Groupes de Symétrie en Physique
Salle 66 Tu 1330 — 1800
Denis Bernard et David Renard

Yubo Su

Contents

Chapter 1

Les notes du livre

1.1 Petites démonstrations

- **Prop:** Soit (ρ, V) une représentation finie de G. On peut munir V d'un produit hermitien qui rend (ρ, V) unitaire.

  Dém: Soit $(x|y)_0$ un produit hermitien quelconque. Alors le produit

  $$(x|y)_1 = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} (\rho(g) \cdot x | \rho(g) \cdot y)_0 \tag{1.1}$$

  rend (ρ, V) unitaire.

- **Prop:** Une représentation irréductible (ρ, V) d'une groupe finie G est de dimension finie.

  Dém: Soit $x \in V$ et $W = \{\rho(g) \cdot x, g \in G\}$. W est stable par ρ car $\rho(g_1) \cdot (\rho(g_2) \cdot x) = \rho(g_1 g_2) \cdot x \in W$. Alors $W = V$ et $\dim V = \dim W = \dim G$.

- **Prop:** Soit (ρ, V) une représentation finie de G. Soit $W \in V, \rho(g) \cdot W \in W$. Alors $V = W + W'$.

  Dém: On peut munir V d'un produit hermitien qui rend (ρ, V) unitaire. Alors $W^\perp$ reste orthogonal à W par

  $$\rho \left[\rho \cdot \left(W^\perp\right) \perp \rho \cdot W\right] \tag{1.2}$$

  alors $W^\perp$ est stable.

- **Prop:** Soit T une opérateur d'entrelacement (ρ, V) et (τ, W). Si $(\rho, V), (\tau, W)$ ne sont pas équivalentes $T = 0$. Si oui, $\dim(\mathrm{Hom}_G(V, W)) = 1$ où $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{c\mathrm{Id}_v, c \in \mathbb{C}\}$. C'est la *lemme de Schur*.

  Dém: Si ce sont pas équivalentes, T n'est pas bijectif, $\ker(T) \neq \emptyset$ mais car il est irréductible $\ker(T) = V, T = 0$.

  S'il sont équivalentes, on note $T(\rho(g) \cdot v) = \rho(g) \cdot T(v) = \lambda \rho(g) \cdot v$ et alors $T(\forall v \in V) \sim \lambda v, T = \lambda \mathrm{Id}_v$. Alors, car V est équivalente à W, $\mathrm{Hom}(V, V) \to \mathrm{Hom}(V, W)$ leurs dimensions sont égales aussi.

- **Ex. 2.2.4:** Un morphisme de groupe continue $\phi : \mathbb{R} \to GL(n, K)$ est differentiable et est de la forme $\phi(t) = \exp(tX)$ soit $X \in M_n(K)$.

  Dém: $\phi'(t) = \dfrac{\phi(t+\delta) - \phi(t)}{\delta} = \phi(t) \left[\dfrac{\phi(\delta) - \phi(0)}{\delta}\right]$ doit exister parce que ϕ est continu. L'appelons X, alors $\phi(t) = X\phi(t), \phi(t) = \exp(tX)$.

- **Prop:** Soit h, e, f une ase pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Soit $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(V)$. Soit λ la valeur propre d'un $v \in V$ sous $\phi(h)$. Alors $\phi(e[f]) \cdot v \sim \lambda + 2[-4]$

  Dém: C'est la même démonstration pour les deux, alors

  $$\begin{aligned} \phi(h)\phi(e) \cdot v &= \phi(e)\phi(h) \cdot v + \phi([h, e]) \cdot v && (1.3)\\ &= \phi(e)\lambda \cdot v + 2\phi(e) \cdot v && (1.4)\\ &= (\lambda + 2)\, \phi(e) \cdot v && (1.5) \end{aligned}$$

1.2 Groupes, Actions de groupe, représentations

1.2.1 Les groupes et les actions de groupe

Une action de groupe est une morphisme $A : G \to \mathrm{Aut}(X)$, est une représentation est une morphisme $A : G \to GL(V)$ ou X est une ensemble et V un espace vectoriel. Quelques exemples des groupes:

- $GL(V) = \mathrm{Aut}(V)$ — Les bijections qui préservent la structure tel que $f(gh) = f(g)f(h)$.
- $U(V)$ — Les bijections qui préservent le produit hermitien sur $\mathbb{C}^n = V$.
- $O(V)$ — Les bijections q i préservent le produit scalaire $\langle x, y\rangle = x_i y_i$. Une sous-classe est les bijections $O(p, q)$ qui préservent la forme bilinéaire symétrique $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q}$.
- $SL(V)$ — Le sous-espace de $GL(V)$ tel que $\det g = 1$. Aussi, $SO(V) = SL(V) \cap O(V)$.
- $Sp(V, \omega)$ — Le produit $\omega(x, y)$ anti-symétrique, tel que $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$.

Le *groupe de Heisenberg* est une group $H(V, \omega) = V \oplus \mathbb{R}$ ou $V = \mathbb{R}^{2n} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Une représentation matricielle de ce groupe est donné par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \vec{x} & \vec{y} & z \\ 0 & 1 & 0 & \vec{y} \\ 0 & 0 & 1 & -\vec{x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

ou $z \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Les représentations

Une *représentation* est une ρ tel que $\rho : G \to GL(V)$. Si $\rho : G \to U(V)$ on dit que ρ est unitaire. La dimension d'une représentation est la dimension de l'espace vectoriel, $\dim \rho = \dim V$.

Si une $W \in V$ éxiste tel que $\forall g \in G : \rho(g) \cdot W \in W$, W est invariant par ρ et on appelle (ρ_ω, w) une *sous-représentation*. On dit que (ρ, V) est *irréductible* si les seules sous-représentations de (ρ, V) sont V et $\emptyset$. On dit que (ρ, V) est complètement réductible si $(\rho, V) = \oplus_i(\rho_i, w_i)$ avec w_i irréductible.

Soit $(\rho, V), (\tau, W)$ deux représentations du groupe G. On appelle $T : V \to W$ un *opérateur d'entrelacement* si $T(\rho(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot T(V)$. Un opérateur d'entrelacement est aux représentations ce qu'une changement de base est aux espaces vectoriel. Si T éxiste, on dit que (ρ, V) est *isomorphe* à (τ, W), et $\tau(g) = T \cdot \rho(g) \cdot T^{-1}$.

Aussi, il faut noter que $\ker(T)$ est invariant par ρ et que $\mathrm{Im}(T)$ est invariant par τ. Une démonstration de ces deux point suit. Notons que $T(\rho(g) \cdot v) = \tau(g) \cdot T(v) = 0$. Aussi, appelons v' l'élément $\rho(g) \cdot v \in V$, alors $\tau(g) \cdot T(v) = T(v') \in \mathrm{Im}(T)$.

On appelle une *représentation contragrédiente* $\tilde{\pi}$ tel que $(\tilde{\pi}(g) \cdot \lambda)(v) = \lambda(\pi(g)^{-1} \cdot v)$ ou $\lambda \in V^*, v \in V$ ou V^* est le dual de V.

Car la réduction complète n'est pas unique, on introduit la *décomposition canonique*. Soit δ une "classe" de représentations irréductible de V. Alors $V_\delta = \oplus \{V_i \in \delta\}, V = \oplus V_\delta$. On note aussi que $\dim \mathrm{Hom}(V_\delta, V)$ est la multiplicité des i dans δ.

On peut démonstrer ça par cet argument. Clairement $\mathrm{Hom}(V_\delta, \oplus_i V_i) = \mathrm{Hom}(V_\delta, \oplus_{i\in\delta} V_i = \oplus_{i\in\delta} \mathrm{Hom}(V_\delta, V_i)$. Alors car $\mathrm{Hom}(V_\delta, V_i) = 1$ si $i \in \delta$, $\dim \mathrm{Hom}(V_\delta, V)$ est égale à la multiplicité des i dans δ.

1.2.3 Les groupes topologiques

Une *groupe topologique* est un groupe tel que les opérations de la multiplication et de l'inverse sont continues. On appelle un groupe topologique *localement compact* s'il est approximativement dense et compact sur une aire finie.

Pour ces groupes, il faut introduire la mesure de Haar, qui est invariant par translation à gauche ou à droite. Seulement si G est complètement compact, gauche = droite. Par exemple, si $G = U(1) = z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, la mesure de Haar est $\dfrac{dz}{2\pi i z}$.

1.3 Groupes linéaire et leurs algèbre de Lie

Soit $M_n(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ les matrices de dimension n sur $\mathbb{K}$. Définit $|M_n| = \sup \dfrac{|M_n x|}{|x|}$ ou $x \in \mathbb{K}^n$ et aussi $\exp M_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M_n)^n}{n!}$. On appelle un groupe linéaire un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K}$.

1.3.1 Algèbre de Lie

On commence avec l'idée d'un espace tangent. g est tangent à G en l'identité si $\forall x \in g$, il existe $a(t) : \mathbb{K} \to M_n(\mathbb{K})$ (la co-domaine d'$a(t)$ est G) tel que $a(0) = \mathrm{Id}$ et $a'(0) = x$.

Alors si on a un crochet $[X, Y]$, le sous-algebre de Lie de L est stable par ce crochet, $[L, L] \to [L]$ et satisfait $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ l'identité de Jacobi. L'algèbre de lie de $GL(\mathbb{K}^n)$ est $gl(n, \mathbb{K})$. L'espace tangent en lídentité d'un groupe G est un algèbre de Lie, et en faite c'est l'algèbre de Lie unique.

On appelle cet algèbre de Lie les générateurs infinitésimaux car $\exp Cg \in G \forall C \in \mathbb{R}$, ou autrement dit g engendre G par l'exponentiel. On dit que Gest connexe si G est engendré par toute voisinage U des éléments dans g.

Soit $f : G \to H$ une morphisme de groupes, alors $\phi : h \to h$ est aussi une morphisme d'algèbres de Lie tel que $\phi = df_{Id}$. De plus, f est localement bijectif si ϕ est isomorphe.

1.3.2 Revêtements et représentations projectives

On appelle $\rho : \tilde{G} \to G$ qui est localement bijectif une *revêtement*. Et si une morphisme d'algèbre de Lie $\phi : g \to h$ existe, il existe une revêtement $\rho : \tilde{G} \to G$ tel que $f : \tilde{G} \to H$ est une morphisme de groupes.

On appelle la complexification $E_c = E \otimes \mathbb{C}$ d'un espace réel E tel que $\dim E = \dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}}$.

