4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 2** **SS 2015** **21.10.2015**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Manche Kinder besitzen mehr als einen Hund.
(*Some children own more than one dog.*)

(2) Jeder Hund hat höchstens zwei Besitzer.
(*Every dog has at most two owners.*)

(6 Punkte)

Lösung:
Signatur $\langle\{K, H, B\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$K(x)$ ... x ist ein Kind (einstellig)
$H(x)$ ... x ist ein Hund (einstellig)
$B(x, y)$ ... x besitzt y (zweistellig)

Formeln:
(1): $\exists x \exists y \exists z (K(x) \land H(y) \land H(z) \land B(x, y) \land B(x, z) \land y \neq z)$
(2): $\forall x \forall y [(H(x) \land B(y, x) \supset \exists u \exists v (y = u \lor y = v)]$.

7.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall x (\neg Q(y, x) \lor Q(h(b, x), x)) \supset \exists y Q(h(z, b), y)$
Geben Sie außerdem an, welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen.
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen; spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

(6 Punkte)

Lösung: x kommt nur gebunden, z nur frei, y sowohl frei als auch gebunden vor.
Modell $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(Q) =$“$<$”, $\Phi(h) =$“$+$”, $\Phi(b) = 1$, $\xi(y) = \xi(z) = 0$, beliebig sonst.

Die gesamte Formel (Implikation) ist wahr, wenn die rechte Teilformel wahr ist. Unter der Interpretation $\mathcal{I}$ besagt diese Teilformel: Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als $0 + 1$ ist. Da dies richtig ist, ist die gesamte Implikation wahr.

Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(Q) =$“$>$”, $\Phi(h)(m, n) = 0$, $\Phi(b) = 1$, $\xi(y) = \xi(z) = 0$, beliebig sonst.

Unter der Interpretation $\mathcal{J}$ besagt die rechte Teilformel, dass es eine natürliche Zahl gibt, die kleiner als 0 ist, was natürlich falsch ist. Die linke Teilformel besagt, dass alle natürlichen Zahlen x entweder nicht kleiner als 0 oder kleiner als 0 sind, was stimmt. (Der linke Teil der Disjunktion ist immer wahr.) Da also die linke Teilformel der Implikation wahr, aber die rechte Teilformel falsch ist, ist die gesamte Formel falsch.

8.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
$Q(a)$ folgt logisch aus $\forall x(\exists y P(x,y) \supset Q(g(x)))$, $\forall x\, x = g(g(x))$ und $\forall x P(x,x)$.
Markieren Sie γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(6 Punkte)

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \forall x(\exists y P(x,y) \supset Q(g(x)))$				Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \forall x\, x = g(g(x))$				Annahme – γ-Formel
(3)	$\mathbf{t} : \forall x P(x,x)$				Annahme – γ-Formel
(4)	$\mathbf{f} : Q(a)$				Annahme
(5)	$\mathbf{t} : \exists y P(g(a),y) \supset Q(g(g(a)))$				von 1 [keine δ- oder γ-Formel!]
(6)	$\mathbf{f} : \exists y P(g(a),y)$	von 5 γ-Formel	(7)	$\mathbf{t} : Q(g(g(a)))$	von 5
(8)	$\mathbf{f} : P(g(a),g(a))$	von 6	(9)	$\mathbf{t} : a = g(g(a))$	von 6
(10)	$\mathbf{t} : P(g(a),g(a))$	von 2	(11)	$\mathbf{t} : Q(a)$	$S^{=}$:9$\rightarrow$ 7
	$\times$	Wid.: 8/10		$\times$	Wid.: 4/11

9.) Beweisen Sie folgende Korrektheitsaussage über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül:

$$x > y \; \{\underline{\texttt{while}}\; x > y \;\underline{\texttt{do}}\; \underline{\texttt{begin}}\; z \leftarrow y - 7; y \leftarrow z + 8 \;\underline{\texttt{end}}\} \; x = y$$

Benennen Sie die verwendeten Regeln und vergessen Sie nicht, die Gültigkeit der resultierenden Formeln im Datentyp $\mathbb{Z}$ zu begründen.

(6 Punkte)

Lösung: Unter Verwendung der Abkürzungen $P = B = (x > y)$ und $Q = (x = y)$ kann man Folgendes ableiten:

$$\text{(H4)}\;\frac{\overset{(1)}{P \supset I} \qquad \text{(T2)}\;\dfrac{\text{(H1)}\;\dfrac{\overset{(2)}{(I \wedge B) \supset I[\tfrac{z+8}{y}][\tfrac{y-7}{z}]}}{(I \wedge B)\; \{z \leftarrow y - 7\}\; I[\tfrac{z+8}{y}]}}{(I \wedge B)\; \{\underline{\texttt{begin}}\; z \leftarrow y - 7; y \leftarrow z + 8 \;\underline{\texttt{end}}\}\; I} \qquad \overset{(3)}{(I \wedge \neg B) \supset Q}}{P\; \{\underline{\texttt{while}}\; B \;\underline{\texttt{do}}\; \underline{\texttt{begin}}\; z \leftarrow y - 7; y \leftarrow z + 8 \;\underline{\texttt{end}}\}\; Q}$$

Da Vorbedingung (P) und Schleifenbedingung (B) identisch sind, eignet sich $P \vee Q$ (wobei Q die Nachbedingung ist) als Invariante I. Also $I = (x > y \vee x = y)$, was sich zu $I = x \geq y$ vereinfacht.

Es bleibt zu zeigen:

(1): $P \supset I = P \supset (P \vee Q)$ ist eine Tautologie.

(2): $I[\tfrac{z+8}{y}][\tfrac{y-7}{z}] = x \geq y[\tfrac{z+8}{y}][\tfrac{y-7}{z}] = x \geq z + 8[\tfrac{y-7}{z}] = x \geq y - 7 + 8 = x \geq y + 1$.
Im Datentyp $\mathbb{Z}$ folgt $x \geq y + 1$ aus $B = x > y$. Daher ist die Implikation (2) in $\mathbb{Z}$ gültig.

(3): $(I \wedge \neg B) \supset Q = ((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$ ist ebenfalls eine Tautologie.

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Wenn ein Programm π bezüglich einer Vorbedingung P und einer Nachbedingung Q partiell korrekt ist, so ist π auch bezüglich einer Vorbedingung P' partiell korrekt, für die $P \supset P'$ im entsprechenden Datentyp gilt.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Gegenbeispiel: $x = 0\{x \leftarrow x + 1\}x = 1$ ist partiell korrekt (über $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$). Ersetzt man die Vorbedingung $P = (x = 0)$ durch $P' = (x \geq 0)$, so gilt $P \supset P'$ im entsprechenden Datentyp; aber man erhält ein inkorrektes Hoare-Tripel.

- Wenn G eine logische Konsequenz von F ist, dann sind alle vollständig expandierten Tableaux, die mit $\mathbf{t} : G$ gefolgt von $\mathbf{f} : F$ beginnen, geschlossen.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Wenn $F \models G$ so folgt aus der Vollständigkeit des Tableau-Kalküls, dass vollständig expandierte Tableaux, die mit $\mathbf{t} : F$ gefolgt von $\mathbf{f} : G$ beginnen, geschlossen sind. Aber es folgt nichts für Tableaux, die mit $\mathbf{t} : G$ gefolgt von $\mathbf{f} : F$ beginnen.

- Es gibt prädikatenlogische Formeln, die keine Modelle mit endlicher Domäne haben.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Unerfüllbare Formeln haben gar keine Modelle (und selbst manche erfüllbare Formeln haben nur unendliche Modelle, siehe Folie 388).

(6 Punkte)