

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 WS 2017/18 21.3.2018			
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe A

- 5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

Hinweis: Kardinalitätsaussagen sind durch Verwendung von Gleichheit auszudrücken.

- (1) Jeder Professor präsentiert höchstens eine Vorlesung.
(*Every professor presents at most one lecture.*)
- (2) Es gibt eine oder mehrere Vorlesung, die von mehr als einem Professor präsentiert wird.
(*There is one or more lecture that is presented by more than one professor.*)

(7 Punkte)

- 6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$$\exists u(P(u, x) \supset \neg P(u, f(d, u))) \wedge \forall x P(x, f(z, c))$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. (7 Punkte)

- 7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:

$$\text{Aus } \forall u(\exists y Q(u, y) \supset R(f(u))) \text{ und } \forall u f(g(u)) = u \text{ folgt } \exists y \exists u \neg Q(y, u) \vee R(c).$$

Kennzeichnen Sie alle γ - und δ -Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

- 8.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten detailliert und klar. (Keine Punkte für fehlende oder falsche Begründung.)

Negative Antworten sind mit konkreten Gegenbeispielen zu begründen!

- Das Programm $\{x \geq 2x\}$ **while** $x < 0$ **do** $x \leftarrow x - 2y - 2$ $\{2x + 1 > 3\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp \mathbb{Z} partiell, aber nicht total korrekt.

Begründung:

☐ richtig ☐ falsch

- Wenn die partiellen Korrektheitsaussagen $\{\top\}_\alpha\{B\}$ und $\{\top\}_\beta\{C\}$ gelten, dann gilt auch die partielle Korrektheitsaussage $\{A\}_\alpha; \beta\{C\}$ für beliebige A .

Begründung:

☐ richtig ☐ falsch

(8 Punkte)

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.

Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

Hinweis: Kardinalitätsaussagen sind durch Verwendung von Gleichheit auszudrücken.

(1) Jeder Professor präsentiert höchstens eine Vorlesung.

(Every professor presents at most one lecture.)

(2) Es gibt eine oder mehrere Vorlesung, die von mehr als einem Professor präsentiert wird.

(There is one or more lecture that is presented by more than one professor.)

(7 Punkte)

$$S = \langle \{P, p, v\}, \{y, l\} \rangle$$

Prädikatsymbole:

$P(x) \dots x$ ist Professor

$P(x, y) \dots x$ präsentiert y

$V(y) \dots y$ ist Vorlesung

$$1) \forall x (P(x) \supset \exists y (V(y) \wedge p(x, y) \wedge \neg \exists z (z \neq y \wedge V(z) \wedge p(x, z)))$$

$$2) \exists x (V(x) \wedge \exists y \exists z (y \neq z \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge p(y, x) \wedge p(z, x)))$$

6.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:

$$\exists u(P(u, x) \supset \neg P(u, f(d, u))) \wedge \forall x P(x, f(z, c))$$

Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. (7 Punkte)

u kommt nur gebunden vor

x kommt links frei, rechts gebunden vor

d kommt frei vor

z kommt frei vor

c kommt frei vor

Modell: $\mathcal{I} = \langle D, \phi, \xi \rangle$ wobei

$$D = W$$

$$\phi(P(x, y)) = P(x, y) = \text{true, falls } f$$

$$\phi(f(x, y)) = \perp$$

$$\xi(x) = 2, \xi(d) = \perp, \xi(z) = \perp, \xi(c) = \perp, \xi(u) = \perp$$

Erklärung: Im linken Teil der Konjunktion ist

$x = 2$, also ist der linke Teil der Implikation immer falsch und die Implikation als Ganzes somit immer richtig. Der rechte Teil der Konjunktion ist für alle x wahr, da f immer \perp zurückgibt.

Gegenbeispiel: $\mathcal{I} = \langle D, \phi, \xi \rangle$

$$D = W$$

$$\phi(p(x,y)) = \text{true}$$

$$\phi(f(x,y)) = 2$$

$$\xi(x) = 1, \xi(y) = 1, \xi(z) = 1, \xi(u) = 1, \xi(v) = 1$$

Erklärung:

Dadurch, dass p immer true ist, ist
der linke Teil der Konjunktion immer
falsch und somit auch der ganze Ausdruck.

7.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:

Aus $\forall u(\exists y Q(u, y) \supset R(f(u)))$ und $\forall u f(g(u)) = u$ folgt $\exists y \exists u \neg Q(y, u) \vee R(c)$.

Kennzeichnen Sie alle γ - und δ -Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(8 Punkte)

(1)	$\vdash \forall u (\exists y Q(u, y) \supset R(f(u)))$				Ann., δ -R
(2)	$\vdash \forall u (f(g(u)) = u)$				Ann., δ -R
(3)	$\vdash \exists y \exists u \neg Q(y, u) \vee R(c)$				Ann.
(4)	$\vdash \forall y \forall u Q(y, u) \wedge \neg R(c)$				aus (3)
(5)	$\vdash R(c)$				aus (4)
(6)	$\vdash \forall y \forall u Q(y, u)$				aus (4), δ -R
(7)	$\vdash \forall u Q(c, u)$				aus (6), δ -R
(8)	$\vdash Q(c, c)$				aus (7)
(9)	$\vdash \exists y Q(c, y) \supset R(f(c))$				aus (8) 1
(13)	$\vdash \exists y Q(c, y)$	aus (9)	(10)	$\vdash R(f(c))$	aus (9)
(14)	$\vdash Q(c, c)$	aus (13)	(11)	$\vdash f(g(c)) = c$	aus (2)
	Wd. 8/14		(12)	$\vdash R(c)$	aus (10, 11)
	X			Wd. 5/12	
				X	

8.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten detailliert und klar. (Keine Punkte für fehlende oder falsche Begründung.) Negative Antworten sind mit konkreten Gegenbeispielen zu begründen!

a). Das Programm $\{x \geq 2x\}$ while $x < 0$ do $x \leftarrow x - 2y - 2$ $\{2x + 1 > 3\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp \mathbb{Z} partiell, aber nicht total korrekt.

Begründung:

☐ richtig ☒ falsch

b). Wenn die partiellen Korrektheitsaussagen $\{\top\}\alpha\{B\}$ und $\{\top\}\beta\{C\}$ gelten, dann gilt auch die partielle Korrektheitsaussage $\{A\}\alpha;\beta\{C\}$ für beliebige A .

Begründung:

☒ richtig ☐ falsch

(8 Punkte)

a) Ist nicht einmal partiell korrekt, da für $x=0$ das Programm terminiert, daher die Nachbedingung nicht stimmt.

? b) Ja, denn sofern β terminiert ist die Nachbedingung immer erfüllt, egal was für Vorbedingungen gelten.