit au surface, mais aussi plus le profondeur, plus la vitesse des ondes. A cause de ça, les ondes tournent en propagant dans le Soleil, et ils forment des petites courbes autour du Soleil. En mesurant l'effet de Doppler de chaque point de la surface on peut voir les variations du vitesse de la surface.

Pour les étoiles on peut mesurer aussi ces fluctuations, mais parce que les étoiles ne sont sur détecteur qu'un pixel on ne peut voir que les mode  $n = 0, n = 1$  et pas les modes plus élevées.

On vient de mesurer (il y a une vingtaine d'années) que le Soleil tourne comme un truc mou, ça veut dire que sa surface ne tourne pas à la même vitesse (il tourne plus vite à l'équateur).

Pour mesurer la masse d'une étoile, on est habitué à le calculer par la force gravitationnelle entre deux étoiles, mais pour faire ça on a besoin de deux étoiles. Avec astroséismologie on peut mesurer la masse d'une étoile toute seule!

# Chapter 8

## 29/09/14 — PC3

### 8.1 Raie à 21cm de l'hydrogène

La transition de l'atome d'hydrogène de  $j = 1$  à  $j = 0$  émet à longueur d'onde  $\lambda_{10} = 21.1\text{cm}$ .

1. La probabilité de transition  $1 \rightarrow 0$  s'écrit  $A_{10} = 2.85 \times 10^{-15}\text{s}^{-1}$ . Calculer la formule de l'émissivité  $j_\nu$  en fonction de la densité  $n_1$  de noyaux d'hydrogène dans le niveau  $j = 1$ .

Chaque photon émis a l'énergie  $E_{10} = h\nu_{10}$ , et donc  $j_\nu = \frac{h\nu_{10}A_{10}}{4\pi}n_1\delta(\nu - \nu_{10})$ .

2. Supposer que l'hydrogène n'a que 2 niveaux d'énergie. Écrire la relation de Boltzmann entre  $n_1, n_0$ .

On rappelle la relation Boltzmann  $\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0}e^{-\frac{h\nu_{10}}{kT}}$  et si on le calcule on a  $\frac{h\nu_{10}}{kT} \sim \frac{10^{-24}}{10^{-21}}, e^{-\frac{h\nu_{10}}{kT}} \approx 1$ .

Donc  $\frac{n_1}{g_1} \approx \frac{n_0}{g_0}$  et si on note  $n_H = n_1 + n_0$ ,  $\frac{g_1}{g_0} = 3$  on a  $n_0 = \frac{n_H}{4}, n_1 = \frac{3n_H}{4}$ .

3. Soit  $\alpha_\nu$  la probabilité de transition donnée par (8.1). Montrer que la fonction de source  $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$  produit l'intensité spécifique d'un corps noir.

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{10}^2} n_0 \frac{g_1}{g_0} A_{10} \delta(\nu - \nu_{10}) \left(1 - \frac{n_1}{n_0} \frac{g_0}{g_1}\right) \quad (8.1)$$

$$S_\nu = \frac{8\pi\nu_{10}^2}{4\pi} \frac{n_1 h\nu_{10}}{n_0 c^2} \frac{g_0}{g_1} \frac{1}{1 - \frac{n_1}{n_0} \frac{g_0}{g_1}} \quad (8.2)$$

$$= \frac{2h\nu_{10}^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{10}}{kT}} - 1} \quad (8.3)$$

et c'est  $B_{\nu_{10}}(T)$ , un corps noir.

4. Résoudre l'équation de transfert du rayonnement à 21cm.

On commence avec l'équation de transfert du rayonnement  $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$ . On définit  $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$  et obtient

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (8.4)$$

Si on suppose maintenant que le gaz est homogène ( $S_\nu$  est constante) et que le fond de ciel est dénué de rayonnement, la solution est toute simplement  $I_\nu = Ae^{-\tau_\nu} + S_\nu$  avec  $A$  une constante arbitraire. Ensuite par les conditions limites,  $I_\nu = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$ .

5. Exprimer  $\tau_\nu$  comme fonction de  $N_H$  et la densité de  $H$ .

On a en général  $\tau_\nu = \int \alpha_\nu ds$  et parce qu'on suppose homogénéité on a  $\tau_\nu = \alpha_\nu L$ , ou donc

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{10}^2} \frac{g_1}{g_0} A_{10} \delta(\nu - \nu_{10}) \left(1 - \frac{n_1}{n_0} \frac{g_0}{g_1}\right) \underbrace{n_0 L}_{\frac{N_H}{4}} \quad (8.5)$$

parce que  $n_0 L = \frac{n_H}{4} L$ . Si on suppose encore  $h\nu_{10} \ll kT$  on a  $1 - \frac{n_1 g_0}{n_0 g_1} \approx \frac{h\nu_{10}}{kT}$  et finalement on obtient

$$\tau_\nu \approx \frac{3hc^2}{32\pi\nu_{10}} \frac{A_{10}}{kT} \delta(\nu - \nu_{10}) N_H \quad (8.6)$$

6. *Ecrire  $B_\nu(T)$  dans la limite  $h\nu \ll kT$  (approximation de Rayleigh-Jeans). Si on définit  $T_B(\nu) : I_\nu \equiv B_\nu [T_B(\nu)]$  écrire la relation entre  $T_B(\nu)$  et  $N_H$  dans la limite  $\tau_\nu \ll 1$*

On commence avec  $B_\nu(T) = \frac{2h\nu_{10}^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{10}}{kT}} - 1} \approx \frac{2\nu_{10}^2 kT}{c^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}$ .

Ensuite,  $I_\nu = B_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) \approx B_\nu \tau_\nu$  dans la limite  $\tau_\nu \ll 1$ .

## 8.2 L'effet de Maser

Il y a une figure sur la feuille qui nous donne la densité de flux versus la vitesse le long de la ligne de visée.

1. *Trouver une estimation de la température  $T$  du gaz en supposant que l'élargissement de la raie résulte de l'agitation thermique du gaz.*

On sait que  $\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$  mais on veut savoir  $\sigma_{v_x} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ . Selon la figure on a  $\Delta = 1\text{km/s}$ , le FWHM. En supposant que c'est un Gaussian, on a  $\sigma^2 = \frac{1}{8 \ln 2} \approx 0.18\text{km/s}$  et donc

$$T = \frac{m\sigma^2}{k} \approx 400\text{K} \quad (8.7)$$

si on prend soin avec les unités...

