Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (2018W)
Lösungen

Aufgabe 3.1

Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.
Hinweis: Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $2x = y^2 - 3z$.

b) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x ist keine Primzahl.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $|x| < 6y$.

d) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x ist eine Enkelin von Abdul.

e) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x hat einen Sohn.

f) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Die Tiefe von x ist mindestens 3.
Hinweis: Die Tiefe eines Stacks ist die Anzahl der darin vorkommenden Stackelemente ($\underline{\mathtt{0}}$ oder $\underline{\mathtt{1}}$).

g) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: x hat die selbe Tiefe wie y.

Lösung 3.1

a) $+(+(\mathtt{x},\mathtt{x}),+(\mathtt{z},+(\mathtt{z},\mathtt{z})))=*(\mathtt{y},\mathtt{y})$
Beachten Sie, dass 2 und 3 in $\mathbb{N}$ nicht als Konstantensymbole zur Verfügung stehen. Außerdem kann '$-$' nicht durch '$\dot{-}$' ersetzt werden, sondern muss indirekt, über '$+$' ausgedrückt werden.

b) Um Prädikate wie 'x ist (k)eine Primzahl' auszudrücken benötigt man Quantoren. Man kann zwar eine PL-Formel, aber keinen Booleschen Ausdruck für solche Prädikate finden.

c) $(\leq(\mathtt{x},*(\mathtt{6},\mathtt{y}))\wedge\leq(*(\mathtt{-1},\mathtt{x}),*(\mathtt{6},\mathtt{y})))$. Eine andere Lösung ist z.B. folgender Boolescher Ausdruck:
$(\leq(\mathtt{0},\mathtt{y})\wedge((\neg\leq(\mathtt{x},\mathtt{0})\wedge\leq(\mathtt{x},*(\mathtt{6},\mathtt{y})))\vee(\leq(\mathtt{x},\mathtt{0})\wedge\leq(*(\mathtt{-1},\mathtt{x}),*(\mathtt{6},\mathtt{y})))))$.

d) $((\mathit{Abdul} = \mathit{Vater}(\mathit{Mutter}(\mathtt{x}))\vee\mathit{Abdul} = \mathit{Vater}(\mathit{Vater}(\mathtt{x})))\wedge\mathit{weiblich}(\mathtt{x}))$

e) Dies lässt sich nicht als Boolescher Ausdruck formulieren. Man kann zwar die 2-stellige Relation 'x ist der Vater von y (und y ist männlich)' ausdrücken. Aber um 'x ist ein Vater (eines Sohns)' auszudrücken benötigt man einen Existenzquantor.

f) $\neg\text{istleer?}(\text{pop}(\text{pop}(x)))$

g) Dies lässt sich nicht als Boolescher Ausdruck formulieren. Für jede gegebene Tiefe k lässt sich 'Tiefe$(x) = k$' und daher auch 'Tiefe$(x) = k\wedge$ Tiefe$(y) = k$' ausdrücken. Aber 'x hat die selbe Tiefe wie y' ist äquivalent zu einer *unendlichen Disjunktion* der Form $\bigvee_{k\in\omega}(\text{Tiefe}(x) = k \wedge \text{Tiefe}(y) = k)$. Derartige Bedingungen lassen sich weder mit einem Booleschen Ausdruck, noch mit einer PL-Formel über der Signatur von $\mathbb{S}$ ausdrücken.

Aufgabe 3.2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über Terme $t \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$. Im positiven Fall ist ein induktiver Beweis zu erbringen. ($|t|_c$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Symbols c in t.)

a) $|t|_{\underline{(}} + 1 \geq |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}}$.

b) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \leq |t|_{\underline{1}}$, falls t keine Variablen enthält.

c) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{1}}$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} + |t|_{\underline{*}} = 0$ und $I(v) > 0$ für alle Variablen v.

d) $|t|_{\underline{(}} + |t|_{\underline{)}} + |t|_{\underline{,}} \geq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) - 1$ falls $I(v) = 0$ für alle Variablen v.

