Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (2019W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 3.1
Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.
Hinweis: Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x ist das Quadrat von y und die Quadratwurzel von $2z$.

b) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x ist ungerade.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $x \leq |y| < 6x$.

d) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x ist ein leiblicher Großonkel von y.
Hinweis: Ein leiblicher Großonkel ist ein Bruder eines Großvaters oder einer Großmutter.

e) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x ist der Vater von zwei Söhnen, nämlich von y und von z.

f) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x hat zwei Söhne.

g) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Wenn x leer ist, dann hat y die Tiefe 2.
Hinweis: Die Tiefe eines Stacks ist die Anzahl der darin vorkommenden Stackelemente ($\in \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}$).

Lösung 3.1

a) $\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}},\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{\land}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{=}\underline{+}\underline{(}\underline{\mathtt{z}},\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{)}$
Beachten Sie, dass 2 in $\mathbb{N}$ nicht als Konstantensymbol zur Verfügung steht.

b) x ist genau dann ungerade, wenn $\exists y\, x = 2y + 1$. Der Existenzquantor lässt sich nicht eliminieren. Es gibt daher keinen entsprechenden Booleschen Ausdruck über $\mathbb{N}$.

c) $\underline{(}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{0}},\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{\land}\underline{(}\underline{\neg}\underline{\leq}\underline{(}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}},\underline{\mathtt{y}}\underline{)},\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}\underline{\land}\underline{\leq}\underline{(}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{y}},\underline{\mathtt{y}}\underline{)},\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{36}},\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$.
Beachten Sie, dass das Prädikat nur für positive x zutreffen kann.
Es gibt natürlich auch andere — allerdings längere — Lösungen, die explizite Fallunterscheidungen (unter Verwendung der Äquivalenz $A \supset B \equiv \neg A \lor B$) ausdrücken.

d) $\underline{(}\,\underline{\mathit{männlich}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{\land}\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\;\underline{\lor}\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$
$\underline{\lor}\underline{(}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\,\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{\lor}\,\underline{\mathit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}},\,\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\,\underline{\mathit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$

e) $\underline{(}\underline{(}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{\land}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\,\underline{\mathit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{)}\underline{\land}\underline{(}\,\underline{\mathit{männlich}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{\land}\,\underline{\mathit{männlich}}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{\land}\underline{\neg}\underline{\mathtt{y}}\underline{=}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}$
Hier wird 'Vater von zwei Söhnen' als 'Vater von mindestens zwei Söhnen' verstanden.
Eine ebenfalls korrekte, alternative Lösung erhält man für die Lesart 'Vater von genau zwei Söhnen': In diesem Fall existiert kein entsprechender Boolescher Ausdruck, da man (wie in der Vorlesung besprochen) einen Quantor benötigen würde um dies auszudrücken.

f) Dieses einstellige Prädikat benötigt Quantoren zum Ausdrücken der Kardinalität ('zwei') und kann daher nicht als Boolescher Ausdruck dargestellt werden.

g) $\underline{(}\underline{\neg}\,\underline{\mathrm{istleer?}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{\lor}\underline{(}\underline{\neg}\underline{\mathrm{istleer?}}\underline{(}\underline{\mathrm{pop}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{\land}\,\underline{\mathrm{istleer?}}\underline{(}\underline{\mathrm{pop}}\underline{(}\underline{\mathrm{pop}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$
Beachten Sie, dass 'Wenn … dann … ' als 'nicht … oder … ' verstanden werden kann.
Für jeden Term t kann $\underline{\mathrm{istleer?}(}t\underline{)}$ durch $t\underline{=}\underline{\varepsilon}$ ersetzt werden. Dadurch verringert sich die Länge des Ausdrucks jeweils um ein Symbol.