2. *La taille angulaire de la raie est  $10^{-4}$  arc-seconde. Trouver la température de brillance du gaz dans l'approximation de Rayleigh-Jeans.*

On a  $F_\nu \approx 1400\text{mJy}$  et  $I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B$  et parce que  $F_\nu = I_\nu \Omega$  on peut calculer  $T_B \approx 10^{11}\text{K}$ ! C'est l'effet de Maser.

## Chapter 9

# 06/10/14 — Physique Nucléaire

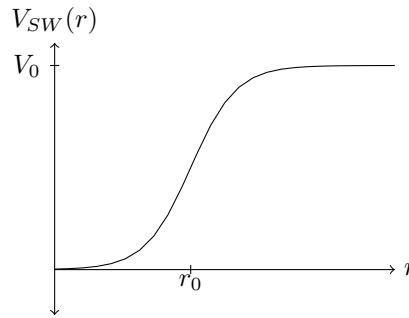
On a vu la dernière fois que toute l'énergie que le Soleil produit ne peut pas être expliquée par l'énergie potentielle gravitationnelle, et c'est certainement à cause d'énergie nucléaire.

On peut déduire la distribution de charge électronique par la diffusion des électrons, qui sentent le potentiel du noyau. On voit qu'il est concentré dans un rayon très petit au centre d'atome, le noyau.

La densité de la matière ordinaire est à l'ordre  $\sim 1 \text{ nucleon}/\text{\AA}^3$  mais la densité du noyau est à l'ordre  $\sim 1 \text{ nucleon}/\text{fm}^3$ . On note fm aussi un *fermi*.

On ne comprend pas suffisamment bien la force forte, et on n'a que des modèles phénoménologiques.

Pour calculer les dynamiques des nucléons, on peut simplement calculer numériquement. Pour le calculer par main, on assume que chaque nucléon est indépendant, et on utilise un potentiel phénoménologique de Saxon-Woods qui nous donne le potentiel moyen des autres nucléons. Ce potentiel a la forme dans la figure ci-dessous



**Figure 9.1:** La forme du potentiel Saxon-Woods est  $V = \frac{V_0}{1 + e^{-\frac{r-r_0}{\alpha}}}$ .  $\alpha$  il s'agit de la forme du potentiel.

Les noyaux stables ont en général plus des neutrons que des protons à cause de la répulsion électrique. Dans la désintégration  $\beta^+$  on conserve la nombre totale des nucléons; on change simplement les protons et les neutrons l'un à l'autre. Cette désintégration produit une vallée de stabilité.

Comme les couches électroniques, ou il y a quelques nombres des électrons les plus préférées, il y a aussi des couches dans les noyaux. Les protons et les neutrons remplissent chacun ses propres couches. Par exemple,  ${}_{82}\text{Pb}_{126}$  est particulièrement stable parce que 82, 126 sont des nombres stables. Par autre exemple, Ca-40 et Ca-48 les deux sont stables parce que 20, 28 sont des nombres stables.

### 9.1 Désintégration nucléaire

L'énergie de liaison des nucléons est donnée simplement par la différence entre l'énergie du noyau et l'énergie totale des nucléons s'ils sont tous à l'infini.

Rappeler que l'énergie contribue aussi à la masse des noyaux, et donc on a une formule pour calculer l'énergie de liaison toute empirique, la formule *Bethe-Weizsäcker*. Noter  $B$  l'énergie de liaison et  $A$  la nombre de masse, et on a

$$B = a_{vol}A - a_{surf}A^{2/3} - a_{coul}\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A} + a_{par} [(-1)^N + (-1)^Z] A^{-0.75} \quad (9.1)$$

Les termes sont

- $a_{vol} \approx 16\text{MeV}$  — Simplement l’observation empirique que  $\frac{B}{A}$  est à peu près constante quand  $A$  est assez grand.
- $a_{surf} \approx 17\text{MeV}$  — L’aire d’interaction entre les nucléons est une fonctionne de l’aire surface, et donc le plus  $A$  le moins l’aire surface, et donc cette terme décroît comme  $A^{2/3}$  l’aire surface.
- $a_{coul} \approx 0.7\text{MeV}$  — La nombre d’interaction coulombique est à l’ordre  $\frac{N(N-1)}{2}$  et la distance pour l’interaction est à l’ordre  $A^{1/3}$  le rayon du noyau.
- $a_{sym} \approx 23\text{MeV}$  — Les couches des nucléons sont favorable. On dit  $Z$  la nombre stable la plus proche.
- $a_{par} \approx 17\text{MeV}$  — On préfère les paires des nucléons; c’est 0 si la numéro des protons et neutrons sont paires-impaires,  $< 0$  si impaires-impaires, et  $> 0$  si paires-paires.

Les desintégrations  $\beta^\pm$  et la capture électronique ( $p^+ + e^- = n^0 + \gamma$ ) sont des interactions faibles et la desintégration  $\alpha$  est un phénomène coulombique qui est normalment vu dans les noyaus lourds (empiriquement  $Z^2/A \geq 47$ ).

## 9.2 Section efficace

C’est une aire qui décrit la probabilité d’une interaction, d’une collision. Toute simplement on a  $dP = \pi r^2 n dx$ , ou  $\pi r^2$  est l’aire de chaque cible et  $n dx$  et la densité des cibles. Et alors le libre parcours moyen est donné par

$$\lambda \equiv \frac{1}{dP/dx} = \frac{1}{n\sigma} \quad (9.2)$$

Comme exemple de collision (je sais pas pourquoi on parle de ça mais c’est interessant) on a detecté par les images gravitationnelles qu’il y a des cercles de diamètre  $\approx 200\text{km}$  dans la péninsule Yucatan qui sont créés il y a 65 million ans.

On peut calculer la section efficace des interactions, mais c’est important de noter que c’est pas necessairement simplement l’aire géométrique! S’il y a des interactions qui attirent ou repoussent les deux objets. Pour les collisions gravitationnelles on peut montrer que  $\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{v_{lib}^2}{v_\infty^2}\right)$  avec  $\sigma_0$  l’aire géométrique,  $v_\infty$  la velocity de l’objet à l’infinité et  $v_{lib}$  la vitesse de liberation (“escape velocity”). C’est naturelle parce que si  $v_\infty = 0$  on tombe forcément sur la terre.

# Chapter 10

## 06/10/14 — PC4

### 10.1 Physique Nucléaire générale

1. *Quelle est l'énergie libérée par la réaction  $p + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$ ? Dans le cœur d'une étoile ( $T \sim 10^7\text{K}$ ) est-ce que la réaction inverse est compétitive?*

L'énergie libérée est donnée par  $B_{{}^3\text{He}} - B_D = 5.495\text{MeV}$ . C'est pas compétitive parce que l'énergie d'un photon est  $\epsilon = 2.7kT \approx 2.7\text{keV}$ .

