Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2018W)
Lösungen

Aufgabe 1.1 Sei $L = \{\underline{\mathsf{a}}^{2^n} \mid n \geq 0\}$. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine M an, welche die Sprache L akzeptiert, und erläutern Sie (jeweils) auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine. Es steht Ihnen dabei frei, ob Sie das auf Folie 26 definierte Modell (mit einem Band) oder das auf Folie 72 definierte Modell (mit zwei Bändern, einem Eingabe- und einem Arbeitsband) verwenden (oder beide :-)).

Lösung

Variante 1:

Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 7\}, \{\underline{\mathsf{a}}\}, \{\underline{\mathsf{a}}, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_7\})$$

wobei

δ	$\underline{\mathsf{a}}$	Y	B
q_0	(q_1, Y, R)		
q_1	$(q_1, \underline{\mathsf{a}}, R)$		(q_2, B, L)
q_2	(q_3, B, L)	(q_6, B, L)	
q_3	$(q_3, \underline{\mathsf{a}}, L)$	(q_4, Y, R)	
q_4	(q_1, Y, R)		(q_5, B, L)
q_5		$(q_5, \underline{\mathsf{a}}, L)$	(q_4, B, R)
q_6			(q_7, B, S)
q_7			

Die Grundidee dabei ist Folgende:

Die Anzahl der Symbole $\underline{\mathsf{a}}$ auf dem Arbeitsband wird fortlaufend halbiert.
Dabei wird jeweils ein Symbol $\underline{\mathsf{a}}$ am Anfang durch ein Y ersetzt und dafür ein Symbol $\underline{\mathsf{a}}$ am Ende gelöscht. Dies geschieht solange, bis nur noch Symbole Y auf dem Arbeitsband stehen.
Der Lese-/Schreibkopf auf dem Arbeitsband bewegt sich dann nach links, und überschreibt dabei jedes Y mit einem $\underline{\mathsf{a}}$, und das Halbieren beginnt von Neuem.
Ist nach fortgesetztem Halbieren nur mehr genau ein Symbol Y vorhanden, so kann M in den Endzustand q_7 übergehen und damit das Eingabewort akzeptieren. Für jedes Wort $w \in \{\underline{\mathsf{a}}\}^* - L$ hingegen muss M in einem Zustand ungleich q_7 halten, d.h., w wird nicht akzeptiert.

Variante 2:

Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (Q, \{\underline{\mathsf{a}}\}, \{A, C, Z_0, B\}, \delta, q_0, \{Z_0 Z_1, Z_2\}, B, \{q_f\})$$

in Normalform, welche L akzeptiert; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

1 : $\delta(q_0, \underline{\mathsf{a}}, B) = (q_1, C, R, R)$
2 : $\delta(q_1, \underline{\mathsf{a}}, B) = (q_1, C, R, R)$
3 : $\delta(q_1, Z_2, B) = (q_2, B, S, L)$

$1, 2, 3$: Zunächst wird einmal das gesamte Eingabewort gelesen, und dabei für jedes eingelesene Symbol $\underline{\mathsf{a}}$ ein Symbol C aufs Arbeitsband geschrieben (d.h., das Eingabewort wird aufs Arbeitsband übertragen). Von jetzt an finden sämtliche Aktionen nur mehr auf dem Arbeitsband statt, der Lesekopf auf dem Eingabeband bleibt im Folgenden einfach auf Z_2 stehen.

$4: \quad \delta(q_2, Z_2, C) = (q_2, A, S, L)$
$5: \quad \delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_3, Z_0, S, R)$

$4, 5$: Der Lese-/Schreibkopf auf dem Arbeitsband bewegt sich nach links, und überschreibt dabei jedes C mit einem A, bis wieder Z_0 erreicht ist.

