TIL Tutorium

Themenbereiche des 2. Übungsblatts

Jakob Guttmann und Marek Sefranek

E192 Institut für Logic and Computation

Inhalte

Recap: Entscheidbarkeit bei einelementigen Alphabet

Sei $\Sigma = \{\underline{0}\}$.
Σ^* sind alle möglichen Wörter, die von $\{\underline{0}\}$ gebildet werden können.
Diese Menge von allen möglichen Wörtern ist abzählbar unendlich.

Recap: Entscheidbarkeit bei einelementigen Alphabet

Sei $\Sigma = \{\underline{0}\}$.
Σ^* sind alle möglichen Wörter, die von $\{\underline{0}\}$ gebildet werden können. Diese Menge von allen möglichen Wörtern ist abzählbar unendlich.

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ ist die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen), diese enthält alle möglichen Sprachen. Die Potenzmenge von einer abzählbar unendlichen Menge ist überabzählbar unendlich (Diagonalargument).

Recap: Entscheidbarkeit bei einelementigen Alphabet

Sei $\Sigma = \{\underline{0}\}$.
Σ^* sind alle möglichen Wörter, die von $\{\underline{0}\}$ gebildet werden können. Diese Menge von allen möglichen Wörtern ist abzählbar unendlich.

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ ist die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen), diese enthält alle möglichen Sprachen. Die Potenzmenge von einer abzählbar unendlichen Menge ist überabzählbar unendlich (Diagonalargument).

Jede Turingmaschine kann als String über $\{\underline{0}\}$ dargestellt werden, und jede dieser Turingmaschine akzeptiert eine Sprache. Da aber die Anzahl aller möglichen Wörter abzählbar unendlich ist, gibt es auch nur abzählbar unendlich viele Turingmaschinen.

Recap: Entscheidbarkeit bei einelementigen Alphabet

Sei $\Sigma = \{\underline{0}\}$.
Σ^* sind alle möglichen Wörter, die von $\{\underline{0}\}$ gebildet werden können. Diese Menge von allen möglichen Wörtern ist abzählbar unendlich.

$\mathcal{P}(\Sigma^*)$ ist die Potenzmenge (Menge aller Teilmengen), diese enthält alle möglichen Sprachen. Die Potenzmenge von einer abzählbar unendlichen Menge ist überabzählbar unendlich (Diagonalargument).

Jede Turingmaschine kann als String über $\{\underline{0}\}$ dargestellt werden, und jede dieser Turingmaschine akzeptiert eine Sprache. Da aber die Anzahl aller möglichen Wörter abzählbar unendlich ist, gibt es auch nur abzählbar unendlich viele Turingmaschinen.

Aber es gibt überabzählbar viele Sprachen in $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Daher gibt es Sprachen, die von keiner Turingmaschine akzeptiert werden können.

Grammatiken

Grammatiken - Formale Definition

Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$

Grammatiken - Formale Definition

Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$

$N \ldots$ endliche Menge von Nonterminale (Variablen), keine Symbole der Sprachen

Grammatiken - Formale Definition

Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$

$N \ldots$ endliche Menge von Nonterminale (Variablen), keine Symbole der Sprachen

$T \ldots$ endliche Menge von Terminalsymbolen, Alphabet der Sprache, Nonterminal- und Terminalsymbole haben eine leere Schnittmenge

Grammatiken - Formale Definition

Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$

$N \dots$ endliche Menge von Nonterminale (Variablen), keine Symbole der Sprachen

$T \dots$ endliche Menge von Terminalsymbolen, Alphabet der Sprache, Nonterminal- und Terminalsymbole haben eine leere Schnittmenge

$P \dots$ Produktionen, $P \subseteq (N \cup P)^+ \times (N \cup P)^*$
kontextfrei: nur **ein** Nonterminal auf linker Seite

Grammatiken - Formale Definition

Grammatik $G = \langle N, T, P, S \rangle$

$N \ldots$ endliche Menge von Nonterminale (Variablen), keine Symbole der Sprachen

$T \ldots$ endliche Menge von Terminalsymbolen, Alphabet der Sprache, Nonterminal- und Terminalsymbole haben eine leere Schnittmenge

$P \ldots$ Produktionen, $P \subseteq (N \cup P)^{+} \times (N \cup P)^{*}$
kontextfrei: nur **ein** Nonterminal auf linker Seite