*Quelle est l'énergie de liaison du tritium? En comparant les énergies de liaison et les masses du tritium et du  ${}^3\text{He}$  trouver le rayon du noyau de  ${}^3\text{He}$ . Entre le tritium et le  ${}^3\text{He}$ , lequel est stable? Trouver le processus de désintégration.*

On calcule que  $B_t = 8.452\text{MeV}$ . La différence entre tritium et  ${}^3\text{He}$  est à cause de la répulsion électrique, et donc on met la différence en énergie égal à un rayon coulomb et on a

$$0.732\text{MeV} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (10.1)$$

$$r \approx 2\text{fm} \quad (10.2)$$

En calculant les énergies des réactions on voit actuellement que  ${}^3\text{He}$  est plus stable, par la réaction



qui a une change d'énergie de  $0.05\text{MeV}$ .

2. *On a des paraboles des états de  $A = 120, 121$  (mass) en fonction du numéro atomique. Pourquoi est-ce qu'il y a deux courbes pour  $A = 120$ ? Est-ce que  ${}^{120}\text{Te}$  est stable?*

On voit deux paraboles parce que les neutrons et protons préfèrent d'exister en paires, et donc  ${}^{120}_{50}\text{Sn}$  et  ${}^{120}_{52}\text{Te}$  sont plus stable que  ${}^{120}_{51}\text{Sb}$ .

On peut calculer l'énergie de désintégration  $\beta^\pm$  de  ${}^{120}_{52}\text{Te}$  comme ci-dessous



On voit que les énergies des deux réactions sont négatives et donc  ${}^{120}_{52}\text{Te}$  est  $\beta$ -stable.

Sur l'autre parabole  $A = 121$  on n'a qu'une courbe et c'est plus facile, comme dans la Figure 10.1

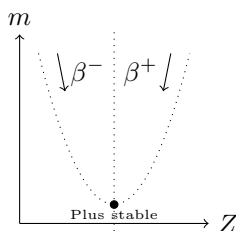


Figure 10.1:  $A = 121$ .

3. Comment s'exprime le nombre d'anti-neutrinos produit par  $^{226}\text{Ac}$ , selon la diagramme (je ne le peux pas copier)?

On commence en notant que 83% des réactions sont la réaction  $\beta^-$ , qui a un temps caractéristique qu'on doit calculer. La demi-vie de  $^{226}\text{Ac}$  est 29h, et donc la temps caractéristiques pour  $\beta^-$  est donnée par  $\frac{29 \cdot 83\%}{\ln 2}$ h. On ne s'inquiète pas des autres réactions parce que seulement  $\beta^-$  produit des anti-neutrinos. Donc on a

$$\frac{dN_{\bar{\nu}_e}}{dt} = -\frac{N_{\text{Ac}}}{\tau_{\beta^-}} \quad (10.6)$$

$$= -\frac{N_{\text{Ac}}}{\tau_{1/2}} \frac{\ln 2}{0.83} \quad (10.7)$$

$$\approx 5.5 \times 10^{-6} \text{s}^{-1} = 50.4 \text{h} \quad (10.8)$$

Donc on produit  $5.5 \times 10^{-6}$ neutrino/nucleus/s.

Comment évolue la concentration de  $^{226}\text{Ra}$  en fonction du temps? Si on commence avec un échantillon pur de  $^{226}\text{Ac}$ , quelle est la composition chimique à  $t = 1\text{min}$ ,  $t = 100\text{h}$ ,  $t = 10^4\text{ans}$ ?

L'équation qui donne la concentration de  $^{226}\text{Ra}$  est

$$\frac{d^{226}\text{Ra}}{dt} = -\frac{d^{226}\text{Ac}}{dt} \Big|_{\beta^+} + \frac{d^{226}\text{Ra}}{dt} \Big|_{\alpha} \quad (10.9)$$

Il faut au premier calculer  $^{226}\text{Ac}(t) = N_0 2^{-\frac{t}{\tau_{1/2}}} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Ac}}}}$  et donc ce qu'on veut est

$$\frac{d^{226}\text{Ac}(t)}{dt} \Big|_{\beta^+} = (0.17\%) \left( -\frac{N_0}{\tau_{\text{Ac}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Ac}}}} \right) \quad (10.10)$$

$$\frac{d^{226}\text{Ra}}{dt} = (0.17\%) \left( \frac{N_0}{\tau_{\text{Ac}}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Ac}}}} \right) - \frac{^{226}\text{Ra}}{\tau_{\text{Ra}}} \quad (10.11)$$

$$^{226}\text{Ra}(t) = \frac{N_0}{\tau_{\text{Ac}}/0.17 \left( \frac{1}{\tau_{\text{Ac}}} - \frac{1}{\tau_{\text{Ra}}} \right)} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Ra}}}} - e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Ac}}}} \right] \quad (10.12)$$

On calcule que  $\tau_{\text{Ac}} = 43\text{h}$ ,  $\tau_{\text{Ra}} = 2300\text{yr}$  et donc on peut calculer ses trois cas

- $t = 1\text{min}$  — Les deux exponentielles peuvent être réécrites comme  $e^{-\delta} \approx 1 - \delta$  et on obtient  $^{226}\text{Ra}(t) \approx 7 \times 10^{-5} N_0$ .
- $t = 100\text{h}$  — On a deux cas limites et donc les exponentielles sont essentiellement égales à  $(1 - 0)$  et on obtient  $0.17 N_0$ .
- $t = 10^4\text{yr}$  — On trouve  $2 \times 10^{-3} N_0$ .

## 10.2 Age du système solaire

1. On a  $P_i \rightarrow F_i$ . Trouver  $P_i(t), F_i(t)$  en fonction de  $P_i(0), F_i(0)$ .

C'est simplement  $P_i(t) = P_i(0)e^{-t/\tau}$ ,  $F_i(t) = F_i(0) + (P_i(0) - P_i(t))$ .

2. Montrer la relation suivante.

$$F_1(t) - F_1(0) = P_1(t) \left( e^{t/\tau_1} - 1 \right) \quad (10.13)$$

$$F_2(t) - F_2(0) = P_2(t) \left( e^{t/\tau_2} - 1 \right) \quad (10.14)$$

$$\frac{F_1(t) - F_1(0)}{F_2(t) - F_2(0)} = \frac{P_1(t) \left( e^{t/\tau_1} - 1 \right)}{P_2(t) \left( e^{t/\tau_2} - 1 \right)} \quad (10.15)$$

et on les divise.

