4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 1 SS 2017 26. Juni 2017**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

1.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{n+m}\underline{\mathtt{c}}^m \mid m, n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

Lösung: Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{\mathtt{a}}^{m+|y|}\underline{\mathtt{b}}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

2.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^{5m}\underline{\mathtt{d}}^m \mid n, m \geq 0\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, welche L erzeugt.

(3 Punkte)

Lösung:

$(\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}, \{S \to AB, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}^2A\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon, \quad B \to \underline{\mathtt{c}}^5B\underline{\mathtt{d}} \mid \varepsilon\}, S)$

b) Ist L von einer deterministischen Turingmaschine in polynomiell beschränkter Zeit entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Ja, da L kontextfrei ist, und $\mathcal{L}_2 \subset \mathbf{P}$.

c) Existiert ein Homomorphismus h so, dass $h(L) = \{\underline{\mathtt{x}}^{6n}\underline{\mathtt{y}}^{10n} \mid n \geq 0\}$? Falls ja, geben Sie einen solchen an; falls nein, begründen Sie, warum es einen solchen nicht geben kann.
(3 Punkte)

Lösung: $h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{x}}, \underline{\mathtt{y}}\}^*$ mit

$h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{x}}^3, \quad h(\underline{\mathtt{b}}) = \underline{\mathtt{y}}^{10} \quad h(\underline{\mathtt{c}}) = h(\underline{\mathtt{d}}) = \varepsilon$

3.) Sei $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L gilt, dass $L = L^*$.

(8 Punkte)

Lösung: Unentscheidbar, Satz von Rice.

Es geht um die Eigenschaft $P = \{L \mid L = L^*\}$. Diese ist keine triviale Eigenschaft, denn es gilt z.B. $\{\underline{0}\} \notin P$ aber $\{\varepsilon\} \in P$. Daher ist dieses Problem nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Sei $B \in \mathbf{NP}$ und $A \leq_p B$. Dann ist das Komplement von A entscheidbar.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Wegen der Reduktion gilt jedenfalls $A \in \mathbf{NP}$ und alle Sprachen in $\mathbf{NP}$ sind entscheidbar, und demnach auch unter Komplement abgeschlossen.

- Ist L entscheidbar, so ist jede Teilmenge von L entscheidbar.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Die Menge $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ ist entscheidbar. Das Halteproblem L_u ist eine Teilmenge von L, selbst jedoch sicher nicht entscheidbar.

- Das Halteproblem ist $\mathbf{NP}$-vollständig.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Das Halteproblem ist unentscheidbar und kann somit nicht in $\mathbf{NP}$ liegen.

(6 Punkte)