Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (2018W)
Lösungen

Aufgabe 2.1 Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 6$.

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^{3k-2}\underline{\mathtt{a}}^{2n} \mid n, k \geq 1\}$

b) $L = \{uw \mid u \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, w \in \{\underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}^*, |u| = |w|\}$

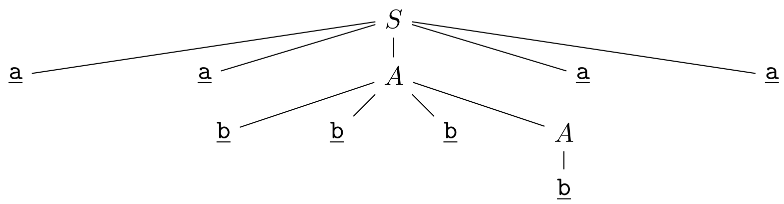
c) $L = \{awaua \mid w, u \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, |w| = |u|, a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\}$

Lösung

a) $G = (\{S, A\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}^2 S \underline{\mathtt{a}}^2 \mid \underline{\mathtt{a}}^2 A \underline{\mathtt{a}}^2, \quad A \to \underline{\mathtt{b}}^3 A \mid \underline{\mathtt{b}}\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}^2\underline{\mathtt{b}}^4\underline{\mathtt{a}}^2$:

$S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}^2 A \underline{\mathtt{a}}^2 \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}^2\underline{\mathtt{b}}^3 A \underline{\mathtt{a}}^2 \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}^2\underline{\mathtt{b}}^4\underline{\mathtt{a}}^2$

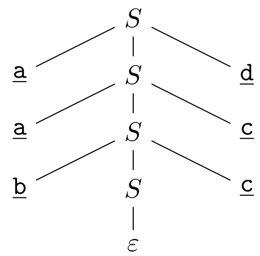


b) $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}, P, S)$, wobei $P = \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{c}} \mid \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{d}} \mid \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{c}} \mid \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{d}} \mid \varepsilon\}$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}}$:

$S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{d}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}}$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}}$:

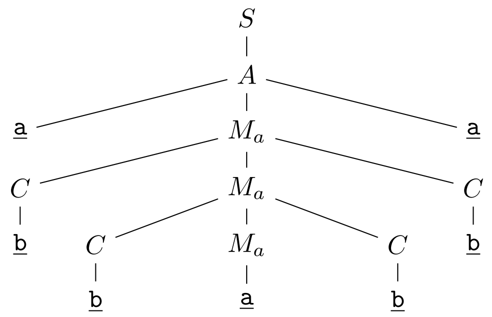


c) $G = (\{S, A, B, C, M_a, M_b\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, P, S)$, wobei

$$
\begin{aligned}
P = \{\quad & S \to A \mid B, \\
& A \to \underline{\mathtt{a}} M_a \underline{\mathtt{a}}, \\
& M_a \to C M_a C \mid \underline{\mathtt{a}}, \\
& B \to \underline{\mathtt{b}} M_b \underline{\mathtt{b}}, \\
& M_b \to C M_b C \mid \underline{\mathtt{b}} \\
& C \to \underline{\mathtt{a}} \mid \underline{\mathtt{b}} \qquad\qquad \}
\end{aligned}
$$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}$:

$S \Rightarrow A \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}M_a\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}CM_aC\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}M_aC\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}CM_aCC\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}M_aCC\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}CC\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}C\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}$



Aufgabe 2.2 Sind folgende Sprachen L kontextfrei? Falls ja, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben). Geben Sie in diesem Fall auch eine kontextfreie Grammatik an, welche L erzeugt. Ist hingegen L nicht kontextfrei, so beweisen Sie dies mittels einer Methode Ihrer Wahl. (Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{\mathtt{0}}^{kn}\underline{\mathtt{1}}^{ln}\underline{\mathtt{2}}^{mn} \mid n \geq 0\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist).

