4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 2** **SS 2013** **24.6.2013**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Jede Schülerin kennt alle Lehrer, die sie unterrichten.

(2) Anton ist ein Lehrer, der nicht alle Schülerinnen kennt, die er unterrichtet.

(6 Punkte)

Lösung:

Prädikatensymbole:

$S(x)$	...	x ist eine Schülerin (einstellig)
$L(x)$	...	x ist ein Lehrer (einstellig)
$K(x,y)$	...	x kennt y (zweistellig)
$U(x,y)$	...	x unterrichtet y (zweistellig)

Konstantensymbol:

a	...	Anton

Formeln:
(1): $\forall x \forall y((S(x) \wedge L(y) \wedge U(y,x)) \supset K(x,y))$
oder äquivalent (z.B.): $\forall x S(x) \supset (L(y) \wedge U(y,x)) \supset K(x,y))$
(2): $L(a) \wedge \neg\forall x((S(x) \wedge U(a,x)) \supset K(a,x))$
bzw. (2): $L(a) \wedge \exists x(S(x) \wedge U(a,x) \wedge \neg K(a,x))$
oder äquivalent (z.B.): $L(a) \wedge \neg\forall x(S(x) \wedge U(a,x)) \supset K(a,x))$

7.) Erklären Sie alle Fehler im folgenden ND-Ableitungsversuch:

$$\dfrac{\dfrac{Q(a,f(y)) \qquad \dfrac{\exists x Q(x,y)}{Q(b,y)}\ \exists\text{-elim}}{Q(a,f(y)) \wedge Q(b,y)}\ \wedge\text{-in}}{\exists z(Q(a,z) \wedge Q(b,z))}\ \exists\text{-in}$$

Welche Konsequenzbehauptung wird durch diesen Ableitungsversuch ausgedrückt?
Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Konsequenzbehauptung an. Verwenden Sie dabei den Gegenstandsbereich $\{0,1\}$. Beachten Sie die Schreibkonventionen! **(6 Punkte)**

Lösung:
Es gibt zwei Fehler:
(1) Die $\exists$-elim-Regel hat zwei Prämissen und erlaubt jedenfalls nicht eine existenziell quantifizierte Variable einfach durch eine Konstante zu ersetzen.
(2) Auch der letzte Inferenzschritt ($\exists$-in) ist nicht korrekt: Die Variable z darf nicht gleichzeitig zwei verschiedene Terme (y und $f(y)$) ersetzen.

Es wird behauptet, dass $\exists z(Q(a,z) \wedge Q(b,z))$ aus den Annahmen $Q(a,f(y))$ und $\exists x Q(x,y)$ logisch folgt. In Zeichen: $Q(a,f(y)), \exists x Q(x,y) \models \exists z(Q(a,z) \wedge Q(b,z))$.

Gegenbeispiel: $\langle\{0,1\},\Phi,\xi\rangle$, mit $\Phi(Q) =$"$<$", $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = 1$, $\Phi(f)(n) = 1$ (für $n \in \{0,1\}$), $\xi(y) = 1$, beliebig sonst. (Alternativ könnte man, z.B., $\Phi(Q) =$"$\neq$" setzen.)

Gemäß dieser Interpretation ergibt sich folgende Konsequenzbehauptung:
Prämisse 1: $0 < 1$
Prämisse 2: Mindestens eine Zahl aus $\{0,1\}$ ist kleiner als 1.
Konklusion: Mindestens eine Zahl aus $\{0,1\}$ ist sowohl größer als 0 und als auch größer als 1.
Da die Prämissen wahr, aber die Konklusion falsch ist, ist die Interpretation ein Gegenbeispiel.

8.) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $\exists x[\neg P(f(a), x) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)]$ an oder zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass es kein Gegenbeispiel gibt.
Markieren Sie alle γ- und δ-Formeln als solche. **(6 Punkte)**

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Formel gültig ist, also keine Gegenbeispiele hat:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x[\neg P(f(a), x) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)]$	Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \neg P(f(a), a) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : \neg P(f(a), a)$	von 2
(4)	$\mathbf{f} : \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 2
(5)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y P(y, x)$	von 4 – δ-Formel
(6)	$\mathbf{t} : \forall y P(y, b)$	von 5 – γ-Formel
(7)	$\mathbf{f} : \neg P(f(a), b) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 1
(8)	$\mathbf{t} : \neg P(f(a), b)$	von 7
(9)	$\mathbf{f} : \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 7
(10)	$\mathbf{f} : P(f(a), b)$	von 8
(11)	$\mathbf{t} : P(f(a), b)$	von 6
	$\times$	Wid. (10/11)

Beachten Sie, dass die γ-Regel hier (ganz wie in ähnlichen Beispielen in der Vorlesung und Übung) mehr als einmal auf dieselbe Formel anzuwenden ist.