Lösung 3.2

a) Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t:

Induktionsanfang. Wir unterscheiden 3 Fälle:

(1) $t \in IVS$: $|t|_{\underline{(}} = |t|_{\underline{0}} = |t|_{\underline{1}} = 0$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}} = 0 + 0 = 0$.

(2) $t = \underline{0}$: $|t|_{\underline{(}} = 0$, $|t|_{\underline{0}} = 1$, $|t|_{\underline{1}} = 0$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}} = 1 + 0 = 1$.

(3) $t = \underline{1}$: $|t|_{\underline{(}} = 0$, $|t|_{\underline{0}} = 0$, $|t|_{\underline{1}} = 1$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}} = 0 + 1 = 1$.

Induktionsschritt. $t = \circ\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$, wobei $\circ \in \{\underline{+}, \underline{\dot{-}}, \underline{*}\}$.
Die *Induktionsannahme* besagt: $|t_i|_{\underline{(}} + 1 \geq |t_i|_{\underline{0}} + |t_i|_{\underline{1}}$ für $i \in \{1, 2\}$.
Wir erhalten $|t|_{\underline{(}} + 1 = (1 + |t_1|_{\underline{(}} + |t_2|_{\underline{(}}) + 1 \geq^{IH} |t_1|_{\underline{0}} + |t_1|_{\underline{1}} + |t_2|_{\underline{0}} + |t_2|_{\underline{1}} = |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}}$.
(^{IH} bezeichnet die Stelle an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

b) Diese Aussage gilt nicht. Beispielsweise gilt für $t = \underline{*}\underline{(}\underline{*}\underline{(}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{1}\underline{)}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{1}\underline{)}\underline{)}\underline{,}\underline{+}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{1}\underline{)}\underline{)}$ in jeder Umgebung I: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = ((1 + 1) \cdot (1 + 1)) \cdot (1 + 1) = (2 \cdot 2) \cdot 2 = 8$, aber $|t|_{\underline{1}} = 6$.

c) Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t:

Induktionsanfang. Wir unterscheiden 3 Fälle:

(1) $t \in IVS$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = I(t) > 0$, aber $|t|_{\underline{1}} = 0$.

(2) $t = \underline{0}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = 0$ und $|t|_{\underline{1}} = 0$; daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{1}}$.

(3) $t = \underline{1}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = 1$ und $|t|_{\underline{1}} = 1$; daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{1}}$.

Induktionsschritt. Wegen $|t|_{\underline{\dot{-}}} + |t|_{\underline{*}} = 0$ ist t für $|t| > 1$ von der Form $\underline{+}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$.
Die *Induktionsannahme* besagt: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_i) \geq |t_i|_{\underline{1}}$ für $i \in \{1, 2\}$.
Wir erhalten $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_2) \geq^{IH} |t_1|_{\underline{1}} + |t_2|_{\underline{1}} = |t|_{\underline{1}}$.
(^{IH} bezeichnet die Stelle an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

d) Folgende Beobachtung zeigt, dass die Aussage falsch sein muss: Wegen der Multiplikation kann der Wert $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, s)$ eines Terms s exponentiell wachsen, auch wenn keine Variablen, sondern nur Konstantensymbole (insbesondere $\underline{1}$), in s vorkommen. Dieses Wachstum ist relativ zur Länge von s zu verstehen. Daher kann die Summe der Vorkommen bestimmter Zeichen in s natürlich höchstens linear wachsen und ist daher im Allgemeinen kleiner als der Wert von s.

Für ein konkretes Gegenbeispiel sei t der Term aus der Lösung zu b). Dann gilt für $s = \underline{*}\underline{(}t\underline{,}t\underline{)}$ $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, s) = 8 \cdot 8 = 64$ in jeder Umgebung I. Andererseits gilt $|s|_{\underline{(}} + |s|_{\underline{)}} + |s|_{\underline{,}} = 3 + 2 \cdot 15 = 33$.

