Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 4 (2018W)
Lösungen

Allgemeine Hinweise: Nummerieren Sie alle auftretenden Formeln in Tableau-Beweisen und geben Sie entsprechende Herkunftshinweise bei allen Regelanwendungen an. Außerdem sind γ- und δ-Formeln jeweils als solche zu markieren. Beachten Sie die Notationsvereinbarungen auf Folie 321.

Aufgabe 4.1

a) Ergänzen Sie den Tableau-Kalkül um Regeln für die Konnektive $\uparrow$ (nand) und $\leftrightarrow$ (iff).

b) Formulieren Sie auf $\uparrow$ und $\leftrightarrow$ bezogene Klauseln für das Lemma auf Folie 435.

c) Zeigen Sie $A \uparrow (B \vee C),\ B \leftrightarrow (D \vee A) \models (B \uparrow \neg D) \vee E$ im ergänzten Tableau-Kalkül.

Lösung 4.1

a) Die vier neuen Regeln lauten wie folgt:

$$\frac{\mathbf{f} : A \uparrow B}{\begin{array}{c}\mathbf{t} : A \\ \mathbf{t} : B\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{t} : A \uparrow B}{\mathbf{f} : A \mid \mathbf{f} : B} \qquad \frac{\mathbf{f} : A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c}\mathbf{t} : A & \mathbf{f} : A \\ \mathbf{f} : B & \mathbf{t} : B\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{t} : A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c}\mathbf{t} : A & \mathbf{f} : A \\ \mathbf{t} : B & \mathbf{f} : B\end{array}}$$

b) Die entsprechenden Teile des Lemmas lauten wie folgt:

- Regel für $\mathbf{f}$: $\uparrow$: $\mathrm{val}_I(A \uparrow B) = \mathbf{f} \iff \mathrm{val}_I(A) = \mathbf{t}$ und $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{t}$
- Regel für $\mathbf{t}$: $\uparrow$ $\mathrm{val}_I(A \uparrow B) = \mathbf{t} \iff \mathrm{val}_I(A) = \mathbf{f}$ oder $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{f}$
- Regel für $\mathbf{f}$: $\leftrightarrow$: $\mathrm{val}_I(A \leftrightarrow B) = \mathbf{f} \iff$ entweder $\mathrm{val}_I(A) = \mathbf{t}$ und $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{f}$ oder $\mathrm{val}_I(A) = \mathbf{f}$ und $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{t}$
- Regel für $\mathbf{t}$: $\leftrightarrow$: $\mathrm{val}_I(A \leftrightarrow B) = \mathbf{t} \iff$ entweder $\mathrm{val}_I(A) = \mathbf{t}$ und $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{t}$ oder $\mathrm{val}_I(A) = \mathbf{f}$ und $\mathrm{val}_I(B) = \mathbf{f}$

c)

(1)	$\mathbf{t} : A \uparrow (B \vee C)$							Annahme
(2)	$\mathbf{t} : B \leftrightarrow (D \vee A)$							Annahme
(3)	$\mathbf{f} : (B \uparrow \neg D) \vee E$							Annahme
(4)	$\mathbf{f} : B \uparrow \neg D$							von 3
(5)	$\mathbf{f} : E$							von 3
(6)	$\mathbf{t} : B$							von 4
(7)	$\mathbf{t} : \neg D$							von 4
(8)	$\mathbf{f} : A$					(9)	$\mathbf{f} : B \vee C$	von 1
(12)	$\mathbf{t} : B$	von 2	(14)	$\mathbf{f} : B$	von 2	(10)	$\mathbf{f} : B$	von 9
(13)	$\mathbf{t} : D \vee A$	von 2	(15)	$\mathbf{f} : D \vee A$	von 2	(11)	$\mathbf{f} : C$	von 9
(16)	$\mathbf{t} : D$	von 13	(17)	$\mathbf{t} : A$	von 13	$\times$	(6/14)	$\times$ (6/10)
(18)	$\mathbf{f} : D$	von 7	$\times$	(8/17)				
$\times$	(16/18)							

Beachten Sie: Die Reihenfolge der Regelanwendungen ist nicht zwingend.

