Tips

* $L = \{a,b\}^* \Longrightarrow R = \{\underset{a}{(},\underset{\varepsilon}{)},\underset{b}{[},\underset{\varepsilon}{]}\}^*$

  Reihenfolge nicht wichtig

* $L = \{a^n b^n\} \Longrightarrow R = \{\underset{a}{\{(\}^*}\ \underset{b}{\{)\}}\}^*$

  a und b müssen in einer bestimmten Reihenfolge vorkommen

* Wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind
  (wenn L_1 und L_2 kontextfrei, daraus folgt L_1 und L_2 kontextsensitiv)
  dann ist $L_1 \cap L_2$ entscheidbar, da kontextsensitive Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind..

* Kontextfreie Sprachen sind auch kontextsensitiv!

* $L = \{\#\} \Longrightarrow R = \{\underset{\#}{\{[\}}\ \underset{\varepsilon}{\{]\}}\}$

* $L = \{\omega\omega^r \mid \omega \in \{a,b,c\}\} \Rightarrow R = \{\underset{a}{[_1},\underset{b}{[_2},\underset{c}{[_3}\}^* \{\underset{a}{]_1},\underset{b}{]_2},\underset{c}{]_3}\}^*$

Bsp: Satz von Chomsky - Schützenberg

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.
(D_n bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschidene Klammern.)

1

Sei $L = \{a^{2n}(bc)^n \mid n \geq 0\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da $L = h(D_1 \cap R)$,
wobei $R = \{\underset{a^2}{(}\}^* \{\underset{bc}{)}\}^*$ und

$h: \{(,)\}^* \longrightarrow \{a,b,c\}^*$

$h(() = a^2$

$h()) = bc$

k.f. Gramatik: $G = (\{S\}, \{a,b,c\}, \{S \to aaSbc \mid \varepsilon\}, S)$

② Sei $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i,j,k,l \geq 0 \ i=j \text{ und } k=l\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_2 \cap R)$$

wobei $R = \{(\}^* \{)\}^* \{[\}^* \{]\}^*$
$\qquad\qquad\quad a \qquad b \qquad c \qquad d$

und $\Gamma_n^* \longrightarrow \Sigma^*$

$$h: \{(,),[,]\}^* \longrightarrow \{a,b,c,d\}^*$$

$h(() = a \qquad h([) = c$

$h()) = b \qquad h(]) = d$

③ Kf. Gram. $G = \left(\{S,A,B\}, \{a,b,c,d\}, \{S \rightarrow AB,\ A \rightarrow aAb \mid \varepsilon,\ B \rightarrow cBd \mid \varepsilon\}, S\right)$

Sei $L = \{ a^i b^k c^j \mid i, j \geq 0,\ i + j \leq k \}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$L = h(D_3 \cap R)$

wobei $R = \{\underset{a}{(}\}^* \{\underset{b}{[}\}^* \{\underset{\varepsilon}{]}\}^* \{\underset{b}{)}\}^* \{\underset{b}{<}\}^* \{\underset{c}{>}\}^*$

$h : \{ (,), [,], <, > \}^* \longrightarrow \{a, b, c\}^*$

$h(() = a \quad h([) = b \quad h(<) = b$

$h()) = b \quad h(]) = \varepsilon \quad h(>) = c$

K.f. Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow AB;\ A \rightarrow aAb \mid \varepsilon;\ B \rightarrow bBc \mid bB \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{ w c^n \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a = n \} \cup$
$\{ w c^n \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b = n \}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$L = h(D_4 \cap R)$

wobei $R = \{\underset{a}{(_1}, \underset{b}{(_2}\}^* \{\underset{\varepsilon}{)_1}, \underset{c}{)_2}\}^* \cup$
$\{\underset{a}{(_3}, \underset{b}{(_4}\}^* \{\underset{c}{)_3}, \underset{\varepsilon}{)_4}\}^*$

$h : \{ (_1, (_2, (_3, (_4,)_1,)_2,)_3,)_4 \}^* \longrightarrow \{a, b, c\}^*$

$h((_1) = a \quad h((_2) = b \quad h((_3) = a \quad h((_4) = b$

$h()_1) = \varepsilon \quad h()_2) = c \quad h()_3) = c \quad h()_4) = \varepsilon$

K.f. Gramatik $G = (\{S, A, B\}, \{S \rightarrow A \mid B,\ A \rightarrow aAc \mid bA \mid \varepsilon,\ B \rightarrow bAc \mid aA \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{a^{8n} b^{8n} a^{4m} c^{k} \mid n, m, k \geq 0\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_3 \cap R)$$

wobei $R = \{\underset{a^8}{(}\}^* \{\underset{b^8}{)}\}^* \{\underset{a^4}{[}\}^* \{\underset{\varepsilon}{]}\}^* \{\underset{\varepsilon}{<}\}^* \{\underset{c}{>}\}^*$

und $h : \{(,), [,], <, >\}^* \longrightarrow \{a, b, c\}^*$

$h(() = a^8 \quad h([) = a^4 \quad h(<) = \varepsilon$

$h()) = b^8 \quad h(]) = \varepsilon \quad h(>) = c$

Sei $L = \{0^n 1^m \mid n \leq m\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_2 \cap R)$$

wobei $R = \{\underset{\varepsilon}{[}\}^* \{\underset{0}{(}\}^* \{\underset{1}{)}\}^* \{\underset{1}{]}\}^*$

und $h : \{[, (,),]\}^* \longrightarrow \{0, 1\}^*$

$h(() = 0 \quad h([) = \varepsilon$

$h()) = 1 \quad h(]) = 1$

k.f. Gramatic: $G = (\{S\}, \{0,1\}, \{S \to 0S1 \mid S1 \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{w a^n \mid w \in \{b,c\}^*, n \geq |w|\}$