a) $L = \{w\underline{\mathtt{a}}^n \mid w \in \{\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*, n \geq |w|\}$

b) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^i\underline{\mathtt{b}}^n \mid i, n \geq 0, i = n \text{ oder } i = 2n\}$

c) $L = \{x\underline{\#}w\underline{\#}x^r \mid x, w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+, |x| = |w|\}$
   (*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

d) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^m\underline{\mathtt{d}}^k \mid n, m, k \geq 0\} \ \cap \ \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{e}}^k\underline{\mathtt{b}}^m\underline{\mathtt{c}}^{2m} \mid k, n, m \geq 0\}$
   (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Lösung

a) $L = \{w\underline{\mathtt{a}}^n \mid w \in \{\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*, n \geq |w|\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_3 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{[}, \underline{(}\}^*\{\underline{]}, \underline{)}\}^*\{\underline{\langle}, \underline{\rangle}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}, \underline{\langle}, \underline{\rangle}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{[}) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{c}}, \quad h(\underline{]}) = h(\underline{)}) = h(\underline{\langle}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{\rangle}) = \varepsilon$$

z.B. folgende kontextfreie Grammatik erzeugt L:

$G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{a}} \mid \underline{\mathtt{c}}S\underline{\mathtt{a}} \mid S\underline{\mathtt{a}} \mid \varepsilon\}, S)$

b) Wir beobachten zunächst, dass $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\}$.

$L = \{\underline{\mathtt{a}}^i\underline{\mathtt{b}}^n \mid i, n \geq 0, i = n \text{ oder } i = 2n\}$ ist also kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{[}\}^*\{\underline{]}\}^* \cup \{\underline{(}\}^*\{\underline{)}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{[}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{]}) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{b}}$$

z.B. folgende kontextfreie Grammatik erzeugt L:

$G = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to A \mid B, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}A\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon, \quad B \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}B\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}, S)$

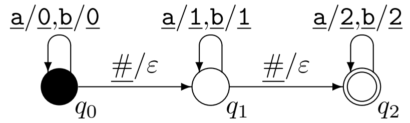
c) $L = \{x\underline{\#}w\underline{\#}x^r \mid x, w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+, |x| = |w|\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{x\underline{\#}w\underline{\#}x^r \mid x, w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+, |x| = |w|\}$ ist kontextfrei. Sei dann

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\#}\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

die (deterministische) *gsm* mit

$\delta(q_0, \underline{\mathtt{a}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}})$, $\delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}})$, $\delta(q_0, \underline{\#}) = (q_1, \varepsilon)$,
$\delta(q_1, \underline{\mathtt{a}}) = (q_1, \underline{\mathtt{1}})$, $\delta(q_1, \underline{\mathtt{b}}) = (q_1, \underline{\mathtt{1}})$, $\delta(q_1, \underline{\#}) = (q_2, \varepsilon)$,
$\delta(q_2, \underline{\mathtt{a}}) = \delta(q_2, \underline{\mathtt{b}}) = (q_2, \underline{\mathtt{2}})$.



Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^n\underline{\mathtt{2}}^n \mid n \geq 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

d) Wir überlegen zunächst, dass $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^{4n} \mid n \geq 0\}$. L ist also nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^{4n} \mid n \geq 0\}$ ist kontextfrei. Sei dann

$$h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}^*$$

ein Homomorphismus mit

$$h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{0}}, \quad h(\underline{\mathtt{b}}) = \underline{\mathtt{1}}, \quad h(\underline{\mathtt{c}}) = \underline{\mathtt{2}}.$$

Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^{2n}\underline{\mathtt{2}}^{4n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 2.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Zu jeder mehrdeutigen Grammatik gibt es eine äquivalente eindeutige Grammatik.

b) Ist L_1 eine kontextfreie Sprache und $L_2 \subseteq L_1$, dann muss L_2 auch kontextfrei sein.

c) Es gibt kontextfreie Sprachen, deren Komplement nicht rekursiv aufzählbar ist.

d) Aus dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen folgt, dass jede kontextfreie Sprache unendlich ist.

e) Ist $L_1 \cup L_2 = \{\}$, so ist $L_1 - L_2$ nicht rekursiv aufzählbar.

Lösung

a) FALSCH. Es gibt (inhärent) mehrdeutige Sprachen, für die es keine eindeutige Grammatik gibt, die sie erzeugen.

b) FALSCH. Sei z.B. $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*$ (eine reguläre und damit jedenfalls kontextfreie Sprache) und $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n \mid n \geq 0\}$. Dann gilt $L_2 \subseteq L_1$, wobei L_2 aber sicher nicht kontextfrei ist.