Aufgabe 4.2

Sind folgende Konsequenzbehauptungen richtig? Im positiven Fall ist ein Tableau-Beweis anzugeben, im negativen Fall ein vollständig spezifiziertes Gegenbeispiel. (Siehe Folie 409 für die Definition relevanter Eigenschaften von Relationen.)

a) Jede serielle und partiell funktionale Relation ist total funktional.

b) Jede schwach dichte, symmetrische und reflexive Relation ist transitiv.

Lösung 4.2

a) Folgender Tableau-Beweis zeigt, dass die Konsequenzbehauptung stimmt:

(1)		$\mathbf{t} : \forall x \exists y R(x,y)$		Serialität (γ-Formel)
(2)		$\mathbf{t} : \forall x \forall y \forall z[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset y = z]$		partielle Funktionalität (γ-F.)
(3)		$\mathbf{f} : \forall x \exists y[R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \supset y = z)]$		totale Funktionalität (δ-F.)
(4)		$\mathbf{f} : \exists y[R(a,y) \wedge \forall z(R(a,z) \supset y = z)]$		von 3 (γ-Formel)
(5)		$\mathbf{t} : \exists y R(a,y)$		von 1 (δ-Formel)
(6)		$\mathbf{t} : R(a,b)$		von 5
(7)		$\mathbf{f} : R(a,b) \wedge \forall z(R(a,z) \supset b = z)$		von 4
(8)	$\mathbf{f} : R(a,b)$ v. 7 $\times$ (6/8)	(9)	$\mathbf{f} : \forall z(R(a,z) \supset b = z)$	von 7 (δ-Formel)
		(10)	$\mathbf{f} : R(a,c) \supset b = c$	von 9
		(11)	$\mathbf{t} : R(a,c)$	von 10
		(12)	$\mathbf{f} : b = c$	von 10
		(13)	$\mathbf{t} : \forall y \forall z[(R(a,y) \wedge R(a,z)) \supset y = z]$	von 2 (γ-Formel)
		(14)	$\mathbf{t} : \forall z[(R(a,b) \wedge R(a,z)) \supset b = z]$	von 13 (γ-Formel)
		(15)	$\mathbf{t} : (R(a,b) \wedge R(a,c)) \supset b = c$	von 14
		(16) $\mathbf{f} : R(a,b) \wedge R(a,c)$ von 15	(17) $\mathbf{t} : b = c$ von 15	
		(18) $\mathbf{f} : R(a,b)$ $\times$ (6/18)	(19) $\mathbf{f} : R(a,c)$ $\times$ (11/19)	$\times$ (12/17)

b) Es geht um die Konsequenzbehauptung $\mathit{schwd}, \mathit{sym}, \mathit{refl} \models \mathit{trans}$, wobei
- $\mathit{schwd} = \forall x \forall y[R(x,y) \supset \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))]$
- $\mathit{sym} = \forall x \forall y[R(x,y) \supset R(y,x)]$
- $\mathit{refl} = \forall x R(x,x)$
- $\mathit{trans} = \forall x \forall y \forall z[(R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z)]$

Wir spezifizieren ein Gegenbeispiel $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi \rangle$ über der Domäne der natürlichen Zahlen, also für $D = \omega$. Da keine freien Variablen in der Behauptung vorkommen, ist ξ irrelevant. Wir definieren $\Phi(R)(m,n) = \mathbf{t} \iff |m - n| \leq 1$. In Worten: 2 Zahlen stehen genau dann in der Relation $\Phi(R)$ zueinander, wenn sie identisch oder bezüglich der Nachfolgerrelation benachbart sind.

Die Relation $\Phi(R)$ ist offensichtlich symmetrisch und reflexiv. Außerdem ist jede reflexive Relation auch schwach dicht. Allerdings ist $\Phi(R)$ nicht transitiv: Es gilt z.B. $|2-1| \leq 1$ und $|1-0| \leq 1$, aber nicht $|2-0| \leq 1$.

Hinweis: Es gibt natürlich auch andere Gegenbeispiele; z.B. über $D = \{0,1,2\}$.