$\longrightarrow$ L kontextfrei, da

$L = h(D_3 \cap R)$

wobei $R = \{\underset{b}{[}, \underset{c}{(}\}^* \{\underset{a}{)}, \underset{a}{]}\}^* \{\underset{a}{\langle}\}^* \{\underset{\varepsilon}{\rangle}\}^*$

$h: \{[,], (,), \langle, \rangle\}^* \longrightarrow \{a, b, c\}^*$

$h([) = b \quad h(() = c \quad h(\langle) = a$

$h(]) = a \quad h()) = a \quad h(\rangle) = \varepsilon$

K.f. Gramatik: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow bSa \mid cSa, Sa \mid \varepsilon, S))$

Sei $L = \{a^i b^n \mid i, n \geq 0 \quad i = n\} \cup$
$\{a^i b^n \mid i, n \geq \quad i = 2n\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$L = h(D_2 \cap R)$

wobei $R = \{\underset{a}{(}\}^* \{\underset{b}{)}\}^* \cup$
$\{\underset{aa}{[}\}^* \{\underset{b}{]}\}^*$

$h(() = a \qquad h([) = aa$

$h()) = b \qquad h(]) = b$

K.f Gramatik: $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A \mid B;$
$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon;$
$B \rightarrow aaBb \mid \varepsilon, \quad , S\}$

Sei $L = \{a^n b^m \mid m \geq n$ und $m-n$ ist gerade

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_2 \cap R)$$

wobei $R = \{\underset{\varepsilon\varepsilon}{[[}\}^* \{\underset{a}{(}\}^* \{\underset{b}{)}\}^* \{\underset{bb}{]]}\}^*$

$$h: \{[,],(,)\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$$

$h([) = \varepsilon \qquad h(() = a$

$h(]) = b \qquad h()) = b$

or $\{S \to aSb \mid Sbb \mid \varepsilon\}$

K.f. Gramatik für L: $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSb \mid B,\ B \to bbB \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{ww^r \mid w \in \{a,b,c\}^*\} \cap$

$L = \{a^n b^k a^n \mid k, n \geq 0\}$

Durschnitt ist $L = \{a^n b^{2m} a^n \mid m, n \geq 0\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_2 \cap R)$$

wobei $R = \{\underset{a}{[}\}^* \{\underset{b\ b}{(,)}\}^* \{\underset{a}{]}\}^*$

$$h: \{[,],(,)\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$$

$h([) = a \qquad h(() = b$

$h(]) = a \qquad h()) = b$

K.f. Gramatik für L: $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSa \mid B,\ B \to bBb \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{0^n a^k 1^m \mid k \geq 0,\ n \leq m\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$L = h(D_3 \cap R)$

wobei $R = \underset{0}{\{\langle\}^*}\ \underset{a}{\{[\}^*}\ \underset{\varepsilon}{\{(\}^*}\ \underset{1}{\{)\}^*}\ \underset{\varepsilon}{\{]\}^*}\ \underset{1}{\{\rangle\}^*}$

$h: \{\langle, \rangle, [,], (,)\}^* \longrightarrow \{0, a, 1\}^*$

$h(\langle) = 0 \quad h([) = a \quad h(() = \varepsilon$

$h(\rangle) = 1 \quad h(]) = \varepsilon \quad h()) = 1$

K.f. Gramm. $G = (\{S, A\}, \{0, 1, a\}, \{S \rightarrow 0S1 \mid A \mid \varepsilon,\ A \rightarrow aA \mid A1 \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{a^i b^j c^j d^i \mid i, j \geq 0\}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$L = h(D_2 \cap R)$

wobei $R = \underset{a}{\{[\}^*}\ \underset{b}{\{(\}^*}\ \underset{c}{\{)\}^*}\ \underset{d}{\{]\}^*}$

$h: \{[,], (,)\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d\}^*$

$h([) = a \quad h(() = b$

$h(]) = d \quad h()) = c$

K.f. Gramm: $G = (\{S, A\}, \{a, b, c, d\} \{S \rightarrow B \mid A \mid \varepsilon,\ A \rightarrow aAd \mid B \mid \varepsilon,\ B \rightarrow bBc \mid \varepsilon\}, S)$

Sei $L = \{ w \# w^r \mid w \in \{a, b, c, d\}^* \}$

$\longrightarrow$ L ist kontextfrei, da

$$L = h(D_5 \cap R)$$

wobei $R = \{\underset{a}{[_1}, \underset{b}{[_2}, \underset{c}{[_3}, \underset{d}{[_4}\}^* \{\underset{\#}{[_5}\} \{\underset{\varepsilon}{]_5}\} \{\underset{a}{]_1}, \underset{b}{]_2}, \underset{c}{]_3}, \underset{d}{]_4}\}$

$h : \{[_i,]_i \mid 1 \leq i \leq 5\}^* \longrightarrow \{a, b, c, d, \#\}$

mit $h([_1) = (]_1) = a$

$h([_2) = (]_2) = b$

$h([_3) = (]_3) = c$

$h([_4) = (]_4) = d$

$h([_5) = \#$

$h(]_5) = \varepsilon$

k.f. Gramatik.

$G = (\{S, E\}, \{a, b, c, d, \#\}, \{S \to aSa \mid bSb \mid cSc \mid dS$

$S \to E$

$E \to \#\})$