On appelle une représentation adoint la représentation de X tel que $X \cdot x = xXx^{-1}$ ou $x \in g, X \in G$. Le differentiel de Ad est ad tel que $\mathrm{ad}(X) \cdot Y = [X, Y]$, alors ad est une représentation de g dans elle-même.

Finalement, les représentation projectives sont les fonctions $\rho : G \to GL(V)$ tel que $\rho(g)\rho(h) = c(g, h)\rho(gh)$. Notons que si $c(g, h) = 1 \forall g, h$ qu'il s'agit d'une représentation. C'est facile de montre que $c(g_1, g_2)c(g_1 g_2, g_3) = c(g_2, g_3)c(g_1, g_2 g_3)$ est satisfait par $c(g, h)$, la *relation de cocycle*. En plus, soit $\tilde{G} = G \times A : (g, z)(g', z') = (gg', zz'c(g, g')$, alors $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to GL(V)$, ou $\tilde{\rho}(g, z) = z\rho(g)$, est une reprśentation.

1.4 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathbf{SU}(2), \mathbf{SO}(3)$

1.4.1 $\mathbf{SU}(2)$ comme revêtement de $\mathbf{SO}(3)$

Notons que $\mathbf{SU}(2) = \left\{a \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C}), a^\dagger a = 1, \det a = 1\right\}$ et $\mathbf{SO}(3) = \left\{a \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}), a^\dagger a = 1, \det a = 1\right\}$. Alors leurs algèbres de lie sont $\mathfrak{su}(2) = \left\{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}), x^\dagger + x = 0, \mathrm{Tr} x = 0\right\}$ et $\mathfrak{so}(3) = \left\{x \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}), x^\dagger + x = 0, \mathrm{Tr} x = 0\right\}$. Plus explicitement,

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{\begin{vmatrix} \alpha & -\beta^* \\ `b & \alpha^* \end{vmatrix}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\right\} \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{\begin{vmatrix} iz & -y + ix \\ y + ix & -iz \end{vmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{\begin{vmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & x \\ -y & -x & 0 \end{vmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \tag{1.9}$$

Alors on trouve une base pour $\mathfrak{su}(2)$, à savoir

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right\} \tag{1.10}$$

On peut trouver un produit tel que $\omega(I, I) = \omega(J, J) = \omega(K, K) = 1$, à savoir $\omega(X, Y) = -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\right)$. Alors $\left(\mathfrak{su}(2), -\frac{1}{8}\omega\right)$ est isomorphe à R^3.

Donc on a la représentation adjointe $\mathbf{SU}(2) \to O(\mathfrak{su}(2), \omega)$, et car $O(\mathfrak{su}(2), \omega) \simeq \mathbf{SO}(3)$ on trouve la représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ et alors $\mathbf{SU}(2)$ est une revêtement de $\mathbf{SO}(3)$ ($\mathfrak{su}(2) \sim \mathbb{R}^3 \sim \mathfrak{so}(3)$.

1.4.2 Représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Rappelons que $\mathfrak{su}(2)$ était paramétrisé par $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, alors la complexification $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C}$ est appelée $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Alors c'est équivalent d'étudier $\mathfrak{su}(2)$ sur l'espace $\mathbb{C}$ d'une représenttation R-linéaires ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

On introduit une base pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}$ (ça veut dire les coefficients complexes). Les notons h, e, f. On calcule $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$.

Soit $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$. On trouve que $\phi(e), \phi(f)$ agit comme les opérateurs d'échelle. Notons V_λ le sous-espace de V à valeur propre λ. Car ϕ est de dimension finie, il y a une nombre finie de V_λ non nuls. On peut calculer simplement que

$\phi(e) \cdot v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}$. Donc $V_{\lambda_0+1} = \emptyset$ dans cette échelle. Alors, si V est irréductible on trouve que $\dim_{\mathbb{C}} V = \lambda_0 + 1$. Les V_i engendrent V qui est stable par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Appelons cette représentation $(\phi_n, \mathbb{C}^{n+1})$.

Une exemple de ce groupe est les polynômes en deux variables $\mathbb{C}[z_1, z_2]$. Definissons $D_e, D_f, D_h = -z_2\partial_1, -z_1\partial_2, z_2\partial_2 - z_1\partial_1$; c'est la représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[z_1, z_2]$. C'est isomorphe à $(\phi_n, \mathbb{C}^{n+1})$ dans la base z_1^k, z_2^{n-k}.

Aussi, $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ agit naturellement aussi, $\rho(g) : (z_1, z_2) \to g^{-1}(z_1, z_2)$. Si on aux représentations de $\mathbf{SU}(2) \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$, et alors $\mathbf{SU}(2)$ est isomorphe à $(\phi, \mathbb{C})_n$ qu'on appele (π_n, V_n) (seulement la représentation du sous-groupe $\mathbf{SU}(2)$).

1.4.3 Les harmoniques sphériques, l'opérateur de Casimir

On appelle les *harmonique sphériques* les solutions de l'équation $\nabla^2 f = 0, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\not\models}, \mathbb{C})$.

Notons $\Omega_\rho = \dfrac{1}{4}\left(\rho(I)^2 + \rho(J)^2 + \rho(K)^2\right)$ (I, J, K sont les éléments de la ase) l'*opérateur de Casimir.* On trouve que $\nabla^2 = \partial_r^2 + \dfrac{2}{r}\partial_r + \dfrac{1}{r^2}\Omega_\rho$, ou Ω_ρ dans les coordonées sphériques est égal à $\partial_\theta^2 + \cos\theta\partial_\theta + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2$.

Notons $P_l(X, Y, Z) = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma, \alpha + \beta + \gamma = l$ les monomes de puissance total l, on voit que la dimension de P_l est $\displaystyle\sum_{k=0}^{l}(k+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$. Notons aussi H_l le sous-espace de P_l harmoniques.

On examine au debut les valeurs propres de H_l; appelons $E = r\partial_r$ l'opérateur d'Euler, alors $\Omega_\rho = r^2\nabla^2 - E^2 - E$. C'est clair que les éléments de P_l sont des fonctions propres de E à valeurs propres l. Pour les éléments de H_l, ∇^2 n'agit pas à eux et donc les H_l ont les valeurs propres $-l^2 - l = -l(l+1)$.

On voit aussi que H_l est une représentation irréductible de $\mathbf{SO}(3)$ car $P_l = H_l \oplus r^2 P_{l-2}$. On voit la dernière égalité en examinant $\nabla^2 P_l$, parce que si ce n'est pas égal à 0 c'est envoyé vers P_{l-2}, et si c'est égal à 0 c'est une élément de H_l. Ca montre que $P_l = H_l \oplus r^2 H_{l-2} \oplus \dots$, une relation qui montre le lien à $\mathbf{SO}(3)$.

1.5 Symétries en mecanique quantique

1.5.1 Les translations et rotations

Soit T_α l'opérateur de translation par $\vec{a}$, donc $T_{\vec{a}} = \exp\left(-i\vec{a} \cdot \vec{P}\right), [P_i, P_j] = 0$. Aussi, pour les rotations, $R_{\vec{n};\alpha} = \exp\left(-i\alpha\vec{n} \cdot \vec{J}\right), [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$.

On note que l'espace $L^2(\mathrm{R}^3) = L^2(\mathrm{R}_+ \otimes L^2(S^2)$, où S^2 est le surface du sphère du rayon 1. De plus, Y_l^m les harmoniques sphériques forment une base de S^2. Alors chaque Y_l^m supporte une représentation irréductible $R_l^{SO(3)}$ de dimension $2l + 1$, enfin

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \bigotimes_{l=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+) \otimes R_l^{SO(3)} \tag{1.11}$$

Les harmoniques sphériques sont des polynômes de degrés l. La dimension de l'espace $\dim P_l = \dfrac{(l+1)(l+2)}{2}$, mais car $r^2 Y_{l-2} \in Y_l$ forme une sous-représentation donc chaque Y_l^m soi-même supporte une dimension $2l + 1$.

1.5.2 Représentations projéctives

Si on a une g qui agit sur $\mathcal{H}$ par $U(g)$, on a deux possibilités pour $U(g_1 g_2)$. Si $U(g_1 g_2) = U(g_1)U(g_2)$, c'est une représentation toute simple, on peut examiner l'algèbre de Lie.

Mais on peut aussi avoir $U(g_1 g_2) = U(g_1)U(g_2)\Omega(g_1, g_2)$. Si $\Omega(g_1, g_2) = \exp\left(i\left(\eta(g_1) + \eta(g_2) - \eta(g_1 g_2)\right)\right)$ on trouve un coycle trivial, et on peut simplement redéfinir $U \to \hat{U}(g) = U(g)e^{i\eta(g)}$ qui devient une représentation. Sinon, c'est ce qu'on appelle une *représentation projective.*

Une exemple est $SO(2) \simeq U(1)$. Posons $D_j(e^{i\pi x} = e^{2\pi i j x}$. Pour $j = \dfrac{1}{2}$ ce n'est pas une application. Choissons $\hat{D}_j(e^{i2\pi x} = e^{2\pi i j \overline{x}}$ où $\overline{x} = x - E(x)$. Comme ça on trouve que

$$\hat{D}_j(x)\hat{D}_j(y) = \underbrace{e^{i2\pi(E(x+y)-E(x)-E(y))j}}_{\Omega(x,y)}\hat{D}_j(x+y) \tag{1.12}$$

Car $E(x)$ n'est pas une application sur $U(1)$ on a une représentations projective, $\Omega(x, y)$. n'est pas une application sur $U(1)$ on a une représentations projective, $\Omega(x, y)$.

En général, pour $j = \dfrac{p}{q}$ on trouve que $\Omega(x, y)$ est une q-ième racine de l'unité. Donc si on extend $U(1) \to U(1) + \mathbb{Z}(q) \simeq \mathbb{R}$ c'est une revêtement et une représentation.

Une autre exemple est $SO(3) \simeq SU(2)$. Les élément de $SO(3)$ sont déterminées par $(\vec{n}, \alpha)$ où $|\vec{n}|^2 = 1, \alpha \in [0, \pi]$ (parce que $(\vec{n}, \alpha) = (-\vec{n}, -\alpha)$). Aussi, $SU(2)$ agit sur les matrices X par conjugaison $X \to UXU^\dagger$, qui est une rotation ($\det(UXU^\dagger = \det X$, la définition d'une rotation).

Alors si on écrit $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ (rappelons que X est une matrice 2×2), on trouve que $UXU^\dagger = (R_u \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\sigma}$. Donc il y a une correspondence entre U, R_u jusqu'à une signe. ou également il y a une morphisme entre $U \in SU(2), R_u \in SO(3)$. Le noyau de cette morphisme est ± 1 car $\pm U$ sont envoyés au même R_u. Donc $\frac{SU(2)}{SO(3)} \simeq \mathbb{Z}(2)$. Il faut noter que $SU(2)$ est une représentation du spin $\frac{1}{2}$ est que $SO(3)$ est la représentation projective de ceci.

