4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 1 WS 2017 21. März 2018

Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
			A

1.) Sei $L = \{(\underline{\mathsf{a}}^n\underline{\mathsf{c}}^n)^5 \mid n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

2.) Sei $\Sigma = \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}\}$. Die Sprache L ist definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

- $\varepsilon \in L$.
- Für jedes Symbol $a \in \Sigma$ gilt $a \in L$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in L$, so ist auch $awa \in L$.

a) Geben Sie die Sprache an, die durch obige induktive Definition spezifiziert ist.

(1 Punkt)

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik mit höchstens 5 Produktionen an, die L erzeugt.

(3 Punkte)

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform.

(6 Punkte)

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob es für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L genau eine unbeschränkte Grammatik gibt, die L erzeugt.

(6 Punkte)

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Sei $A \leq_p B$ und $B \in \mathbf{NP}$. Dann gilt: A ist entscheidbar.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch
- Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch
- Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch

(6 Punkte)

1.) Sei $L = \{(\underline{a}^n\underline{c}^n)^5 \mid n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

indirekter Beweis. Annahme: L ist regulär
dann muss für L das Pumping Lemma mit Konstante m gelten

$w = (a^m c^m)^5$

$w = xyz$ mit $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$

also besteht xy nur aus a

also gilt für $i = 0$

$w_i = xy^iz \Rightarrow$

$w_0 = xy^0z = a^{m-|y|} c^m (a^m c^m)^4 \notin L$

daher kann L nicht regulär sein

2.) Sei $\Sigma = \{\underline{a}, \underline{b}\}$. Die Sprache L ist definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

- $\varepsilon \in L$.
- Für jedes Symbol $a \in \Sigma$ gilt $a \in L$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in L$, so ist auch $awa \in L$.

a) Geben Sie die Sprache an, die durch obige induktive Definition spezifiziert ist.

(1 Punkt)

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik mit höchstens 5 Produktionen an, die L erzeugt.

(3 Punkte)

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform.

(6 Punkte)

$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*, w = w^r \}$

$G = \langle \{S\}, \{a,b\}, P, S \rangle$

$P: S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob es für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L genau eine unbeschränkte Grammatik gibt, die L erzeugt.

(6 Punkte)

$P = \{ L \mid L$ wird von genau einer unbeschränkten Grammatik erzeugt$\}$

P ist eine triviale Eigenschaft nach dem Satz von Rice, da jede Sprache von unendlich vielen Grammatiken erzeugt werden kann.

Daher ist nach dem Satz von Rice die Eigenschaft P entscheidbar

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

1 – Sei $A \leq_p B$ und $B \in \mathbf{NP}$. Dann gilt: A ist entscheidbar.
Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

2 – Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.
Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

3 – Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.
Begründung: ☐ richtig ☐ falsch

(6 Punkte)

1

Wenn $A \leq_p B$ und $B \in NP$, dann ist auch $A \in NP$ und da $NP \subset \mathcal{L}_{rec}$ folgt, dass $A \in \mathcal{L}_{rec}$

2

Jede endliche Sprache ist entscheidbar, das Komplement jeder entscheidbaren Sprache ist entscheidbar, also stimmt die Behauptung

3