3. Pourquoi est-ce que  $\alpha(t) = \frac{P_2(t)}{P_1(t)}$  est universelle dans toutes météorites?

On assume que  $\alpha(0)$  est universelle parce que l'univers primordial était homogène, et donc  $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-t\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)}$  et parce qu'on assume  $\alpha(0)$  est universelle on sait que  $\alpha(t) = 0$  (l'exponentielle est naturellement universelle).

4. On trouve que  $\alpha(t_0) = \frac{1}{137.9}$  ( $t_0$  est la présente). Si on compare  $X_i = \frac{F_i(t)}{S(t)}$  avec  $S(t)$  constante, montrer que c'est universelle(?).

On note que  $\frac{X_2 - \frac{F_2(0)}{S(0)}}{X_1 - \frac{F_1(0)}{S(0)}} = \alpha(t)$  et donc c'est universelle.



# Chapter 11

## 13/10/14 — Makeup: Physique Nucléaire, la fusion (en anglais)

I'm going to do this makeup lecture in English to save some time.

We begin with a description of the cross section classically. Exhibit a particle scattering off a potential  $V(r)$ , then we want simply the number of particles scattered into the solid angle  $[\theta - d\theta, \theta]$ . The scattering cross section and its differential are given below

$$\frac{d^2 N_{scatt}}{dt d\Omega} = F_m \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \quad (11.1)$$

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \left| \frac{2\pi b(\theta) db}{2\pi \sin \theta d\theta} \right| \quad (11.2)$$

We can assume classical scattering when the impact parameter is much larger than the characteristic length scale of the incoming particle, but quantum techniques are necessary when the length scale of the interaction is larger than or of the order of the length scale of the particle's de Broglie wavelength. Theoretical methods for electroweak interactions use perturbative techniques such as the Born approximation while for fusion/nuclear interactions (strong force) we use phenomenological models.

### 11.1 Calculating quantum cross section

Definition is still the same. We assume initial and final states are plane waves of momentum  $p_i, p_f$  scattering off a fixed central potential  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ . We throw Fermi's Golden Rule at this and after a bit of math we arrive at the Born approximation

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2}{4\pi^2 (\hbar c)^4} \left| \tilde{V}(\vec{q}) \right|^2 \quad (11.3)$$

with  $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$  and  $\tilde{V}$  is the Fourier transform of  $V(r)$ . We can do a few examples such as Coulomb diffusion (which reproduces the classical result exactly, as one might recall) or the neutrino interaction (weak potential is nearly a delta function).

### 11.2 Thermonuclear fusion

If we recall the plot of  $\frac{B}{A}$  mass per mass number, we find that it increases sharply at first and decays slowly (after iron, recall). Thus, both fusion and fission can be thermodynamically favorable if they are on the right parts of the curve; it is necessary that we fuse lighter elements, to catch the rising part of the curve. Fusion differs from previous calculation because there is no scattering and the nuclear interaction is not a small perturbation. Also, there is no fixed reference frame (products/reagents are usually of comparable size) so we have to go to center of mass frame.

It turns out if we examine the potential carefully we find the Coulomb barrier before the nuclear potential is felt to be far higher than astrophysical conditions! It turns out that we have to tunnel through the barrier. We will walk through the process very roughly.

Let  $P = e^{-G}$  be the probability of a state transition, and call  $G$  the Gamow factor, then we can find the cross section  $\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-G} \propto P$  where the S-factor  $S(E)$  takes into account nuclear effects.

For non-resonant cross sections the  $S$  factor is nearly constant, but near resonance like everything else  $S(E)$  picks up a Lorentzian shape,

# Chapter 12

## 03/11/14 — Fusion dans les étoiles

Pour vaincre la force coulombienne et avoir la fusion nucléaire il faut avoir une énergie environ  $\frac{\alpha \hbar c}{r} \sim 1.4 \text{ MeV}$ . Mais à l'intérieure du soleil on n'est que 15 million de degrés, pas suffisamment chaud pour vaincre la force coulombienne.

On peut calculer la section efficace, qui dépend d'un effet de "tunneling", et finalement on trouve par quelques calculs qu'il y a une résonance Gamow. Les deux processus de fusion produisent les neutrinos, et on peut les détecter.

La loi de la conservation d'énergie dit que  $\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - P \frac{dV}{dt}$ . Si on l'écrit en terme de la luminosité on trouve que si le soleil évolue lentement la luminosité est égale à la puissance nucléaire.

L'énergie est transportée en trois facon, la radiation, la conduction, et la convection. On sait que la relation entre le flux d'énergie et la densité d'énergie à une fréquence est donnée par  $\vec{F}_\nu = -D \nabla u_\nu$ . On calcule que par le transport radioactif que  $\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$  ( $\kappa$  et l'opacité) la variation de la temperature à la distance du centre.

Aussi, on peut calculer la relation entre la masse et la luminosité par la théoreme viriel, et on trouve que  $L \propto M^3$ , ou plus précisément

$$L = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{ac}{\kappa} \left(\frac{\beta}{6} \frac{Gm_p}{k}\right)^4 M^3 \quad (12.1)$$

On examine la luminosité d'Eddington et on trouve qu'il y a une luminosité maximum  $L_{max} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}$ . Ça correspond à une masse maximum de  $M_{max} = 60N_0m_p = 110M_\odot$  la masse de Chandrasekar.

Le transport conductif est seulement non-négligible dans un milieu froid et dense, comme un gaz dégénéré. Le transport convectif est aussi pas trop intéressant; on examine simplement si un gaz est stable par une action adiabatique.

On a maintenant quatre équations de la structure stellaire (pour cinq fonctions  $P, M, L, \rho, T$ )

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} \quad (12.2)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (12.3)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(\epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu) \quad (12.4)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (12.5)$$

les équations de l'équilibre hydrostatique, la conservation de masse, la conservation d'énergie, et le transfert radiatif. On a besoin d'une équation d'état! Le prochain ampli.

On peut faire un diagramme HR d'un amas d'étoiles et voir l'âge de cet amas.

