4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 2 **ad SS 2017** **11.12.2017**

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
			A

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Nicht alle Studierende besuchen mehr als eine Vorlesung.
(*Not all students visit more than one lecture.*)

(2) Alle Studierenden, die wenigstens eine Vorlesung besuchen, kennen einen Professor.
(*All students, who visit at least one lecture, know a professor.*)

(7 Punkte)

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall y P(y, h(x, c)) \wedge \exists u(P(u, y) \supset \neg P(u, h(d, u))))$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und *begründen Sie* die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.
Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus $\forall x(\exists y P(x, y) \supset Q(f(x)))$ und $\forall x\, f(g(x)) = x$ folgt $\exists y \exists x \neg P(y, x) \vee Q(a)$.
Kennzeichnen Sie alle γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.
(8 Punkte)

8.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten detailiert und klar. (Keine Puntke für fehlende oder falsche Begründung.)

- Das Programm $\{\, 2x > x * x \,\}$ `while` $x > 0$ `do` $x \leftarrow x - 2y * y$ $\{\, x < 1 \,\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ partiell, aber nicht total korrekt.
Begründung: ☐ richtig ☐ falsch
- Wenn die partiellen Korrektheitsaussagen $\{A\}\alpha\{B\}$ und $\{\top\}\beta\{C\}$ gelten, dann gilt auch die partielle Korrektheitsaussage $\{A\}\alpha; \beta\{C\}$.
Begründung: ☐ richtig ☐ falsch

(8 Punkte)

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Nicht alle Studierende besuchen mehr als eine Vorlesung.
(*Not all students visit more than one lecture.*)

(2) Alle Studierenden, die wenigstens eine Vorlesung besuchen, kennen einen Professor.
(*All students, who visit at least one lecture, know a professor.*)

(7 Punkte)

$S = \langle \{S, V, b, P\}, \{\}, \{\} \rangle$

PS:

$S(x)$ ... x ist Schüler

$V(x)$ ... x ist Vorlesung

$b(x,y)$ ... x besucht y

$P(x)$ ... x ist Professer

$k(x,y)$ ... x kennt y

(1) $\neg \forall x (S(x) \rightarrow \exists y \exists z (y \neq z \wedge V(y) \wedge V(z) \wedge b(x,y) \wedge b(x,z)))$

(2) $\forall x ((S(x) \wedge \exists y (V(y) \wedge b(x,y))) \rightarrow \exists z (P(z) \wedge k(x,z)))$

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall y P(y, h(x,c)) \wedge \exists u (P(u,y) \supset \neg P(u, h(d,u))))$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und *begründen Sie* die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.
Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

y: frei und gebunden
u: gebunden
x: frei
c: frei
d: frei

Gegenbeispiel: $\underline{I} = \langle D, \phi, \xi \rangle$ wobei

$D = \omega$
$\phi(P)$ = false, der Rest ist beliebig definiert.

Erklärung: Da val(P(x,y)) = false, ist der linke Teil der Konjunktion immer falsch, und somit auch die gesamte Konjunktion.

Modell: $\underline{I} = \langle D, \phi, \xi \rangle$ wobei

$D = \omega$
$\phi(h)(x,y) = 7$
$\phi(P)(x,y)$ = if $y = 7$ then true else false
$\xi(y) = 2$

Erklärung: Die linke Seite ist immer wahr, da h immer 1 ist. Die linke Seite der Implikation ist immer falsch (da $y = 2$ ist) und somit ist die Implikation immer wahr.

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus $\forall x(\exists y P(x,y) \supset Q(f(x)))$ und $\forall x\, f(g(x)) = x$ folgt $\exists y \exists x \neg P(y,x) \vee Q(a)$.
Kennzeichnen Sie alle γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

(1)	$t: \forall x(\exists y P(x,y) \supset Q(f(x)))$		Ann, γ
(2)	$t: \forall x\, f(g(x)) = x$		Ann, γ
(3)	$f: \exists y \exists x \neg P(y,x) \vee Q(a)$		Ann, γ
(4)	$f: Q(a)$		(3)
(5)	$f: \exists y \exists x \neg P(y,x)$		(3)
(6)	$f: \exists x \neg P(g(a),x)$		(5)
(7)	$t: P(g(a),g(a))$		(6)
(8)	$t: \exists y\, P(\overset{g(a)}{x},y) \supset Q(f(g(a)))$		(7)
(9)	$f: \exists y\, P(g(a),y)$	$t: Q(f(g(a)))$	
(10)	$f: P(g(a),g(a))$	$t: Q(a)$	
	Wd. ✗	Wd. ✗	

8.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten detailliert und klar. (Keine Puntke für fehlende oder falsche Begründung.)

- Das Programm $\{\, 2x > x * x \,\}$ `while` $x > 0$ `do` $x \leftarrow x - 2y * y$ $\{\, x < 1 \,\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ partiell, aber nicht total korrekt.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch
- Wenn die partiellen Korrektheitsaussagen $\{A\}\alpha\{B\}$ und $\{\top\}\beta\{C\}$ gelten, dann gilt auch die partielle Korrektheitsaussage $\{A\}\alpha;\beta\{C\}$.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

a) Nicht total korrekt, da bei $x=1$ und $y=0$ die while-Schleife nie terminiert.

$2x > x \cdot x$ gilt nur für $x=1$.

$\rightarrow$ nach while-Schleife sicher < 1