Nun beginnt die eigentliche Analyse:
Um die Anzahl der Symbole A auf dem Arbeitsband zu halbieren, wird jeweils ein A am Anfang durch ein C ersetzt und dafür ein A am Ende gelöscht. Dies geschieht solange, bis nur noch Symbole C auf dem Arbeitsband stehen:

$6: \quad \delta(q_3, Z_2, A) = (q_4, C, S, R)$
$7: \quad \delta(q_4, Z_2, A) = (q_4, A, S, R)$
$8: \quad \delta(q_4, Z_2, B) = (q_5, B, S, L)$
$9: \quad \delta(q_5, Z_2, A) = (q_6, B, S, L)$
$10: \quad \delta(q_6, Z_2, A) = (q_6, A, S, L)$
$11: \quad \delta(q_6, Z_2, C) = (q_7, C, S, R)$
$12: \quad \delta(q_7, Z_2, A) = (q_4, C, S, R)$

Danach wird jedes Symbol C wieder durch ein Symbol A ersetzt (mittels der nach 13 folgenden Übergänge $4, 5$):

$13: \quad \delta(q_7, Z_2, B) = (q_2, B, S, L)$

Ist nach fortgesetztem Halbieren nur mehr genau ein Symbol C vorhanden, so kann M mittels der Übergänge

$14: \quad \delta(q_5, Z_2, C) = (q_8, B, S, L)$
$15: \quad \delta(q_8, Z_2, Z_0) = (q_f, Z_0, S, R)$

in den Endzustand q_f übergehen und damit das Eingabewort akzeptieren. Für jedes Wort $w \in \{\underline{\mathtt{a}}\}^* - L$ hingegen muss M in einem Zustand ungleich q_f halten, d.h., w wird nicht akzeptiert. Somit gilt also $\mathcal{L}(M) = \{\underline{\mathtt{a}}^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Als Zustandsmenge ergibt sich $Q = \{q_i \mid 0 \leq i \leq 8\} \cup \{q_f\}$.

Aufgabe 1.2 Seien A, B und C Sprachen, die rekursiv aufzählbar sein können oder auch nicht. Wir wissen allerdings Folgendes:

- $A \leq B$
- $B \leq C$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis C handelt)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis C handelt)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis C handelt)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist A entscheidbar, so ist auch C entscheidbar.

b) Ist B nicht entscheidbar, so ist auch C nicht entscheidbar.

c) Ist C entscheidbar, so ist $A \cup B$ rekursiv aufzählbar.

d) Ist B rekursiv aufzählbar, so ist das Komplement von A rekursiv aufzählbar.

e) Ist A nicht entscheidbar, so kann das Komplement von B entscheidbar sein.

Lösung

a) **Vielleicht**. Reduktionen sind transitiv, und nachdem $A \leq B$ und $B \leq C$ gilt auch $A \leq C$. Gibt es also eine Reduktion von A auf C, so muss C mindestens so schwierig wie A sein. C könnte aber durchaus auch ein schwierigeres Problem sein, also eines, welches nicht rekursiv aber rekursiv aufzählbar ist, oder auch eines, welches nicht einmal rekursiv aufzählbar ist.

b) **Jedenfalls**. Denn wäre C entscheidbar, so könnten die Reduktion und ein Algorithmus, der C entscheidet, dazu verwendet werden, B zu entscheiden. Dies ist aber im Widerspruch zur Angabe (B nicht entscheidbar).

c) **Jedenfalls**. Denn ist C entscheidbar, so müssen auch A und B entscheidbar sein. Also sind A und B auch rekursiv aufzählbar. Dann ist aber auch $A \cup B$ rekursiv aufzählbar: A (bzw. B) werde durch die Turingmaschine M_1 (bzw. M_2) erkannt. Um $A \cup B$ zu erkennen, entwerfen wir eine Turingmaschine M, die zuerst M_1 simuliert und dann M_2 simuliert. M wird genau dann akzeptieren, wenn eine der beiden Turingmaschinen akzeptiert.

d) **Vielleicht**. Nachdem B rekursiv aufzählbar ist, muss es auch A sein. Das sagt aber noch nichts über das Komplement von A aus. $\overline{A}$ könnte auch rekursiv aufzählbar sein, dann wären A wie auch $\overline{A}$ rekursiv (entscheidbar). A könnte aber auch ein Komplement haben, welches selbst nicht rekursiv aufzählbar ist.