1.5.3 Les symétries dans les dynamiques

Si un groupe est un groupe de symétrie des dynamiques, $[H, U(g)] = 0 \forall g \in G$. Le théorème de Ehrenfest dit donc qu'une telle symétrie correspond à une loi de conservation. Autrement dit, les dégeneracies correspond aux symétries.

Par conséquence de le lemme de Schur, on voit que si une représentation D est irréductible, alors toutes endomorphismes S qui commutent avec D sont une multiple de l'identité.

Soit alors $H = \bigoplus_\lambda \bigoplus_{i=1}^{m_\lambda} R_\lambda^{(i)}$ avec λ qui fait reférence aux représentations differentes de G et m_λ la multiplicité de chaque représentation. Alors $U(g)$ est bloc-diagonal dans chaque espace $R_\lambda^{(i)}$.

On peut chosir la base $W_\lambda = \left\{e_\lambda^i\right\}, i \in [0, m_\lambda]$. Pour chaque λ, $e_\lambda^i \otimes R_\lambda \simeq R_\lambda^{(i)}$ et alors on peut aussi écrire $H = \bigoplus_\lambda W_\lambda \otimes R_\lambda$, la décomposition canonique.

On voit que H est bloc-diagonal sur les blocs W_λ, C'est naturel suivant le lemme de Schur, car $[U, H] = 0$, et il n'y a ue des éléments liant les W_λ, les représentations équivalentes.

On sait aussi que les états de λ different ne passe aux autres λ, ce qu'on appelle les règles de sélection. Après ça, on peut finalement écrire l'hamiltonien comme $H = h_\lambda W_\lambda \otimes R_\lambda$, h_λ qui agit sur le sous-espace W_λ.

1.6 Les groupes de Lorentz, de Poincarè, et l'équation de Dirac

1.6.1 Le groupe et la transformation de Lorentz

Le *groupe de Lorentz* est $\mathbf{O}(1,3)$. Notons $\eta = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ la *métriuqe Minkowskienne*, et soit X, Y les *quadri-vecteurs* tel que $X \cdot Y = \eta(X, Y)$.

La transformation de Lorentz est Λ tel que $\eta(\Lambda X, \Lambda Y) = \eta(X, Y)$ où $(\Lambda X)^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$. Par l'unitarité $\det \Lambda = \pm 1$ et donc $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$. Si $\det \Lambda = 1$ la transformation de Lorentz préserve l'orientation; si $\Lambda_0^0 \geq 1$ aussi la transformation préserve la fleche du temps. Chaque signe de $\det \Lambda, \Lambda_0^0$ correspond à un groupe simplement connexe. $\Lambda_>^+$ contient la parité et $\Lambda_<^-$ contient l'opérateur du renversement de temps.

Les rotations sont comme $\mathrm{diag}(1, R_z)$ autour l'axe z et les boost sont $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & -\sinh\alpha \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}$; les deux sont $\in \Lambda_>^+$.

On peut les développer comme $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon\omega^\mu_\nu + O(\epsilon^2)$ et on trouve que

$$\omega^\mu_\rho \eta_{\mu\sigma} + \eta_{\rho\nu}\omega^\nu_\sigma = 0 \tag{1.13}$$

où $\omega_\mu \nu = \eta_{\mu\sigma}\omega^\sigma_\nu$. Donc $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique et engendre les transformation de Lorentz. Alors la dimension du groupe de Lorentz et 6 car la dimension des matrices antisymétrique 4×4 est 6.

Notons $J_{x,y,z}, K_{x,y,z}$ les générateurs des rotations et des boosts. Les nouvelles commutateurs (on connait déjà les commutateurs des $J_{x,y,z}$) sont

$$[J_x, K_y] = iK_z \tag{1.14}$$
$$[K_x, K_y] = iJ_z \tag{1.15}$$

On peut écrire aussi $J_\mu^{[\sigma\rho]}\nu = i\left(\delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu - \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu\right)$ (car $J^{\sigma\rho} = i\left(X^\sigma \partial^\rho - X^\rho \partial^\sigma\right)$). La base antisymétrique est contenue dans cette expression.

1.6.2 $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ comme revêtement de $\mathbf{SO}(1,3)$

Soit la base $\sigma_0 = 1, \sigma_i$ les matrices de Pauli, et $\sigma = (\sigma_0, \vec{\sigma})$ la quadri-vecteur des matrices de Pauli. On associe à chaque quadri-vecteur $X \to s_\mu X^\mu$ une matrice 2×2 qui est hermitienne $\det(\sigma_\mu X^\mu) = X \cdot X = 1$.

$\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ agit sur X par $X \to UXU^{-1}$. Chaque $\pm U \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ est associé à une transformation Λ_μ, et alors les transformations de Lorentz ($\mathbf{SO}(1,3)$) correspond à une matrice de $\mathbf{Sl}(2, \mathbb{C})$ jusqu'à une signe. Autrement dit, $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbf{SO}(1,3) \simeq \mathbb{Z}_2$.

1.6.3 Le groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est simplement $\mathbf{O}(1,3) \otimes \mathbb{R}^4$ avec $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$. Soit $T_{\vec{a}}$ un opérateur de translation. On trouve que $\Lambda T_{\vec{a}} \Lambda^{-1} = T_{\lambda \cdot \vec{a}}$, et alors ils ne commutent pas.

Soit $M(\Lambda, \vec{a}), M(\Lambda', \vec{a}\,')$ des éléments du groupe de Poincaré, on a $M(\Lambda, a) M(\Lambda', \vec{a}\,') = M(\Lambda\Lambda', \vec{a} + \Lambda \cdot \vec{a}\,')$ représenté par $M(\Lambda a) = \begin{bmatrix} \Lambda & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Les relations de commutation entre P_μ les générateurs de translation et $J^{[\rho\sigma]}$ sont

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{1.16}$$
$$\left[J^{[\rho\sigma]}, P_\mu\right] = -i\left(\delta^\sigma_\nu P^\rho - \delta^\rho_\nu P^\sigma\right) \tag{1.17}$$

1.6.4 Les représentations du groupe de Poincaré

On construit les représentations du groupe Lorentz par complexification $\mathbf{SO}(1,3)_\mathbb{C} = \mathbf{SL}(2)_\mathbb{C} \oplus \mathbf{SL}(2)_\mathbb{C}$. Si on écrit $M_i, N_i = \frac{1}{2}\left(J_i \pm i K_i\right)$ on trouve les relations de commutation

$$[M_j, M_k] = i\epsilon_{jkl} M_l \tag{1.18}$$
$$[N_j, N_k] = i\epsilon_{jkl} N_l \tag{1.19}$$
$$[M_j, N_k] = 0 \tag{1.20}$$

et donc M_j, N_k engendre les deux sous-espaces de $\mathfrak{sl}(2)_\mathbb{C}$.

Rappelons que si ρ_v, ρ_w sont deux représentations de $\mathfrak{sl}(2)_\mathbb{C}$, une représentation de $\mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C}$ est tel que

$$\rho_{v\otimes w}\begin{pmatrix} M_i \\ N_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_v(M_i) \otimes 1 \\ 1 \otimes \rho_w(N_j) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Les ρ_v, ρ_w sont indexées par n qui est $2\times$ le spin (rappelons que $\phi(e,f,g)$ changent la valeur propre par 2 et donc les valeurs propres paires et impaires restent paires et impaires respectivement). Alors les représentations du spin sont $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ sur l'espace $\mathbb{C}^{m+1} \otimes \mathbb{C}^{n+1}$ les deux spins.

1.6.5 L'équation de Dirac

Dans les traitements traditionels de l'équation de Dirac on trouve qu'elle décrit “étrangement” une particule de spin une-demie, et on commence avec les axiomes de la mécanique quantique. Ici, on part de l'autre direction, et on montre que selon les règles de la théorie des groupes l'équation de Dirac est tout naturelle, une conséquence de la covariance de χ par les boosts.

On considère un spineur de Dirac $\chi = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}$ qui éxiste dans l'espace $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ce spineur dépend sur le référentiel et l'impulsion, donc on le note $\chi(P)$ un fonction de l'impulsion. Notons P^* l'impulsion dans le référentiel du centre de masse, alors $\chi_L(P^*) = \chi_R(P^*)$ par la parité dans le référentiel du CM.

On change le référentiel comme

$$\chi(P) = \exp\left(\pm\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_{R,L}(P^*) \tag{1.22}$$

Si on combine les deux équations, on trouve (rappelons que $\chi_R(P^*) = \chi_L(P^*)$) que

$$\exp\left(-\alpha\vec{\nu}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_R(P) = \chi_L(P) \tag{1.23}$$
$$\exp\left(\alpha\vec{\nu}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_R(P) = \chi_R(P) \tag{1.24}$$
$$\exp\left(\alpha\vec{\nu}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cosh\alpha + (\sinh\alpha)\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \tag{1.25}$$
$$\begin{pmatrix} -m & p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_R(P) \\ \chi_L(P) \end{pmatrix} = 0 \tag{1.26}$$

Cette équation est dans la base de Weyl; les matrices de Dirac se retrouvent comme $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$ et finalement

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)\chi(P) = 0 \tag{1.27}$$

l'équation de Dirac.

1.6.6 Les représentations du groupe de Poincaré

C'est un peu trop difficile de considerer directement les représentations du groupe de Poincaré comme avant, alors on considère d'abord les opérateurs de Casimir. Rappelons que tous sous-espaces irréductibles ont la même valeur propre sous l'action de l'opérateur de Casimir.

Le premier tel opérateur est $P^2 = P_\mu P^\mu$ avec valeur propre m^2. Les deux classes de l'espace sont lesquelles avec $m^2 = 0$ et $m^2 \neq 0$.

Le deuxième tel opérateur est un peu plus difficile à trouver, c'est $W_\mu W^\nu, W^\nu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{[\rho\sigma]}$, ou également $W_0 = -\vec{P}\cdot\vec{J}, \vec{W} = -P_0\vec{J} + \vec{P}\times\vec{K}$.

Quelles sont les valeurs propres de cet opérateur? Si $m^2 \neq 0$ on sait que chaque opérateur de la même masse m est liée par une transformation de Lorentz. Alors on peut toujours trouver le référentiel où l'impulsion est nulle et consider que ce référentiel. Dans ce réferentiel, $W_0 = 0, \vec{W} = -m\vec{J}$ et alors car les valeurs propres sont indépendantes du référentiel on trouve que les valeurs propres de ce deuxième opérateur sont $s(s+1)$. Donc pour les particules massives on voit qu'il y a une base $|m; l, s\rangle$ de la masse et du spin.