# Chapter 13

## 03/11/14 — PC 6 — Fusion thermonucléaire

On finit au d'abord la dernière exercice de la dernière petite classe. Rappelons comme dans la classe on a

$$\langle \sigma v \rangle \propto \int S(E) e^{-b/\sqrt{E}} e^{-E/kT} dE \quad (13.1)$$

$$\approx S(E_G) \int \exp \left[ - \underbrace{\frac{b}{\sqrt{E}} + \frac{E}{kT}}_{\phi(E)} \right] dE \quad (13.2)$$

On fait l'approximation voyant que  $\phi(E)$  est très étroits autour quelque énergie  $E_G$ , et on développe l'exponentiel autour le maximum de  $\frac{b}{\sqrt{E}} + \frac{E}{kT}$  qui est  $E_G = \left( \frac{bkT}{2} \right)^{2/3}$ . Maintenant on approxime  $e^{-\phi(E)}$  avec un Gaussian, pour qu'il fausse calculer  $\Delta$  pour  $\phi(E) \simeq \frac{3E_G}{kT} + \frac{(E - E_G)^2}{2\Delta^2}$ . On trouve que

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{3} E_G kT} \quad (13.3)$$

Avec ce Gaussian on peut calculer facilement l'intégrale si on sait  $S(E_G)$ , qu'on appelle le facteur de Gamow. C'est pas facile à mesurer, mais après une collaboration on sait les  $S(E_G)$  pour les  $E_G$  solaires.

### 13.1 Fusion thermonucléaire au cœur du soleil

1. Donner les réactions les plus simples correspondant à la réaction globale  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$ .

$$2(p + p \rightarrow D + e^+ + \nu_e) \quad (13.4)$$

$$2(D + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma) \quad (13.5)$$

$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p \quad (13.6)$$

Les énergies libérées dans chaque étapes sont faciles à calculer par les masses; on trouve qu'elles sont 0.421, 5.495, 12.860 MeV respectivement; en totale 24.69 MeV. Mais parce qu'on est au milieu du soleil, les  $e^+$  sont immédiatement écrasés comme  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$  et ça produit une nouvelle somme de 26.2 MeV.

2. Ecrire les équations régissant l'évolution des densités des particules  $n_p, n_D, n_3, n_4$  les protons, le deutérium

On écrit les relations pour chaque réaction

$$\dot{R}_1 = \frac{1}{2} n_p n_p \langle \sigma_{pp} v \rangle \quad (13.7)$$

$$\dot{R}_2 = n_D n_p \langle \sigma_{Dp} v \rangle \quad (13.8)$$

$$\dot{R}_3 = \frac{1}{2} n_3 n_3 \langle \sigma_{33} v \rangle \quad (13.9)$$

Ensuite on sait que

$$\frac{dn_p}{dt} = -2\dot{R}_1 - \dot{R}_2 + 2\dot{R}_3 \quad (13.10)$$

$$\frac{dn_D}{dt} = \dot{R}_1 - \dot{R}_2 \quad (13.11)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = \dot{R}_2 - 2\dot{R}_3 \quad (13.12)$$

$$\frac{dn_4}{dt} = \dot{R}_3 \quad (13.13)$$

Finalement on assume que  $n_D, n_3$  sont constants, parce qu'ils sont des produits intermédiaires. Ça nous donne que  $\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 2\dot{R}_3$  et alors  $\frac{dn_p}{dt} = -4\frac{dn_4}{dt}$ .

Mais aussi, on voit que  $\frac{dn_D}{dt} = 0$  nous donne  $\frac{n_D}{n_p} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{pp} v \rangle}{\langle \sigma_{pD} v \rangle} \sim 10^{-18}$  à l'équilibre. On voit similairement que  $\frac{n_3}{n_p} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{pp} v \rangle}{\langle \sigma_{33} v \rangle}}$ . Alors on trouve

$$\frac{dn_p}{dt} = -\langle \sigma_{pp} v \rangle n_p^2 \quad (13.14)$$

et l'échelle de temps caracteristique est  $\frac{1}{n_p \langle \sigma_{pp} v \rangle}$ .

3. Ce qui reste c'est de calculer la puissance liberée par le coeur du soleil, et on trouve que c'est égale à la luminosité, ce qu'on expecte.

## 13.2 Processus $3\alpha$

Dans les géants on trouve qu'il faut avoir un processus  $3\alpha \rightarrow^{12}C$ . On l'examine.

1. *Ecrire l'évolution des densités numériques des réactions.*

Les réactions sont

$$\alpha + \alpha \rightarrow^8 Be \quad (13.15)$$

$$\alpha + \alpha \leftarrow^8 Be \quad (13.16)$$

$$\alpha + ^8 Be \rightarrow^{12} C + \gamma \quad (13.17)$$

et alors les densités numériques evoluent comme

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = -2\dot{R}_1 + 2\dot{R}_2 - \dot{R}_3 = -n_\alpha^2 \langle \sigma_{\alpha\alpha} v \rangle + 2\frac{n_8}{\tau_8} - n_\alpha n_p \langle \sigma_{\alpha p} v \rangle \quad (13.18)$$

$$\frac{dn_8}{dt} = \dot{R}_1 - \dot{R}_2 - \dot{R}_3 = \frac{1}{2} n_\alpha^2 \langle \sigma_{\alpha\alpha} v \rangle - \frac{n_8}{\tau_8} - n_\alpha n_8 \langle \sigma_{\alpha 8} v \rangle \quad (13.19)$$

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \dot{R}_3 = n_\alpha n_8 \langle \sigma_{\alpha 8} v \rangle \quad (13.20)$$

2. Plus tard il faut trouver  $\langle \alpha\alpha\alpha \rangle$  qu'on sait est  $\frac{dn_2}{dt} \frac{1}{6} n_\alpha^3 \langle \alpha\alpha\alpha \rangle$  et on peut calculer  $\frac{dn_2}{dt}$  par ci-dessus.

## Chapter 14

# 10/11/14 — Makeup: Les naines blanches

Pour décrire les étoiles on a dit qu'on a 4 équations pour 5 variables. L'équation qui nous manque est une équation de l'état  $P(\rho, T)$ . D'abord, il faut définir la pression, la force rapportée à l'aire de surface, ou plus précisément

$$P = \frac{1}{3} \int p v(p) n(p) dp \quad (14.1)$$

ou  $p$  est l'impulsion,  $v(p)$  est la vitesse et  $n(p)$  est la densité d'états. Classiquement

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p \frac{p}{m} dp \quad (14.2)$$

$$= \frac{2}{3} \int E n(p) dp = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (14.3)$$

### 14.1 Un gaz fermionique dégénéré

Un tel gaz suit la distribution de Fermi-Dirac

$$n(p) = 2 \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right) + 1} \quad (14.4)$$

Pour un gaz complètement dégénéré, on trouve ( $n(p) = \Theta(p_F - p)$ )

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} p \frac{p}{m} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp \quad (14.5)$$

$$= \frac{8\pi}{15} \frac{p_F^2}{m} \left(\frac{p_F}{h}\right)^3 \quad (14.6)$$

ou plus clairement  $P \propto n^{5/3}$ ; la pression est indépendante de la température.