e) **Keinesfalls**. Ist A nicht entscheidbar, so kann es B auch nicht sein. Nachdem rekursive (entscheidbare) Sprachen aber unter Komplement abgeschlossen sind, kann demnach das Komplement von B daher nicht entscheidbar sein.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern möglich, verwenden Sie dafür den *Satz von Rice*. (Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L, dass $\overline{L} = \Sigma^*$?

b) Beginnen die Wörter der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache alle mit $\underline{0}$?

c) Hält eine Turingmaschine auf ε in höchstens 1000 Schritten?

d) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache überabzählbar (unendlich)?

e) Ist das Komplement der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache eine Teilmenge von Σ^*?

Lösung

a) **Unentscheidbar**, Satz von Rice: Es handelt sich um die Eigenschaft $P = \{L \mid \overline{L} = \Sigma^*\}$. Diese Eigenschaft kommt einer Sprache L zu, nämlich $L = \{\}$. Keine andere rekursiv aufzählbare Sprache ist in P, dementsprechend ist P nicht trivial, und damit nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

(*Anmerkung:* Beachten Sie den Unterschied zwischen $P = \{\{\}\}$, der Eigenschaft die Leersprache zu sein und der leeren Eigenschaft $P = \{\}$, welche keiner rekursiv aufzählbaren Sprache zukommt, siehe z.B. d))

b) **Unentscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid \text{alle Wörter in } L \text{ beginnen mit } \underline{0}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\underline{0}^n\underline{1}^n \mid n \geq 1\} \in P$ aber $\{\underline{1}^n\underline{0}^n \mid n \geq 0\} \notin P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice unentscheidbar.

c) **Entscheidbar**. M kann auf ε für 1000 Schritte laufen gelassen werden (bzw. weniger, wenn sie bereits vorher hält). Der Satz von Rice ist hier aber nicht anwendbar.

d) **Entscheidbar**. Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache zu, überabzählbar zu sein (d.h. $P = \{\}$). In der Tat ist dieses Problem entscheidbar.

e) **Entscheidbar**. Für jede rekursiv aufzählbare Sprache L gilt, dass $\overline{L} = \Sigma^* - L$. Die Eigenschaft eine Teilmenge von Σ^* zu sein trifft auf alle rekursiv aufzählbaren Sprachen (wie auch ihr Komplement) zu, es handelt sich also um eine triviale Eigenschaft. Diese ist auch entscheidbar.

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.

b) Sind L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ entscheidbar.

c) Ist L nicht-regulär, so ist auch $\overline{L}$ (das Komplement von L) nicht-regulär.

d) Ist L entscheidbar, so ist jede Teilmenge von L entscheidbar.

e) Ist $L \cup \overline{L}$ entscheidbar, so sind auch L und $\overline{L}$ entscheidbar.

f) Jede Sprache über $\Sigma = \{\underline{1}\}$ ist entscheidbar.

Lösung

a) **Richtig**. Jede endliche Sprache ist regulär und reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen. Weiters sind reguläre Sprachen eine echte Teilmenge der rekursiven Sprachen, also sicher entscheidbar.

b) **Richtig**. L_1 (bzw. L_2) werde durch die stets haltende Turingmaschine M_1 (bzw. M_2) erkannt. Um $L1 \cup L_2$ zu erkennen, entwerfen wir eine Turingmaschine M, die zuerst M_1 simuliert und dann M_2 simuliert. M wird genau dann akzeptieren, wenn eine der beiden Turingmaschinen akzeptiert. Da M stets hält, ist $L_1 \cup L_2$ entscheidbar.

c) **Richtig**. Ist $\overline{L}$ regulär, dann muss L auch regulär sein, da reguläre Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind. D.h., das Komplement einer nicht-regulären Sprache kann nur nicht-regulär sein.

d) **Falsch**. Ein Gegenbeispiel: $\{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ ist regulär und damit jedenfalls entscheidbar. Es gilt aber z.B. $L_u \subset \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$. Das Halteproblem L_u ist aber sicher nicht entscheidbar. (siehe Folie 49 ff)

e) **Falsch**. $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$, also regulär und jedenfalls entscheidbar. Daraus kann man aber nicht auf L oder $\overline{L}$ schließen. (L könnte z.B. das Halteproblem sein.)

f) **Falsch**. Σ^* ist abzählbar (unendlich), die Menge aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ ist überabzählbar. Von diesen ist jedoch nur eine abzählbare Menge entscheidbar. (Es gibt ja nur abzählbar (unendlich) viele Turingmaschinen). Dementsprechend gibt es unentscheidbare Sprachen über Σ.