Pour les particules non-massives on trouve que le deuxième opérateur est de valeur propres 0 par les éxperiences, et dans ce cas on peut trouver un référentiel où $W = \lambda P$ ou λ est le helicité. La base pour ces particules est donc $|p, \lambda\rangle$ avec p l'impulsion.

1.7 Invariance Conforme en Physique

1.7.1 Les transformations conformes en physique classique en 2D

On représente $(x, y) \to z \in \mathbb{C}$. Une trannfsormation conforme est un fonctoion holomorph qui obéit la préservation des argle tel que $f(x, y) = f(z)$ et pas $f(z, \overline{z})$. Autrement dit, soit $z_0 + \delta z, z_2 + \delta z_2 = z_1, z_2$ respectivement, alors l'angle entre $\delta z_1, \delta z_2$ est egàle à laquelle entre $\delta w_1, \delta w_2$. Au prerier ordre donc, $f(z)$ agit comme les rotation et les dialation qui varient de point à point.

Les solutions de $\nabla^2\phi(x, y) = 0$ sont les fonctions harmoniques. Notons $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\overline{z}}$. Toutes fonctions harmonique se décomposent comme $\phi(z, \overline{z}) = \phi(z) + \phi(\overline{z})$, deux parties conforme et anti-conforme. Dans la mécanique des fluids, si la vorticité $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$ et la fluide est incompressible $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ alors $\nabla^2 u = 0$ et le champs de vélocité est harmonique.

1.7.2 En d dimension

Appelons $g_{\mu\nu}$ la métriue tel que $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Sous un difféomorphisme la metrique se transforme comme $\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}g_{\sigma\rho}$. Si ce difféomorphisme est conforme on trouve $g^{\mu\nu} = e^{\phi(x)}g_{\sigma\rho}$ où $\phi(x)$ est le facteur de dialation local.

On condière les transformations infinitésmmales $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$. Alors l'invariance dit après quelques calculs que

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = (\delta\phi)\delta_{\mu\nu} \tag{1.28}$$

$$d\,(\delta\phi) = 2\,(\partial\cdot\xi) \tag{1.29}$$

aver $\delta\phi$ la variation infinitésmale de ϕ après avoir pris la somme. On peut continuer de calculer ξ et on trouve pour $d > 2$

$$\xi_\nu(x) = a_\nu + kx_\nu + \theta_{\nu\sigma}x^\sigma + \left[(b\cdot x)x_\nu - \frac{1}{2}(x\cdot x)b_\nu\right] \tag{1.30}$$

Les quatres termes correspond à la translation, la dialation, la rotation, et les transformations “speciales” respectivement. Les paramètres ont en somme $d + 1 + d + \binom{d}{2} = \binom{d+2}{2}$. Si $d = 2$ on trouve la dimension est infinie avec $z \to z + \epsilon v(z)$ où $v(z)$ est holomorph, alors il y a un infini de choix pour $v(z)$.

1.7.3 Difféomorphisme $\mathbb{S}_1$ et son extension centrale

En $2D$, f est une transformation qui agit sur $\phi(z) \to \phi(f^{-1}(z))$. Si f est proche de l'identité $f(z) = z + \epsilon v(z)$ et on peut écrire

$$(f\cdot\phi)(z) = \phi(z) - v(z)\partial_z\phi(z) \tag{1.31}$$

$$= \delta(v)\phi(z) \tag{1.32}$$

En particulier, si $v(z) = z^{n+1}$ alors $\delta(v) = l_n \equiv -z^{n+1}\partial_z$ sont les générateurs des transformations avec la relation de commutation $[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}$. Ces relations de commutation sont appelées *l'algèbre de Witt*.

L'algèbre de Lie de $\mathbb{S}_1$ est les difféomorphismes infinitésmales $x \to x + \epsilon v(x)$ où $v(x)$ est périodique sur $x \in [0, \pi]$. On trouve la base $l_n = -e^{-inx}\partial_x$ qui obéit l'algèbre de Witt.

L'algèbre de Virasoro ajoute à álgèbre de Witt comme $\oplus c\mathbb{R}$ avec c un élément centrale qui commutent avec toutes autres élémentes. Les nouvelles relations de commutations sont $[\delta(v_1), \delta(v_2)] = \delta([v_1, v_2]) + c\eta(v_1, v_2)$ avec η satisfaisant la cocycle.

1.8 L'espace de Fock, les champs quantiques

1.8.1 L'espace de Fock

On commence avec l'oscillateur harmonique, où $[q, p] = 1$ et $h = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$. Il y a deux opérateurs d'échelle $a, a^\dagger$: $\left[a, a^\dagger\right] = 1$. On peut écrire $h = \omega\left(aa^\dagger + \frac{1}{2}\right)$, avec $\epsilon_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. On trouve une base comme $(a^\dagger)^n |0\rangle$.

Soit V l'espace vectoriel de dimension D avec les opérateurs d'échelles $a(u), a^\dagger(v), u, v \in V$. Ces opérateurs agissent sur un espace de Fock F_v. Notons que

$$F_v = \bigoplus F_v^{(n)} \tag{1.33}$$

$$F_v^{(n)} = \text{Span}\left\{a^\dagger(u_1)\dots a^\dagger(u_n)\,|0\rangle\,, u_i \in V\right\} \tag{1.34}$$

Ces $F_v^{(n)}$ sont les sous-espace avec n paricules. Car $\left[a^\dagger(u), a^\dagger(v)\right] = 0$ les u_i sontt symétriques, alors $F_v^{(n)}$ est isomorphe à $\text{Sym}V^{\otimes n}$. Aussi, on peut exprimer $a_i^\dagger = z_i, a_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ et on trouve une représentation sur les polynomes.

Les opérateurs $N_i = a_i^\dagger a_i$ compte le nombre des bosons dans un état $[N_i, N_j] = 0$. Le fonction partition est

$$Z_v \equiv \text{Tr}_{F_v}\left(q^{\sum_i u_i N_i}\right) = \prod_i^b \frac{1}{1 - q^{u_i}} \tag{1.35}$$

Plus généralement, considérons les opérateurs $\left\{a_i a_j, a_i^\dagger a_j, a_i^\dagger a_j^\dagger\right\}$. Ils preservent la parité de N et forment une algèbre de Lie sp$(2D)$. F_v se décompose en N paires et impaires.

1.8.2 Les Fermions

Les fermions sont exactement pareil avec $[a, a^\dagger] \to \left\{b, b^\dagger\right\}$, et on trouve la principe de Pauli comme ça aussi.

La seule difference c'est que $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_j + b_j^\dagger\right), \gamma_{n+j} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(b_j - b_j^\dagger\right)$ formenht l'algèbre de Clifford tel que les relations de commutations

$$\{\gamma_j, \gamma_i\} = \delta_{i,j} \qquad \{\gamma_j, \gamma_{n+j}\} = 0 \tag{1.36}$$

1.8.3 Les champs Quantiques

Commençons avec $c^2\phi(x,t) = 0$. Imposons les conditions aux limites $\phi(0) = \phi(x = L) = 0$. C'est clair alors qu'il faut décomposer en série de Fourier, $\phi(x,t) = \sqrt{2}Q_n(t)\sin(nx)$. Donc l'équation d'onde devient

$$\partial_t^2 Q_n + n^2 Q_n = 0 \tag{1.37}$$

C'est un oscillateur harmonique de pulsation n. Par quantification, $Q_n \equiv \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(a_n + a_n^\dagger\right)$ et

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_n e^{int} + a_n^\dagger e^{-int}\right)\sin(nx) \tag{1.38}$$

Avec $|0\rangle$, aucun mode n'est excitée; on agit avec $a_n^\dagger$ pour créer des particules. Ce $\phi(x,t)$ agit sur un espace de Fock engendré par $\left\{a_n, a_n^\dagger\right\}$.

Chapter 2

16/09/14 — Introduction, la commence de ma mort

La page web est `http://www.math.polytechnique.fr/~renard/GrSym.html`. Les emails des profs sont `renard@math.polytechnique.fr` et `denis.bernard@ens.fr`.

On doit choisir un sujet et envoyer sa choix au prof. On devra faire un projet sur ça; on peut choisir au plus une partenaire...

La symetrie est très importante pour la théorie de notre âge. Par exemple, il y a des théories (rélativité génerale) qui sont developées en commençant par leurs symetries. *La thèorème de Noether* guarantie qu'il y a des quantités conservé s'il y a une symetrie continuelle.

Quand on parle des structures mathématiques comme un espace, une systéme, un ensemble on utilise X et quand on parle des groupes, bijections ou quelques choses comme ça on utilise G. On appelle e l'élément neutre. La notion de base, c'est une action de groupe a qui est comme $(G \times X) \xrightarrow{a} X$, ou $a(g, x) = g \cdot x$. Les actions de groupe sont équivilant à donner un morphisme de groups $G \xrightarrow{A} \mathrm{Bij}(X)$.

Soit $X = \{1 \dots n\}$ un ensemble et $G = \mathrm{Bij}(X) = \sigma_n$ le groupe symetrique; c'est la structures des bosons. Aussi, soit $X = V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $G = \mathrm{GL}(V)$ les applications linéaires bijectives.

Si on a le morphisme de groups $G \xrightarrow{A} \mathrm{GL}(V)$ on appelle cette action un *représentation*. Et donc si on a des représentations F, G sur X, on sait que $(g \circ f)(x) = f\left(g^{-1} \circ x\right)$ (si on regarde l'axiome $f \circ (g \circ x) = (fg) \circ x$ on voit le -1)

Des autre examples des groups

- L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ du produit $\langle\ ,\ \rangle$. On se demande quel est la structure de ce groupe? $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est groupe unitaire, ou $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}), \langle g \cdot v, g \cdot w\rangle = \langle v, w\rangle$.

- Le produit scalaire sur V est aussi un groupe. Et donc $\mathcal{O}(V, \langle\ ,\ \rangle)$ est un groupe orthogonal, ou $g \in \mathrm{GL}(V), \langle g \cdot v, g \cdot w\rangle = \langle v, w\rangle$.

- $V = \mathrm{R}^n$ avec un produit $\langle\ ,\ \rangle$ qui est une forme bilinéaire symétrique de signature $p, q, p + q = n$ définir comme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_n y_n$. Le groupe $O(1, 3)$ est le groupe de Lorentz, en relativité.