c) FALSCH. Kontextfreie Sprachen sind zwar unter Komplement nicht abgeschlossen, kontextsensitive Sprachen allerdings sehr wohl. Nachdem die Familie der kontextfreien Sprachen eine echte Teilmenge der Familie der kontextsensitiven Sprachen ist, ist also das Komplement jeder kontextfreien Sprache kontextsensitiv und damit auch rekursiv aufzählbar. (*Anmerkung*: Nachdem jede kontextfreie Sprache auch entscheidbar (bzw. rekursiv) ist, könnte man hier ebenso gut über Entscheidbarkeit (an Stelle von Kontextsensitivität) argumentieren.)

d) FALSCH. Das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen gilt explizit nur für unendliche kontextfreie Sprachen. Es gibt aber natürlich auch endliche kontextfreie Sprachen. Jede endliche Sprache ist regulär und damit auch kontextfrei.

e) FALSCH. Aus obiger Aussage geht hervor, dass $L_1 = L_2 = \{\}$. Dies ist eine reguläre Sprache, und somit, aufgrund der Chomsky Hierarchie, auch rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2.4 Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist, oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Wenn $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co\text{-}NP}$ dann gilt: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

b) Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ dann ist jede Sprache $A \in \mathbf{NP}$ (außer $A = \{\}$ und $A = \Sigma^*$) $\mathbf{NP}$-vollständig.

c) Sei $A = \{w \mid w \in \{\underline{0}, \underline{1}\}\}$, wobei

$$w = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathbf{P} = \mathbf{NP} \\ 1 & \text{wenn } \mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \end{cases}$$

Dann ist A nicht entscheidbar.

d) Sei $Q = \{L \mid L \in \mathbf{NP}, L \notin \mathbf{P}\}$ eine Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen L. Dann ist Q genau dann entscheidbar, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

e) Sei A $\mathbf{NP}$-hart und B $\mathbf{NP}$-vollständig. Dann gilt: Wenn B in $\mathbf{P}$ ist, so ist auch A in $\mathbf{P}$.

f) Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn B in $\mathbf{P}$ ist, dann ist auch das Komplement von A in $\mathbf{P}$.

Lösung

a) RICHTIG. Wenn $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co\text{-}NP}$ dann gibt es eine Sprache, die in $\mathbf{NP}$ aber nicht in $\mathbf{co\text{-}NP}$ ist. Die Klasse $\mathbf{P}$ hingegen ist unter Komplement abgeschlossen. Unter der Annahme, dass $\mathbf{NP}$ nicht unter Komplement abgeschlossen ist, kann daher nicht $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gelten.

b) RICHTIG. Sei A irgendeine Sprache in $\mathbf{P}$. A ist genau dann $\mathbf{NP}$-vollständig wenn $A \in \mathbf{NP}$ und jedes Problem $B \in \mathbf{NP}$ in polynomiell beschränkter Zeit auf A reduziert werden kann. $A \in \mathbf{NP}$ gilt laut Angabe. Wir zeigen nun, dass auch die zweite Bedingung zutrifft: Seien $x_{in} \in A$ und $x_{out} \notin A$ zwei Wörter, die jedenfalls existieren (nachdem $A \neq \{\}$ und $A \neq \Sigma^*$). Die Annahme $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ impliziert, dass B von einer DTM M in polynomiell beschränkter Zeit entschieden wird. Eine polynomiell beschränkte Reduktion von B auf A simuliert nun M um herauszufinden, ob der Input w ein Element von B ist. In diesem Fall wird x_{in} ausgegeben, andernfalls x_{out}.

c) FALSCH. Die Sprache A ist also entweder $\{\underline{0}\}$ oder $\{\underline{1}\}$. Diese Sprachen sind beide entscheidbar, also ist A entscheidbar. (Es spielt dabei keine Rolle, welche von beiden Sprachen A ist.)

d) RICHTIG. Nach dem Satz von Rice ist jede nicht triviale Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen nicht entscheidbar. Ist $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, so ist die Eigenschaft Q nicht trivial und daher unentscheidbar. Ist hingegen $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, so gibt es offensichtlich einen Entscheidungsalgorithmus: Die Anwort ist immer "nein".

e) FALSCH. Nachdem A $\mathbf{NP}$-hart ist, kann jedes Problem in $\mathbf{NP}$ in polynomieller Zeit auf A reduziert werden. Es gibt also eine polynomielle Reduktion von B auf A. Das Problem A selbst muss deshalb aber nicht in $\mathbf{NP}$ bzw. $\mathbf{P}$ liegen, sondern kann durchaus schwieriger sein (also außerhalb von $\mathbf{NP}$ sein).

f) RICHTIG. $\mathbf{P}$ ist unter Komplement abgeschlossen.