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$y < x \ \{\underline{\texttt{if}}\ x < 0\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \mathbin{\underline{\leftarrow}} x \cdot x\underline{;}\ x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y + x\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y - x - 1\}\ y > x$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen. **(6 Punkte)**

Lösung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(y < x \land x < 0) \supset y > x\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y+x}{x}\right]\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x\cdot x}{y}\right]}}{(y < x \land x < 0)\ \{y \mathbin{\underline{\leftarrow}} x \cdot x\}\ y > x\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y+x}{x}\right]}}{(y < x \land x < 0)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ y \mathbin{\underline{\leftarrow}} x \cdot x\underline{;}\ x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y + x\ \underline{\texttt{end}}\}\ y > x} \qquad \text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(y < x \land \neg x < 0) \supset y > x\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y-x-1}{x}\right]}}{(y < x \land \neg x < 0)\ \{x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y - x - 1\}\ y > x}}{y < x\ \{\underline{\texttt{if}}\ x < 0\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \mathbin{\underline{\leftarrow}} x \cdot x\underline{;}\ x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y + x\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ x \mathbin{\underline{\leftarrow}} y - x - 1\}\ y > x}$$

Nachweis der Gültigkeit von (1) und (2) in $\mathbb{Z}$:

(1): Wie betrachten die rechte Seite der Implikation: $(y > x)\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y+x}{x}\right]\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x\cdot x}{y}\right] = (y > y + x)\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x\cdot x}{y}\right] = x \cdot x > x \cdot x + x$. Wegen des zweiten Konjunkts der linken Seite der Implikation ($x < 0$) bleiben nur Environments zu überprüfen, in denen der Wert $I(x)$ von x negativ ist. In allen diesen Environments gilt aber $x^2 > x^2 + x$. Somit ist die gesamte Implikation immer wahr.

(2): Die rechte Seite der Implikation lautet $(y > x)\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y-x-1}{x}\right] = y > y - x - 1$. Wegen des zweiten Konjunkts der linken Seite der Implikation ($\neg(x < 0)$) bleiben nur Environments zu überprüfen, für die $I(x) \geq 0$ gilt. In allen diesen Environments gilt aber $y > y - x - 1$. Somit ist auch Implikation (2) immer wahr.

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- In der Formel $P(a, x) \vee \exists x Q(x, f(y))$ kommen genau zwei Variablen frei vor.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: x kommt im linken Disjunkt ($P(a, x)$) und y im rechten Disjunkt $\exists x Q(x, f(y))$ frei vor; a hingegen ist gemäß den Schreibkonventionen ein Konstante.

- In einer ND-Ableitung, die die Gültigkeit einer Formel beweisen soll, dürfen offene Annahmen vorkommen.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Offene Annahmen entsprechen der linke Seite $A_1, \ldots, A_n$ einer Konsequenzbehauptung $A_1, \ldots, A_n \models B$. Für den Spezialfall der Gültigkeit muss diese linke Seite leer sein ($n = 0$).

- Wenn in einem Kalkül für die klassische Aussagenlogik alle Formeln ableitbar sind, dann ist der Kalkül nicht korrekt.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Nicht alle aussagenlogischen Formeln sind gültig. Daher kann ein Kalkül, in dem alle Formeln ableitbar sind, nicht korrekt sein.

(6 Punkte)

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 2 SS 2013 24.6.2013			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe B

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Egon ist ein Bauer, aber er melkt nicht alle Kühe, die er besitzt.

(2) Alle Kühe werden von einem Bauer, der sie besitzt, gemolken.