Aufgabe 3.2
Es sei $\mathbb{B}$ eine Modellstruktur für 2-3–Bäume[1] mit folgenden Komponenten:
— Eine Konstante ε für den leeren Baum (= 'leer' = kein Knoten).
— Eine weitere Konstante $\Box$ für den Baum der nur aus einem Endknoten (= Wurzel) besteht;
— Eine dreistellige Funktion f, die angewendet auf drei Bäume b_1, b_2, b_3 den Baum liefert, der von der Wurzel auf die Teilbäume b_1, b_2, b_3 (in dieser Reihenfolge) verzweigt; bzw. einen Baum liefert, der auf nur zwei Teilbäume b_i, b_j verzweigt, falls b_k leer ist, wobei $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und $i \neq j \neq k \neq i$.

[1] siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/2-3_tree`; allerdings ignorieren wir hier 'data elements' und die Tiefeneinschränkung für benachbarte Teilbäume

(*) Es gelte $f(b_1, b_2, b_3) = \varepsilon$, falls mehr als ein b_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) leer ist.

Über der entsprechenden Signatur $\Sigma(\mathbb{B}) = \langle \{\}, \{\underline{\varepsilon}, \underline{\Box}\}, \{\underline{\mathtt{f}}\} \rangle$ drückt beispielsweise folgende PL-Formel aus, dass es in der Darstellung eines Baums mit nur zwei Teilbäumen unter der Wurzel nicht darauf ankommt, welches der drei Argumente von f leer bleibt: $\forall x \forall y (f(\varepsilon, x, y) = f(x, \varepsilon, y) \land f(x, \varepsilon, y) = f(x, y, \varepsilon))$.
Hinweis: Wir verzichten in diesem Beispiel auf Unterstreichungen.

a) Geben Sie eine PL-Formel über $\Sigma(\mathbb{B})$ an, die (*) ausdrückt; also die Festlegung, dass man einen leeren Baum erhält, wenn man f auf Argumente anwendet, von denen zwei oder alle drei leer sind.

b) Geben Sie 4 verschiedene Terme aus $\mathcal{T}(\mathbb{B})$ an, die alle denselben Baum mit 3 Endknoten bezeichnen.

c) Definieren Sie induktiv die Tiefe $\tau(t)$ eines Terms $t \in \mathcal{T}(\mathbb{B})$.
Hinweis: Konstanten und Variablensymbole haben die Tiefe 0.

d) Zeigen Sie durch Induktion: Wenn $t \in T(\mathbb{B})$ in jeder Umgebung einen 2-3–Baum mit mindestens $n \geq 1$ Endknoten darstellt, dann gilt[2] $\tau(t) \geq \log_3(n)$.

Lösung 3.2

a) $f(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon \land \forall x (f(x, \varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon \land f(\varepsilon, x, \varepsilon) = \varepsilon \land f(\varepsilon, \varepsilon, x) = \varepsilon)$
Zur Erinnerung: Wir verzichten in diesem Beispiel auf Unterstreichungen. Außerdem wurde von Klammereinsparungsregeln Gebrauch gemacht.

b) $f(f(\Box, \Box, \varepsilon), \Box, \varepsilon)$, $f(f(\Box, \varepsilon, \Box), \Box, \varepsilon)$, $f(f(\varepsilon, \Box, \Box), \Box, \varepsilon)$, $f(\varepsilon, f(\Box, \Box, \varepsilon), \Box)$, aber beispielsweise auch $f(f(\Box, \Box, \varepsilon), \varepsilon, \Box)$, $f(f(\Box, \varepsilon, \Box), \varepsilon, \Box)$, $f(\varepsilon, f(\Box, \varepsilon, \Box), \Box)$ stellen alle denselben Baum dar.
Alternative Lösungen ergeben sich aus a): Z.B. stellt $f(f(\Box, \Box, \varepsilon), \Box, f(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon))$ ebenfalls denselben Baum dar. (Hingegen repräsentiert $f(\Box, f(\Box, \Box, \varepsilon), \varepsilon)$ einen anderen Baum mit 3 Endknoten.)

c) $\tau(t)$ ist wie folgt definiert:
(1) $\tau(\varepsilon) = \tau(\Box) = 0$;
(2) $\tau(f(t_1, t_2, t_3)) = 1 + \max(\tau(t_1), \tau(t_2), \tau(t_3))$.

d) Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t:

Induktionsanfang. Wir unterscheiden 3 Fälle:

(A1) $t \in IVS$: Eine Variable kann auch durch ε substituiert werden. Daher ist in diesem Fall der Wenn-Teil der zu beweisenden Aussage falsch und somit die Aussage selbst wahr.