Si le gaz est relativistique, on trouve que  $v(p) = c \frac{p/mc}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}}$ , et après des calculs on trouve que  $P \propto n^{4/3}$  et qu'elle est également indépendante de la température.

Pour un gaz ultrarelativistique,  $P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$ . On trouve aussi par le théorème du viriel que  $3\bar{P}V = -U_G$  et alors  $U = -U_G$  qui dit que  $E = U + U_G = 0$  l'énergie totale. Alors un gaz ultrarelativistique n'est pas lié!

#### 14.1.1 Gaz de photons, ou gaz bosonique

Pour un photon  $E = pc, v = c$  et il suit la distribution de Bose-Einstein

$$n(p) = 2 \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{pc}{kT}\right) - 1} \quad (14.7)$$

Alors on calcule que  $P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \equiv aT^4$ .

## 14.2 Les naines blanches

On note que

$$E_f = \frac{1}{2m_e} \left( \frac{3\hbar^3 n_e}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (14.8)$$

$$\simeq m_e c^2 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{4/3} \quad (14.9)$$

et donc si la masse augmente, les électrons deviennent relativistique!

Il nous faut aussi de noter une autre expression

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{M}{M_c} \right)^{1/3} \sqrt{1 - \left( \frac{M}{M_c} \right)^{2/3}} \quad (14.10)$$

Ca nous montre que  $R \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow M_c$ .

# Chapter 15

## 10/11/14 — PC 7 — Supernovae, naines brunes

### 15.1 Supernovae de Type 1A

1. *Après le théorème du viriel, montrer qu'une étoile est en équilibre stable par rapport d'une élévation de la température centrale  $\Delta T > 0$ .*

Rappelons que  $3\bar{P}V + E_g = 0 = 2U + E_g$ ,  $U = \frac{1}{2}E_g \frac{3\bar{P}V}{2}$ ,  $E = E_g + U = \frac{E_g}{2} = -U$ . En équilibre stable  $\frac{dE}{dt} = L_{nuc} - L = 0$ ,  $L_{nuc}$ ,  $L$  les luminosités du noyau et de l'étoile respectivement. De plus,  $E_g \propto -\frac{GM^2}{R}$ ,  $U = \frac{3}{2}kTN$  avec  $N$  le nombre des particules, ou également  $U \propto MT$ .

Si  $\Delta T > 0$  et  $\Delta L_{nuc} \gg 0$  (raisonnable car  $L_{nuc}$  est un exponential sur  $T$ ), alors  $L$  augmente après que la transfert radiatif attendait la surface. On peut calculer ce durée de temps en le modelant comme une marche aléatoire et on le trouve d'être à l'ordre de mille ans. Alors car  $\frac{dE}{dt} > 0 \rightarrow \frac{dU}{dt} < 0$ ,  $\frac{dT}{dt} < 0$  et c'est stable. Aussi, c'est l'échelle de cette change qui nous interesse, et on trouve que c'est à l'ordre des ondes de son, autrement dit plus vite que  $\Delta L$ . Alors, une étoile est stable par une changement de température  $\Delta T > 0$ .

2. *Si une étoile compagnon transfère de la matière sur une naine blanche, que se passera-t-il?*

Une naine blanche est composée par du gaz dégénéré, alors  $P = k\rho^{5/3}$ ,  $u = \frac{3}{2}VK\rho^{5/3} \propto M^{5/3}R^{-2}$ . Alors après le théorème du viriel,  $U = \frac{1}{2}E_g \propto \frac{M^2}{R} \propto M^{5/3}R^{-2}$  donc  $M^{1/3} \propto R^{-1}$ , alors si  $M$  augmente  $R$  décroît. Aussi,  $\rho \propto M^2$ , donc l'étoile devient aussi plus dense.

3. *Comparer l'énergie libérée par la réaction  $2^{12}C + 2^{16}O \rightarrow ^{56}Ni$  à l'énergie gravitationnelle d'une étoile.*

La réaction libère 44.43MeV, alors pour une masse du soleil ca libère à l'ordre de  $10^{44}$ J. L'énergie gravitationnelle libère à l'ordre de  $\frac{GM^2}{R} \sim 10^{43}$ J. Alors, si une étoile explose par la réaction ci-dessus,

4. *Montrer qu'on peut expliquer la luminosité maximum  $L_{max} \sim 10^{10}L_{\odot}$ .*

La puissance est  $P \propto \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$  avec  $\tau$  le temps caractéristique 8.8 jours. Alors on a déjà calculé  $N$ , donc ce n'est pas difficile de calculer  $P_{max}$  en utilisant  $N_0$  le  $N$  au debut de la fusion. C'est  $10^{10}L_{\odot}$ .

### 15.2 Naines brunes

1. *Quel est l'échelle de temps  $\tau$  de la contraction gravitationnelle, appelée échelle de temps de Kelvin-Helmholtz?*

Soit  $L$  la luminosité, alors on a encore  $\frac{1}{2}E_g = -U$ ,  $\frac{dE}{dt} = -L < 0$ . Plus précisément,  $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\alpha \frac{GM^2}{2r} \right) = -L$  et donc

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2LR^2}{\alpha GM^2}, \tau = \left| \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right|^{-1} = \frac{\alpha GM^2}{2RL}.$$

2. *Aux quelles conditions sur l'échelle de temps  $t_{KH}$  est l'approximation quasi-statique valable?*

Car  $\tau_{son} \ll \tau_{KH}$ , on est toujours à l'équilibre hydrostatique et on peut utiliser le théorème viriel.

3. *Que se passe-t-il lorsque  $T \gtrsim 10^6 K$ ?*

Lorsque  $T \geq 10^6 K$ , la fusion commence et une étoile est née. Ça arrive si  $R$  décroît.

