

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 SS 2016 19.10. 2016			
Matrikelnummer	Familiennamen Lösung	Vorname	Gruppe A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.  
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

- Jedes Huhn frisst alle Körner, die es sieht.  
*Each hen eats every grain of corn it sees.*
- Pipi ist ein Huhn, das höchstens zwei Körner frisst.  
*The hen Pipi eats at most two grains of corn.*

(6 Punkte)

### Lösung:

Prädikatensymbole:

$H(x)$  ...  $x$  ist ein Huhn

$K(x)$  ...  $x$  ist ein Korn

$S(x, y)$  ...  $x$  sieht  $y$

$F(x, y)$  ...  $x$  frisst  $y$

Konstantensymbol:

$p$  ... Pipi

Formeln:

(1):  $\forall x \forall y ((H(x) \wedge K(y) \wedge S(x, y)) \supset F(x, y))$

(2):  $H(p) \wedge \exists x \exists y \forall z ((K(z) \wedge F(p, z)) \supset (x = y \vee x = z))$

7.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$\exists y Q(y, h(z, b)) \vee \forall x (Q(x, y) \wedge \neg Q(x, h(b, x)))$

Beachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen und geben Sie an, welche der Variablen frei und welche gebunden vorkommen.

Spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

(6 Punkte)

### Lösung:

Modell  $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi \rangle$ :

$D = \omega$ ;  $\Phi(Q) = "<"$ ,  $\Phi(h) = "+"$ ,  $\Phi(b) = 1$ ,  $\xi(y) = \xi(z) = 0$ , beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation besagt das linke Disjunkt: Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner als 1 ist. Das ist richtig; daher ist auch die gesamte Disjunktion wahr.

Gegenbeispiel  $\mathcal{J} = \langle D, \Phi, \xi \rangle$ :

$D = \omega$ ;  $\Phi(Q) = "<"$ ,  $\Phi(h)(m, n) = 0$ ,  $\Phi(b) = 1$ ,  $\xi(y) = \xi(z) = 0$ , beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation besagt das rechte Disjunkt: Alle natürliche Zahlen sind gleichzeitig kleiner und nicht kleiner als 0. Auch das linke Disjunkt ist falsch, denn es besagt, dass es eine natürliche Zahl kleiner 0 gibt. Damit ist die gesamte Disjunktion falsch.

8.) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu  $\exists x [(P(x, f(x)) \wedge \forall y y = f(y)) \supset \forall z P(z, z)]$  an oder zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass es kein Gegenbeispiel gibt.

Markieren Sie alle  $\gamma$ - und  $\delta$ -Formeln im Tableau als solche.

(6 Punkte)

### Lösung:

Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Formel gültig ist, also keine Gegenbeispiele hat:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x[(P(x, f(x)) \wedge \forall y y = f(y)) \supset \forall z P(z, z)]$	Annahme – $\gamma$ -Formel
(2)	$\mathbf{f} : (P(a, f(a)) \wedge \forall y y = f(y)) \supset \forall z P(z, z)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : P(a, f(a)) \wedge \forall y y = f(y)$	von 2
(4)	$\mathbf{f} : \forall z P(z, z)$	von 2 – $\delta$ -Formel
(5)	$\mathbf{f} : P(b, b)$	von 4
(6)	$\mathbf{f} : (P(b, f(b)) \wedge \forall y y = f(y)) \supset \forall z P(z, z)$	von 1
(7)	$\mathbf{t} : P(b, f(b)) \wedge \forall y y = f(y)$	von 6
(8)	$\mathbf{t} : P(b, f(b))$	von 7
(9)	$\mathbf{t} : \forall y y = f(y)$	von 7
(10)	$\mathbf{t} : b = f(b)$	von 9
(11)	$\mathbf{t} : P(b, b)$	$S=10 \rightarrow 8$
	$\times$	Wid. (5/11)

Beachten Sie die Notwendigkeit die  $\gamma$ -Regel zweimal auf (1) anzuwenden!

