4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 1 SS 2015 21. Oktober 2015			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

1.) Sei $L = \{w\underline{\#}w \mid w \in \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(6 Punkte)

Lösung: Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{a}^m \underline{\#} \underline{a}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 1 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{a}^m \underline{\#} \underline{a}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{a}^{m+|y|}\underline{\#}\underline{a}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

2.) Sei $L = \{\underline{a}^{3n}(\underline{b}\,\underline{c})^{5n} \mid n \geq 0\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass $\mathcal{L}(G) = L$.

(2 Punkte)

Lösung: $G = (\{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, \{S \to \underline{a}^3 S(\underline{b}\,\underline{c})^5 \mid \varepsilon\}, S)$

b) Existiert ein Homomorphismus h so, dass $h(L) = \{\underline{a}^{21n}\underline{b}^{10n} \mid n \geq 0\}$? Falls ja, geben Sie einen solchen Homomorphismus an; falls nein, begründen Sie, warum es einen solchen nicht geben kann. **(4 Punkte)**

Lösung: Es existiert z.B. folgender Homomorphismus $h : \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^* \longrightarrow \{\underline{a}, \underline{b}\}^*$ mit
$h(\underline{a}) = \underline{a}^7$, $h(\underline{b}) = \underline{b}^2$, $h(\underline{c}) = \varepsilon$

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine das Post'sche Korrespondenzproblem entscheidet.

(6 Punkte)

Lösung: Entscheidbar. Es gibt keine Turingmaschine, die das Post'sche Korrespondenzproblem entscheidet. Daher kann die Frage, ob eine gegebene TM das Post'sche Korrespondenzproblem entscheidet, immer verneint werden. Eine TM, die also immer verwirft, entscheidet die (leere) Menge der Turingmaschinen, die das Post'sche Korrespondenzproblem entscheiden.

4.) Es ist nicht bekannt, ob das Komplement von jeder Sprache in **NP** selbst wiederum in **NP** liegt (d.h., ob **NP** unter Komplement abgeschlossen ist).

Finden und beschreiben Sie den Fehler in folgendem vermeintlichen "Beweis", welcher dies aber für alle Probleme in **NP** behauptet:

Satz: Ist $L \in \mathbf{NP}$, so ist auch $\overline{L} \in \mathbf{NP}$.

Beweis: Sei N eine nicht-deterministische Turingmaschine (NTM), welche L in polynomiell beschränkter Zeit akzeptiert. Vertausche nun die Endzustände von N mit Nicht-Endzuständen von N und umgekehrt. Offensichtlich akzeptiert die so konstruierte NTM N' die Sprache $\overline{L}$ in polynomiell beschränkter Zeit. Es gilt also $\overline{L} \in \mathbf{NP}$. □

(6 Punkte)

Lösung: Die Maschine N' akzeptiert genau jene Wörter, für welche es in der N mindestens eine Folge möglicher Bewegungen gibt, die von der Startkonfiguration zu einer Endkonfiguration in einem nicht-akzeptierenden Zustand führt. Dies könnten aber durchaus auch Wörter sein, welche von N akzeptiert werden.

N' akzeptiert also nicht $\overline{L}$, sondern eigentlich eine Obermenge von $\overline{L}$.

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Ist L nicht-regulär, so ist auch das $\overline{L}$ (das Komplement von L) nicht-regulär.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Ist $\overline{L}$ regulär, dann muss L auch regulär sein. D.h., das Komplement einer nicht-regulären Sprache kann nur nicht-regulär sein.

- Es gibt eine unbeschränkte Grammatik, welche $L = \{\}$ erzeugt.

  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: $\{\}$ ist rekursiv aufzählbar.

- Sind L_1 und L_2 kontextfrei, so ist auch $L_1 - L_2$ kontextfrei.

  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Gegenbeispiel: $L_1 = \Sigma^*$. Dann ist $L_1 - L_2$ das Komplement von L_2. Kontextfreie Sprachen sind aber nicht unter Komplement abgeschlossen.

(6 Punkte)