$S \ldots$ Startsymbol (Nonterminal)

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \to \beta \in P$:

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta \in P$:

- $|\alpha| \leq |\beta|$: so heißt G **monoton**

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta \in P$:

- $|\alpha| \leq |\beta|$: so heißt G **monoton**
- $\alpha =$uAv und $\beta =$uwv für A $\in N$, w $\in (N \cup T)^+$ und u,v $\in (N \cup T)^*$:
  G heißt **kontextsensitiv (Typ-1)**

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta \in P$:

- $|\alpha| \leq |\beta|$: so heißt G **monoton**
- $\alpha =$uAv und $\beta =$uwv für A $\in N$, w $\in (N \cup T)^+$ und u,v $\in (N \cup T)^*$: G heißt **kontextsensitiv (Typ-1)**
- $A \rightarrow \beta$ für ein $A \in N$: so heißt G **kontextfrei (Typ-2)**, linke Seiten von Produktionen nur aus einem Nonterminal

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta \in P$:

- $|\alpha| \leq |\beta|$: so heißt G **monoton**
- $\alpha =$uAv und $\beta =$uwv für A $\in N$, w $\in (N \cup T)^+$ und u,v $\in (N \cup T)^*$: G heißt **kontextsensitiv (Typ-1)**
- $A \rightarrow \beta$ für ein $A \in N$: so heißt G **kontextfrei (Typ-2)**, linke Seiten von Produktionen nur aus einem Nonterminal
- $A \rightarrow aB$ oder $A \rightarrow \epsilon$ für $A, B \in N$ und $a \in T$: so heißt G **regulär (Typ-3)**

Grammatiken-Typen

Sei $G = \langle N, T, P, S \rangle$ eine Grammatik, dann heißt G **unbeschränkte Grammatik (Typ-0)** $\Rightarrow$ Keine Einschränkungen.
Gilt nun für alle Produktionen $\alpha \to \beta \in P$:

- $|\alpha| \leq |\beta|$: so heißt G **monoton**
- $\alpha =$uAv und $\beta =$uwv für A $\in N$, w $\in (N \cup T)^+$ und u,v $\in (N \cup T)^*$: G heißt **kontextsensitiv (Typ-1)**
- $A \to \beta$ für ein $A \in N$: so heißt G **kontextfrei (Typ-2)**, linke Seiten von Produktionen nur aus einem Nonterminal
- $A \to aB$ oder $A \to \epsilon$ für $A, B \in N$ und $a \in T$: so heißt G **regulär (Typ-3)**

Achtung! kontextfreie Grammatik $\neq$ kontextfreie Sprache!
Es gibt einen Unterschied zwischen Grammatik und Sprache.
Die Grammatik erzeugt eine Sprache, damit nicht mit Sprache gleichzusetzen.

Chomsky-Hierarchie

Sei $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, dann bezeichnen wir formale Sprachen, die von einer Typ-i-Grammatik erzeugt werden können als $\mathcal{L}_i$.

- $\mathcal{L}_0$: rekursiv aufzählbare Sprache, erzeugt von unbeschränkter Grammatik
- $\mathcal{L}_1$: kontextsensitive Sprache, kann von kontextsensitiver Grammatik erzeugt werden
- $\mathcal{L}_2$: kontextfreie Sprache, kann von kontextfreier Grammatik erzeugt werden
- $\mathcal{L}_3$: reguläre Sprache, kann von regulärer Grammatik erzeugt werden
- $\mathcal{L}_{rec}$: alle rekursiven (entscheidbaren) Sprachen

Chomsky Hierarchie:

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{rec} \subset \mathcal{L}_0$$

Grammatik - Frage 1

Es gibt keine kontextfreie Sprache, die von einer regulären Grammatik erzeugt wird.

Grammatik - Frage 1

Es gibt keine kontextfreie Sprache, die von einer regulären Grammatik erzeugt wird.

falsch

Grammatik - Frage 1

Es gibt keine kontextfreie Sprache, die von einer regulären Grammatik erzeugt wird.

falsch

reguläre Sprachen sind ebenfalls kontextfreie Sprachen, somit gibt es reguläre Grammatiken, die eine kontextfreie Sprache erzeugt.