Aufgabe 3.3

a) Geben Sie ein $AL(\mathbb{S})$-Programm α an, dass die Umkehrung eines Stacks berechnet. Genauer: Wenn vor Programmablauf $I(\underline{x}) = s$ gilt, dann soll nach der Termination von α, also in der Umgebung $J = \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha)$, $J(\underline{y}) = s^r$ gelten. (s^r bezeichnet das Spiegelbild des Binärstrings s.)

b) Weisen Sie (analog zu Folie 369) nach, dass $\alpha \in AL(\mathbb{S})$.

c) Werten Sie α schrittweise in der Umgebung $I(\underline{x}) = I(\underline{y}) = \underline{0}\,\underline{1}$ aus.

Lösung 3.3

a)

```
α = begin
      y ← ε;
      while x ≠ ε do
          begin
          if ist1?(x)  then  y ← push1(y)
                       else  y ← push0(y);
          x ← pop(x)
          end
    end
```

Beachten Sie: Die kleinsten (atomaren) Programme sind Zuweisungen. Daher kann, z.B., $\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}})$ kein korrektes atomares Programm sein, sondern nur $\underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}})$.

b) Wir verwenden folgende Abkürzungen:
$\beta = \underline{\text{if}}\ \underline{\text{ist1?}}(\underline{\text{x}})\ \underline{\text{then}}\ \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}})\ \underline{\text{else}}\ \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push0}}(\underline{\text{y}})$
$\gamma = \underline{\text{while}}\ \underline{\text{x}}\,\underline{\neq}\,\varepsilon\ \underline{\text{do}}\ \underline{\text{begin}}\ \beta\underline{;}\ \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})\ \underline{\text{end}}$
Entlang der induktiven Definition von $AL(\mathcal{D})$-Programmen ergibt sich folgende 'bottom-up' Syntaxanalyse (= Nachweis von $\alpha \in AL(\mathbb{S})$).

(1) $\underline{\text{y}} \in IVS$, $\underline{\varepsilon} \in KS(\mathbb{S}) \subseteq \mathcal{T}(\mathbb{S}) \stackrel{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon} \in AL(\mathbb{S})$.

(2) $\underline{\text{y}} \in IVS$, $\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}}) \in \mathcal{T}(\mathbb{S}) \stackrel{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}}) \in AL(\mathbb{S})$.

(3) $\underline{\text{y}} \in IVS$, $\underline{\text{push0}}(\underline{\text{y}}) \in \mathcal{T}(\mathbb{S}) \stackrel{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push0}}(\underline{\text{y}}) \in AL(\mathbb{S})$.

(4) $\underline{\text{x}} \in IVS$, $\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}}) \in \mathcal{T}(\mathbb{S}) \stackrel{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}}) \in AL(\mathbb{S})$.

(5) Wegen (2), (3), sowie $\underline{\text{ist1?}}(\underline{\text{x}}) \in \mathcal{BA}(\mathbb{S}) \stackrel{AL3}{\Longrightarrow} \beta \in AL(\mathbb{S})$.

(6) Wegen (5) und (4) $\stackrel{AL2}{\Longrightarrow} \underline{\text{begin}}\ \beta\underline{;}\ \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})\ \underline{\text{end}} \in AL(\mathbb{S})$.

(7) Wegen (6) und $\underline{\text{x}}\,\underline{\neq}\,\underline{\varepsilon}$ (Kurzform von $\underline{\neg}\underline{\text{x}}\,\underline{=}\,\underline{\varepsilon}$) $\in \mathcal{BA}(\mathbb{S}) \stackrel{AL4}{\Longrightarrow} \gamma \in AL(\mathbb{S})$.