(A2) $t = \varepsilon$: wie Fall (1).

(A3) $t = \Box$: t stellt einen Baum mit einem Endknoten dar. Es gilt $\tau(t) = 0$. Wegen $\log_3(1) = 0$ ist die zu beweisende Aussage auch in diesem Fall wahr.

Induktionsschritt. $t = f(t_1, t_2, t_3)$.
Die *Induktionsannahme* lautet wie folgt:
Für jedes t_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) gilt, dass, falls t_i in jeder Umgebung einen 2-3–Baum mit mindestens $n_i \geq 1$ Endknoten darstellt, dann gilt $\tau(t_i) \geq \log_3(n_i)$.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

(I1) $t_i = \varepsilon$ für mindestens zwei $i \in \{1, 2, 3\}$: In diesem Fall stellt t den leeren Baum dar. Daher gilt die Aussage trivialerweise, genau wie in den Fällen (A1) und (A2).

(I2) $t_i = \varepsilon$ für höchstens ein $i \in \{1, 2, 3\}$: Der von t dargestellte Baum hat $n = n_1 + n_2 + n_3 \geq 1$ Endknoten, wobei n_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Anzahl der Endknoten im von t_i dargestellten Baum ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei t_1 derjenige der 3 Teilterme t_1, t_2, t_3 von t, der die meisten Endknoten enthält. Es gilt also $n_1 = \max(n_1, n_2, n_3)$ und daher $n \leq 3n_1$, da $n = n_1 + n_2 + n_3$. Daraus folgt $\log_3(n) \leq \log_3(3n_1) = \log_3(n_1) + 1$.

Wegen $\tau(t) = 1 + \max(\tau(t_1), \tau(t_2), \tau(t_3)) \geq 1 + \tau(t_1)$ ergibt sich aus der Induktionsannahme somit $\tau(t) \geq 1 + \log_3(n_1) \geq \log_3(n)$, wie verlangt.

[2] $\log_3(x)$ bezeichnet den Logarithmus von x zur Basis 3

Aufgabe 3.3

a) Geben Sie ein $AL(\mathbb{N})$-Programm α an, das x^{y+1} berechnet. Genauer: α soll die Variablensymbole $\underline{x}$, $\underline{y}$ und $\underline{z}$ enthalten und es muss $J(\underline{z}) = I(\underline{x})^{I(\underline{y})+1}$ gelten für $J = \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha)$.

b) Weisen Sie analog zu Folie 369 schrittweise nach, dass $\alpha \in AL(\mathbb{N})$.

c) Werten Sie α schrittweise in einer Umgebung I aus, in der $I(\underline{x}) = 3$ und $I(\underline{y}) = 2$ gilt.

Lösung 3.3

a)
$$
\begin{array}{l}
\alpha = \underline{\text{begin}} \\
\quad \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{x}; \\
\quad \underline{\text{while}}\ \underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0}\ \underline{\text{do}} \\
\qquad \underline{\text{begin}} \\
\qquad \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}; \\
\qquad \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1} \\
\qquad \underline{\text{end}} \\
\quad \underline{\text{end}}
\end{array}
$$

b) Wir verwenden folgende Abkürzung:
$\gamma = \underline{\text{while}}\ \underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0}\ \underline{\text{do}}\ \underline{\text{begin}}\ \ \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}\underline{;}\ \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}\ \underline{\text{end}}$

Entlang der induktiven Definition von $AL(\mathcal{D})$-Programmen ergibt sich folgende 'bottom-up' Syntaxanalyse (= schrittweiser Nachweis von $\alpha \in AL(\mathbb{N})$).