Grammatik - Frage 2

Die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \to AB, AB \to S\}, S)$ ist eine kontextfreie Grammatik.

Grammatik - Frage 2

Die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \to AB, AB \to S\}, S)$ ist eine kontextfreie Grammatik.

falsch

Die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \to AB, AB \to S\}, S)$ ist eine kontextfreie Grammatik.

falsch

Die Produktion $AB \to S$ hat auf der linken Seite zwei Nonterminale, daher nicht kontextfrei.

Grammatik - Frage 3

Die Sprache $L(G)$, wobei $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \to AB, AB \to S\}, S)$, ist eine kontextfreie Sprache.

Grammatik - Frage 3

Die Sprache $L(G)$, wobei $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \to AB, AB \to S\}, S)$, ist eine kontextfreie Sprache.

richtig

Die Sprache $L(G)$, wobei $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{a}\}, \{S \rightarrow AB, AB \rightarrow S\}, S)$, ist eine kontextfreie Sprache.

richtig

Die erzeugte Sprache $L(G) = \{\}$, diese ist Sprache kontextfrei und sogar regulär.

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Wörter umschreiben:
$\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \color{red}{\underline{a}^{n-k}}\color{blue}{\underline{a}^k \underline{b}^k}\color{red}{\underline{c}^{n-k}}$

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Wörter umschreiben:
$\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \color{red}{\underline{a}^{n-k}}\color{blue}{\underline{a}^k \underline{b}^k}\color{red}{\underline{c}^{n-k}}$

$G = \langle \{S, A\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, P, S \rangle$, wobei
P = {

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Wörter umschreiben:
$\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$

$G = \langle \{S, A\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, P, S \rangle$, wobei
P = {
$S \rightarrow \underline{a}S\underline{c} \mid M$,
$M \rightarrow \underline{a}M\underline{b} \mid \epsilon$ }

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Wörter umschreiben:
$\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$

$G = \langle \{S, A\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, P, S \rangle$, wobei
P = {
$S \rightarrow \underline{a}S\underline{c} \mid M,$
$M \rightarrow \underline{a}M\underline{b} \mid \epsilon$ }

Grammatik kontextfrei?

Kontextfreie Grammatik: Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} | n \geq k \geq 0\}$

Wörter umschreiben:
$\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$

$G = \langle \{S, A\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, P, S \rangle$, wobei
P = {
$S \rightarrow \underline{a}S\underline{c} \mid M$,
$M \rightarrow \underline{a}M\underline{b} \mid \epsilon$ }

Grammatik kontextfrei?
Ja, da linke Seiten der Produktionen aus nur jeweils einem Nonterminal bestehen.

Satz von Chomsky-Schützenberger

Satz von Chomsky-Schützenberger - Definition

Satz von Chomsky-Schützenberger:

Eine Sprache L über Σ ist genau dann kontextfrei, wenn zu einem $n \geq 0$ ein Homomorphismus $h : \Gamma_n^* \to \Sigma^*$ so existiert, dass

$$L = h(D_n \cap R),$$

wobei R eine reguläre Sprache über $\Gamma_n = \{(_1,)_1, \ldots, (_n,)_n\}$ bezeichnet.

Satz von Chomsky-Schützenberger - Definition

Satz von Chomsky-Schützenberger:

Eine Sprache L über Σ ist genau dann kontextfrei, wenn zu einem $n \geq 0$ ein Homomorphismus $h : \Gamma_n^* \to \Sigma^*$ so existiert, dass

$$L = h(D_n \cap R),$$

wobei R eine reguläre Sprache über $\Gamma_n = \{(_1,)_1, \ldots, (_n,)_n\}$ bezeichnet.

D_n ... Dyck-Sprache (alle wohlgeformten Klammerausdrücke über Γ_n)

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist kontextfrei.

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist **kontextfrei**.

Beweis: Zunächst schreiben wir $\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$ als

$$\underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}.$$

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist **kontextfrei**.

Beweis: Zunächst schreiben wir $\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$ als

$$\underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}.$$

Somit lassen sich die zwei voneinander abhängigen Paare $(\underline{a}^{n-k}, \underline{c}^{n-k})$ und $(\underline{a}^k, \underline{b}^k)$ erkennen, die sich einfach mit Hilfe von Klammerausdrücken darstellen lassen.

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist **kontextfrei**.