(8) Wegen (1) und (7) $\stackrel{AL2}{\Longrightarrow} \alpha \in AL(\mathbb{S})$.

c)

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{M}_{AL}(I,\alpha) = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{begin}}\ \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon}\,\underline{;}\gamma\ \underline{\text{end}}) \\
\stackrel{MAL2}{=} & \mathcal{M}_{AL}(I',\gamma), \\
& \quad \text{wobei } I' = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\varepsilon}),\ \text{daher } I'(\underline{\text{y}}) = \varepsilon \text{ und } I'(\underline{\text{x}}) = I(\underline{\text{x}}) = \underline{0}\,\underline{1} \\
\multicolumn{2}{l}{\big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{\text{x}}\,\underline{\neq}\,\underline{\varepsilon}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I',\underline{\text{x}}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I',\underline{\varepsilon})] = [\underline{0}\,\underline{1} \neq \varepsilon] = \mathbf{t}\ \big]} \\
\stackrel{MAL4}{=} & \mathcal{M}_{AL}(I'',\gamma), \\
& \quad \text{wobei } I'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\text{begin}}\ \beta\underline{;}\ \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})\ \underline{\text{end}}) \\
& \quad I'' \stackrel{MAL2}{=} \mathcal{M}_{AL}(I''_0, \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})),\ \text{wobei } I''_0 = \mathcal{M}_{AL}(I',\beta) \\
& \quad [\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{\text{ist1?}}(\underline{\text{x}})) = \mathbf{f} \text{ wegen } I'(\underline{\text{x}}) = I(\underline{\text{x}}) = \underline{0}\,\underline{1}] \\
& \quad I''_0 \stackrel{MAL3}{=} \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push0}}(\underline{\text{y}})),\ \text{somit } I''_0(\underline{\text{y}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\text{push0}}(\underline{\text{y}})) = \underline{0}. \\
& \quad \text{Daher } I''(\underline{\text{x}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''_0, \underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})) = \underline{1} \text{ wegen } I''_0(\underline{\text{x}}) = I'(\underline{\text{x}}) = \underline{0}\,\underline{1}, \\
& \qquad\qquad I''(\underline{\text{y}}) = I''_0(\underline{\text{y}}) = \underline{0} \\
\multicolumn{2}{l}{\big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{\text{x}}\,\underline{\neq}\,\underline{\varepsilon}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'',\underline{\text{x}}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'',\underline{\varepsilon})] = [\underline{1} \neq \varepsilon] = \mathbf{t}\ \big]} \\
\stackrel{MAL4}{=} & \mathcal{M}_{AL}(I''',\gamma), \\
& \quad \text{wobei } I''' = \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\text{begin}}\ \beta\underline{;}\ \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})\ \underline{\text{end}}) \\
& \quad I''' \stackrel{MAL2}{=} \mathcal{M}_{AL}(I'''_0, \underline{\text{x}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})),\ \text{wobei } I'''_0 = \mathcal{M}_{AL}(I',\beta) \\
& \quad [\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{\text{ist1?}}(\underline{\text{x}})) = \mathbf{t} \text{ wegen } I''(\underline{\text{x}}) = \underline{1}] \\
& \quad I'''_0 \stackrel{MAL3}{=} \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\text{y}}\,\underline{\leftarrow}\,\underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}})),\ \text{somit } I'''_0(\underline{\text{y}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\text{push1}}(\underline{\text{y}})) = \underline{1}\,\underline{0}. \\
& \quad \text{Daher } I'''(\underline{\text{x}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'''_0, \underline{\text{pop}}(\underline{\text{x}})) = \varepsilon \text{ wegen } I'''_0(\underline{\text{x}}) = I''(\underline{\text{x}}) = \underline{1}, \\
& \qquad\qquad I'''(\underline{\text{y}}) = I'''_0(\underline{\text{y}}) = \underline{1}\,\underline{0} \\
\multicolumn{2}{l}{\big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I''', \underline{\text{x}}\,\underline{\neq}\,\underline{\varepsilon}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''',\underline{\text{x}}) \neq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'',\underline{\varepsilon})] = [\varepsilon \neq \varepsilon] = \mathbf{f}\ \big]} \\
\stackrel{MAL4}{=} & I'''
\end{array}
$$

Beachten Sie: In der Umgebung $\mathcal{M}_{AL}(I,\alpha) = I'''$ gilt $I'''(\underline{\text{y}}) = \underline{1}\,\underline{0} = \underline{0}\,\underline{1}^r = I(\underline{\text{x}})^r$.