(1) $\underline{z} \in IVS$, $\underline{x} \in IVS \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{N}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{x} \in AL(\mathbb{N})$.

(2) $\underline{z} \in IVS$, $\underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x} \in \mathcal{T}(\mathbb{N}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \underline{x} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x} \in AL(\mathbb{N})$.

(3) $\underline{y} \in IVS$, $\underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1} \in \mathcal{T}(\mathbb{N}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1} \in AL(\mathbb{N})$.

(4) Wegen (2) und (3) $\overset{AL2}{\Longrightarrow} \underline{\text{begin}}\ \ \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}\underline{;}\ \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}\ \underline{\text{end}} \in AL(\mathbb{N})$.

(5) Wegen $\underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0} \in \mathcal{BA}(\mathbb{N})$ und (4) $\overset{AL4}{\Longrightarrow} \gamma \in AL(\mathbb{N})$.

(6) Wegen (1) und (5) $\overset{AL2}{\Longrightarrow} \alpha \in AL(\mathbb{N})$.

c)
$$
\begin{array}{l}
\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha) = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{begin}}\ \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{x}\,\underline{;}\gamma\ \underline{\text{end}}) \\
\overset{MAL2}{=} \quad \mathcal{M}_{AL}(I', \gamma), \\
\qquad \text{wobei } I' \overset{MAL1}{=} \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{x}),\ \text{daher } I'(\underline{z}) = I(\underline{x}) = 3, I'(v) = I(v) \text{ für alle } v \neq \underline{z} \\
\left[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{y}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{0})] = [2 \neq 0] = \mathbf{t}\ \right] \\
\overset{MAL4}{=} \quad \mathcal{M}_{AL}(I'', \gamma), \\
\qquad \text{wobei } I'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\text{begin}}\ \ \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}\underline{;}\ \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}\ \underline{\text{end}}) \\
\qquad I'' \overset{MAL2}{=} \mathcal{M}_{AL}(I_0'', \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}),\ \text{wobei } I_0'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}) \\
\qquad\qquad\qquad \text{daher } I_0''(\underline{z}) = I'(\underline{z}) \cdot I'(\underline{x}) = 3 \cdot 3 = 9, I_0''(v) = I'(v) \text{ für alle } v \neq \underline{z}, \\
\qquad \text{und daher } I''(\underline{y}) = I_0''(\underline{y}) \dot{-} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I_0'', \underline{1}) = 2 \dot{-} 1 = 1, I''(v) = I_0''(v) \text{ für alle } v \neq \underline{y}, \\
\left[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{y}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{0})] = [1 \neq 0] = \mathbf{t}\ \right] \\
\overset{MAL4}{=} \quad \mathcal{M}_{AL}(I''', \gamma), \\
\qquad \text{wobei } I''' = \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\text{begin}}\ \ \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}\underline{;}\ \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}\ \underline{\text{end}}) \\
\qquad I''' \overset{MAL2}{=} \mathcal{M}_{AL}(I_0''', \underline{y} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{y} \,\underline{\dot{-}}\, \underline{1}),\ \text{wobei } I_0''' = \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{z} \,\underline{\leftarrow}\, \underline{z} \,\underline{*}\, \underline{x}) \\
\qquad\qquad\qquad \text{daher } I_0'''(\underline{z}) = I''(\underline{z}) \cdot I''(\underline{x}) = 9 \cdot 3 = 27, I_0'''(v) = I''(v) \text{ für alle } v \neq \underline{z}, \\
\qquad \text{und daher } I'''(\underline{y}) = I_0'''(\underline{y}) \dot{-} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I_0''', \underline{1}) = 1 \dot{-} 1 = 0, I'''(v) = I_0'''(v) \text{ für alle } v \neq \underline{y}, \\
\left[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I''', \underline{y} \,\underline{\neq}\, \underline{0}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''', \underline{y}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''', \underline{0})] = [0 \neq 0] = \mathbf{f}\ \right] \\
\overset{MAL4}{=} \quad I''' = J
\end{array}
$$