Beweis: Zunächst schreiben wir $\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$ als

$$\underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}.$$

Somit lassen sich die zwei voneinander abhängigen Paare $(\underline{a}^{n-k}, \underline{c}^{n-k})$ und $(\underline{a}^k, \underline{b}^k)$ erkennen, die sich einfach mit Hilfe von Klammerausdrücken darstellen lassen. Wir brauchen also D_2 und schneiden mit $R = \{\underline{(}\}^* \{\underline{[}\}^* \{\underline{]}\}^* \{\underline{)}\}^*$.

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist **kontextfrei**.

Beweis: Zunächst schreiben wir $\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$ als

$$\underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}.$$

Somit lassen sich die zwei voneinander abhängigen Paare $(\underline{a}^{n-k}, \underline{c}^{n-k})$ und $(\underline{a}^k, \underline{b}^k)$ erkennen, die sich einfach mit Hilfe von Klammerausdrücken darstellen lassen. Wir brauchen also D_2 und schneiden mit $R = \{\underline{(}\}^* \{\underline{[}\}^* \{\underline{]}\}^* \{\underline{)}\}^*$. Nun müssen wir nur noch den Homomorphismus $h : \{\underline{(}, \underline{)}, \underline{[}, \underline{]}\}^* \to \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*$ mit

Satz von Chomsky-Schützenberger - Beispiel

$L = \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} \mid n \geq k \geq 0\}$ ist **kontextfrei**.

Beweis: Zunächst schreiben wir $\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}$ als

$$\underline{a}^{n-k+k} \underline{b}^k \underline{c}^{n-k} = \underline{a}^{n-k} \underline{a}^k \underline{b}^k \underline{c}^{n-k}.$$

Somit lassen sich die zwei voneinander abhängigen Paare $(\underline{a}^{n-k}, \underline{c}^{n-k})$ und $(\underline{a}^k, \underline{b}^k)$ erkennen, die sich einfach mit Hilfe von Klammerausdrücken darstellen lassen. Wir brauchen also D_2 und schneiden mit $R = \{\underline{(}\}^* \{\underline{[}\}^* \{\underline{]}\}^* \{\underline{)}\}^*$. Nun müssen wir nur noch den Homomorphismus $h : \{\underline{(}, \underline{)}, \underline{[}, \underline{]}\}^* \to \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*$ mit

$$h(\underline{(}) = \underline{a}, \qquad h(\underline{[}) = \underline{a}, \qquad h(\underline{]}) = \underline{b}, \qquad h(\underline{)}) = \underline{c}$$

definieren, und wir bekommen $L = h(D_2 \cap R)$. Somit ist L kontextfrei.

Abschlusseigenschaften

Abschlusseigenschaften

Alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, der Chomsky-Hierarchie sind gegenüber **regulären Operationen** (Verenigung, Konkatenation und Kleene-Stern) abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

Alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, der Chomsky-Hierarchie sind gegenüber **regulären Operationen** (Verenigung, Konkatenation und Kleene-Stern) abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **Homomorphismen** abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

Alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, der Chomsky-Hierarchie sind gegenüber **regulären Operationen** (Verenigung, Konkatenation und Kleene-Stern) abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **Homomorphismen** abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **gsm-Abbildungen** abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

Alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, der Chomsky-Hierarchie sind gegenüber **regulären Operationen** (Verenigung, Konkatenation und Kleene-Stern) abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **Homomorphismen** abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **gsm-Abbildungen** abgeschlossen.

Kontextsensitive Sprachen sind gegenüber ϵ-**freien** gsm-Abbildungen bzw. Homomorphismen abgeschlossen.

Abschlusseigenschaften

Alle Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, der Chomsky-Hierarchie sind gegenüber **regulären Operationen** (Verenigung, Konkatenation und Kleene-Stern) abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **Homomorphismen** abgeschlossen.

Die Sprachfamilien $\mathcal{L}_i, i \in \{0, 2, 3\}$ (regulär, kontextfrei, rekursiv aufzählbar) sind gegenüber beliebigen **gsm-Abbildungen** abgeschlossen.

Kontextsensitive Sprachen sind gegenüber ϵ**-freien** gsm-Abbildungen bzw. Homomorphismen abgeschlossen.