Aufgabe 4.3

Beweisen Sie folgende Behauptungen mit dem Tableau-Kalkül.

a) $\exists x[\neg Q(x, f(x,a)) \supset \neg \forall z Q(b,z)]$ ist gültig.

b) $\forall x \exists y[\exists z \neg P(y,z) \wedge \forall u P(x,u)]$ ist unerfüllbar.

c) $\exists x[g(g(x)) = x \vee P(f(x))]$ folgt aus $\forall x[x = g(x) \vee P(f(f(x)))]$ und $\exists x\, x = f(x)$.

Lösung 4.3

a)

(1)	$\mathbf{f} : \exists x[\neg Q(x, f(x,a)) \supset \neg \forall z Q(b,z)]$	Annahme (γ-Formel)
(2)	$\mathbf{f} : \neg Q(b, f(b,a)) \supset \neg \forall z Q(b,z)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : \neg Q(b, f(b,a))$	von 2
(4)	$\mathbf{f} : \neg \forall z Q(b,z)$	von 2
(5)	$\mathbf{t} : \forall z Q(b,z)$	von 4 (γ-Formel)
(6)	$\mathbf{t} : Q(b, f(b,a))$	von 5
(7)	$\mathbf{f} : Q(b, f(b,a))$	von 3
	$\times$	Wid.: 6/7

b)

(1)	$\mathbf{t} : \forall x \exists y [\exists z \neg P(y,z) \wedge \forall u P(x,u)]$	Annahme (γ-Formel)
(2)	$\mathbf{t} : \exists y [\exists z \neg P(y,z) \wedge \forall u P(a,u)]$	von 1 (δ-Formel)
(3)	$\mathbf{t} : \exists z \neg P(b,z) \wedge \forall u P(a,u)$	von 2
(4)	$\mathbf{t} : \exists z \neg P(b,z)$	von 3 (δ-Formel)
(5)	$\mathbf{t} : \forall u P(a,u)$	von 3 (γ-Formel)
(6)	$\mathbf{t} : \neg P(b,c)$	von 4
(7)	$\mathbf{t} : \exists y [\exists z \neg P(y,z) \wedge \forall u P(b,u)]$	von 1 (δ-Formel)
(8)	$\mathbf{t} : \exists z \neg P(d,z) \wedge \forall u P(b,u)$	von 7
(9)	$\mathbf{t} : \exists z \neg P(d,z)$	von 8 (δ-Formel)
(10)	$\mathbf{t} : \forall u P(b,u)$	von 8 (γ-Formel)
(11)	$\mathbf{t} : P(b,c)$	von 10
(12)	$\mathbf{f} : P(b,c)$	von 6
	$\times$	Wid.: 11/12

Beachten Sie: Die wiederholte Anwendung der γ-Regel auf 1 ist unvermeidbar.

c)

(1)	$\mathbf{t} : \forall x [x = g(x) \vee P(f(f(x)))]$				Annahme (γ-Formel)
(2)	$\mathbf{t} : \exists x \, x = f(x)$				Annahme (δ-Formel)
(3)	$\mathbf{f} : \exists x [g(g(x)) = x \vee P(f(x))]$				Annahme (γ-Formel)
(4)	$\mathbf{t} : a = f(a)$				von 2
(5)	$\mathbf{t} : a = g(a) \vee P(f(f(a)))$				von 1
(6)	$\mathbf{f} : g(g(a)) = a \vee P(f(a))$				von 3
(7)	$\mathbf{f} : g(g(a)) = a$				von 6
(8)	$\mathbf{f} : P(f(a))$				von 6
(9)	$\mathbf{t} : a = g(a)$	von 5	(10)	$\mathbf{t} : P(f(f(a)))$	von 5
(11)	$\mathbf{f} : g(a) = a$	$S^{=}$: 9→7	(12)	$\mathbf{t} : P(f(a))$	$S^{=}$: 4→10
(13)	$\mathbf{f} : a = a$	$S^{=}$: 9→11		$\times$ (8/12)	
	$\times$ $AB^{=}$				

Beachten Sie: Es gibt keine Tableau-Regel, die es erlauben würde, gleich mit 9 und 11 abzuschließen.