Aufgabe 3.4

Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.
Gehen Sie davon aus, dass die jeweilige Domäne ausschließlich aus Personen besteht.

a) Jede Richterin kennt einen Rechtsanwalt, der nur reiche Klienten hat.

b) Manche Ärztin behandelt mindestens zwei Kinder, obwohl höchstens eines dieser Kinder krank ist.

c) Beatas Vater kennt beide Kinder von Ada.

d) Wenn der Vater von Abdul Lehrer ist, dann kennt jeder Schüler von Abduls Vater alle Lehrer, die Abduls Mutter kennen.

Lösung 3.4

a) Signatur $\langle\{Ri, K, A, Kl, R\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:

$Ri(x)$	...	x ist Richterin (einstellig)
$K(x, y)$	...	x kennt y (zweistellig)
$A(x)$	...	x ist Rechtsanwalt (einstellig)
$Kl(x, y)$	...	x ist Klient von y (zweistellig)
$R(x)$	...	x ist reich (einstellig)

PL-Formel: $\forall x(Ri(x) \supset \exists y(A(y) \wedge K(x, y) \wedge \forall z(Kl(z, y) \supset R(z))))$

Anmerkung:
Es ist möglich den Existenzquantor ($\exists y$) gleich unmittelbar nach dem Allquantor ($\forall x$) zu platzieren. Auch den zweiten Allquantor ($\forall z$) könnte man weiter nach vorne schieben. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht sinnvoll alle Quantoren an den Beginn der Formel zu stellen. Die Formalisierung ist transparenter und bleibt näher an der Struktur des zu formalisierenden Satzes, wenn man die Bindungsbereiche der Quantoren nicht unnötig vergrößert.

b) Signatur $\langle\{A, K, B, Kr\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:

$A(x)$	...	x ist Ärztin (einstellig)
$K(x)$	...	x ist ein Kind (einstellig)
$B(x, y)$	...	x behandelt y (zweistellig)
$Kr(x)$	...	x ist krank (einstellig)

PL-Formel: $\exists x(A(x) \wedge \exists y\exists z(K(y) \wedge K(z) \wedge y \neq z \wedge B(x, y) \wedge B(x, z))$
$\wedge \exists u\forall v(K(v) \wedge B(x, v) \wedge Kr(v)) \supset v = u)$

Anmerkungen:
(1) Die Wörter 'dieser Kinder' (im zweiten Teil des Satzes) beziehen sich nur auf die von der Ärztin auch tatsächlich behandelten Kinder, nicht auf alle Kinder im Gegenstandsbereich.
(2) 'Obwohl' kann in der klassischen Logik nur als Konjunktion sinnvoll interpretiert werden.
(3) Beachten Sie die Notwendigkeit der Verwendung des Gleichheitssymbols. Nur so lässt sich 'mindestens zwei' bzw.'höchstens eines' (der behandelten Kinder) ausdrücken.
(4) Der Lösungsvorschlag $\exists x(A(x) \wedge \exists y\exists z(K(y) \wedge K(z) \wedge y \neq z \wedge B(x, y) \wedge B(x, z) \wedge \neg(Kr(y) \wedge Kr(z))))$ ist problematisch, da die Ärtztin ja mehr als nur die beiden durch x und y bezeichneten Kinder behandeln könnte.

c) Signatur $\langle\{K\}, \{a, b\}, \{m, v\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbol:

$K(x, y)$	...	x kennt y (zweistellig)

Konstantensymbole:

a	...	Ada
b	...	Beata

Funktionssymbole:

$m(x)$	...	die Mutter von x (einstellig)
$v(x)$	...	der Vater von x (einstellig)

PL-Formel:
$\exists x \exists y (x \neq y \land a = m(x) \land a = m(y) \land K(v(b), x) \land K(v(b), y) \land \forall z (a = m(z) \supset (z = x \lor z = y)))$

