4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 SS 2014 23.6.2014			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Jedes Pferd, das einem Bauern gehört, wird von einem oder mehreren Kindern gefüttert.
(*Every horse that is owned by a farmer is fed by one or more children.*)

(2) Ida füttert alle Pferde, die ihr gehören.
(*Ida feeds every horse that she owns.*)

(6 Punkte)

Lösung:

Prädikatensymbole:

$P(x)$	...	x ist eine Pferd (einstellig)
$B(x)$	...	x ist ein Bauer (einstellig)
$K(x)$	...	x ist ein Kind (einstellig)
$G(x,y)$	...	x gehört y (zweistellig)
$F(x,y)$	...	x füttert y (zweistellig)

Konstantensymbol:

i ... Ida

Formeln:
(1): $\forall x[(P(x) \wedge \exists y(B(y) \wedge G(y,x))) \supset \exists z(K(z) \wedge F(z,x))]$
oder (z.B.) $\forall x \forall y[(P(x) \wedge B(y) \wedge G(y,x)) \supset \exists z(K(z) \wedge F(z,x)]$
(2): $\forall x[(P(x) \wedge G(i,x)) \supset F(i,x)]$

7.) Spezifizieren Sie ein Gegenbeispiel zu folgender Behauptung. (Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen):
$\exists x Q(x,h(y))$ folgt logisch aus $\forall x \forall y(Q(x,y) \supset Q(x,h(y)))$ und $Q(y,b)$.

Argumentieren Sie außerdem, *warum* die von Ihnen angegebene Interpretation ein Gegenbeispiel zu dieser Konsequenzbehauptung ist. **(6 Punkte)**

Lösung:
Die Konsequenzbehauptung $\forall x \forall y(Q(x,y) \supset Q(x,h(y)))$, $Q(y,b) \models \exists x Q(x,h(y))$ wird durch (z.B.) folgendes Gegenbeispiel $\langle D, \Phi, \xi \rangle$ widerlegt:
$D = \omega$; $\Phi(Q)(m,n) \Leftrightarrow m < n$ (also $\Phi(Q) =$"$<$"), $\Phi(h)(n) = n$, $\Phi(b) = 1$, $\xi(y) = 0$, beliebig sonst.

Gemäß dieser Interpretation ergibt sich folgende konkrete Behauptung:
Prämisse 1: Für alle natürlichen Zahlen m, n gilt: $m < n$ impliziert $m < n$ (Tautologie).
Prämisse 2: $0 < 1$.
Konklusion: Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner ist als 0.
Da die Prämissen wahr, aber die Konklusion falsch ist, ist diese Interpretation ein Gegenbeispiel.

8.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus $\exists x \forall y\, h(x) = y$ und $\exists x\, Q(h(x))$ folgt $\forall x(Q(h(x)) \wedge Q(h(h(x))))$.
Markieren Sie γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(6 Punkte)

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y\, h(y) = x$				Annahme – δ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \exists x\, Q(h(x))$				Annahme – δ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall x(Q(h(x)) \wedge Q(h(h(x))))$				Annahme – δ-Formel
(4)	$\mathbf{t} : \forall y\, h(a) = y$				von 1 γ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : Q(h(b))$				von 2
(6)	$\mathbf{t} : h(a) = h(b)$				von 4
(7)	$\mathbf{t} : Q(h(a))$				$S^{=}6{\to}5$
(8)	$\mathbf{f} : Q(h(c)) \wedge Q(h(h(c)))$				von 3
(9)	$\mathbf{f} : Q(h(c))$	von 8	(10)	$\mathbf{f} : Q(h(h(c)))$	von 28
(11)	$\mathbf{t} : h(a) = h(c)$	von 4	(13)	$\mathbf{t} : h(a) = h(h(c))$	von 4
(12)	$\mathbf{f} : Q(h(a))$	$S^{=}11{\to}9$	(14)	$\mathbf{f} : Q(h(a))$	$S^{=}13{\to}10$
	$\times$	Wid.: 7/12		$\times$	Wid.: 7/14

Kommentar:
Es gibt auch Lösungen in denen die δ-Formeln in einer anderen Reihenfolge behandelt werden. Beachten Sie, dass die γ-Regel mehr als einmal auf dieselbe Formel anzuwenden ist.

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$x > y\ \{\underline{\texttt{while}}\ x > y\ \underline{\texttt{do}}\ \underline{\texttt{begin}}\ z \leftarrow y - 2;\ y \leftarrow z + 3\ \underline{\texttt{end}}\}\ x = y$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen.

(6 Punkte)

Lösung: Unter Verwendung der Abkürzungen $P = B = x > y$ und $Q = (x = y)$ kann man folgendes ableiten:

$$\text{(H4)}\ \dfrac{\overset{(1)}{P \supset I} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(I \wedge B) \supset I\left[{}^{z+3}_{\;y}\right]\left[{}^{y-2}_{\;z}\right]}}{(I \wedge B)\ \{z \leftarrow y - 2\}\ I\left[{}^{z+3}_{\;y}\right]}}{(I \wedge B)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ z \leftarrow y - 2;\ y \leftarrow z + 3\ \underline{\texttt{end}}\}\ I} \qquad \overset{(3)}{(I \wedge \neg B) \supset Q}}{P\ \{\underline{\texttt{while}}\ B\ \underline{\texttt{do}}\ \underline{\texttt{begin}}\ z \leftarrow y - 2;\ y \leftarrow z + 3\ \underline{\texttt{end}}\}\ Q}$$

Da Precondition (P) und Schleifenbedingung (B) identisch sind, eignet sich $P \vee Q$ (wobei Q die Postcondition ist) als Invariante I. Also $I = (x > y \vee x = y)$, was sich zu $I = x \geq y$ vereinfacht.

Es bleibt zu zeigen:

(1): $P \supset I = P \supset (P \vee Q)$ ist eine Tautologie.

(2): $I\left[{}^{z+3}_{\;y}\right]\left[{}^{y-2}_{\;z}\right] = x \geq y\left[{}^{z+3}_{\;y}\right]\left[{}^{y-2}_{\;z}\right] = x \geq z + 3\left[{}^{y-2}_{\;z}\right] = x \geq y + 3 - 2 = x \geq y + 1$. Da in $\mathbb{Z}$ $x \geq y + 1$ aus $B = x > y$ folgt, gilt die Implikation (2) im Datentyp $\mathbb{Z}$.

(3): $(I \wedge \neg B) \supset Q = ((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$ ist ebenfalls eine Tautologie.

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- In der Formel $\exists z Q(z, f(y, a)) \vee P(x, z)$ kommen genau zwei Variablen frei vor.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: y kommt im linken Disjunkt und sowohl x als auch z im rechten Disjunkt frei (also ohne zugehöriges Quantorenvorkommen) vor. Die Variable z kommt nur links gebunden vor; a ist gemäß den Schreibkonventionen ein Konstantensymbol und keine Variable.

- Aus der Unentscheidbarkeit der Menge der prädikatenlogisch gültigen Formeln folgt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man für jede gegebene Formel feststellen kann, ob Sie unerfüllbar ist.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Da eine Formel genau dann unerfüllbar ist, wenn ihre Negation gültig ist, folgt aus der Unentscheidbarkeit von PL-Gültigkeit auch die Unentscheidbarkeit von PL-Unerfüllbarkeit.

- Wenn in einem Kalkül alle PL-Formeln beweisbar sind, dann ist der Kalkül nicht korrekt.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Nicht alle PL-Formeln sind gültig. Wenn aber nicht alle beweisbaren Formeln gültig sind, dann ist der Kalkül inkorrekt.

(6 Punkte)