Aufgabe 4.4

Untersuchen Sie folgende Korrektheitsaussagen. Verwenden Sie dazu die Definition der Wahrheit von Korrektheitsaussagen, um jeweils entweder zu argumentieren, dass die betroffene Aussage wahr ist, oder um ein Gegenbeispiel anzugeben.

a) Über $AL(\mathbb{N})$: $\{x_0 = x\}\ x \leftarrow x * x\ \{x_0 = x^2\}$

b) Über $AL(\mathbb{S})$: $\{x = \underline{1}\underline{0}\}\ x \leftarrow \mathrm{pop}(x)\ \{x \neq \varepsilon\}$

c) Über $AL(\mathbb{Z})$: $\{x > 0\}$ while $x \neq 0$ do $x \leftarrow x + 1\ \{x \neq x\}$

Lösung 4.4

a) Die Zuweisung terminiert offensichtlich immer, da das Programm keine Schleife enhält. Die partielle und daher hier auch die totale Korrektheit der Aussage ist gleichbedeutend mit:

> Für alle $I \in ENV$ gilt: Wenn $\mathcal{M}(I, x_0 = x) = \mathbf{t}$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{M}(I', x_0 = x^2) = \mathbf{t}$ wobei $I' = \mathcal{M}(I, x \leftarrow x * x)$.

Diese Aussage ist falsch. Für ein Gegenbeispiel genügt es $I(x_0) = I(x) = 2$ zu setzen. Dann gilt für $I' = \mathcal{M}(I, x \leftarrow x * x)$ $I'(x) = 4$, aber weiterhin $I'(x_0) = 2$. Somit ergibt sich $\mathcal{M}(I', x_0 = x^2) = \mathbf{f}$, obwohl $\mathcal{M}(I, x_0 = x) = \mathbf{t}$.

b) Das Programm ist partiell und, da es offensichtlich terminiert, auch total korrekt: $\mathcal{M}(I, x = \underline{1}\underline{0}) = \mathbf{t}$ impliziert $I(x) = \underline{1}\underline{0}$. Für $I' = \mathcal{M}(I, x \leftarrow \mathrm{pop}(x))$ gilt daher $I'(x) = \underline{0}$ und somit $\mathcal{M}(I', x \neq \varepsilon)$.

c) Das Programm terminiert in keiner Umgebung I, die die Vorbedingung erfüllt ($I(x)$ ist positiv): Der Wert von x bleibt nach Ausführung der Zuweisung im Schleifen-Body positiv. Daher wird die Schleifenbedingung niemals falsch. Das bedeutet, dass die Aussage bezüglich totaler Korrektheit falsch ist. Allerdings ist sie bezüglich partieller Korrektheit wahr: Da das Programm in den relevanten Umgebungen nie terminiert, kann es kein Gegenbeispiel geben.

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie die totale Korrektheit des folgenden $AL(\mathbb{Z})$-Programms bezüglich der angegebenen Vor- bzw. Nachbedingung mit Hilfe des Hoare-Kalküls.

$\{x > 0 \wedge y_0 = y\}$
begin
  begin
  if $y < 0$ then $y \leftarrow -2 * y$
       else $y \leftarrow 2 * y$;
  $z \leftarrow 1$
  end;
  while $y \neq 0$ do
       begin
       $z \leftarrow z * x$;
       $y \leftarrow y - 1$
       end
end
$\{z = x^{|2y_0|}\}$

Hinweise: Zeigen Sie zunächst die partielle Korrektheit. Verwenden Sie dabei $x > 0 \wedge z = x^{|2y_0|-y}$ als Invariante und $x > 0 \wedge y = |2y_0|$ als Interpolante zwischen dem Konditional und der Zuweisung $z \leftarrow 1$. Ergänzen Sie schließlich Ihren Beweis zu einem Beweis für die totale Korrektheit des Programms. Dieser zweite Schritt betrifft nur die While-Schleife.

Lösung 4.5

Wir zeigen zunächst die partielle Korrektheit. Wie in der Vorlesung geben die Indizes (i) der Zusicherungen (F_i) die Reihenfolge an, in der sie hinzugefügt wurden. Rechts daneben steht als Kommentar jeweils der Name der Regel des Hoare-Kalküls, die verwendet wurde um diesen Schritt zu rechtfertigen.