- 9.) Analysieren Sie folgende partielle Korrektheitsaussage über  $\mathbb{Z}$  mit dem Hoare-Kalkül. Falls die Aussage falsch ist, geben Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel (Environment) an. Andernfalls begründen Sie die Gültigkeit der im Beweis verwendeten Implikationschritte.

$\langle y > 0 \rangle$   
if  $x \cdot y \neq x$  then begin  $x \leftarrow x \cdot 3$ ;  $x \leftarrow x \cdot x + y$  end else  $x \leftarrow 12 \cdot y$   
 $\langle x > 10 \rangle$

(6 Punkte)

**Lösung:**

$\langle y > 0 \rangle$   
if  $x \cdot y \neq x$  then  
 $\quad // \langle y > 0 \wedge xy \neq x \rangle$  If-Then-Regel  
 $\quad // \langle (3x)^2 + y > 10 \rangle$  Implikation 1  
begin  
 $\quad x \leftarrow x \cdot 3$ ;  
 $\quad // \langle x^2 + y > 10 \rangle$   
 $\quad x \leftarrow x \cdot x + y$   
end  
 $\quad // \langle x > 10 \rangle$  Assertion  
else  
 $\quad // \langle y > 0 \wedge xy = x \rangle$  If-Then-Regel  
 $\quad // \langle 12y > 10 \rangle$  Implikation 2  
 $\quad x \leftarrow 12 \cdot y$ ;  
 $\quad // \langle x > 10 \rangle$  Assertion  
 $\langle x > 10 \rangle$

Begründung der Gültigkeit der Implikationen in  $\mathbb{Z}$ :

**Implikation 1:** Aus  $xy \neq x$  folgt  $x \neq 0$ , daher  $|x| \geq 1$  und somit  $(3x)^2 = 9x^2 \geq 9$ .

Aus  $xy \neq x$  folgt außerdem  $y \neq 1$ ; zusammen mit  $y > 0$  folgt also  $y \geq 2$ .

Damit folgt insgesamt  $(3x)^2 + y \geq 9 + 2 = 11 > 10$ .

**Implikation 2:** Aus  $y > 0$ , also  $y \geq 1$ , folgt unmittelbar  $12y \geq 12 > 10$ .

- 10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt bei falscher Antwort oder mangelhafter bzw. fehlender Begründung.)

- Wenn eine Formel  $A$  kein Modell hat, dann ist  $\neg A$  erfüllbar.

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Wenn  $A$  kein Modell hat, also jede Interpretation  $A$  falsch macht, dann macht jede Interpretation  $\neg A$  wahr, da die Negation den Wahrheitswert invertiert. Mit anderen Worten:  $\neg A$  ist gültig. Da jede gültige Formel auch erfüllbar ist, ist auch  $\neg A$  erfüllbar.

- Wenn ein Programm bezüglich einer Vorbedingung  $P$  und einer Nachbedingung  $Q$  total korrekt ist, so sind  $P$  und  $Q$  in allen Umgebungen erfüllt.

**Begründung:**

☐ richtig ☒ falsch

**Lösung:** Totale Korrektheit ist eine Wenn-dann-Aussage, die z.B. auch dann zutrifft, wenn die Vorbedingung  $P$  in keiner einzigen Umgebung erfüllt ist.

- Wenn in einem Kalkül für die Prädikatenlogik nur endlich viele Formeln ableitbar sind, so ist dieser Kalkül sicher nicht vollständig, könnte aber dennoch korrekt sein.

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

**Lösung:** Es gibt unendlich viele prädikatenlogisch gültige Formeln. Daher kann ein Kalkül in dem nur endlich viele Formeln ableitbar sind nicht vollständig sein. Es können aber alle ableitbaren Formeln gültig sein. In diesem Fall ist der Kalkül korrekt.

**(6 Punkte)**