Aufgabe 2.5 Das als NP-vollständig bekannte Problem PARTITION ist wie folgt definiert:

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{N}$

Gefragt: Gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ mit $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?

(Man möchte also wissen, ob die Menge $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ in zwei disjunkte Teilmengen so zerlegt werden kann, dass die Summe der Elemente in beiden Teilmengen gleich groß ist.)

a) Reduzieren Sie das oben beschriebene Problem PARTITION auf das Problem BINPACKING, das wie folgt definiert ist:

Gegeben: Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, Anzahl k der Behälter, und Objektgrößen $a_1, a_2, ..., a_n$

Gefragt: Können die n Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überläuft?

Zeigen Sie auch, dass das entsprechend transformierte und das ursprüngliche Problem für die Instanz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$ eine Lösung besitzt.

b) Das Christkind hat m Geschenke, die es an n liebe Kinder verteilen möchte. Jedes Kind kann dabei mehrere Geschenke bekommen, jedoch mag jedes Kind die unterschiedlichen Geschenke unterschiedlich gerne. Ein Kind i möge also ein Geschenk j genau $p_{i,j} \in \mathbb{N}$ gerne. (Diese hypothetischen Kinder haben äußerst präzise Wunschzettel.)

Die Freude eines Kindes i sei dabei als $F(i) = \sum_{j \in G_i} p_{i,j}$ definiert, wobei $G_i \subseteq \{1, ..., m\}$ die Geschenke bezeichnet, die das Kind i erhält. Natürlich möchte das Christkind allen Kindern eine möglichst glückliche Weihnachtszeit bescheren, daher versucht es die Geschenke so in Mengen $G_1, ..., G_n$ einzuteilen, dass die Freude des traurigsten Kindes maximal ist. Formal will es also die Funktion $c(G) = min_{1 \leq i \leq n} F(i)$ maximieren, wobei G eine beliebige Partition der m Geschenke bezeichne.

Bei der Entscheidungsvariante des CHRISTKIND Problems soll entschieden werden, ob eine gegebene Mindestweihnachtsfreude k erreicht werden kann, also, ob es eine Lösung G gibt, für die $c(G) \geq k$ gilt.

Wie man sich leicht überlegen kann, liegt das Problem CHRISTKIND in NP. Zeigen Sie, dass das CHRISTKIND Problem NP-vollständig ist, indem Sie das Problem PARTITION darauf reduzieren.

Lösung

a) Wir zeigen PARTITION $\leq_p$ BINPACKING. Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Instanz von PARTITION.

Dann ergibt sich:

Behältergröße $b = \sum_{i=1}^{k} a_i/2$

Zahl der Behälter: $k = 2$

Objekte: $a_1, ..., a_k$

Falls jetzt eine Lösung des PARTITION Problems existiert, dann gilt $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$.

Daraus folgt: $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \notin J} a_i = 2 * \sum_{i \in J} a_i$

Also

$\sum_{i=1}^{k} a_i/2 = \sum_{i \in J} a_i$

So kann man die Menge J auch in einen Behälter geben, der dann das Gewicht $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i/2$ hat und die restlichen Objekte (die nicht in der Menge J sind) in den anderen Behälter.

Eine Lösung für das BINPACKING Problem mit 2 Behältern existiert also genau dann, wenn das entsprechende PARTITION Problem eine Lösung besitzt.

Wir zeigen nun, dass die Instanz $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 1, 2, 3, 4, 5)$ eine Lösung besitzt.

$k = 2$, $b = \sum_{i=1}^{6} a_i/2 = (1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)/2 = 8$.

Somit ist das BINPACKING Problem mit der Menge $J = \{1, 4, 5\}$ (Indizes!) gelöst, also

$\sum_{i \in J} a_i \leq b = 8$ sowie $\sum_{i \notin J} a_i \leq b = 8$

Deshalb hat die ursprüngliche Probleminstanz auch für PARTITION eine Lösung, nämlich:

$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i = 8$

b) Man kann leicht eine Instanz von PARTITION in eine Instanz des CHRISTKIND Problems umwandeln:

$n = 2$,

$p_{1,j} = p_{2,j} = a_j$ und

$k = \frac{1}{2} \sum_j a_j$

Die so konstruierte CHRISTKIND Instanz kann genau dann gelöst werden, wenn die PARTITION Instanz lösbar ist.