Wichtig: Kontextfreie Sprachen sind **NICHT** unter **Komplement** und **Durchschnitt** abgeschlossen!

Übersicht Abschlusseigenschaften

	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_0$
Vereinigung	ja	ja	ja	ja
Konkatenation	ja	ja	ja	ja
Kleenescher Stern	ja	ja	ja	ja
Komplement	ja	nein	ja	nein
Durchschnitt	ja	nein	ja	ja
Durchschnitt mit reg. Mengen	ja	ja	ja	ja
Homomorphismen	ja	ja	nein	ja
ε-freie Homomorphismen	ja	ja	ja	ja
inverse Homomorphismen	ja	ja	ja	ja
gsm-Abbildungen	ja	ja	nein	ja
ε-freie *gsm*-Abbildungen	ja	ja	ja	ja

Abschlusseigenschaften - Frage 1

Es gibt reguläre Sprachen, deren Komplement nicht entscheidbar ist.

Abschlusseigenschaften - Frage 1

Es gibt reguläre Sprachen, deren Komplement nicht entscheidbar ist.

falsch

Abschlusseigenschaften - Frage 1

Es gibt reguläre Sprachen, deren Komplement nicht entscheidbar ist.

falsch

Reguläre Sprachen sind gegenüber Komplement abgeschlossen und reguläre Sprachen sind entscheidbar.

Abschlusseigenschaften - Frage 2

Ist eine Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{0}\}$ nicht-regulär, dann ist auch L^* nicht regulär.

Abschlusseigenschaften - Frage 2

Ist eine Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{0}\}$ nicht-regulär, dann ist auch L^* nicht regulär.

falsch

Abschlusseigenschaften - Frage 2

Ist eine Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{0}\}$ nicht-regulär, dann ist auch L^* nicht regulär.

falsch

$L = \{\underline{0}^p | p \text{ ist eine Primzahl }\}$ ist nicht-regulär.
Aber $L^* = \{\epsilon\} \cup \{\underline{0}^n | n \geq 2\}$ ist regulär.

Abschlusseigenschaften - Frage 3

Sei L eine kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. So gibt es eine Grammatik, die $R - L^*$ erzeugt.

Abschlusseigenschaften - Frage 3

Sei L eine kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. So gibt es eine Grammatik, die $R - L^*$ erzeugt.

richtig

Abschlusseigenschaften - Frage 3

Sei L eine kontextfreie Sprache und R eine reguläre Sprache. So gibt es eine Grammatik, die $R - L^*$ erzeugt.

richtig

R und L sind beide rekursiv aufzählbare Sprachen, und rekursiv aufzählbare Sprachen sind gegenüber Differenz und Kleene-Stern abgeschlossen. Daher gibt es auch eine Grammatik, die $R - L^*$ erzeugt.

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$$L = \{(\underline{ab})^n \underline{c}^k \underline{d}^{2n} | n, k \geq 0\} \cap \{(\underline{ab})^k \underline{c}^{2k} \underline{d}^{4n} | n, k \geq 0\}$$

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$L = \{(\underline{ab})^n \underline{c}^k \underline{d}^{2n} | n, k \geq 0\} \cap \{(\underline{ab})^k \underline{c}^{2k} \underline{d}^{4n} | n, k \geq 0\}$

Resultierende Sprache $L = \{(\underline{ab})^{2n} \underline{c}^{4n} \underline{d}^{4n} | n \geq 0\}$

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$L = \{(\underline{ab})^n \underline{c}^k \underline{d}^{2n} | n, k \geq 0\} \cap \{(\underline{ab})^k \underline{c}^{2k} \underline{d}^{4n} | n, k \geq 0\}$

Resultierende Sprache $L = \{(\underline{ab})^{2n} \underline{c}^{4n} \underline{d}^{4n} | n \geq 0\}$

Es ist bekannt, dass Sprache $\{\underline{0}^{kn} \underline{1}^{ln} \underline{2}^{mn} | n \geq 0\}$, für Konstanten k, l, m nicht kontextfrei ist.

Da kontextfreie Sprachen abgeschlossen gegenüber Homomorphismen sind, genügt es, einen Homomorphismus zu finden, der die Sprache L auf $\{\underline{0}^{kn} \underline{1}^{ln} \underline{2}^{mn} | n \geq 0\}$ abbildet. Falls das möglich ist, ist es sicher, dass die Sprache L nicht kontextfrei war.