Es gilt daher $J(\underline{z}) = I(\underline{x})^{I(\underline{y})+1} = 3^{2+1} = 3^3 = 27$

Aufgabe 3.4

Spezifizieren Sie zu folgenden Formeln jeweils ein Modell $\mathcal{I}$ und ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}$ über dem angegebenen Gegenstandsbereich D. Argumentieren Sie jeweils, warum $\mathcal{I}$ ein Modell und $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel ist. Geben Sie außerdem an welche Variablen frei bzw. gebunden in der jeweiligen Formel vorkommen. (Beachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Notationsvereinbarungen.)

a) Über $D = \{0, 1\}$: $\forall y[P(a, y, x) \supset \exists z P(x, b, z)] \vee \forall x P(g(y), x, a)$

b) Über $D = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$: $\forall x \forall y \forall z[(R(z, x) \wedge R(z, y)) \supset R(z, f(x, y))]$

c) Über $D = \omega$: $\forall x \forall y((z = g(g(y)) \wedge Q(z, f(g(a), a))) \supset [\neg Q(f(a, x), z) \vee Q(z, g(z))])$

Lösung 3.4

Jede Interpretation (also Modell oder Gegenbeispiel) einer Formel, besteht aus 3 Bestandteilen: Dem Gegenstandsbereich D, der Signaturinterpretation Φ und der Variablenbelegung ξ. Da die Variablenbelegung nur für die *frei* vorkommenden Variablen relevant ist, ist es sinnvoll ξ nur für letztere festzulegen.

a) Die Variable x kommt in der linken Teilformel $\forall y[P(a, y, x) \supset \exists z P(x, b, z)]$ frei vor. In der rechten Teilformel $\forall x P(g(y), x, a)$ kommt y frei vor. In der linken Teilformel kommen y und z gebunden vor. In der rechten Teilformel kommt nur x gebunden vor. (a und b sind laut den Notationsvereinbarungen keine Variablen, sondern Konstantensymbole).

Die Formel ist eine Disjunktion; daher erhalten wir ein Modell $\mathcal{I} = \langle\{0, 1\}, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I}\rangle$, wenn wir für alle $m, n, p \in \{0, 1\}$ $\Phi_\mathcal{I}(P)(m, n, p) = \mathbf{t}$ setzen. (Alle anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle und können beliebig festgesetzt werden.) Dann gilt $\mathrm{val}_\mathcal{I}(\forall x P(g(y), x, a)) = \mathbf{t}$ und somit ist die gesamte Formel wahr unter $\mathcal{I}$.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\{0, 1\}, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J}\rangle$ müssen beide Disjunkte falsch werden.
Für die Variablenbelegung $\xi_\mathcal{J}$ setzen wir $\xi_\mathcal{J}(x) = 0$ und $\xi_\mathcal{J}(y) = 0$.
Die Signaturinterpretation $\Phi_\mathcal{J}$ sei wie folgt definiert: $\Phi_\mathcal{J}(a) = 0$ und $\Phi_\mathcal{J}(b) = 1$ und für alle $m, n, p \in \{0, 1\}$: $\Phi_\mathcal{J}(g)(m) = m$, sowie

$$\Phi_\mathcal{J}(P)(m, n, p) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } m = n = p = 0 \\ \mathbf{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das rechte Disjunkt ist falsch unter $\mathcal{J}$, da z.B. $\Phi_\mathcal{J}(P)(\Phi_\mathcal{J}(g)(\xi_\mathcal{J}(x)), 1, \Phi_\mathcal{J}(a)) = \Phi_\mathcal{J}(P)(0, 1, 0) = \mathbf{f}$ gilt. Das linke Disjunkt, also die All-quantifizierte Implikation $\forall y[P(a, y, x) \supset \exists z P(x, b, z)]$ ist falsch unter dieser Interpretation, da einerseits $\Phi_\mathcal{J}(P)(0, 0, 0) = \mathbf{t}$ und andererseits $\exists z P(x, b, z)$ falsch ist, da $\Phi_\mathcal{J}(P)(0, 1, 0) = \mathbf{f}$, sowie $\Phi_\mathcal{J}(P)(0, 1, 1) = \mathbf{f}$ gilt.

b) Die Variablen x, y und z kommen nur gebunden vor. Es gibt keine freien Variablenvorkommen.