Aufgabe 1.5 Sind folgende Sprachen regulär? Falls ja, so geben Sie einen entsprechenden deterministischen endlichen Automaten an; falls nein, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen. (Wählen Sie *mindestens* drei Unterpunkte.)
(*Hinweis*: Zwei der folgenden fünf Sprachen sind regulär.)

a) $\{\underline{a}^i\underline{b}^j \mid i, j \geq 0, i + j = 5\}$

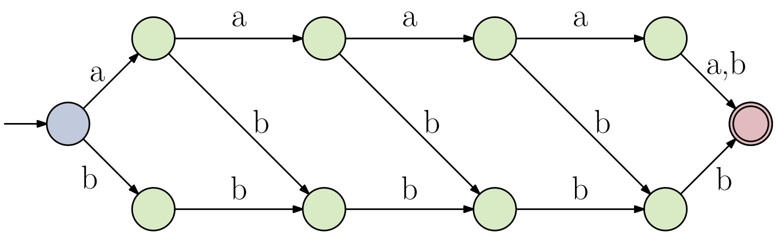
b) $\{\underline{a}^i\underline{b}^j \mid i, j \geq 0, i - j = 5\}$

c) $\{w = xyzy^r x \mid x, y, z \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^*\}$ (*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

d) $\{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} + 2 = |w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$

e) $\{(\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^n)^m \mid n \geq 0\}$, wobei m für Ihre Matrikelnummer (ohne führende Nullen) steht.

Lösung a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^i \underline{\mathtt{b}}^j \mid i, j \geq 0, i + j = 5\}$ ist endlich, damit sicher regulär, und wird z.B. von folgendem (deterministischen) endlichen Automaten akzeptiert:



b) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^i \underline{\mathtt{b}}^j \mid i, j \geq 0, i - j = 5\}$ ist sicher nicht regulär. Beweis indirekt.

Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^{m+5} \underline{\mathtt{b}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^{m+5} \underline{\mathtt{b}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $\underline{\mathtt{a}}^{m+5+|y|} \underline{\mathtt{b}}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

c) $\{w = xyzy^rx \mid x, y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\} = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$ und damit jedenfalls eine reguläre Sprache, welche z.B. von folgendem DEA akzeptiert wird:

$$A = (\{q\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{(q, \underline{\mathtt{a}}, q), (q, \underline{\mathtt{b}}, q)\}, q, \{q\})$$

(*Anmerkung*: Auf den ersten Blick könnte man meinen, es handelt sich hier um eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache. Bei näherer Betrachtung sollte aber auffallen, dass $x, y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$ sind. Somit kann man natürlich auch $w = xyzy^rx$ als $w = z$ lesen, wenn $x = y = \varepsilon$.)

d) $L = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} + 2 = |w|_{\underline{\mathtt{b}}}\}$ ist sicher nicht regulär. Beweis indirekt.

Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^{m+2}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 2 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^{m+2}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $\underline{\mathtt{a}}^{m-|y|} \underline{\mathtt{b}}^{m+2}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

e) $L = \{(\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^n)^m \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann p die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = (\underline{\mathtt{a}}^p \underline{\mathtt{b}}^p)^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2p * m > p$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq p$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq p$ und $w = (\underline{\mathtt{a}}^p\underline{\mathtt{b}}^p)^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 5$ wählen, müsste auch $xy^5z = \underline{\mathtt{a}}^{p+4*|y|}\underline{\mathtt{b}}^p(\underline{\mathtt{a}}^p\underline{\mathtt{b}}^p)^{m-1}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.