Anmerkung: Die Reihenfolge der Regelanwendungen ist nicht zwingend. Beispielsweise wurde hier zuerst die Schleife, dann die Initialzuweisung zu z, dann erst das Konditional behandelt. Dies könnte man auch in anderer Reihenfolge machen.

$\{F_1 : x > 0 \wedge y_0 = y\}$ Vorbedingung
begin
  begin
  if $y < 0$ then
       $\{F_{13} : x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y < 0\}$ // fi $\downarrow$
       $\{F_{12} : y = |2y_0|[^{-2*y}_{y}]\}$ // zw $\uparrow$
       $y \leftarrow -2 * y$
       $\{F_9 : x > 0 \wedge y = |2y_0|\}$ // fi $\uparrow$
     else
       $\{F_{11} : x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y \geq 0\}$ // fi $\downarrow$
       $\{F_{10} : y = |2y_0|[^{2*y}_{y}]\}$ // zw $\uparrow$
       $y \leftarrow 2 * y$;
       $\{F_9 : x > 0 \wedge y = |2y_0|\}$ // fi $\uparrow$
  $\{F_9 : x > 0 \wedge y = |2y_0|\}$ // be
  $\{F_8 : Inv[^{1}_{z}]\}$ // wh
  $z \leftarrow 1$
  end;
  $\{F_3 : Inv\}$ // wh
  while $y \neq 0$ do
       begin
       $\{F_4 : Inv \wedge y \neq 0\}$ // wh
       $\{F_8 : Inv[^{y-1}_{y}][^{z*x}_{z}]\}$ // zw $\uparrow$
       $z \leftarrow z * x$;
       $\{F_7 : Inv[^{y-1}_{y}]\}$ // zw $\uparrow$
       $y \leftarrow y - 1$
       $\{F_5 = F_3 : Inv\}$ // wh
       end
end
$\{F_6 : Inv \wedge y = 0\}$ // wh
$\{F_2 : z = x^{|2y_0|}\}$ // Nachbedingung

Anmerkung: Das zweite Konjunkt der Interpolante ($y = |2y_0|$) wird durch die spezifische Form des Konditionals nahegelegt. Das erste Konjunkt ($x > 0$) trägt nur die entsprechende Information der Vorbedingung weiter. Diese wird benötigt um den Fall 0^0 (undefiniert) auszuschließen. Als Schleifeninvariante (Inv) erweist sich die Formel $x > 0 \wedge z = x^{|2y_0|-y}$ geeignet.

Um den Beweis der partiellen Korrektheit zu vervollständigen, muss man die Gültigkeit folgender Implikationen zeigen. (Diese ergeben sich dort, wo zwei Zuweisungen unmittelbar hintereinander stehen.)

$F_{13} \supset F_{12}$**:** $(x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y < 0) \supset y = |2y_0|[^{-2y}_{y}]$ ergibt $(x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y < 0) \supset -2y = |2y_0|$. Dies kann man wegen der Gleichheit im linken Teil der Implikation ($y_0 = y$) zu $(x > 0 \wedge y < 0) \supset -2y = |2y|$ vereinfachen, was offensichtlich gültig ist.

$F_{11} \supset F_{10}$**:** $(x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y \geq 0) \supset y = |2y_0|[^{2*y}_{y}]$ ergibt $(x > 0 \wedge y_0 = y \wedge y \geq 0) \supset 2y = |2y_0|$. Dies kann man wie oben zu $(x > 0 \wedge y \geq 0) \supset 2y = |2y|$ vereinfachen, was offensichtlich gültig ist.

$F_9 \supset F_8$**:** $x > 0 \wedge y = |2y_0| \supset Inv[^{1}_{z}]$ ergibt $(x > 0 \wedge y = |2y_0|) \supset (x > 0 \wedge 1 = x^{|2y_0|-y})$. Durch Einsetzten der Gleichung auf der linken Seite der Implikation in die rechte Seite erhält man $x > 0 \wedge 1 = x^{|2y_0|-|2y_0|}$; somit insgesamt $x > 0 \supset (x > 0 \wedge 1 = x^0)$, also eine gültige Formel.

