	4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 1 SS 2016 27. Juni 2016						
Kennzahl	Matrikelnummer	$\overset{ ext{Familienname}}{ ext{L\"{o}sung}}$	Vorname	Gruppe			

1.) Sei $L = \{\underline{\mathbf{a}}^n \underline{\mathbf{1}}^k \underline{\mathbf{b}}^{2n} \mid k, n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(6 Punkte)

Lösung: Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w=\mathtt{a}^m\mathtt{b}^{2m}.$$

Dann gilt $w \in L$ und |w| = 3m > m.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \le m$ und |y| > 0. Nachdem $|xy| \le m$ und $w = \underline{\mathbf{a}}^m \underline{\mathbf{b}}^{2m}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathbf{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz\in L$ für alle $i\geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. i=2 wählen, müsste auch $xy^2z=\underline{\mathtt{a}}^{m+|y|}\underline{\mathtt{b}}^{2m}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

- **2.)** Sei $L = \{\underline{a}^{2n}(\underline{b}\underline{c})^n \mid n \ge 0\}.$
 - a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.

 $(D_n$ bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschiedenen Klammerpaaren.)

(4 Punkte)

Lösung:

$$L$$
 ist kontextfrei, da $L = h(D_1 \cap R)$, wobei $R = \{\underline{(}\}^*\{\underline{)}\}^*$ und $h: \{(,)\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}},\underline{\mathbf{c}}\}^*$ mit $h(() = \underline{\mathbf{a}}^2, \quad h()) = \underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{c}}$

b) Ist L von einer deterministischen Turingmaschine in polynomiell beschränkter Zeit entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung: Ja, da L kontextfrei ist, und $\mathcal{L}_2 \subset \mathbf{P}$.

3.) Sei $G = (\{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \to \mathtt{bac}S \mid \mathtt{cab}\} \cup \{xy \to yx \mid x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}\}.$$

a) Ist G regulär, kontextfrei, monoton, kontextsensitiv und/oder unbeschränkt?

	$_{ m Ja}$	Nein
regulär		
kontextfrei		
monoton		
kontextsensitiv		
unbeschränkt		

(2 Punkte)