On parle aussi de groupe $SL(V) = \{g \in GL(V), \det g = 1\}$, le groupe *spécial linéaire*. Enfin nous pouvons écrire $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(V)$ et $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(V)$.

Donc si on a une groupe (V, w) avec w une forme bilinéaire antisymmetrique ($w(x, y) = -w(y, x)$) et non-degenérée sur V, alors $\dim V$ est paire. On appelle ça une forme *symplectique*. Et donc $Sp(V, w)$ est une groupe symplectique.

Un exemple de groupe symplectique c'est le groupe de Heisenberg. (V, w) et symplectique. On écrit ce groupe $H = H_{(V,w)} = V \oplus \mathbb{R}$. Ensuite on défine $(v, x) \cdot (v', x') = (v + v', x + x' + w(v, v'))$. Si on choisit $V = \mathbb{R}^2, w$ on obtient $H = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ et donc

$$H = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

C'est bien sur anti-symetrique, et si on compose deux matrices comme ça on obtient encore une matrice comme ça, et donc on a la meme loi de groupe que plus tôt. Tous ces groupes s'appellent le groupe de Heisenberg.

On a aussi X un varieté diffèrentiable, et donc $G = \mathrm{Diff}(X)$ groupe de diffèromorphisme d'X. G est de dimension infinie.

Le but de cette classe est d'éxaminer la théorie des représentations, au plupart des groups finis. Donc qu'est-ce que c'est une représentations? *Une représentation de G est la donnée d'un espace vectoriel complexe et d'un morphism de groups*

$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V)$. Si V est un espace hermitien et si $\rho : G \to U(V, \langle\ ,\ \rangle)$ on dit que la représentation (ρ, V) est unitaire. Si $V, \rho : g \in G \mapsto \mathrm{Id}_V$ on dit que (ρ, V) est une représentation triviale. Si $V \in \mathbb{C}$ on parle de *la* représentation triviale. On parle de la dimension de la représentation $\dim(\rho, V) = \dim V = \dim \rho$.

Maintenant on suppose que G est fini et que (ρ, V) est une représentation de G. On propose qu'il existe un produit hermitien qui rend (ρ, V) unitaire. L'idée c'est de prendre un nouveaux produit $\langle\ ,\ \rangle_0$ quelconque $\langle v, w\rangle_0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)\cdot v, \rho(g)\cdot w\rangle$.

Une sous-représentation d'une représentation (ρ, V) est un sous-espace W de V stable par l'action de G. Une représentation est irréductible si ces seules sous-représentation sont $\{0\}$ et V. Un lemme dit que si G est fini, (ρ, V) est irreductible alors elle est de dimension finie.

On a maintenant deux thèorème importantes de la théorie de représentation des groups finis. On dit que (ρ, V) est complètement reductible (ou semisimple) si V s'écrit comme somme directe $V = \oplus W_i$ ou W_i sont des représentations irreductible. La thèorème est que toute representation de dimension finie d'un groupe fini est complètement reductible.

On a des opératures d'entrelacement (en anglais "intertwining operators"). Soit $G, (\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ et $T : V_1 \to V_2$ application linèaire tell que $T(\rho_1(g)\cdot v_1) = \rho_2(g)\cdot(T\cdot v_1)$. On dit que les deux représentations sont equivalentes si $T : V_1 \to V_2$, l'opérateur d'entrelancement, est inversible.

On a une lemme. Soit $T : V_1 \to V_2$ un opérateur d'entrelacemcement, alors $\ker T, \mathrm{Im} T$ sont des sous-representations de V_1, V_2 respectivement. Soit aussi $V_\lambda \subset V$ sous-espace propre de T avec une valeur propre λ, alors V_λ est une sous-representation.

On a maintenant la lemme de Schor. Si $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sont irreducibles, alors si $\rho_1 \sim \rho_2$, $\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 1$ et $\rho_1 \times \rho_2$ alors $\dim \mathrm{Hom}_G = 0$ (Hom c'est homoromphism entre V_1, V_2).

La contragrediènte: $G, (\rho, V)$, si on appelle V^* les formes lineaire sur V, $(\rho^*(g)\cdot\lambda)(v) = \lambda\left(\rho^{-1}(g)\cdot v\right)$. Si on a $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$, on peut mettre $V_1 \oplus V_2$ sous l'action de G, on le fait comme $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)\cdot v_1, \rho_2(g)\cdot v_2)$.

On rapelle la difference entre $V_1 \oplus V_2, V_1 \otimes V_2$ parce que la dimension de le premier c'est la somme des deux dimensions et de le dernier c'est le produit. Autrement dit, si v_i, w_j sont des bases de V_1, V_2 alors $v_i \otimes w_j$ est une base de $V_1 \otimes V_2$.

On a encore un thèorème, c'est que si G est un group fini et (ρ, V) sont de dimension finie, (ρ, V) est complètement réductible.

Il y en reste plus mais je suis complètement perdu... Je suis fini pour le moment.

Il y a quelques categories: groupes finis $\subset$ groupes compacts $\subset$ groupes topologiques, et tous ces groupes contienent les groupes lineaires.

Chapter 3

07/10/14 — Représentations des groupes en MQ

On commence avec les action sur les états, par exemple rotation et translation. En général, il y a des représentation pour les groupes des actions, ou les représentation projective comme $\mathbf{SO}(2)$. Les symmetries sont liées des conservations et des règes de selection; on peut discuter la structure de l'espace de Hilbert. On parle maintenant des exemples des groupes on physiques.

Au d'abord, il faut parler du *théorème de Wigner*: Soit S une transformation bijective sur l'espace des états qui preserve le produit scalaire, alors S est linéaire ou anti-linéaire et unitaire. Donc, si G est un groupe agissant sur les états, on l'appelle unitaire si $g \in G, g : |\psi\rangle \to |g\psi\rangle = U(g)\,|\psi\rangle$ avec $U(g)$ unitaire.

Il y a donc deux possibilités pour l'action d'un produit de deux éléments $g_{1,2} \in G$: soit $g_1(g_2)\psi = (g_1g_2)\psi$, et donc $U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2)$ avec U une représentation unitaire; soit $g_1(g_2)\psi = e^{i\omega(g_1,g_2)}(g_1g_2)\psi$ une représentation projective $U(g_1)U(g_2) = e^{i\omega(g_1,g_2)}U(g_1g_2)$.

Pour un représentation on trouve le résultat suivant: La représentation U de G sur H c'est une représentation de Lie G sur H notée U: $[U(X), U(Y)] = U([X, Y])$.

Pour un représentation projectives on a quelque proprietés/contraintes (notons $e^{i\omega(g_1,g_2)} = \Omega(g_1, g_2)$)

- Associativité sur produit $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ — On trouve que $\Omega(g_1, g_2)\Omega(g_1g_2, g_3) = \Omega(g_1, g_2g_3)\Omega(g_2, g_3)$, la *relation de cocycle.*
- Certaines solutions de la relation de cocycle sont triviales — Si on arrive à écrire $\omega(g_1, g_2) = \eta(g_1g_2) - \eta(g_1) - \eta(g_2)$, en notant que $\eta : G \to \mathbb{R}, \omega : G \times G \to \mathbb{R}$, alors on trouve la solution triviale par trouver $\hat{U}(g) = e^{i\eta(g)}U(g)$ et $\hat{U}$ est une représentation.
- Une représentation projective c'est simplement un représentation d'une [plus grosse] groupe. Par exemple, on définit $\hat{G} = G \otimes \mathbf{U}(1)$ avec $(g, \lambda) \cdot (h, \mu) = (gh, \lambda\mu\Omega(g, h))$.

3.1 SO(2) et U(1)

On pose un exemple $\mathbf{SO}(2)$ les rotations de 2D. On note que $\mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{U}(1)$ parce que $\mathbf{U}(1) = e^{i\theta}$ et les rotations sont aussi décrites par un angle. On prend maintenant une classes des représentations (ou non?) $D : \mathbf{U}(1) \to \mathbb{C}, D_j(e^{i2\pi\theta}) = e^{ij2\pi x}$; c'est une représentation pour les spins. C'est clairment une représentation seulement quand $j \in \mathbb{Z}$, ou D_j c'est pas une application; si deux angles des deux elements dans $\mathbf{U}(1)$ diffèrent par $2\pi i$ ils devraient être envoyer à la même nombre par D.

Mais donc, qu'est-ce qui se passe quand j est de $\frac{1}{2}$-entier, par exemple $j = \frac{1}{2}$? On aurait $D_j(e^{i2\pi x})D_j(e^{i2\pi y}) = D_j\left(e^{i2\pi x}e^{i2\pi y}\right)$. Ca marchera si on redéfinit $\hat{D}(e^{2\pi ix}) = D(e^{i2\pi\overline{x}}), \overline{x} \in [0, 1]$, et comme ça on trouve $D_j(e^{i2\pi\overline{x}})D_j(e^{i2\pi\overline{y}}) = D_j(e^{i2\pi\overline{x+y}})\Omega_j(\overline{x}, \overline{y}), \Omega_j = \lfloor x + y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor$. Comme ça on trouve un relêvement qui change la représentation projective à une représentation.

3.2 $\mathbf{SO}(3) \to \mathbf{SU}(2)$

On parle maintenant de $\mathbf{SO}(3) \to \mathbf{SU}(2)$. On note que la représentation de spin $j = \dfrac{1}{2}$ n'est pas une représentation de $\mathbf{SO}(3)$ mais une représentation de $\mathbf{SU}(2)$, et donc une représentation projective de $\mathbf{SO}(3)$. Rappelons les matrices de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Une rotation d'angle α de direction $\vec{n}$ est representée par l'exponentielle $e^{i\alpha\frac{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}}$. Cette application $(\vec{n}, \alpha) \to \exp\left(i\alpha\dfrac{n\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)$ est encore pas une application dans $\mathbf{SO}(3)$, à cause de $\alpha \to \alpha + 2\pi$ mais c'est qu'une représentation projective de $\mathbf{SO}(2)$. Et donc $\mathbf{SO}(2)$ est une relêvement/recouvrement universelle de $\mathbf{SO}(3)$ mais pas de l'autre direction.

3.3 Dynamiques à cause des symmetries, lois de conservation

Les dynamiques d'une systèmes suivent l'hamiltonien H par l'équation de Schrodinger $|\psi(t)\rangle = e^{iHt}|\psi(t_0)\rangle$. Supposons qu'on a unegroupe G qui est une représentation sur H comme $U(g) \in \mathbf{End}(H)$. On appelle G une symétrie si son action sur H commute avec le flot engendré par H, ou $[U(g), H] = 0$. Egalement on peut demander que $[H, U(X)] = 0, X \in \mathbf{Lie}(G)$.