(6 Punkte)

Lösung:

Prädikatensymbole:
$B(x)$ ... x ist ein Bauer
$K(x)$ ... x ist eine Kuh
$M(x,y)$ ... x melkt y
$S(x,y)$ ... x besitzt y
Konstantensymbol:
e ... Egon

Formeln:
(1): $B(e) \land \neg\forall x((K(x) \land S(a,x)) \supset M(a,x))$
bzw. (1): $B(e) \land \exists x(K(x) \land S(a,x) \land \neg M(a,x))$
(2): $\forall x \exists y(K(x) \supset (B(y) \land S(y,x) \land M(y,x))$
bzw. (2): $\forall x(K(x) \supset \exists y(B(y) \land S(y,x) \land M(y,x))$

7.) Erklären Sie alle Fehler im folgenden ND-Ableitungsversuch:

$$\dfrac{\dfrac{[Q(a,f(y))]^1 \quad \dfrac{\forall x Q(x,y)}{Q(x,y)}\ \forall\text{-elim}}{Q(a,f(y)) \supset Q(x,y)}\ \supset\text{-in-}[1]}{\forall z(Q(a,f(z)) \supset Q(x,z))}\ \forall\text{-in}$$

Welche Konsequenzbehauptung wird durch diesen Ableitungsversuch ausgedrückt?
Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Konsequenzbehauptung an. Verwenden Sie dabei den Gegenstandsbereich $\{2,3\}$. Beachten Sie die Schreibkonventionen! **(6 Punkte)**

Lösung: (analog zu Gruppe A)

8.) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $\exists z[\exists x \forall y P(y,x) \supset P(f(a),z)]$ an oder zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass es kein Gegenbeispiel gibt.
Markieren Sie alle γ- und δ-Formeln als solche. **(6 Punkte)**

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Formel gültig ist, also keine Gegenbeispiele hat:

(1)	$\mathbf{f} : \exists z[\exists x \forall y P(y,x) \supset P(f(a),z)]$	Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \exists x \forall y P(y,x) \supset P(f(a),a)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y P(y,x)$	von 2 – δ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : P(f(a),a)$	von 2
(5)	$\mathbf{t} : \forall y P(y,b)$	von 3 – γ-Formel
(6)	$\mathbf{f} : \exists x \forall y P(y,x) \supset P(f(a),b)$	von 1
(7)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y P(y,x)$	von 6
(8)	$\mathbf{f} : P(f(a),b)$	von 6
(9)	$\mathbf{f} : P(f(a),b)$	von 5
	$\times$	Wid. (8/9)

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$x<z\ \{\underline{\texttt{if}}\ z\ge 0\ \underline{\texttt{then}}\ z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x-z-2\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}\ x \mathrel{\underline{\leftarrow}} z\cdot z\underline{;}}\ z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x+z\ \underline{\texttt{end}}\}\ x>z$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen. **(6 Punkte)**

Lösung:

$$
\text{(H3)}\ \dfrac{
\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(x<z\land z\ge 0)\supset x>z\left[\begin{smallmatrix}x-z-2\\z\end{smallmatrix}\right]}}{(x<z\land z\ge 0)\ \{z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x-z-2\}\ x>z}
\qquad
\text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(x<z\land\neg z\ge 0)\supset x>z\left[\begin{smallmatrix}x+z\\z\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}z\cdot z\\x\end{smallmatrix}\right]}}{(x<z\land\neg z\ge 0)\ \{x \mathrel{\underline{\leftarrow}} z\cdot z\}\ x>z\left[\begin{smallmatrix}x+z\\z\end{smallmatrix}\right]}}{(x<z\land\neg z\ge 0)\ \{\underline{\texttt{begin}\ x \mathrel{\underline{\leftarrow}} z\cdot z\underline{;}}\ z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x+z\ \underline{\texttt{end}}\}\ x>z}
}{x<z\ \{\underline{\texttt{if}}\ z\ge 0\ \underline{\texttt{then}}\ z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x-z-2\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}\ x \mathrel{\underline{\leftarrow}} z\cdot z\underline{;}}\ z \mathrel{\underline{\leftarrow}} x+z\ \underline{\texttt{end}}\}\ x>z}
$$

(Rest der Lösung analog zu Gruppe A)

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Manche erfüllbaren prädikatenlogischen Formeln haben keine Modelle mit endlichem Gegenstandsbereich.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Es gibt erfüllbare Formeln mit nur unendlichen Modellen. Siehe z.B. Folie 341.

- Ein ND-Beweis kann dieselbe Formel gleichzeitig als geschlossene, sowie auch als offene Annahme enthalten.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Die selbe Formel könnte an mehreren Stellen in einem ND-Beweis als Annahme vorkommen. Es wird nirgends verlangt, dass *alle* solchen Annahmen gleichzeitig geschlossen werden müssen.

- Wenn in einem Kalkül für die Prädikatenlogik nur endlich viele Formeln ableitbar sind, so ist dieser Kalkül sicher nicht vollständig, könnte aber dennoch korrekt sein.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Es gibt unendlich viele gültige Formeln. Daher kann ein solcher Kalkül nicht vollständig sein. Es können aber alle ableitbaren Formeln gültig sein. In diesem Fall ist der Kalkül korrekt.