$F_4 \supset F_8$**:** $(Inv \wedge y \neq 0) \supset Inv[^{y-1}_{y}][^{z*x}_{z}]$ ergibt $(x > 0 \wedge z = x^{|2y_0|-y} \wedge y \neq 0) \supset (x > 0 \wedge z \cdot x = x^{|2y_0|-(y-1)})$. Die Gültigkeit dieser Implikation lässt sich einsehen, indem man in der Gleichung ganz rechts durch x dividiert. Dies ist möglich da (im linken Teil der Implikation) $x > 0$ vorausgesetzt wird. Dadurch erhält man die Gleichung $z = x^{|2y_0|-(y-1)-1}$, vereinfacht $z = x^{|2y_0|-y}$, also die selbe Gleichung wie auf der linken Seite der Implikation. Es ergibt sich also insgesamt eine Implikation der Form $(A \wedge B \wedge C) \supset (A \wedge B)$; somit eine gültige Formel.

$F_6 \supset F_2$**:** $(Inv \wedge y = 0) \supset z = x^{|2y_0|}$, also $(x > 0 \wedge z = x^{|2y_0|-y} \wedge y = 0) \supset z = x^{|2y_0|}$. Wenn man $y = 0$ (auf der linken Seite der Implikation) in $z = x^{|2y_0|-y}$ einsetzt, erhält man die Formel F_2 auf der rechten Seite ($z = x^{|2y_0|}$). Somit ist auch diese Implikation gültig.

Um die totale Korrektheit des Programms zu zeigen, müssen wir nur die Schleife analysieren. Dabei kann man genau so vorgehen, wie auf den Vorlesungsfolien für das Multiplikationsprogramm. Wir verstärken also die Invariante Inv zu $Inv' = Inv \wedge y \geq 0$ und erhalten:

$\{F'_3 : Inv'\}$ // wh"
while $y \neq 0$ do
begin
$\{F'_4 : Inv' \wedge y \neq 0 \wedge t = t_0\}$ // wh"
$\{F'_8 : (Inv' \wedge 0 \leq t \leq t_0)[^{y-1}_{y}][^{z*x}_{z}]\}$ // zw ↑
$z \leftarrow z * x$;
$\{F'_7 : (Inv' \wedge 0 \leq t \leq t_0)[^{y-1}_{y}]\}$ // zw ↑
$y \leftarrow y - 1$
$\{F'_5 : Inv' \wedge 0 \leq t \leq t_0\}$ // wh"
end
$\{F'_6 : Inv' \wedge y = 0\}$ // wh"
$\{F_2 : z = x^{|2y_0|}\}$ // Nachbedingung

Wir müssen die Gültigkeit der folgenden beiden Implikationen zeigen:

$F'_4 \supset F'_8$**:** $(Inv' \wedge y \neq 0 \wedge t = t_0) \supset (Inv' \wedge 0 \leq t \leq t_0)[^{y-1}_{y}][^{z*x}_{z}]$ ergibt
$(x > 0 \wedge z = x^{|2y_0|-y} \wedge y \geq 0 \wedge y \neq 0 \wedge t = t_0) \supset (x > 0 \wedge z \cdot x = x^{|2y_0|-(y-1)} \wedge y - 1 \geq 0 \wedge 0 \leq t \leq t_0)$.
Wir setzen $t = y$. Da wir (weiter oben) bereits $F_4 \supset F_8$ bewiesen haben, bleibt die Implikation $(y \geq 0 \wedge y \neq 0 \wedge y = t_0) \supset (y - 1 \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq t_0)$ zu zeigen. Offensichtlich gilt: $y \geq 0$ impliziert $0 \leq y$. Weiters gilt: $y \geq 0 \wedge y \neq 0$ impliziert $y > 0$ und daher auch $y - 1 \geq 0$. Außerdem gilt: $y = t_0$ impliziert $y \leq t_0$. Damit ist die Gültigkeit der gesamten Implikation nachgewiesen.

$F'_6 \supset F_2$**:** $(Inv' \wedge y = 0) \supset z = x^{|2y_0|}$. Da $Inv' = Inv \wedge y \geq 0$ folgt die Gültigkeit aus der Gültigkeit von $F_6 \supset F_2$ (siehe oben).