Anmerkungen:
(1) Prinzipiell ist es auch möglich, anstatt der einstelligen Funktionssymbole m und v, zweistellige Prädikatensymbole für die Relationen 'ist Mutter von' bzw. 'ist Vater von' zu verwenden. Auch die Verwendung eines zweistelligen Prädikatensymbols für die Relation 'ist Kind von' ist zulässig. Beide Alternativen führen allerdings zu längeren Lösungsformeln.
(2) Es wäre ziemlich problematisch ein einstelliges Prädikatensymbol für 'ist ein Kind' einzuführen, da ja auch erwachsene Söhne oder Töchter gemeint sein können.
(3) Beachten Sie, dass 'beide Kinder' impliziert, dass Ada genau zwei Kinder hat. Daher ist (wie in Aufgabe b) die Verwendung des Gleichheitszeichens unvermeidbar.

d) Signatur $\langle \{L, S, K\}, \{a\}, \{m, v\} \rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$L(x)$ ... x ist ein Lehrer (einstellig)
$S(x, y)$ ... x ist Schüler von y (zweistellig)
$K(x, y)$ ... x kennt y (zweistellig)
Konstantensymbol:
a ... Abdul
Funktionssymbole:
$m(x)$ ... die Mutter von x (einstellig)
$v(x)$ ... der Vater von x (einstellig)

PL-Formel: $L(v(a)) \supset \forall x (S(x, v(a)) \supset \forall y [(L(y) \land K(y, m(a))) \supset K(x, y)])$

Aufgabe 3.5

Spezifizieren Sie zu folgenden Formeln jeweils ein Modell $\mathcal{I}$ und ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}$ über dem angegebenen Gegenstandsbereich D. Argumentieren Sie jeweils, warum $\mathcal{I}$ ein Modell und $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel ist. Geben Sie außerdem an, welche Variablen frei bzw. gebunden in der jeweiligen Formel vorkommen. (Beachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Notationsvereinbarungen.)

a) Über $D = \omega$: $\forall z \exists y ((z = f(x, y) \supset P(f(a, x), z)) \land (P(f(a, x), z) \supset z = f(x, y)))$

b) Über $D = \{0, 1\}$: $\neg \forall x Q(x, g(y), a) \supset (\forall y \neg Q(y, a, x) \lor \exists z Q(b, x, z))$

c) Über $D = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$: $\forall x \exists y P(x, y) \land \neg \exists x \forall y P(y, x)$

Lösung 3.5

Jede Interpretation, also jedes Modell und jedes Gegenbeispiel einer Formel, besteht aus 3 Bestandteilen: Dem Gegenstandsbereich D, der Signaturinterpretation Φ und der Variablenbelegung ξ. Da die Variablenbelegung nur für die *frei* vorkommenden Variablen relevant ist, ist es sinnvoll ξ nur für letztere festzulegen.

a) Die Variablen z und y kommen nur gebunden vor; x kommt nur frei vor. (a ist keine Variable, sondern ein Konstantensymbol.)

Es sei $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi_{\mathcal{I}}, \xi_{\mathcal{I}} \rangle$, wobei $\Phi_{\mathcal{I}}(f)(m, n) = 0$ und $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(m, n) = \mathbf{t} \iff n = 0$. Die anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle. Der Vollständigkeit halber spezifizieren wir $\Phi(a) = 0$ und $\xi_{\mathcal{I}}(x) = \xi_{\mathcal{I}}(y) = 0$.
Allgemein drückt $(A \supset B) \land (B \supset A)$ die Äquivalenz von A und B aus. Daher besagt die Formel unter der Interpretation $\mathcal{I}$, dass für alle natürlichen Zahlen n, $n = 0$ genau dann wenn $n = 0$ gilt. Daher ist $\mathcal{I}$ ein Modell der Formel. (Beachten Sie: Da der Wahrheitswert der Formel unter der gewählten Interpretation nicht vom Wert für y abhängt, ist der Existenz-Quantor hier redundant.)

Ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle \omega, \Phi_{\mathcal{J}}, \xi_{\mathcal{J}} \rangle$ erhalten wir, wenn wir $\Phi_{\mathcal{J}}(f)(m, n) = 1$ setzen und alle anderen Bestandteile von $\mathcal{J}$ genau wie für $\mathcal{I}$ festlegen.
Unter der Interpretation $\mathcal{J}$, drückt die Formel aus, dass für alle natürlichen Zahlen n, $n = 1$ genau dann wenn $n = 0$ gilt. Somit ist $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel.

b) Die Variable x kommt in der linken Teilformel $\neg\forall x Q(x, g(y), a)$ gebunden und in der rechten Teilformel frei vor. Umgekehrt kommt y links frei und rechts gebunden vor.

Die Formel ist eine Implikation; daher erhalten wir ein Modell $\mathcal{I} = \langle\{0,1\}, \Phi_{\mathcal{I}}, \xi_{\mathcal{I}}\rangle$, wenn wir für alle $m, n, p \in \{0,1\}$ $\Phi(Q)(m, n, p) = \mathbf{t}$ setzen. Damit wird die linke Teilformel falsch und somit die Gesamtformel wahr. Alle anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle und können beliebig festgesetzt werden.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\{0,1\}, \Phi_{\mathcal{J}}, \xi_{\mathcal{J}}\rangle$ muss die linke Teilformel wahr und die rechte falsch werden. Das ist, z.B., unter folgenden Festlegungen der Fall: $\Phi_{\mathcal{J}}(a) = \Phi_{\mathcal{J}}(b) = 0$ und für alle $m, n, p \in \{0,1\}$: $\Phi_{\mathcal{J}}(g)(m) = m$, sowie

$$\Phi(Q)(m, n, p) = \begin{cases} \mathbf{f} & \text{falls } m = 0 \\ \mathbf{t} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\forall x Q(x, g(y), a)) = \mathbf{f}$ und somit $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\neg\forall x Q(x, g(y), a)) = \mathbf{t}$, weil $\Phi_{\mathcal{J}}(Q)(0,0,0) = \mathbf{f}$ und weil $\Phi_{\mathcal{J}}(a) = 0$, $\xi_J(y) = 0$ und $\Phi_{\mathcal{J}}(g)(0) = 0$. Die linke Teilformel ist also wahr.
Hingegen ist die rechte Teilformel, also $\forall y \neg Q(y, a, x) \vee \exists z Q(b, x, z)$, falsch: Wegen $\Phi_{\mathcal{J}}(Q)(1,0,0) = \mathbf{t}$ gilt für das linke Disjunkt $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\forall y \neg Q(y, a, x)) = \mathbf{f}$. Außerdem ist auch das rechte Disjunkt, also $\exists z Q(b, x, z)$, falsch unter $\mathcal{J}$, da $\Phi_{\mathcal{J}}(b) = 0$ und $\Phi_{\mathcal{J}}(Q)(0, m, n) = \mathbf{f}$ für alle $m, n \in \{0,1\}$.

c) Die Variablen x und y kommen nur gebunden vor. Es gibt keine freien Variablenvorkommen.

Für ein Modell über der Domäne der Binärstrings, $\mathcal{I} = \langle\{0,1\}^*, \Phi_{\mathcal{I}}, \xi_{\mathcal{I}}\rangle$, interpretieren wir das Prädikatensymbol P als das Prädikat 'ist kürzer als'. Formaler: $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(s,t) = \mathbf{t} \iff |s| < |t|$ für alle $s, t \in \{0,1\}^*$. Unter der Interpretation $\mathcal{I}$ drückt die Formel folgende wahre Aussage aus: Zu jedem Binärstring gibt es einen längeren Binärstring, aber es gibt keinen Binärstring, der länger als alle Binärstrings ist.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\{0,1\}^*, \Phi_{\mathcal{J}}, \xi_{\mathcal{J}}\rangle$ genügt es $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(s,t) = \mathbf{f}$ für alle $s, t \in \{0,1\}^*$ zu setzen. Dann gilt $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\forall x \exists y P(x,y)) = \mathbf{f}$ für das linke Konjunkt. Somit ist die gesamte Formel falsch.

Zur Erinnerung: Da keine Variablen frei in der Formel vorkommen, sind die Variablenbelegungen $\xi_{\mathcal{I}}$ und $\xi_{\mathcal{J}}$ jeweils irrelevant.