Für ein Modell über der Domäne der Binärstrings, $\mathcal{I} = \langle\{\underline{0}, \underline{1}\}^*, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I}\rangle$, interpretieren wir das Prädikatensymbol R als das Prädikat 'ist kürzer als'. Formaler: $\Phi_\mathcal{I}(R)(u, v) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow |u| < |v|$ für alle $u, v \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$. $\Phi_\mathcal{I}(f)$ wird als Stringkonkatenation interpretiert, also $\Phi(f)(u, v) = uv$. Unter $\mathcal{I}$ drückt die Formel folgende für alle Binärstrings u, v und w wahre Aussage aus: Wenn u sowohl kürzer wie v als auch kürzer wie w ist, dann ist u auch kürzer als vw.
Natürlich würde auch die Festlegung $\Phi_\mathcal{I}(R)(u, v) = \mathbf{t}$ (für alle Strings u,v) ein Modell ergeben.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\{\underline{0}, \underline{1}\}^*, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J}\rangle$ interpretieren wir R als 'ist länger als'. Wir setzen also fest: $\Phi_\mathcal{J}(R)(u, v) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow |u| > |v|$ für alle $u, v \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$.
Es gilt, z.B., $|\underline{000}| > |\underline{00}|$ und $|\underline{000}| > |\underline{11}|$, aber nicht $|\underline{000}| > |\underline{0011}|$. Daher evaluiert die Formel unter $\mathcal{J}$ zu $\mathbf{f}$.

Zur Erinnerung: Da keine Variablen frei in der Formel vorkommen, sind die Variablenbelegungen $\xi_\mathcal{I}$ und $\xi_\mathcal{J}$ hier jeweils irrelevant.

c) Die Variable z kommt frei vor. Die Variablen x und y kommen gebunden vor. (a ist keine Variable, sondern ein Konstantensymbol.)

Um ein Modell $\mathcal{I} = \langle\omega, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I}\rangle$ zu erhalten, genügt es die linke Seite der Implikation immer zu $\mathbf{f}$ auswerten zu lassen. Dazu wiederum genügt es $\Phi_\mathcal{I}(Q)(m, n) = \mathbf{f}$ für alle $m, n \in \omega$ zu setzen.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\omega, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J}\rangle$ setzen wir $\Phi_\mathcal{J}(a) = 0$, $\Phi_\mathcal{J}(g)(n) = n$, $\Phi_\mathcal{J}(f)(m, n) = n$ und $\Phi_\mathcal{J}(Q) =$ "$>$". (Genauer: $\Phi_\mathcal{J}(Q)(m, n) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow m > n$.) Außerdem sei $\xi_\mathcal{J}(z) = 1$.
Unter $\mathcal{J}$ besagt die Formel, dass folgendes für alle natürlichen Zahlen m und n gilt:
Wenn $1 = n$ und $1 > 0$, dann $m \leq 1$ oder $1 > 1$. Aber diese Aussage ist für $n = 1$ und $m = 2$ falsch.

Aufgabe 3.5

Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.

a) Billies Vater betreut beide Kinder von Abbas.

b) Jede Informatikerin kennt eine Rechtsanwältin, die nur Programmierer verteidigt.

c) Wenn die Mutter von Cevat bei einer Professorin dissertiert hat, die in Stanford arbeitet, dann arbeitet Cevat in Harvard und ein Bruder von Cevat an der TU Wien.

d) Es gibt eine Professorin, die mehr als zwei Diplomandinnen betreut, von denen wenigstens eine Arabisch, sowie zumindest zwei weitere Sprachen beherrscht.

e) Zumindest ein Professor betreut genau drei Diplomandinnen, von denen eine Suaheli, eine andere Japanisch und eine weitere Arabisch beherrscht.