(6 Punkte)

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 2** **SS 2013** **24.6.2013**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe C

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Alle Hunden hassen zumindest eine Katze, die im selben Haus wohnt.

(2) Fritz ist eine Katze, die nicht alle Hunde hasst, die im selben Haus wohnen.

(6 Punkte)

Lösung:

Prädikatensymbole:

$H(x)$ ... x ist ein Hund
$K(x)$ ... x ist eine Katze
$S(x,y)$ ... x hasst y
$W(x,y)$ ... x wohnt im selben Haus wie y

Konstantensymbol:

f ... Fritz

Formeln:
(1): $\forall x \exists y(H(x) \supset (K(y) \land S(x,y) \land W(y,x))$
bzw. (2): $\forall x(H(x) \supset \exists y(K(y) \land S(x,y) \land W(y,x))$
(1): $K(f) \land \neg\forall x((H(x) \land W(x,f)) \supset H(f,x))$
bzw. (1): $K(f) \land \exists x(H(x) \land W(x,f) \land \neg H(f,x))$

7.) Erklären Sie alle Fehler im folgenden ND-Ableitungsversuch:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x P(x,y)}{P(b,y)}\ \exists\text{-elim} \qquad P(c,f(y))}{P(b,y) \land P(c,f(y))}\ \land\text{-in}}{\exists z(P(b,z) \land P(c,z))}\ \exists\text{-in}$$

Welche Konsequenzbehauptung wird durch diesen Ableitungsversuch ausgedrückt?
Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Konsequenzbehauptung an. Verwenden Sie dabei den Gegenstandsbereich $\{1,2\}$. Beachten Sie die Schreibkonventionen! **(6 Punkte)**

Lösung:
Es gibt zwei Fehler:
(1) Die $\exists$-elim-Regel hat zwei Prämissen und erlaubt jedenfalls nicht eine existenziell quantifizierte Variable einfach durch eine Konstante zu ersetzen.
(2) Auch der letzte Inferenzschritt ($\exists$-in) ist nicht korrekt: Die Variable z darf nicht gleichzeitig zwei verschiedene Terme (y und $f(y)$) ersetzen.

Es wird $P(c,f(y)), \exists x P(x,y) \models \exists z(P(b,z) \land P(c,z))$ behauptet.

Gegenbeispiel: $\langle\{1,2\},\Phi,\xi\rangle$, mit $\Phi(P) =$"$<$", $\Phi(c)=1$, $\Phi(b)=2$, $\Phi(f)(n)=2$ (für $n \in \{1,2\}$), $\xi(y)=2$, beliebig sonst. (Alternativ könnte man, z.B., $\Phi(P) =$"$\neq$" setzen.)

Gemäß dieser Interpretation ergibt sich folgende Konsequenzbehauptung:
Prämisse 1: Mindestens eine Zahl aus $\{1,2\}$ ist kleiner als 2.
Prämisse 2: $1 < 2$
Konklusion: Mindestens eine Zahl aus $\{1,2\}$ ist sowohl größer als 1 und als auch größer als 2.
Da die Prämissen wahr, aber die Konklusion falsch ist, ist die Interpretation ein Gegenbeispiel.

8.) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $\exists x[P(f(a),x) \vee \forall x \exists y \neg P(y,x)]$ an oder zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass es kein Gegenbeispiel gibt.
Markieren Sie alle γ- und δ-Formeln als solche. **(6 Punkte)**

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Formel gültig ist, also keine Gegenbeispiele hat:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x[P(f(a),x) \vee \forall x \exists y \neg P(y,x)]$	Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : P(f(a),a) \vee \forall x \exists y \neg P(y,x)$	von 1
(3)	$\mathbf{f} : P(f(a),a)$	von 2
(4)	$\mathbf{f} : \forall x \exists y \neg P(y,x)$	von 2 – δ-Formel
(5)	$\mathbf{f} : \exists y \neg P(y,b)$	von 4 – γ-Formel
(6)	$\mathbf{f} : P(f(a),b) \vee \forall x \exists y \neg P(y,x)$	von 1
(7)	$\mathbf{f} : P(f(a),b)$	von 6
(8)	$\mathbf{f} : \forall x \exists y \neg P(y,x)$	von 6
(9)	$\mathbf{f} : \neg P(f(a),b)$	von5
(10)	$\mathbf{t} : P(f(a),b)$	von 9
	$\times$	Wid. (7/10)