4. *Montrque qu'il existe une température maximale  $T_{max}$  lors de le gaz devient un gaz dégénéré et pas une étoile.*

Si  $T$  devient  $< T_{Fermi}$ , on aura un gaz dégénéré et ça ne produit pas d'étoile. On calcule cette condition: la température Fermi est

$$kT_F = \frac{(3\pi^2\hbar^3 n)^{2/3}}{2m} \quad (15.1)$$

Pour l'étoile classique, on a  $U \propto MT \propto \frac{M^2}{R}$ . Le gaz dégénéré produit  $T_F \propto \frac{1}{R^2}$ . Donc le seuil de température pour que le gaz dégénéré soit produit existe, car si le température baisse trop on atteindra  $T_F$  avant  $T_{classique}$ .

5. *Comparer la pression radiative et la pression gazeuse pour une étoile dans la séquence principale.*

On trouve que  $\frac{P_{rad}}{P_{gaz}} = \frac{\frac{1}{3}aT^4}{mkT}$ , car  $P_{rad} = \frac{1}{3}u$  pour un gaz ultra-relativiste. Alors le rapport est à l'ordre de  $\propto m^{-1} = \frac{R^3}{M} = M^2$ , alors les étoiles plus massives ont plus de pression radiative.



## Chapter 16

# 17/11/14 — PC 8 — Neutronisation, Interaction nucléaire dans les étoiles à neutrons

### 16.1 Neutronisation

1. *Montrer que les neutrons apparaissent lorsque la densité atteint  $\rho \gtrsim 1,2 \times 10^7 \text{g/cm}^3$ .*

Les neutrons apparaissent lorsque les électrons et les protons combinent, un seuil d'énergie volumétrique qu'on peut calculer après leurs masses  $m_n - m_p - \approx 1.293 \text{MeV}$ . Alors si l'énergie de l'électron est plus que ceci, on trouve les neutrons. Notons que ces électrons sont relativistes.

Après, il faut trouver la densité correspondant à cet énergie. La pression est donnée après  $x = (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{\hbar c}{mc^2} \right) n^{1/3}$  par

$$P = \frac{1}{24\pi^2} \frac{(mc^2)^4}{(\hbar c)^3} \times \begin{cases} \frac{8}{5} x^5 & \text{if } x \ll 1 \\ 2x^4 & \text{if } x \gg 1 \end{cases} \quad (16.1)$$

On commence en calculant la quantité de mouvement  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , alors pour l'électron  $1.672 = p^2 c^2 + 0.261$ ,  $pc = 1.188 \text{MeV}$ . Alors

$$\frac{p_F c}{mc^2} = (3\pi^2)^{1/3} \left( \frac{\hbar c}{mc^2} \right) n^{1/3} \quad (16.2)$$

$$1.188 \text{MeV} = (3\pi^2)^{1/3} (197.327 \text{MeV} \cdot \text{fm}) n^{1/3} \quad (16.3)$$

$$n = 7.4 \times 10^{-9} \text{fm}^{-3} \quad (16.4)$$

Après ça, on calcule  $\rho = n(m_p + m_e) \approx nm_p = 1.258 \times 10^7 \text{g/cm}^3$  car à cette densité on n'a que des protons et des électrons.

2. *Ecrire les conditions d'équilibre  $\beta$ . Pour un  $n$  on veut trouver la rapport du mélange.*

On essaie maintenant d'écrire l'équation d'état. Il faut trouver quelques équations

$$n_e = n_p \quad (16.5)$$

$$n = n_e + n_p + n_n \quad (16.6)$$

La troisième équation est donnée par le potentiel chimique pour la réaction  $e^- + p^+ \leftrightarrow n^0$ .  $\mu = E_F$  pour un gaz dégénéré, et  $E_F = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_F c)^2} = (mc^2) \sqrt{1 + x^2}$  et alors

$$m_e c^2 \sqrt{1 + x_e^2} + m_p c^2 \sqrt{1 + x_p^2} = m_n c^2 \sqrt{1 + x_n^2} \quad (16.7)$$

Si on assume la régime ultrarelativiste,  $x_e, x_p, x_n \gg 1$ , alors l'équation ci-dessus devient

$$m_e x_e + m_p x_p = m_n x_n \quad (16.8)$$

$$n_e^{1/3} + n_p^{1/3} = n_n^{1/3} \quad (16.9)$$

$$2n_p^{1/3} = \quad (16.10)$$

$$\frac{n_p}{n_n} = \frac{1}{8} = \frac{n_e}{n_n} \quad (16.11)$$

et alors  $n_n = 0.8n, n_e = n_p = 0.1n$ , mais il faut se rappeler que c'est dans la régime ultrarelativiste.

3. On suppose au lieu de la régime ultrarelativiste que  $x_e \gg 1, x_p, x_n \ll 1$ . Pour quelles densités ces approximations sont-elles valable? Quel est  $x_p(x_n)$ ?

C'est facile à valider que  $x_e \gg 1$  si  $\rho \geq 9.9 \times 10^5$  et que  $x_p, x_n \ll 1$  si  $\rho \ll 6 \times 10^{15}$ . On commence on écrivant  $x_e m_e = x_p m_p$  car  $n_e = n_p$ . Alors l'équation (16.7) devient

$$m_e \sqrt{1 + \frac{m_p^2}{m_e^2} x_p^2} + m_p \sqrt{1 + x_p^2} = m_n \sqrt{1 + x_n^2} \quad (16.12)$$

$$m_p x_p + m_p \left(1 + \frac{x_p^2}{2}\right) \approx m_n \left(1 + \frac{x_n^2}{2}\right) \quad (16.13)$$

$$m_p (1 + x_p) + O(x_p^2) \approx m_n \left(1 + \frac{x_n^2}{2}\right) \quad (16.14)$$

$$x_p \approx \frac{m_n - m_p}{m_p} + \frac{1}{2} \frac{m_n}{m_p} x_n^2 \quad (16.15)$$

Si  $x_n \ll 1$  on ne peut pas négliger  $m_n - m_p$ .