Lösung 3.5

a) Signatur $\langle \{B\}, \{a, b\}, \{v\} \rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbol:
$B(x, y)$ ... x betreut y (zweistellig)
Konstantensymbole:
a ... Abbas
b ... Billie
Funktionssymbol:
$v(x)$ ... der Vater von x (einstellig)

PL-Formel:
$\exists x \exists y [B(v(b), x) \wedge B(v(b), y) \wedge a = v(x) \wedge a = v(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (a = v(z) \supset (z = x \vee z = y))]$

Anmerkungen:
(1) Die Phrase 'beide Kinder' drückt aus, dass Abbas genau zwei Kinder hat. Das ist in der Formalisierung explizit zu machen und kann am besten unter Verwendung der Gleichheit, wie in den beiden letzten Konjunkten der Formel ausgedrückt werden.
(2) Es ist zwar möglich 'Vater' als zweistelliges Prädikat ('ist-Vater-von(x, y)), anstatt als einstellige Funktion auszudrücken. Aber das wäre ungeschickt, weil unnötig umständlich: Es werden dann zusätzliche Quantorenvorkommen benötigt.

b) Signatur $\langle \{I, A, K, P, V\}, \{\}, \{\} \rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:
$I(x)$ ... x ist Informatikerin (einstellig)
$A(x)$ ... x ist Rechtsanwältin (einstellig)
$K(x, y)$ ... x kennt y (zweistellig)
$P(x)$ ... x ist Programmierer (einstellig)
$V(x, y)$ ... x verteidigt y (zweistellig)

PL-Formel: $\forall x (I(x) \supset \exists y [A(y) \wedge K(x, y) \wedge \forall z (V(y, z) \supset P(z))])$

Anmerkungen:
(1) Es gibt hier zunächst kaum einen guten Grund, die weibliche Endung von 'Informatikerin' und 'Rechtsanwältin' zum Anlass für eine explizite Einführung des zusätzlichen Prädikats 'weiblich' (oder 'männlich') zu machen. (Das würde man ja wohl auch kaum tun, wenn nur von Informatikern und Rechtsanwälten die Rede wäre.) Erst in einem weiteren Kontext, der neben Informatikerinnen auch Informatiker (etc.) erwähnt, wäre dies angebracht.
(2) Es ist möglich den Existenzquantor ($\exists y$) gleich unmittelbar nach dem Allquantor ($\forall x$) zu platzieren. Auch den zweiten Allquantor ($\forall z$) könnte man weiter nach vorne schieben. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht sinnvoll alle Quantoren an den Beginn der Formel zu stellen. Die Formalisierung ist transparenter und bleibt näher an der Struktur des zu formalisierenden Satzes, wenn man die Bindungsbereiche der Quantoren nicht unnötig vergrößert.

c) Signatur $\langle\{P,D,A,B\},\{c,ha,st,tuw\},\{m\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$P(x)$	...	x ist eine Professorin (einstellig)
$D(x,y)$	...	x hat bei y dissertiert (zweistellig)
$A(x,y)$	...	x arbeitet in (bzw. an der) y (zweistellig)
$B(x,y)$	...	x ist ein Bruder von y (zweistellig)

Konstantensymbole:

c	...	Cevat
st	...	Stanford
ha	...	Harvard
tuw	...	TU Wien

Funktionssymbol:

$m(x)$	...	die Mutter von x (einstellig)

PL-Formel: $\exists x[P(x) \wedge D(m(c),x) \wedge A(x,st)] \supset [A(c,ha) \wedge \exists x(B(x,c) \wedge A(x,tuw))]$

