

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 <input type="checkbox"/> SS/ <input type="checkbox"/> WS 2017     24. Jänner 2018			
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe <b>A</b>

- 5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.  
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

- (1) Jedes Kind besitzt höchstens einen Hund.  
(*Every child owns at most one dog.*)
- (2) Wenn Emi eine Katze besitzt, dann besitzt sie keinen Hund.  
(*If Emi owns a cat, then she does not own a dog.*)

(7 Punkte)

- 6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$$\exists z \neg R(h(x, c), z) \supset \forall z (R(y, z) \vee \neg R(z, h(d, y)))$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifizieren Sie beide Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. (7 Punkte)

- 7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:

$$\text{Aus } c = a \text{ und } \forall x (Q(x, x) \supset x = c) \text{ folgt } \forall x (Q(f(x), f(x)) \supset a = f(x)).$$

Beachten Sie die Schreibkonventionen bezüglich Variablen- und Konstantensymbolen.

Kennzeichnen Sie alle  $\gamma$ - und  $\delta$ -Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

- 8.) Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.

*Hinweis:* Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren. (Im Negativfall am besten durch Angabe eines Gegenbeispiels.)

- Das Programm  $\{y > 2x\}$  **while**  $y \geq 0$  **do**  $y \leftarrow y + x$   $\{y < x * x\}$  ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp  $\mathbb{Z}$  partiell, aber nicht total korrekt.

**Begründung:**

☐ richtig ☐ falsch

- Wenn ein Programm  $\pi$  bezüglich der Vorbedingung  $P$  und der Nachbedingung  $Q$  total korrekt ist, so ist  $\pi$  auch bezüglich der Vorbedingung  $R \supset P$  und der Nachbedingung  $Q$  total korrekt, wobei  $R$  eine beliebige Formel (über dem jeweiligen Datentyp) ist.

**Begründung:**

☐ richtig ☐ falsch

(8 Punkte)

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.

Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

- (1) Jedes Kind besitzt höchstens einen Hund.  
(Every child owns at most one dog.)
- (2) Wenn Emi eine Katze besitzt, dann besitzt sie keinen Hund.  
(If Emi owns a cat, then she does not own a dog.)

(7 Punkte)

$$S = \langle \{k_i, H, k, b\}, \{e\}, \{ \} \rangle$$

Prädikatensymbole:

$k(x)$ ...  $x$  ist Kind

$H(x)$ ...  $x$  ist Hund

$k(x)$ ...  $x$  ist Katze

$b(x,y)$ ...  $x$  besitzt  $y$

Konstantensymbole:

$e$ ... Emi

$$(1) \forall x (k(x) \supset (\exists y (H(y) \wedge b(x,y)) \supset \neg \exists z (H(z) \wedge z \neq y \wedge b(x,z)))$$

$$(2) (\exists x (k(x) \wedge b(e,x))) \supset \neg \exists y (H(y) \wedge b(e,y))$$

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$$\exists z \neg R(h(x, c), z) \supset \forall z (R(y, z) \vee \neg R(z, h(d, y)))$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifizieren Sie beide Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. (7 Punkte)

z kommt gebunden vor

x kommt frei vor

c kommt frei vor

y kommt frei vor

d kommt frei vor

Modell:  $I = \langle D, \phi, \xi \rangle$  wobei  $D = \mathbb{Z}$   
 $\phi(R(x, y)) = \text{true}$ ,  $\phi(h(x, y)) = \text{beliebig}$   
 $\xi(z, x, c, y, d) = \text{beliebig}$

Erklärung: Da R immer wahr ist, gibt es kein z für das R falsch ist, dadurch ist die Implikation immer wahr.

Gegenbeispiel:  $I = \langle D, \phi, \xi \rangle$  wobei  $D = \mathbb{Z}$

$$\phi(R(x, y)) = \text{if } x = 7 \text{ then true else false}$$

$$\phi(h(x, y)) = 2$$

$$\xi(y) = 2$$

$$\xi(z, x, c, d) = \text{beliebig}$$

Erklärung: Der linke Teil ist immer wahr,

da  $h$  immer 2 ist und  $R(z, y)$  immer wahr ist.

Beim rechten Teil ist der linke Teil der Disjunktion immer falsch und der rechte Teil für  $z \leq 1$  auch, wodurch der Ausdruck nicht für alle  $z$  wahr ist.

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:

Aus  $c = a$  und  $\forall x(Q(x, x) \supset x = c)$  folgt  $\forall x(Q(f(x), f(x)) \supset a = f(x))$ .

Beachten Sie die Schreibkonventionen bezüglich Variablen- und Konstantensymbolen.

Kennzeichnen Sie alle  $\gamma$ - und  $\delta$ -Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

(1)	$\vdash : c = a$				$A_n$
(2)	$\vdash : \forall x (Q(x, x) \supset x = c)$				$A_n, \gamma$
(3)	$\vdash : \forall x (Q(f(x), f(x)) \supset a = f(x))$				$A_n, \delta$
(4)	$\vdash : Q(f(b), f(b)) \supset a = f(b)$				(3)
(5)	$\vdash : Q(f(b), f(b))$				(4)
(6)	$\vdash : a = f(b)$				(5)
(7)	$\vdash : Q(f(b), f(b)) \supset f(b) = c$				(2)
(8)	$\vdash : Q(f(b), f(b))$ Wd. 8/5	(7)	(9)	$\vdash : f(b) = c$	(7)
		(10)		$\vdash : f(b) = a$ Wd. 6/10	(7, 9)

8.) Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.

*Hinweis:* Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren. (Im Negativfall am besten durch Angabe eines Gegenbeispiels.)

- Das Programm  $\{y > 2x\} \text{ while } y \geq 0 \text{ do } y \leftarrow y + x \{y < x * x\}$  ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp  $\mathbb{Z}$  partiell, aber nicht total korrekt.

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

- Wenn ein Programm  $\pi$  bezüglich der Vorbedingung  $P$  und der Nachbedingung  $Q$  total korrekt ist, so ist  $\pi$  auch bezüglich der Vorbedingung  $R \supset P$  und der Nachbedingung  $Q$  total korrekt, wobei  $R$  eine beliebige Formel (über dem jeweiligen Datentyp) ist.

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

(8 Punkte)

a) Das Programm terminiert nur, wenn  $y < 0$  oder  $(y > 0 \wedge x < 0)$ . Der letzte Fall ist wenn  $y < 0$  dann muss auch  $x < 0$  und  $x \cdot x$  ist sicher größer als  $y$ . Wenn  $y > 0$ , dann wird  $y$  nach der Schleife kleiner 0, aber  $x$  ist sicher  $> 0$ .

b) Nein, z.B.:

$R = \text{false}, P = x = 7, pi = x \leftarrow x + 7, Q = x = 2,$

so ist die Vorbedingung für  $x = 3$  erfüllt, aber die Nachbedingung nicht