4. A quelle  $\rho$  est-ce que la pression des neutrons devient dominante?

On note que  $P_e > P_p$  toujours, alors il faut simplement comparer  $P_e, P_n$ . Pour les neutrons qui sont non-relativiste,  $P_n = \frac{1}{15\pi^2} \frac{(m_n c^2)^4}{(\hbar c)^3} x_n^5$  et pour les électrons ultra-relativiste  $P_e = \frac{1}{12\pi^2} \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3} x_e^4$ . La condition que  $P_n \gg P_e$  et également  $(m_e x_e)^4 = (m_p x_p)^4 \ll \frac{4}{5} m_n^4 x_n^5$ . Alors au seuil du dominance de  $P_n$  on trouve que

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{m_n}{m_p} x_n^{5/4} \approx \frac{m_n - m_p}{m_p} + \frac{1}{2} \frac{m_n}{m_p} x_n^2 \quad (16.16)$$

On suppose que  $x_n^2$  est la terme la plus petite (car  $x_n \ll 1$ ) et on obtient

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{1/4} \frac{m_n}{m_p} x_n^{5/4} \approx \frac{m_n - m_p}{m_p} \quad (16.17)$$

$$x_n \approx \left(\frac{m_n - m_p}{m_n} \left(\frac{5}{4}\right)^{1/4}\right)^{4/5} \approx 5 \times 10^{-3} \quad (16.18)$$

$$x_p \approx \frac{m_n - m_p}{m_p} \approx 1 \times 10^{-3} \quad (16.19)$$

$$x_e \approx \frac{m_n - m_p}{m_e} \approx 2.6 \quad (16.20)$$

$$n_n = 6 \times 10^{32} \text{ cm}^{-3} \quad (16.21)$$

$$n_p = 1 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3} \quad (16.22)$$

$$n_e = 1 \times 10^{31} \text{ cm}^{-3} \quad (16.23)$$

$$\rho = n_n m_n + n_p m_p + n_e m_e \approx n_n m_n \quad (16.24)$$

$$= 9 \times 10^8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (16.25)$$

## 16.2 Interaction nucléaire dans les étoiles à neutrons

1. Calculer le rayon d'une étoile à neutron et une naine blanche pour  $M \sim M_\odot$ .

Commençons par le théorème du viriel  $3PV + E_g = 0$ , alors  $P = -\frac{E_g}{3V} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}$ . La pression est donnée  $P = \frac{K}{m} n^{5/3}$  pour un gaz non-relativiste.

On considère d'abord l'étoile à neutron, où  $n_n = \frac{e}{m_n} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_n}$ , et pour une naine blanche  $n_e = Z \frac{e}{Am_b} = \frac{Z}{A} \frac{3M}{4\pi R^3 m_b}$ .

Le rapport peut donc être calculer et car on sait que le rayon pour la naine blanche est  $10^{-2} R_\odot$ , on peut calculer le rayon de cette étoile, et c'est à l'ordre de 10km!

Pour une étoile à neutrons,  $\frac{GM}{Rc^2} \approx 0.2$  alors il faut utiliser les calculs du relativité générale. Pour une naine blanche, ce quantité est  $\sim 10^{-3}$  et pour le soleil  $\sim 10^{-6}$ .

# Chapter 17

## 24/11/14 — PC 9 — Statistique nucléaire

La densité des particules en général (relativiste) est donnée par

$$\frac{dn}{dp} = \frac{4\pi g}{\hbar^3} \frac{p^2}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \pm 1} \quad (17.1)$$

où  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . Pour les bosons,  $g = 2$  et on utilise  $-$  dans le dénominateur, et les Fermions  $g = 2s + 1$ ,  $+$ . Par exemple, pour les photons  $\mu = 0, E = pc$  et on trouve toutes les relations normales. Pour les fermions en général, il faut considerer dans quelle régime nous sommes. Relativiste vs. non-relativiste,  $pc \gtrless mc^2$ , dégénéré vs. non-dégénéré,  $kT \gtrless \mu$ . Par exemple, les fermions non-relativistes non-dégénérés on trouve la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$\frac{dn}{dE} = \frac{gm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} (E - mc^2)^{1/2} e^{-\frac{E-\mu}{kT}} \quad (17.2)$$

On peut calculer les densités, les énergies et les pressions alors. Pour les fermions dégénérés,  $kT \gg E - \mu$ , et alors la distribution devient un fonction en escalier  $\Theta(E - \mu)$ .

### 17.1 Equilibre statistique nucléaire

1. *A l'équilibre de la réaction  $n, p \leftrightarrow (A, Z) + \gamma$  quels sont les fractions de masse en fonction de l'énergie de liason du noyau?*

La réaction  $n, p \leftrightarrow (A, z) + \gamma$  est en équilibre si et seulement si les potentiels chimiques sont égales, qui est

$$(A - Z)\mu_n + Z\mu_p = \mu_A \quad (17.3)$$

On le remplace dans la distribution de Fermi-Dirac pour les  $n_A$ , où  $B_A$  est l'énergie de liason

$$n_A = g_A \left( \frac{m_A kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{(A - Z)(\mu_n - m_n c^2) + Z(\mu_p - m_p c^2) + B_A}{kT} \right) \quad (17.4)$$

$$= n_n^{(A-Z)} n_p^Z \frac{g_A}{2^A} \left( \frac{m_A}{m_n^{A-Z} m_p^Z} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}(1-A)} e^{\frac{B_A}{kT}} \quad (17.5)$$

où  $g_p = g_n = \frac{1}{2}$ . D'ici c'est facile d'obtenir les fractions de masse selon les  $n_A, n_p, n_n$ .

On trouve que pour les atomes gros,  $n_a \propto T^{-A+1}$  alors ça change beaucoup avec la temperature. C'est car les photons photo-dissocient les atomes.

2. *Analyser un diagramme.*

Pour verifier qu'on est non-relativiste, on compare l'énergie cinétique à  $mc^2$ , et pour verifier qu'on est non-dégénéré on compare  $kT_F$  à la température du gaz.

### 17.2 Nucléosynthèse primordiale

En fonction de la temperature, les éléments plus lourds qui ont l'énergie de liason la plus petite pour un rapport particulier des concentrations des protons et des neutrons dominent les temperatures froides, les protons/neutrons dominent les temperatures

chaudes (car tout est dissocié), et  $\text{He}^4$  domine dans les températures intermédiaires car il est l'atome de l'énergie de liaison la plus haute de tous atomes légers.

L'échelle dynamique du temps est donnée par  $t_{dyn} = \left| \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \right|^{-1}$ , et car  $T \propto t^{-\frac{1}{2}}$  on trouve que  $t_{dyn} = 2t = 360sT^{-2}$ .

*A quelle température commence la réaction  $p + n \leftrightarrow D + \gamma$ ?*

On commence avec  $\tau = \left| \frac{1}{n_p} \frac{dn_p}{dt} \right|^{-1}$  où  $n_p$  peut être n'importe lequel de  $p, n$ , et  $\tau' = \left| \frac{1}{n_D} \frac{dn_D}{dt} \right|^{-1}$  la dissociation. Alors la réaction commence si  $\tau > \tau'$ . On peut calculer les temps caractéristiques comme

$$\frac{dn_p}{dt} = -n_p n_n \langle \sigma v \rangle_{pn} \quad (17.6)$$

etc.