		-	37.			
		Ja	Neir	1		
	regulär					
	kontextfrei					
	monoton	\boxtimes				
	kontextsensit	iv 🗆	\boxtimes			
	unbeschränkt					
b) Geben Sie	e die von G erzeugte Sprache I	$\mathcal{L}(G)$ an.				
					(2	Punkte)
Lösung: $L(G$	$G(x) = \{w \in \{\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}\}^+ \mid w _{\underline{\mathbf{a}}} = w _{\underline{\mathbf{a}}}$	$ _{\underline{\mathtt{b}}} = w _{\underline{\mathtt{c}}}$	}			
, , , ,	regulär, kontextfrei, kontextser	nsitiv, en	tsche	idbar und/	oder rekursi	v aufzähl-
bar?						
			Ja	Nein		
	regulär					
	kontextfrei					
	kontextsensi	tiv				
	entscheidbar					
	rekursiv aufz	zählbar				
					(2	Punkte)
					(2	i unktej
Lösung:						
6						
		Ja	a N	ein		
	regulär]	\boxtimes		
	regulär kontextfrei			⊠		
]			
	kontextfrei]			
	kontextfrei kontextsensitiv]			
	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar]			
	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar	□ ⊠ ⊠ llbar ⊠]]]		Geben Sie fi	ir jede der
folgenden Auss • jedenfalls	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar rekursiv aufzährobei A und B in \mathbf{NP} sein könr	□ k k k llbar k nen, aber n welche	nicht	⊠ □ □ t müssen). leme es sich	n bei A und .	B handelt,
• jedenfalls und auch klassen) • vielleicht	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar rekursiv aufzäh robei A und B in NP sein könr sagen an, ob sie	albar men, aber n welche wiesenen	nicht Prob. Bezi	\square \square \square \square the müssen). The definition of the muse is such that B handed and B handed B	h bei A und wischen Konelt, und/oder	B handelt, nplexitäts- abhängig
 folgenden Auss jedenfalls und auch klassen) vielleicht von der L keinesfall 	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar rekursiv aufzäh zobei A und B in NP sein könnsagen an, ob sie zutrifft (unabhängig davon, unabhängig von (noch) unber zutrifft (je nach dem worum es zösung bisher unbewiesener Bez zutrifft (unabhängig davon, unabhängig von (noch) unber zutrifft (unabhängig davon, unabhängig von (noch) unber zutrifft (unabhängig von (noch) unabhängig von (noch) unabhängig von (noch) unabhängig von (noch) unabhängig von (noch)	allbar men, aber n welche wiesenen s sich bei ziehunger nm welch	nicht Probi Bezi A ur n zwis	\boxtimes \square \square \square the müssen). The müssen is sichen ungen zweichen Kompobleme es sichen könnt sich kö	n bei A und wischen Konelt, und/oder plexitätsklassich bei A und	B handelt, nplexitäts- abhängig sen) nd B han-
 folgenden Auss jedenfalls und auch klassen) vielleicht von der L keinesfall delt, und 	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar rekursiv aufzäh robei A und B in NP sein könr sagen an, ob sie zutrifft (unabhängig davon, un unabhängig von (noch) unber zutrifft (je nach dem worum es zösung bisher unbewiesener Bez s zutrifft (unabhängig davon, un auch unabhängig von (noch) un en)	allbar men, aber n welche wiesenen s sich bei ziehunger nm welch	nicht Probi Bezi A ur n zwis	\boxtimes \square \square \square the müssen). The müssen is sichen ungen zweichen Kompobleme es sichen könnt sich kö	n bei A und wischen Konelt, und/oder plexitätsklassich bei A und	B handelt, nplexitäts- abhängig sen) nd B han-
 jedenfalls und auch klassen) vielleicht von der L keinesfall delt, und tätsklasse Begründen Sie	kontextfrei kontextsensitiv entscheidbar rekursiv aufzäh robei A und B in NP sein könr sagen an, ob sie zutrifft (unabhängig davon, un unabhängig von (noch) unber zutrifft (je nach dem worum es zösung bisher unbewiesener Bez s zutrifft (unabhängig davon, un auch unabhängig von (noch) un en) e Ihre Antwort. NP-vollständig ist, so ist auch	albar & nen, aber nen welche wiesenen sich bei ziehunger um welch unbewiese	nicht Prob. Bezi A ur n zwis ne Pro	⊠ □ □ □ □ t müssen). leme es sichehungen zw nd B hande schen Kom obleme es s Beziehunge	n bei A und wischen Konelt, und/oder plexitätsklassich bei A und	B handelt, nplexitäts- abhängig sen) nd B han- Komplexi-

•	Wenn A NP -vollständig ist, so ist auch B NP -v Begründung:	rollständig. □ jedenfalls □ keinesfalls ⊠ vielleicht
	Lösung: Damit diese Aussage zutrifft, muss B in schwieriger sein, sogar nicht rekursiv aufzählbar.	<u> </u>
•	B ist in ${f P}$ und A ist ${f NP}$ -vollständig. Begründung:	\Box jedenfalls \Box keinesfalls \boxtimes vielleicht
	Lösung: Es wäre möglich dass $P = NP$.	
•	B ist in \mathbf{P} , und das Komplement von A ist nicht Begründung:	in \mathbf{P} . \Box jedenfalls \boxtimes keinesfalls \Box vielleicht

 $\textbf{L\"{o}sung:}~\mathbf{P}$ ist unter Komplement abgeschlossen.

(6 Punkte)

5.)	Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und be Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründe bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten od fehlende Begründungen.)	dung, einen Punkt
	• Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist immer rekursiv auf	zählbar.
	Begründung:	\boxtimes richtig \square falsch
	Lösung: Kontextfreie Sprachen sind eine echte Teilmenge der rek deren Komplement rekursiv aufzählbar ist.	zursiven Sprachen,
	\bullet Die Eigenschaft $P = \{\}$ ist nach dem Satz von Rice unentscheidbar.	
	Begründung:	\square richtig \boxtimes falsch
	Lösung: $P = \{\}$ ist trivial und damit, nach dem Satz von Rice ents	scheidbar.
	\bullet Ist L regulär, so ist jede Teilmenge von L regulär.	
	Begründung:	\square richtig \boxtimes falsch
	Lösung: Gegenbeispiel: $\{\underline{\mathbf{a}}^n\underline{\mathbf{b}}^n \mid n \geq 0\} \subset \{\underline{\mathbf{a}},\underline{\mathbf{b}}\}^*$	