4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 SS 2017 26.6.2017			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Nicht jeder Jäger schießt auf alle Tiere, die er sieht.
(*Not every hunter shoots at every animal that he sees.*)

(2) Manche Jäger schießen auf höchstens ein Tier.
(*There is a hunter who shoots at no more than at most one animal.*) **(7 Punkte)**

Lösung:
Signatur $\langle\{J, T, Sch, S\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:

$J(x)$	...	x ist ein Jäger (einstellig)
$T(x)$	...	x ist ein Tier (einstellig)
$S(x,y)$	...	x sieht y (zweistellig)
$Sch(x,y)$	...	x schießt auf y (zweistellig)

Formeln:
(1): $\neg\forall x\forall y[(J(x) \land T(y) \land S(x,y)) \supset Sch(x,y)]$
oder (z.B.): $\exists x\exists y[(J(x) \land T(y) \land S(x,y)) \land \neg Sch(x,y)]$
(2): $\exists x(J(x) \land \exists y\forall z[(T(z) \land Sch(x,z)) \supset z = y])$

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall z(\neg R(y,z) \supset R(z, h(d,z))) \land \forall y \neg R(y, h(x,c))$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifieren Sie beide Interpretationen vollständig und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

Lösung:
Die Variablen x und y kommen frei vor; y kommt auch gebunden vor, ebenso z.
Modell $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(R) =$“$<$”, $\Phi(h) =$“$+$”, $\Phi(c) = 0$, $\Phi(d) = 1$, $\xi(y) = \xi(x) = 0$, beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation besagt das rechte Konjunkt: Alle natürlichen Zahlen sind nicht kleiner, daher größer oder gleich 0+0. Auch das linke Konjunkt ist wahr, denn es besagt: Für alle natürlichen Zahlen n: $0 \geq n$ impliziert $n < 1 + n$.

Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(R) =$“$>$”, $\Phi(h) =$“$+$”, $\Phi(c) = 0$, $\Phi(d) = 0$, $\xi(y) = \xi(x) = 0$, beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation ist das rechte Konjunkt – und somit die ganze Formel – falsch, denn es besagt, dass alle natürliche Zahlen nicht größer, also kleiner gleich $0 + 0$ sind.

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus $\forall u\, u = f(u)$, $\exists u[(Q(u) \wedge Q(c)) \supset R(g(u))]$, sowie $\forall u\, Q(f(u))$ folgt $\exists u R(u)$.
Kennzeichnen Sie alle γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \forall u\, u = f(u)$							Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \exists u[(Q(u) \wedge Q(c)) \supset R(g(u))]$							Annahme – δ-Formel
(3)	$\mathbf{t} : \forall u Q(f(u))$							Annahme – γ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : \exists u R(u)$							Annahme – γ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : (Q(a) \wedge Q(c)) \supset R(g(a))$							von 2
(6)	$\mathbf{f} : Q(a) \wedge Q(c)$				von 5	(7)	$\mathbf{t} : R(g(a))$	von 5
(8)	$\mathbf{f} : Q(a)$	von 6	(9)	$\mathbf{f} : Q(c)$	von 6	(10)	$\mathbf{f} : R(g(a))$	von 4
(11)	$\mathbf{t} : Q(f(a))$	von 3	(12)	$\mathbf{t} : Q(f(c))$	von 3		$\times$	Wid.: 7/10
(13)	$\mathbf{t} : a = f(a)$	von 1	(14)	$\mathbf{t} : c = f(c)$	von 1			
(15)	$\mathbf{t} : Q(a)$	$S^=$:13→11	(16)	$\mathbf{t} : Q(c)$	$S^=$:14→12			
	$\times$	Wid.: 8/15		$\times$	Wid.: 9/16			

8.) Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.
Hinweis: Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren.

- Das Programm $\{\, 2x > 3 \,\}$ `begin` $y \leftarrow x$; $x \leftarrow y + y$ `end` $\{\, x > 2 \,\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ partiell, aber nicht total korrekt.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Wegen der Vorbedingung gilt $I(x) \geq 2$ in der Umgebung, in der das Programm ausgewertet wird. Das Programm bewirkt, dass x nach Ablauf den doppelten Wert hat als zuvor. Daher gilt in der resultierenden Umgebung $x \geq 4$ und somit auch die Nachbedingung $x > 2$.
  Das Programm ist also partiell korrekt und, da es immer terminert, auch total korrekt.

- Wenn ein Programm π bezüglich der Vorbedingung P und der Nachbedingung Q total korrekt ist, so ist π auch bezüglich der Vorbedingung P und Nachbedingung $R \supset Q$ total korrekt, wobei R eine beliebige Formel (über dem jeweiligen Datentyp) ist.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: $R \supset Q$ ist eine logische Konsequenz von Q. Sowohl die partielle, also auch die totale Korrekt bleibt erhalten, wenn man die Vorbedingung wie hier abschwächt.

(8 Punkte)