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$L = \{(\underline{ab})^{2n}\underline{c}^{4n}\underline{d}^{4n} | n \geq 0\}$

Sei $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}^* \rightarrow \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ wie folgt definiert:

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$L = \{(\underline{ab})^{2n}\underline{c}^{4n}\underline{d}^{4n} | n \geq 0\}$

Sei $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}^* \to \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ wie folgt definiert:

$$h(\underline{a}) = \underline{0}, \quad h(\underline{b}) = \underline{0}, \quad h(\underline{c}) = \underline{1}, \quad h(\underline{d}) = \underline{2}$$

Abschlusseigenschaften - Sprache 1/2

$L = \{(\underline{ab})^{2n}\underline{c}^{4n}\underline{d}^{4n} | n \geq 0\}$

Sei $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}^* \to \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ wie folgt definiert:

$$h(\underline{a}) = \underline{0}, \quad h(\underline{b}) = \underline{0}, \quad h(\underline{c}) = \underline{1}, \quad h(\underline{d}) = \underline{2}$$

$h(L) = \{\underline{0}^{4n}\underline{1}^{4n}\underline{2}^{4n} | n \geq 0\} \Rightarrow$ Somit L nicht kontextfrei

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

Gleicher Ansatz wie vorher

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

Gleicher Ansatz wie vorher

Sei $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^* \rightarrow \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ wie folgt definiert:

$$h(\underline{a}) = \underline{0}, \quad h(\underline{b}) = \underline{1}, \quad h(\underline{c}) = \epsilon$$

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

Gleicher Ansatz wie vorher

Sei $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^* \rightarrow \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}^*$ wie folgt definiert:

$$h(\underline{a}) = \underline{0}, \quad h(\underline{b}) = \underline{1}, \quad h(\underline{c}) = \epsilon$$

$h(L) = \{\underline{0}^n \underline{1}^{3n} \underline{0}^{2n+1} | n \geq 0\}$

Das geht leider nicht so...

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

Man kann mit einem Homomorphismus kein Zeichen auf zwei verschiedene Zeichen abbilden (a zu Beginn mit 0, und a am Ende mit 2).

Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$

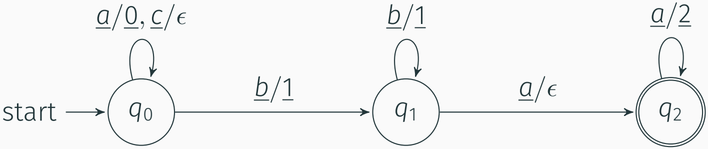
Man kann mit einem Homomorphismus kein Zeichen auf zwei verschiedene Zeichen abbilden ($\underline{a}$ zu Beginn mit 0, und $\underline{a}$ am Ende mit 2).

Wir brauchen etwas, das verschiedene Zustände annehmen kann und für gleiche Eingabesymbole zu verschiedenen Zeitpunkten auf verschiedene Ausgabesymbolen abbildet. Dazu brauchen wir nun eine gsm-Abbildung.

gsm(generalized sequential machine) ist ein endlicher Automat mit Ausgabe. gsm muss nicht deterministisch sein.

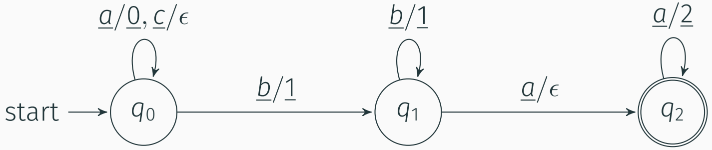
Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$



Abschlusseigenschaften - Sprache 2/2

$L = \{\underline{a}^n \underline{c}^k \underline{b}^{2n} \underline{a}^{2n+1} | n, k \geq 0\}$



$$M(L) = \{\underline{0}^n \underline{1}^{2n} \underline{2}^{2n} | n \geq 0\} \Rightarrow$$

L ist nicht kontextfrei.

Komplexität

P:

Eine Sprache L ist in P, wenn sie in polynomiell beschränkter Zeit von einer deterministischen Turingmaschine (DTM) entscheidbar ist.

P:

Eine Sprache L ist in **P**, wenn sie in polynomiell beschränkter Zeit von einer deterministischen Turingmaschine (DTM) entscheidbar ist.