Par exemple, si $\langle U(g)\rangle(t) = \langle\psi_0| e^{iHt}U(g)e^{-iHt}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0| U(g)|\psi_0\rangle$ est indépendant du temps on a une loi de conservation pour G.

On veut maintenant décomposer H et l'action de G. Supposons que H est totalement réductible en somme des représentations irréductibles, donc $H = R_1 \oplus R_{1'} \oplus R_2 + \dots$ avec peut-être des représentations équivalentes, comme $R_1, R_{1'}$. Ca veut dire que on peut écrire l'hamiltonien en bloques diagonale avec les R_i commes bases. On va appeler les bloques $D_i(g)$ pour chaque bases. Chaque bloques est une représentation de G, et avec des représentations équivalentes on a une base qui lie les deux représentations comme $D_{1'}(g) = U^\dagger D_1(g)U$ avec U unitaire.

On peut aussi écrire $H = \bigoplus_\lambda \bigoplus_{j=1}^{m_\lambda} R_\lambda^{(j)}$ avec m_λ la multiplicité de λ dans la décomposition. Ca produit la decomposition canonique aussi $H = \bigoplus_\lambda W_\lambda \otimes R_\lambda$ avec $\dim W_\lambda = m_\lambda$. Donc pour $H_\lambda = W_\lambda \otimes R_\lambda$ on voit que $U(g)$ ne s'agit pas sur W_λ seulement sur $D_\lambda(g)$ et donc $U(g) = \mathbf{I} \otimes D_\lambda(g)$.

On se rappele la Lemme de Schur: soit deux représentations irréductibles D_1, D_2 d'une groupe G tel qu'il existe un entrelaceur S entre D_1, D_2 qui s'agit comme $SD_1(g) = D_2(g)S$, alors $S = 0$ ou S est invertibles et $D_1 \simeq D_2$. Donc, $[H, U(g)] = 0$ dit que H est bloque diagonal dans la base de λ.

On propose donc que

$$H = \bigoplus h_\lambda \otimes \mathbf{I} \tag{3.2}$$
$$U(g) = \mathbf{I} \otimes D_\lambda(g) \tag{3.3}$$

J'ai pas compris la démonstration.

On parle maintenant de l'invariance par rotation, une particule de masse m dans un potential central. On sait que $H = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+) \otimes R_l$; la première terme c'est $f(r)$ le potentiel et la dernnière terme c'est la représentation de $\mathbf{SO}(3)$. Et donc l'hamiltonien qui s'agit sur $\mathbb{R}_+$ est donné par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dr}\right)^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \tag{3.4}$$

On propose donc quelques consequences

- Règle de selection — Les dynamiques laisse stable les scalaires H_λ.
- La dynamique de H_λ ne transition pas entre les valeurs differenttes.
- Les nombres λ sont conservées, et donc la loi de conservation
- Si H est invariant par une groupe, on voit dans la décomposition dans l'équation (3.2) qu'il y a plusieurs espace avec h_λ. Donc les degeneracies correspond aux symmetries.

3.4 Groupes de Lorenttz et de Poincaré

La groupe de Poincaré est la groupe d'invariance de l'espace sur $\mathbb{R}^4$ munie de la metrique Minkowskienne. La groupe de Lorentz s'agit sur $\mathbb{R}^4, \eta\left[X, Y\right] = X_0Y_0 - X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3$, il est la groupe $\mathbf{O}(1,3)$ qui satisfait $\eta(\Lambda X, \Lambda Y) = \eta(X, Y)$. On écrit aussi que

$$\eta(X, Y) = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu \tag{3.5}$$

On commence de parler des rotations, qui prend la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que $\mathbf{O}(3) \subset \mathbf{O}(1,3)$. On parle aussi des boost, par exemple de l'axe z: $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On propose que $\det\Lambda = \pm 1$, et de ça on trouve que $\left|\Lambda^0_0\right| \geq 1$. On obtient donc quatre cas, $\det\Lambda = \pm1, \Lambda^0_0 \gtrless 0$.

L'algebre de Lie de cette groupe on étudie les petites transformations $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon\omega^\mu_\nu + \dots$ tel qu'on satisfait

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\rho\sigma}\Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu & (3.6)\\ &= \eta_{\mu\nu} + \epsilon\left(\eta_{\rho\mu}\omega^\rho_\nu + \eta_{\nu\sigma}\omega^\sigma_\mu\right) & (3.7)\\ 0 &= \eta_{\rho\mu}\omega^\rho_\nu + \eta_{\nu\sigma}\omega^\sigma_\mu & (3.8) \end{aligned}$$

l'équation d'invariance. Si o pose donc $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\rho\mu}\omega^\rho_\nu$ on trouve $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$, antisymmetrique. Donc la dimension d'algebre de Lie est 6, la dimension des matrices 4×4 antisymmetriques. On peut trouver une base pour $\mathfrak{so}(1,3)$ simplement par les matricies $(1, -1)$ pour toutes les entrées antisymmetriques. Une autre base est composée pa les generateur de rotation $\mathfrak{so}(3)$ autour les 3 axes et les boosts selon les 3 axes; on appele les rotation J_i et les boost K_i. Les matricies sont comme par exemples

$$J_z = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_x = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

On trouve la structure de Lie, c'est $[J_x, J_y] = iJ_z, [J_x K_y] = iK_z, [K_x, K_y = -iJ_z]$. Comme ça on a trouvé une représentation de l'algebre de Lie de $\mathfrak{so}(1,3)$.

Chapter 4

14/10/14 — Plus de Groupes de Lorentz et Poincarè

4.1 $\mathfrak{so}(1,3)$

La groupe de Lorentz est défini $\mathbf{O}(1,3) \subset \mathbf{SO}(1,3)$. On a $\Lambda \in \mathbb{R}^4$ une opérateur quelconque tel que $\eta(X,Y) = \eta(\Lambda x, \Lambda y)$ pour la métrique η. On munit l'espace vectoriel d'un produit Minkowskian $X \cdot Y = \Lambda X \cdot \Lambda Y$ qui est invariant par Λ avec la signiature $(+,-,-,-)$.

On commence en calculer l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$. On fait une expansion $\Lambda = I + \epsilon\omega + \dots$ et donc $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon\omega^\mu_\nu + \dots$ avec ω^μ_ν une matrice 4×4. On voit (c'est une consequence de demander l'invariance de Lorentz) que $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$ et donc ω est antisymmetric, après lequel on trouve que $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(1,3) = 6$.

On choisit une base de tenseur antisymmetrique alors, comme $(J^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu$ avec ρ, σ la labelle. Donc, après la métrique on trouve que

$$(J^{\rho\sigma})^\mu_\nu = \eta^{\rho\mu}\delta^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho_\nu \tag{4.1}$$

qui est évidement antisymmetrique. Alors on a trouvé une base de $\mathfrak{so}(1,3)$, et on peut écrire ω^μ_ν en somme de $J^{\rho\sigma}$ comme $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}$ (par exemple $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$).

On examine maintenant la relation de commutation, la crochet de Lie de $\mathfrak{so}(1,3)$ comme

$$\pm\left[J^{\rho\sigma}, J^{\theta\phi}\right] = \eta^{\rho\theta}J^{\sigma\xi} - \eta^{\sigma\theta}J^{\rho\xi} - \eta^{\rho\xi}J^{\sigma\theta} + \eta^{\sigma\xi}J^{\rho\theta} \tag{4.2}$$

ou le prof a oublié la signe exacte. En physique, on met des i par l'expansion $\Lambda = I - i\epsilon\omega + \dots$, et ça change légèrement ce qui procède ci-dessus mais pas beaucoup.

Alors on cherche maintenant des décompositions des opérateurs de rotation. $\vec{J}$ est définit par deux indices (la direction de la rotation dans l'espace) et donc $J^j = \frac{1}{2}\epsilon^{jkl}J^{kl}$. Par contre, $\vec{K}$ c'est la rotation en temps suivant un axe et donc $K^j = J^{0j}$. Les relations de commutations pour eux sont

$$\left[J^j, J^k\right] = i\epsilon^{jkl}J^l \tag{4.3}$$
$$\left[J^j, K^k\right] = i\epsilon^{jkl}K^l \tag{4.4}$$
$$[K_j, K_l] = i\epsilon^{jkl}J_l \tag{4.5}$$

4.2 Action sur les fonctions

On examine donc l'action sur les fonctionnes (les champs scalaires). On définit l'actioon comme une représentation $\Lambda : \phi \to \Lambda\phi$. Rappelons que $\Lambda\phi(X) = \phi(\Lambda^{-1}X)$. Quelle est alors la représentaiton d'algèbre de Lie associée à cette action? On écrit $\Lambda = I + \epsilon\omega, \Lambda^{-1} = I - \epsilon\omega$. On prend maintenant

$$\phi(\Lambda^{-1}X) = \phi\left[X^\mu - \epsilon(\omega X)^\mu\right] \tag{4.6}$$
$$= \phi(X) - \epsilon(\omega X)^\mu \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + \dots \tag{4.7}$$
$$= \phi(X) - i(J^{\rho\sigma}X)^\mu \partial_\mu\phi(x) \tag{4.8}$$
$$= \phi(X) - i(J^{\rho\sigma})_{\mu\nu} X^\mu \partial^\mu\phi(x) \tag{4.9}$$
$$= \phi(X) + i(X^\rho\partial^\sigma - X^\sigma\partial^\rho)\phi(x) \tag{4.10}$$

Donc sur l'espace des fonctions $J^{\rho\sigma}$ est representée par $J^{\rho\sigma} = \pm i \left(X^\rho \partial^\sigma - X^\sigma \partial^\rho \right)$, ou on a encore oublié la signe.

4.3 Représentations de dimension finie

On veut construire spécifiquement $\mathfrak{so}(1,3)$. Notons que $\mathfrak{so}_\mathbb{C}(1,3) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ou aussi $\mathfrak{so}_\mathbb{C}(1,3) \simeq \mathfrak{so}(1,3) \otimes \mathbb{C}$, les combinaisons linéaires à coefficients complexes.

On définit donc une base de $\mathfrak{so}(1,3)_\mathbb{C}$ comme $N^j = \dfrac{J^j + iK^j}{2}, M_j = \dfrac{J_j - iK_j}{2}$. L'avantage de faire ça c'est à cause des relations de commutations

$$[N_j, N_k] = i\epsilon^{jkl} N^l \qquad [M_j, M_k] = i\epsilon^{jkl} M^l \qquad [N_j, M_k] = 0 \tag{4.11}$$

On voit dans les relations deux copies de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dans les deux premières relations, ce qui est en d'accord avec ce qu'on proposait ci-dessus.