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$x<y\ \{\underline{\texttt{if}}\ y<0\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ x \underline{\leftarrow} y \cdot y;\ y \underline{\leftarrow} x+y\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ y \underline{\leftarrow} x-y-1\}\ x>y$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen. **(6 Punkte)**

Lösung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(x<y \wedge y<0) \supset x>y\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x+y}{y}\right]\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y\cdot y}{x}\right]}}{(x<y \wedge y<0)\ \{x \underline{\leftarrow} y \cdot y\}\ x>y\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x+y}{y}\right]}}{(x<y \wedge y<0)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ x \underline{\leftarrow} y \cdot y;\ y \underline{\leftarrow} x+y\ \underline{\texttt{end}}\}\ x>y} \qquad \text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(x<y \wedge \neg y<0) \supset x>y\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x-y-1}{y}\right]}}{(x<y \wedge \neg y<0)\ \{y \underline{\leftarrow} x-y-1\}\ x>y}}{x<y\ \{\underline{\texttt{if}}\ y<0\ \underline{\texttt{then}}\ \underline{\texttt{begin}}\ x \underline{\leftarrow} y \cdot y;\ y \underline{\leftarrow} x+y\ \underline{\texttt{end}}\ \underline{\texttt{else}}\ y \underline{\leftarrow} x-y-1\}\ x>y}$$

(Rest der Lösung analog zu Gruppe A)

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Alle gültigen prädikatenlogischen Formeln haben auch Modelle mit unendlichem Gegenstandsbereich.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Wenn eine Formel F gültig ist, so sind alle Interpretationen ein Modell von F, also insbesondere auch Modelle mit unendlichem Gegenstandsbereich.

- Die partielle Korrektheit des Hoare-Tripels $A\ \{\alpha\}\ B$ besagt, dass jede Umgebung A erfüllt und außerdem, sofern das Programm α terminiert, jede Umgebung auch B erfüllt.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Die partielle Korrektheit von $A\ \{\alpha\}\ B$ besagt, dass für jede Umgebung I folgendes gilt: Wenn I die Vorbedingung A erfüllt und $\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha) = I'$ gilt (α führt, ausgeführt in I zur Umgebung I'), dann ist die Nachbedingung B in I' erfüllt.

- Wenn ein Term geschlossen ist, so bleibt er bei der Anwendung von beliebigen Variablensubstitutionen unverändert.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Man nennt einen Term geschlossen, wenn er keine Variablen enthält. Daher kann ein solcher Term durch eine Variablensubstitution nicht verändert werden.

(6 Punkte)

4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 2 SS 2013 24.6.2013**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe D

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Susi ist Polizistin, aber sie verfolgt nicht jeden Einbrecher, den sie kennt.

(2) Jeder Einbrecher wird von einer Polizistin verfolgt, die ihn kennt.

(6 Punkte)

Lösung:

Prädikatensymbole:

$P(x)$ ... x ist eine Polizistin

$E(x)$ ... x ist ein Einbrecher

$V(x,y)$ ... x verfolgt y

$K(x,y)$ ... x kennt y

Konstantensymbol:

s ... Susi

Formeln:

(1): $P(s) \land \neg\forall x((E(x) \land K(s,x)) \supset V(s,x))$

bzw. (1): $P(s) \land \forall x(E(x) \land K(s,x) \land \neg V(s,x))$

(2): $\forall x \exists y(E(x) \supset (P(y) \land K(y,x) \land V(y,x))$

bzw. (2): $\forall x(E(x) \supset \exists y(P(y) \land K(y,x) \land V(y,x))$

7.) Erklären Sie alle Fehler im folgenden ND-Ableitungsversuch:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x Q(x,y)}{Q(x,y)}\ \forall\text{-elim} \qquad [Q(a,f(y))]^1}{Q(a,f(y)) \supset Q(x,y)}\ \supset\text{-in-}[1]}{\forall z(Q(a,f(z)) \supset Q(x,z))}\ \forall\text{-in}$$

Welche Konsequenzbehauptung wird durch diesen Ableitungsversuch ausgedrückt?
Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Konsequenzbehauptung an. Verwenden Sie dabei den Gegenstandsbereich $\{2, 3\}$. Beachten Sie die Schreibkonventionen! **(6 Punkte)**

Lösung: (analog zu Gruppe A)

8.) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $\neg\forall x[\neg P(f(a), x) \land \exists x \forall y P(y,x)]$ an oder zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass es kein Gegenbeispiel gibt.
Markieren Sie alle γ- und δ-Formeln als solche. **(6 Punkte)**