NP:

Eine Sprache L ist in **NP**, wenn sie in polynomiell beschränkter Zeit von einer nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) entscheidbar ist.

P:

Eine Sprache L ist in P, wenn sie in polynomiell beschränkter Zeit von einer deterministischen Turingmaschine (DTM) entscheidbar ist.

NP:

Eine Sprache L ist in NP, wenn sie in polynomiell beschränkter Zeit von einer nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) entscheidbar ist.

Offensichtlich gilt $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Offenes Problem: $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ oder $\mathsf{P} \subset \mathsf{NP}$?

NP-hart:

Eine Sprache L ist NP-hart, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathsf{NP}$ gilt.

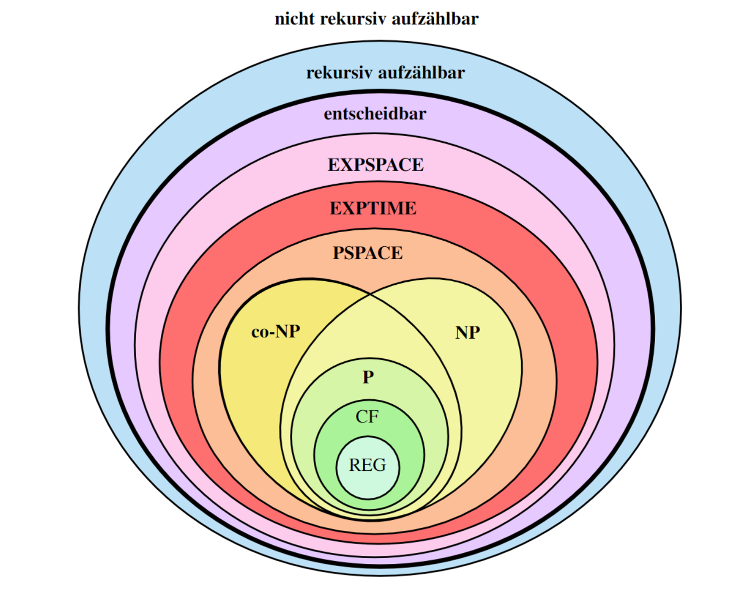
NP-hart:

Eine Sprache L ist NP-hart, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in$ NP gilt.

NP-vollständig:

Eine Sprache L ist NP-vollständig, wenn sie NP-hart ist und $L \in$ NP.

Komplexität - Übersicht (Folie 249)



Komplexität - Frage 1

Aus $A \leq_p SAT$ und $A \in \mathsf{NP}$ folgt, dass auch A NP-vollständig ist.

Komplexität - Frage 1

Aus $A \leq_p SAT$ und $A \in \mathbf{NP}$ folgt, dass auch A **NP**-vollständig ist.

Falsch.

Komplexität - Frage 1

Aus $A \leq_p SAT$ und $A \in \mathbf{NP}$ folgt, dass auch A **NP**-vollständig ist.

Falsch. Sei $A = \{\}$. Dann ist $A \leq_p SAT$ mittels $w \to x \wedge \neg x$. Aber A ist nicht **NP**-vollständig, da $SAT \not\leq_p A$ ($x \vee \neg x \in SAT$ kann nicht auf ein Wort in A abgebildet werden).

Komplexität - Frage 2

Aus $A \leq_p SAT$ und $SAT \leq_p A$ folgt, dass A **NP**-vollständig ist.

Komplexität - Frage 2

Aus $A \leq_p SAT$ und $SAT \leq_p A$ folgt, dass A **NP**-vollständig ist.

Richtig.

Komplexität - Frage 2

Aus $A \leq_p SAT$ und $SAT \leq_p A$ folgt, dass A **NP**-vollständig ist.

Richtig. Aus $A \leq_p SAT$ folgt $A \in \mathbf{NP}$ (da $SAT \in \mathbf{NP}$). Da SAT **NP**-hart ist, ist wegen $SAT \leq_p A$ auch A **NP**-hart. Damit ist A **NP**-vollständig.

Komplexität - Frage 3

Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathsf{P}$.

Komplexität - Frage 3

Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathsf{P}$.

Richtig.

Komplexität - Frage 3

Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathbf{P}$.