Pour construire une représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

(i) On prend *deux* représentations de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. On les appelle V, W avec des dimensions $n+1, m+1$ respectivement.

(ii) On considère le produit tensoriel $V \otimes W$ avec dimension $(n+1)(m+1)$.

(iii) On défini la représentation en faisant agir $\vec{N}$ sur V et $\vec{M}$ sur W. Ce produit agit comme

$$\rho_{V\otimes W}\left(\vec{N} \in \mathfrak{so}_\mathbb{C}(1,3)\right) = \rho_V\left(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\right) \otimes I_W \tag{4.12}$$

et pareil pour $\vec{M}$.

(iv) Pour reconstruire l'action de $\vec{J}, \vec{K}$ on fait simplement les calculs et on obtient

$$\rho(J) = \rho_V(N) \otimes I + I \otimes \rho_W(M) \qquad \rho(K) = \frac{1}{i}\left(\rho_V(N) \otimes I - I \otimes \rho_W(M)\right) \tag{4.13}$$

4.4 Exemples de représentations

Les représentations de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sont indexées par le spin j entier ou demi-entier comme $\dim = 2j+1$. Donc

- $(j_N = j_M = 0)$, donc $\dim = 1$, $\rho(J) = \rho(K) = 0$ et on a une représentation scalaire.
- $\left(j_N = \frac{1}{2}, j_M = 0\right)$, donc $\dim = 2$. On note que l'action de $\vec{N}$ est donnée par $\vec{\sigma}$ les matrices de Pauli, et donc après les équations (4.13) on trouve

$$\rho\left(\vec{J}\right) = \frac{\vec{\sigma}}{2} \qquad \rho\left(\vec{K}\right) = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \tag{4.14}$$

  On appelle ça la spineur droite χ_R.
- $\left(j_N = 0, j_M = \frac{1}{2}\right)$ — C'est la même que ce qui procède, sauf une signe parce que l'action est maintenant dans l'espace de $\vec{M}$:

$$\rho\left(\vec{J}\right) = \frac{\vec{\sigma}}{2} \qquad \rho\left(\vec{K}\right) = +i\frac{\vec{\sigma}}{2} \tag{4.15}$$

  On appelle ça la spineur gauche χ_L.
- $\left(j_N = j_M = \frac{1}{2}\right)$, donc $\dim = 2 \times 2 = 4$, et c'est donc sur $\mathbb{C}^4$; il faut utiliser les quadri-vecteurs A^μ. On a

$$\rho(\vec{J}) = \frac{1}{2}\left(\vec{\sigma} \otimes I + I \otimes \vec{\sigma}\right) \qquad \rho(\vec{K}) = -\frac{i}{2}\left(\vec{\sigma} \otimes I - I \otimes \vec{\sigma}\right) \tag{4.16}$$

  On peut montrer que cette représentation est équivalent à la reprśentation avec les A^μ.
- $(j_N = 0, j_M = 1) \oplus (j_N = 1, j_M = 0)$, donc $\dim = 6$. On voit la dimension et fait la connection avec les tenseurs 4×4 antisymmetriques! Ce sont les représentations équivalentes (? ou il a peut-être dit adjointe, je ne l'ai pas écouté)

On se demande maintenant aussi des matrices symmetriques $G_{\mu\nu}$ qui ont la dimension $\frac{4\times 5}{2} = 10$. Mais on voit que les matrices avec la même trace sont invariantes (contracter $G_{\mu\nu}$ comme $G = \eta^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ produit un scalaire invariant par $\eta^{\mu\nu}$) et donc ça fait un sous-espace stable, et l'espace des matrices symmetriques est de dimension 9, comme $j_N = j_M = 1$. Donc on voit que $\mathrm{Sym}(\mathbb{M}_{4\times 4} = (0,0) \oplus (1,1)$.

Aussi on peut éxaminer la parité $\left(x^0, \vec{x}\right) \to (x^0, -\vec{x})$. On sait que cette transformation $P \in \mathbf{SO}(1,3) \in \mathbf{O}(1,3)$ et donc son action sur $\mathfrak{so}(1,3)$ est donnée par $P\vec{J}P = \vec{J}, P\vec{K}P = -\vec{K}$. En effet ça change $\vec{N} \leftrightarrow \vec{M}$ dans l'équation (4.13). Plus exactement, P se represente sur la somme directe $(j_N = j_i, j_M = j_2) \oplus (j_N = j_2, j_M = j_1)$. Pour les spineurs en particulier on trouve qu'il se represente sur l'espace $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$, de dimension 4. On l'appelle le spineur de Dirac $\psi(x) = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix}$.

4.5 Equation de Dirac

Dirac est arrivé à son équation célèbre par l'équation de Schrodinger par $E^2 = p^2 + m^2$ et par prendre la racine carrée mais on va le faire via la théorie de groupe.

On a une particule avec l'impulsion $\mathbf{P} = \left(P^0, \vec{P}\right)$ et masse m tel que $\mathbf{P}^2 = m^2$.

i) Dans le centre de masse, $\mathbf{P} = \left(m, \vec{0}\right)$. Aussi par l'action de la parité on écrit $\chi_R^* = \chi_L^*$ dans le referentiel du centre de masse.

ii) Dans le referentiel quelconque χ_R, χ_L sont obtenus par la transformation de Lorentz. On appelle la courbe $\mathbf{P}^2 = m^2, P_0 > 0$ la "couche de masse." On se bouge sur cette couche par la transformation de Lorentz. On trouve alors que $P^0 = m\cosh\alpha, \vec{P} = m\hat{n}\sinh\alpha$ après un boost dans la direction $\hat{n}$ avec une rapidité α du referentiel de centre de masse. Si on appelle ce boost $\Lambda(\hat{n}, \alpha)$, on agit sur les spineurs par l'action donnée par la representation comme

$$\chi_R(\vec{p}) = \rho_{\left(\frac{1}{2},0\right)}\left(\Lambda(\hat{n},\alpha)\right)\cdot\chi^* \qquad \chi_L(\vec{p}) = \rho_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}\left(\Lambda(\hat{n},\alpha)\right)\cdot\chi^* \tag{4.17}$$

iii) On prend simplement l'éxponentiel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$ et on obtient

$$\chi_R(\vec{p}) = e^{-\alpha\frac{\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}}\chi^* \qquad \chi_L(\vec{p}) = e^{-\alpha\frac{\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}}\chi^* \tag{4.18}$$

Si on develope l'éxponentiel on trouve que $e^{\alpha\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbf{I}\cosh\alpha + (\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sinh\alpha$ et finalement

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})} \\ e^{\alpha(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

On identifie $me^{\pm\alpha(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})} = E \pm \vec{p}\cdot\vec{\sigma}$ et finalement on obtient pour $\psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi_R(\vec{p}) \\ \chi_L(\vec{p}) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\psi = m\psi \tag{4.20}$$

On peut identifier $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient la forme $(\mathbf{P}^\mu\gamma_\mu - m)\,\psi(\vec{p}) = 0$. Et si on prend la transform de Fourier $\psi(p) \to \psi(x), P^\mu \to i\partial^\mu$ on obtient l'équation de Dirac qu'on connait.

4.6 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est formé par le produit des espaces de transformation de Lorentz et de translation, ca veut dire $\mathbf{O}(1,3)\times\mathbb{R}^4 = (\Lambda, T_a)$. On sait que $\Lambda : X \to \Lambda X$ et $T_a : X \to X + a$ et on sait les structures des deux groupes. On voit que Λ, T_a commutent. Examinons donc les relations de commutation des algèbres de Lie des deux groupes

$$[J, J] = \text{déjà vu} \tag{4.21}$$
$$[P^\sigma, P^\rho] = 0 \tag{4.22}$$
$$[J^{\rho\sigma}, P^\nu] = \pm\left(\eta^{\rho\nu}P^\sigma - \eta^{\sigma\nu}P^\rho\right) \tag{4.23}$$

On cherche pour ce groupe de Poincaré une représentation unitaire. On commence en essayant de trouver une représentation irréductible du groupe de Lorentz. Si on peut trouver une opérateur, qui s'appelle un opérateur de Casimir, qui commute avec les générateurs de la représentation irréductible on sait après le lemme de Schur que cet opérateur a une valeur propre pour tout l'espace.

Pour notre groupe de Poincaré on peut trouver quelques Casimirs

- $C_1 = \mathbf{P}^2$ qui a la valeur propre $m^2 > 0$.
- $C_2 = W^2, W^\mu = \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma$. On montre simplement qu'il commute avec $J, \mathbf{P}$. C_2 a des valeurs propres $\sim$ le spin.

La représentation est different soit $m = 0$ soit $m \neq 0$. On éxamine d'abord $m \neq 0$, où on a des sous-espaces propres $(P^0, \vec{P})$ qui s'échangent par la transformation de Lorentz. On peut donc se placer dans le referentiel du centre de masse ou $P^0 = m, \vec{P} = 0$. Dans ce referentiel, $W^0 = 0, \vec{W} = m\vec{J}$. On voit donc que $C_2 = m^2J^2 = m^2s(s+1)$. Donc le groupe des rotations dans le centre de masse ets representé par la représentation de spin s. Finalement, les états de la représentation sont $|\mathbf{P}; s, m\rangle$ avec $\mathbf{P}^2 = m^2, |s, m\rangle \in \mathfrak{so}(3)$ du centre de masse.

La représentation de masse nulle est un peu different parce que $P^2 = 0$. On peut quand même toujours trouver un referentiel ou $P^0 = k, \vec{P} = (0, 0, k)$. Et alors $W^0 = \dfrac{1}{2}\epsilon^{0jk3}J_{jk}k = kJ^z, W^3 = -kJ^z$, $W^2 = 0$ dans les représentations utilisées.

Car $J^z \to \mathbf{SO}(2)$ le groupe des rotations autour $\vec{P}$, on se donne une représentation de $\mathbf{SO}(2)$ de dimension 1 qui est caracterisé par un nombre λ nommé *hélicité*. Et alors $W^\mu = \lambda P^\mu$ car J_z agit comme λ sur les états $(k, 0, 0, k)$.

Chapter 5

04/11/14 — Espaces de Fock et leur lien avec les groupes $SU(D), SO(D), Sp(2D)$

Les trois groupes ci-dessus sons les groupes unitaires, orthogonales et symplectiques (preservent le crochet de Poisson).