Anmerkungen:
(1) Beachten Sie, dass das äußerste Konnektiv der Formel eine Implikation ist. Es wäre nicht sinnvoll alle vorkommenden Quantoren an den Beginn der Formel zu schieben.
(2) Es ist nicht nötig für die Existenz-quantifizierte Variable x im hinteren Formelteil ein neues Variablensymbol einzuführen.
(3) Wie immer sind auch andere Signaturwahlen denkbar. Aber jedenfalls ist es nicht sinnvoll Prädikatensymbole für 'arbeitet-in-Stanford(x)', 'arbeitet-in-Harvard(x)' und 'arbeitet-an-der-TU-Wien(x)' einzuführen, da damit die offensichtliche semantische Verbindung zwischen diesen Prädikaten, nämlich das Bestehen eines Arbeitsverhältnisses an einem bestimmten Ort, verloren geht.

d) Signatur $\langle\{P,D,B,K,S\},\{a\},\{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$P(x)$	...	x ist eine Professorin (einstellig)
$D(x)$	...	x ist eine Diplomandin (einstellig)
$B(x,y)$	...	x betreut y (zweistellig)
$K(x,y)$	...	x beherrscht (kann) y (zweistellig)
$S(x)$	...	x ist eine Sprache (einstellig)

Konstantensymbol:

a	...	Arabisch

PL-Formel:

$$\begin{aligned}&\exists x(P(x) \wedge \exists y\exists z\exists w[D(y) \wedge D(z) \wedge D(w) \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge B(x,y) \wedge B(x,z) \wedge B(x,w) \wedge (\\ &\qquad (K(y,a) \wedge \exists u\exists v[S(u) \wedge S(v) \wedge u \neq v \wedge u \neq a \wedge v \neq a \wedge K(y,u) \wedge K(y,v)])\\ &\qquad \vee(K(z,a) \wedge \exists u\exists v[S(u) \wedge S(v) \wedge u \neq v \wedge u \neq a \wedge v \neq a \wedge K(z,u) \wedge K(z,v)])\\ &\qquad \vee(K(w,a) \wedge \exists u\exists v[S(u) \wedge S(v) \wedge u \neq v \wedge u \neq a \wedge v \neq a \wedge K(w,u) \wedge K(w,v)]))])\end{aligned}$$

Alternativ, kürzer:

$$\begin{aligned}&\exists x(P(x) \wedge \exists y\exists z\exists w[D(y) \wedge D(z) \wedge D(w) \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge B(x,y) \wedge B(x,z) \wedge B(x,w) \wedge\\ &\qquad \exists u\exists v(S(u) \wedge S(v) \wedge u \neq v \wedge u \neq a \wedge v \neq a \wedge K(y,a) \wedge K(y,u) \wedge K(y,v))])\end{aligned}$$

Anmerkung:
Man könnte argumentieren, dass 'Professorin x betreut y als Diplomandin' hier als atomares Prädikat gesehen werden kann. Das ist zwar etwas problematisch, da es auch andere akademische Betreuungsverhältnisse gibt, führt aber natürlich zu einer kompakteren Formalisierung. (Ähnliches gilt auch für Aufgabe c und e).

e) Signatur $\langle\{P,D,B,K\},\{s,j,a\},\{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$P(x)$	...	x ist ein Professor (einstellig)
$D(x)$	...	x ist eine Diplomandin (einstellig)
$B(x,y)$	...	x betreut y (zweistellig)
$K(x,y)$	...	x beherrscht (kann) y (zweistellig)

Konstantensymbole:

s	...	Suaheli
j	...	Japanisch
a	...	Arabisch

PL-Formel:

$$\begin{aligned}&\exists x(P(x) \wedge \exists y\exists z\exists u[D(y) \wedge D(z) \wedge D(u) \wedge y \neq z \wedge z \neq u \wedge y \neq u \wedge B(x,y) \wedge B(x,z) \wedge B(x,u)\\ &\qquad \wedge \forall v[(D(v) \wedge B(x,v)) \supset (v = y \vee v = z \vee v = u)] \wedge K(y,s) \wedge K(z,j) \wedge K(u,a)])\end{aligned}$$