# Theoretische Informatik und Logik
# Übungsblatt 2 (2021W)

**Aufgabe 2.1** Geben Sie jeweils eine (eindeutige) kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 7$.
Zeigen Sie jeweils auch die Kontextfreiheit von $L$ mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen $D_n$ und $R$ sowie einen entsprechenden Homomorphismus $h$ angeben).

a) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$ ($w^r$ bezeichnet das Spiegelbild von $w$)

b) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^k(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}})^{2n} \mid k > n, n \geq 0\}$

**Aufgabe 2.2** Beweisen Sie mittels entsprechender Abschlusseigenschaften, dass die jeweils gegebene Sprache $L$ nicht kontextfrei ist. (Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{\mathtt{0}}^{kn}\underline{\mathtt{1}}^{ln}\underline{\mathtt{2}}^{mn} \mid n \geq 1\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist.)

a) $L = \{(\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^m \mid n \geq 1\}$ (wobei $m$ für Ihre Matrikelnummer ohne etwaige führende Nullen steht)

b) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^n(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{d}})^{3k} \mid n, k \geq 1\} \cap \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^k(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{d}})^{2l} \mid n, k, l \geq 1\}$

   (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst $L$.)

**Aufgabe 2.3** Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Sei $\Sigma$ ein ein-elementiges Alphabet (also beispielsweise $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}\}$). Dann ist jede Sprache über $\Sigma$ entscheidbar.

b) Ist $L$ regulär, so gibt es eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform, die $L$ erzeugt.

c) Die Grammatik $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to Saa \mid a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S)$ erzeugt eine reguläre Sprache.

d) Die Grammatik $G_4 = (\{A, B\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}, \{A \to \underline{\mathtt{0}}B \mid \underline{\mathtt{1}}, B \to A\underline{\mathtt{1}}\}, A)$ ist regulär.

e) Ist $L$ kontextsensitiv, so ist jede Grammatik, die $L$ erzeugt, monoton oder kontextsensitiv.

f) Es gibt kontextfreie Sprachen, deren Komplement nicht entscheidbar ist.

**Aufgabe 2.4** Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist, oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist in **NP**.

b) Sei $E = \{L \mid L \in \mathbf{P}, L \notin \mathbf{NP}\}$ eine Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen $L$. Dann ist $E$ genau dann entscheidbar, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

c) Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ dann ist jedes Problem in **NP** auch **NP**-hart (**NP**-schwer).

d) Sei $A \leq_p B$ und $B$ **NP**-hart. Dann ist $A \in \mathbf{NP}$.

e) Sei $A \leq_p B$ und $B$ **NP**-vollständig. Dann gilt: $A$ ist entscheidbar.

f) Sei $A$ **NP**-vollständig, und $\overline{A}$ (das Komplement von $A$) in **P**. Dann gilt: $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

g) Sei $A = \{w \mid w \in \{\underline{0}, \underline{1}\}\}$, wobei

$$w = \begin{cases} \underline{0} & \text{wenn } \mathbf{NP} = \textbf{co-NP} \\ \underline{1} & \text{wenn } \mathbf{NP} \neq \textbf{co-NP} \end{cases}$$

Dann ist $A$ nicht entscheidbar.

## Aufgabe 2.5

a) Finden und beschreiben Sie den Fehler im folgenden "Beweis" für $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$:

Wir betrachten folgenden Algorithmus für SAT:

– Durchlaufe für die gegebene Formel $\phi$ alle möglichen Belegungen der Variablen mit den Wahrheitswerten.

– Akzeptiere $\phi$, wenn eine der durchlaufenen Belegungen $\phi$ erfüllt.

Dieser Algorithmus hat eine mit der Anzahl der Variablen exponentiell wachsende Laufzeit. Daher hat das Problem SAT einen exponentiellen Aufwand und kann nicht in $\mathbf{P}$ liegen. Weil aber SAT in $\mathbf{NP}$ liegt, muß also $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ gelten.

b) Es ist nicht bekannt, ob das Komplement von jeder Sprache in **NP** selbst wiederum in **NP** liegt (d.h., ob **NP** unter Komplement abgeschlossen ist bzw. ob **NP**=**co-NP**).

Finden und beschreiben Sie den Fehler in folgendem vermeintlichen "Beweis", welcher dies aber für alle Probleme in **NP** behauptet:

**Satz:** Ist $L \in \mathbf{NP}$, so ist auch $\overline{L} \in \mathbf{NP}$.

**Beweis:** Sei $N$ eine nicht-deterministische Turingmaschine (NTM), welche $L$ in polynomiell beschränkter Zeit akzeptiert. Vertausche nun die Endzustände von $N$ mit Nicht-Endzuständen von $N$ und umgekehrt. Offensichtlich akzeptiert die so konstruierte NTM $N'$ die Sprache $\overline{L}$ in polynomiell beschränkter Zeit. Es gilt also $\overline{L} \in \mathbf{NP}$. □