5.1 Espace de Fock bosonique

5.1.1 L'oscillateur Harmonique

On prend comme exemple l'oscillateur harmonique. Le crochet ici fait $[p,q] = -i$, par exemple $p = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ et l'hamiltonien est $h = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$ qui a des valeurs propres $\epsilon_n = \omega(n+1/2)$. On rappele les operateurs création et annihilation:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \qquad\qquad p = \frac{\sqrt{\omega}}{i\sqrt{2}}\left(a - a^\dagger\right) \tag{5.1}$$

On calcule que $\left[a, a^\dagger\right] = 1$ et que $h = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$. Pour trouver les états propres on construit un état $|0\rangle$ tel que $a|0\rangle = 0$. On verifie simplement que $\left[h, a^\dagger\right] = \omega a^\dagger$ et donc $|n\rangle \propto \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle$. Ca démonstre que l'espace Hilbert est l'espace vectoriel avec la base $\left\{\left(a^\dagger\right)^n |0\rangle\right\}$, qui est aussi l'espace de Fock sur $\mathbb{C}$.

5.1.2 Espace de Fock sur $\mathbb{C}^D$

On se donne D paires des opérateurs annihilation et création $a_i, a_i^\dagger$ tel que $\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}$. On se donne un vecteur, dit le vide, tel que $a_i|0\rangle = 0$ pour tout i. Alors l'espace de Fock sur $\mathbb{C}^D$ est donné par la base composée des actions des $a_i^\dagger$ sur $|0\rangle$.

On peut trouver une décomposition suivant le nombre des "particules," comme $\mathcal{F} = \oplus\mathcal{F}^{(n)}$ tel que $\mathcal{F}^{(0)}$ est le vide, $\mathcal{F}^{(1)} = \left\{a_j^\dagger |0\rangle\right\}$ pour tout j, etc.

Les opérateurs $a_i, a_i^\dagger$ sont donc representés sur cet espace de Fock par sa relation de commutation $\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}$. On voit que $a_j^\dagger : \mathcal{F}^{(n)} \to F^{(n+1)}$. a agit par les relations de commutation, par exemple

$$a_j a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_n}^\dagger |0\rangle = \delta_{jj_1} a_{j_2} \dots a_{j_D}^\dagger + a_{j_1}^\dagger a_j a_{j_2}^\dagger \dots a_{j_D}^\dagger |0\rangle \tag{5.2}$$

$$= \dots = \sum_k \delta_{j,j_k} a_{j_1}^\dagger \dots a_{j_k} a_{j_k}^\dagger \dots a_{j_D}^\dagger |0\rangle \tag{5.3}$$

et on trouve finalement que $a_j : \mathcal{F}^{(n)} \to F^{(n-1)}$

Une autre écriture de tout ce qui passait peut être achevée via les polynômes. On considère D variables x_i, et alors l'espace de Fock sur $\mathbb{C}^D$ est donné par les polynômes sur $\{x_i\}$. Et alors $|j_1 j_2\rangle = x_1 x_2$, et le nombre des particules correspond au degré du polynôme. Alors $a_j^\dagger \leftrightarrow x_j$ et $a_j \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}$ qui suivent les relations de commutation.

5.1.3 Fonction de partition, fonction génératrice

Rappelons de la mécanique statistique $\mathcal{Z}\left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta \hat{H}}$ où $\hat{H}$ est l'hamiltonien. C'est alors aussi la somme sur tout $e^{-\beta\epsilon_n}$ fois la multiplicité de l'énergie ϵ_n. On considére $\hat{H} = \sum \omega_j N_j$ avec $N_j = a_j^\dagger a_j$ qui compte le nombre des particules dans l'état j. Alors on va calculer

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \sum \omega_j N_j}\right) \tag{5.4}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\prod p_q^{N_j}\right) \tag{5.5}$$

avec $q_j = e^{-\beta\omega_j}$ et le produit est pris sur toute D dimensions. Et alors si on a un seul type de particule, alors $N = a^\dagger a$ et on est dans l'espace Fock sur $\mathbb{C}$. Et alors $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}(q^N)$. On chosit la base des nombres des particules $|0\rangle, |1\rangle \ldots$. Dans cette bas N est diagonal et $Z = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$. Alors on voit que l'espace de Fock sur $\mathbb{C}^D$ est egale a $(\mathbb{F} \rtimes \daleth(\mathbb{C}))^{\otimes D}$, et que

$$\mathcal{Z} = \prod \frac{1}{1-q_i} \tag{5.6}$$

5.1.4 Lien avec les groupes classiques

On étudie maintenant les opérateurs quadratiques de $a, a^\dagger$. On a déjà examiné $N = a_i^\dagger a_i$ mais on peut considerer $T_{ij} = a_i^\dagger a_j$. On peut facilement voir que $[T_{ij}, T_{kl}]$ est une combinaison linéaire des T. Ca démonstre que les T forment une algèbre de Lie. On trouve a laquelle elle correspond en regardant la dimension. Le nombre des T_{ij} est D^2 (parce que $i \in [1, D]$) et on rappele que $\dim SU(D) = D^2 - 1, \dim U(1) = 1$ et donc $T_{ij} = SU(D) \oplus U(1)$. Le $U(1)$ correpsond à $\sum N_j$. Alors dans l'espace de Fock on a trouvé $SU(D)$.

Notons qu'on a seulement consideré T_{ij} ou il y a le même nombre des $a, a^\dagger$. On peut aussi consider l'espace complet $a_i a_j, a_j^\dagger a_i, a_i^\dagger a_j^\dagger$. Sans trop des calculs on voit que c'est $Sp(2D)$ les transformations symplectiques sur l'espace de phase de dimension 2D. On ne parle plus de ce groupe mais c'est plus gros $U(D) \in Sp(2D)$.

5.2 Espace de Fock fermionique

5.2.1 Opérateur création-annihilation

On note que ci-dessus les trucs (je ne sais pas... comme les polynômes) sont symmétrique par l'échange, On étudie maintenant les espaces qui sont anti-symmetrique par l'échange. Alors, nos opérateurs de création et d'annihilation obeissent les lois d'anti-commutation comme $\left\{b_j, b_i^\dagger\right\} = \delta_{ij}$ et $\{b_j, b_i\} = \left\{b_j^\dagger, b_i^\dagger\right\} = 0$. On veut trouver une représentation sur un espace de Hilbert.

On commence en essayant de trouver l'état du vide tel que $b_j|0\rangle = 0$ pour tout b_j. On considère les espaces engendré par les états à n particules, les $b_j^\dagger$ agissent sur $|0\rangle$. Par exemple, avec une particule les états possibles sont $b_j|0\rangle$. Mais avec deux particules, $b_i^\dagger b_j^\dagger|0\rangle$, i est forcément pas égale à j parce que $b_i b_j + b_j b_i = \delta_{ij}$! C'est exactement la principe d'éxclusion de Pauli.

Il y a plusieurs differences des espaces bosoniques. La représentation qu'on a montré plus tôt avec des polynômes n'est plus possible parce que les polynômes n'anti-commutent pas. Les espaces bosoniques sont de dimension infinis, mais les espaces fermioniques sont de dimension finis 2^D.

5.2.2 Fonction de Partition, fonction génératrice

Comme avant, l'opérateur $N = b_j^\dagger b_j$ compte le nombre de particule. Par exemple, avec un seul état les états possibles sont $|0\rangle, b^\dagger|0\rangle$ et les valeurs propres sous N sont respectivement $0, 1$. Alors on a encore l'hamiltonien $H = \omega_j N_j$ et la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta}\omega_j D_j\right) = \mathrm{Tr}\left(\prod e^{-\beta\omega_j D_j}\right) \tag{5.7}$$

Encore avec un seul état on voit que $\mathcal{Z} = 1 + q$, et avec D états on a $\mathcal{Z} = \prod^D (1 + q_j)$. Si on développe ce produit on trouve

$$\mathcal{Z} = 1 + (q_1 + \cdots + q_D) + \ldots \tag{5.8}$$

et c'est encore la base du nombre d'occupation.

5.2.3 Le Groupe

On commence encore en considèrant $M_{ij} = b_i^\dagger b_j$ (en particulier $J_{ii} = b_i^\dagger b_i$). Alors $[M_{ij}, M_{kl}]$ est encore forcément une combinaison linéaire des M, et c'est encore une algèbre de Lie. On voit la dimension est encore D^2 et qu'il est isomorphe à (je sais pas si c'est la façon correcte de le dire...) $U(D) = SU(D) + U(1)$. C'est naturel qu'il est la même algèbre qu'avant parce qu'il satisfie le même crochet.

On peut aussi considerer $b_i b_j, b_i^\dagger b_j, b_i^\dagger b_j^\dagger$ qui forment aussi une algèbre de Lie. Le premier est de dimension $\binom{D}{2}$ parce qu'il faut être anti-symmetrique, et alors la dimension totale est $\frac{D(D-1)}{2} + D^2 + \frac{D(D-1)}{2} = 2D^2 - D = \binom{2D}{2}$. Ca correspond donc à l'algèbre $SO(2D)$.

5.3 Exemple de quantification d'un champ bosonique

On va commencer avec un champ classique satisfiant l'équation Klein-Gordon $\phi(t,x)$. Le plus simple cas c'est $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t,x) = 0$. Pour simplifier, on se met dans une boîte et impose des conditions limites en x comme $\phi(t, x=0) = \phi(t, x=L) = 0$. Suivant ces conditions on peut décomposer en série Fourier $\phi(t,x) = Q_n(t)\sin(nx)$. On le met dans l'équation KG et obtient $\left[\partial_t^2 Q_n(t) + n^2 Q_n(t)\right]\sin(nx) = 0$ ou $\partial_t^2 Q_n(t) + n^2 Q_n(t) = 0$ pour tout n et toutes les modes, et on obtient de l'équation d'onde l'équation des oscillateurs harmoniques.

Si on quantifie chacun de ces oscillateurs avec Q_n, P_n les coordonées pour toutes n obeissant $H_n = \frac{1}{2}\left(P_n^2 + n^2 Q_n^2\right)$, on trouve les opérateurs de création et d'annihilation $a_n, a_n^\dagger$ et on retrouve les espaces de Fock. L'évolution temperelle des $Q_n(t)$ est donnée par $Q_n(t) = e^{itH} Q_n e^{-itH} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a_n e^{i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{-i\omega_n t}\right)$, et

$$\phi(t,x) = \sum_n \frac{1}{2\omega_n}\left(a_n e^{i\omega_n t} + a_n^\dagger e^{-i\omega_n t}\right)\sin(nx) \tag{5.9}$$

La fonction de partition est alors donnée comme

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H}\right) \tag{5.10}$$

$$= \prod_n \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_n}}\right) \tag{5.11}$$