Richtig. Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist B regulär. Somit gilt sicher $B \in \mathbf{P}$, da die regulären Sprachen eine Teilmenge von $\mathbf{P}$ sind. Dann muss aber, nachdem $A \leq_p B$, auch $A \in \mathbf{P}$ gelten.

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$. Dann gilt $A \leq_p B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

Komplexität - Frage 4

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$. Dann gilt $A \leq_p B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

Richtig.

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$. Dann gilt $A \leq_p B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

Richtig. Nachdem $A \leq_p B$ gibt es eine in polynomieller Zeit berechenbare Reduktionsfunktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, für die gilt: $w \in A$ genau dann, wenn $f(w) \in B$. Das ist aber äquivalent zu $w \notin A$ genau dann, wenn $f(w) \notin B$. Es gilt also auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

Komplexität - Frage 5

Wenn es eine Sprache $L \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gibt, die NP-vollständig ist, dann gilt $\mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{NP}$.

Komplexität - Frage 5

Wenn es eine Sprache $L \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gibt, die NP-vollständig ist, dann gilt $\mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{NP}$.

Richtig.

Komplexität - Frage 5

Wenn es eine Sprache $L \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gibt, die NP-vollständig ist, dann gilt $\mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{NP}$.

Richtig. Wir zeigen beide Richtungen der Inklusion.

- $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{co\text{-}NP}$:
- $\mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \mathsf{NP}$:

Komplexität - Frage 5

Wenn es eine Sprache $L \in$ **co-NP** gibt, die **NP**-vollständig ist, dann gilt **co-NP** $=$ **NP**.

Richtig. Wir zeigen beide Richtungen der Inklusion.

- **NP** $\subseteq$ **co-NP**: Weil L **NP**-vollständig ist, gilt $A \leq_p L$ für alle $A \in$ **NP**. Da aber bereits $L \in$ **co-NP**, gilt $A \in$ **co-NP** für alle $A \in$ **NP** und somit **NP** $\subseteq$ **co-NP**.
- **co-NP** $\subseteq$ **NP**:

Komplexität - Frage 5

Wenn es eine Sprache $L \in \textbf{co-NP}$ gibt, die **NP**-vollständig ist, dann gilt $\textbf{co-NP} = \textbf{NP}$.

Richtig. Wir zeigen beide Richtungen der Inklusion.

- $\textbf{NP} \subseteq \textbf{co-NP}$: Weil L **NP**-vollständig ist, gilt $A \leq_p L$ für alle $A \in \textbf{NP}$. Da aber bereits $L \in \textbf{co-NP}$, gilt $A \in \textbf{co-NP}$ für alle $A \in \textbf{NP}$ und somit $\textbf{NP} \subseteq \textbf{co-NP}$.
- $\textbf{co-NP} \subseteq \textbf{NP}$: Somit gilt aber auch $\overline{A} \leq_p \overline{L}$ für alle $\overline{A} \in \textbf{co-NP}$ (siehe vorherige Frage). Wegen $\overline{L} \in \textbf{NP}$ (Definition von **co-NP**), haben wir $\overline{A} \in \textbf{NP}$ für alle $\overline{A} \in \textbf{co-NP}$ und somit $\textbf{co-NP} \subseteq \textbf{NP}$.

Wenn es eine Sprache $L \in$ **co-NP** gibt, die **NP**-vollständig ist, dann gilt **co-NP** $=$ **NP**.

Richtig. Wir zeigen beide Richtungen der Inklusion.

- **NP** $\subseteq$ **co-NP**: Weil L **NP**-vollständig ist, gilt $A \leq_p L$ für alle $A \in$ **NP**. Da aber bereits $L \in$ **co-NP**, gilt $A \in$ **co-NP** für alle $A \in$ **NP** und somit **NP** $\subseteq$ **co-NP**.
- **co-NP** $\subseteq$ **NP**: Somit gilt aber auch $\overline{A} \leq_p \overline{L}$ für alle $\overline{A} \in$ **co-NP** (siehe vorherige Frage). Wegen $\overline{L} \in$ **NP** (Definition von **co-NP**), haben wir $\overline{A} \in$ **NP** für alle $\overline{A} \in$ **co-NP** und somit **co-NP** $\subseteq$ **NP**.

Insgesamt wäre also unter diesen Voraussetzungen **co-NP** $=$ **NP**.

Fragen?