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Formel gültig ist, also keine Gegenbeispiele hat:

(1)	$\mathbf{f}: \neg\forall x[\neg P(f(a),x) \wedge \exists x \forall y P(y,x)]$	Annahme
(2)	$\mathbf{t}: \forall x[\neg P(f(a),x) \wedge \exists x \forall y P(y,x)]$	von 1 – γ-Formel
(3)	$\mathbf{t}: \neg P(f(a),a) \wedge \exists x \forall y P(y,x)]$	von 2
(4)	$\mathbf{t}: \neg P(f(a),a)$	von 3
(5)	$\mathbf{t}: \exists x \forall y P(y,x)$	von 3 – δ-Formel
(6)	$\mathbf{t}: \forall y P(y,b)$	von 5 – γ-Formel
(7)	$\mathbf{f}: \neg P(f(a),b) \wedge \exists x \forall y P(y,x)$	von 2
(8)	$\mathbf{t}: \neg P(f(a),b)$	von 7
(9)	$\mathbf{t}: \exists x \forall y P(y,x)$	von 7
(10)	$\mathbf{f}: P(f(a),b)$	von 8
(11)	$\mathbf{t}: P(f(a),b)$	von 6
	$\times$	Wid. (10/11)

Beachten Sie, dass die γ-Regel hier (ganz wie in ähnlichen Beispielen in der Vorlesung und Übung) mehr als einmal auf dieselbe Formel anzuwenden ist.

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$y < x \ \{\underline{\texttt{if}}\ x \geq 0\ \underline{\texttt{then}}\ x \underline{\leftarrow} y - x - 2\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} x \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y + x\ \underline{\texttt{end}}\}\ y > x$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen. **(6 Punkte)**

Lösung:

$$\text{(H3)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(1)}{(y < x \wedge x \geq 0) \supset y > x\left[{}^{y-x-2}_{\ \ x}\right]}}{(y < x \wedge x \geq 0)\ \{x \underline{\leftarrow} y - x - 2\}\ y > x} \qquad \text{(T2)}\ \dfrac{\text{(H1)}\ \dfrac{\overset{(2)}{(y < x \wedge \neg x \geq 0) \supset y > x\left[{}^{y+x}_{\ x}\right]\left[{}^{x\cdot x}_{\ y}\right]}}{(y < x \wedge \neg x \geq 0)\ \{y \underline{\leftarrow} x \cdot x\}\ y > x\left[{}^{y+x}_{\ x}\right]}}{(y < x \wedge \neg x \geq 0)\ \{\underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} x \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y + x\ \underline{\texttt{end}}\}\ y > x}}{y < x\ \{\underline{\texttt{if}}\ x \geq 0\ \underline{\texttt{then}}\ x \underline{\leftarrow} y - x - 2\ \underline{\texttt{else}}\ \underline{\texttt{begin}}\ y \underline{\leftarrow} x \cdot x \underline{;}\ x \underline{\leftarrow} y + x\ \underline{\texttt{end}}\}\ y > x}$$

(Rest der Lösung analog zu Gruppe A)

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Wenn ein Programm bezüglich einer Vorbedingung P und Nachbedingung Q partiell korrekt ist, so ist es auch bezüglich einer Vorbedingung P' partiell korrekt, für die $P \supset P'$ gilt.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Gegenbeispiel: $x = 0\{x \leftarrow x+1\}x = 1$ ist partiell korrekt. Ersetzt man aber die Vorbedingung $P = (x = 0)$ durch $P' = \top$, so erhält man ein inkorrektes Hoare-Tripel.

- In einer ND-Ableitung, die die Gültigkeit einer Formel beweisen soll, dürfen offene Annahmen vorkommen.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Offene Annahmen entsprechen der linke Seite einer Konsequenzbehauptung. Für den Spezialfall der Gültigkeit muss diese linke Seite (Annahmen bzw. Prämissen) leer sein.

- Wenn es ein geschlossenes Tableau mit $\mathbf{f} : G$ als Wurzel gibt, dann gibt es eine ND-Ableitung von G, in der alle Annahmen geschlossen sind.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Wegen der Korrektheit des Tableau-Kalküls zeigt ein geschlossenes Tableau mit $\mathbf{f} : G$ an der Wurzel, dass G gültig ist. Da der Kalkül ND vollständig ist, existiert daher auch eine ND-Beweis von G, also eine Ableitung von G ohne offene Annahmen.

(6 Punkte)