4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

Teil 1 — SS 2016 — 27. Juni 2016

Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe
		Lösung		A

1.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{1}}^k \underline{\mathtt{b}}^{2n} \mid k, n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(6 Punkte)

Lösung: Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^{2m}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 3m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m \underline{\mathtt{b}}^{2m}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{\mathtt{a}}^{m+|y|}\underline{\mathtt{b}}^{2m}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

2.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}})^n \mid n \geq 0\}$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.

(D_n bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschiedenen Klammerpaaren.)

(4 Punkte)

Lösung:

L ist kontextfrei, da $L = h(D_1 \cap R)$, wobei $R = \{\underline{(}\}^*\{\underline{)}\}^*$ und

$h : \{\underline{(}, \underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*$ mit $h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{a}}^2, \quad h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}}$

b) Ist L von einer deterministischen Turingmaschine in polynomiell beschränkter Zeit entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Ja, da L kontextfrei ist, und $\mathcal{L}_2 \subset \mathbf{P}$.

3.) Sei $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \to \underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{c}}S \mid \underline{\mathtt{c}}\,\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\} \cup \{xy \to yx \mid x, y \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}\}.$$

a) Ist G regulär, kontextfrei, monoton, kontextsensitiv und/oder unbeschränkt?

	Ja	Nein
regulär	☐	☐
kontextfrei	☐	☐
monoton	☐	☐
kontextsensitiv	☐	☐
unbeschränkt	☐	☐

(2 Punkte)

Lösung:

	Ja	Nein
regulär	☐	☒
kontextfrei	☐	☒
monoton	☒	☐
kontextsensitiv	☐	☒
unbeschränkt	☒	☐

b) Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ an.

(2 Punkte)

Lösung: $L(G) = \{w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^+ \mid |w|_{\underline{\mathtt{a}}} = |w|_{\underline{\mathtt{b}}} = |w|_{\underline{\mathtt{c}}}\}$

c) Ist $L(G)$ regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar und/oder rekursiv aufzählbar?

	Ja	Nein
regulär	☐	☐
kontextfrei	☐	☐
kontextsensitiv	☐	☐
entscheidbar	☐	☐
rekursiv aufzählbar	☐	☐

(2 Punkte)

Lösung:

	Ja	Nein
regulär	☐	☒
kontextfrei	☐	☒
kontextsensitiv	☒	☐
entscheidbar	☒	☐
rekursiv aufzählbar	☒	☐

4.) Sei $A \leq_p B$ (wobei A und B in **NP** sein können, aber nicht müssen). Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A und B handelt, und/oder abhängig von der Lösung bisher unbewiesener Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)

Begründen Sie Ihre Antwort.

- Wenn A **NP**-vollständig ist, so ist auch B **NP**-vollständig.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: Damit diese Aussage zutrifft, muss B in **NP** liegen. B kann aber auch durchaus schwieriger sein, sogar nicht rekursiv aufzählbar.

- B ist in **P** und A ist **NP**-vollständig.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: Es wäre möglich dass $P = NP$.

- B ist in **P**, und das Komplement von A ist nicht in **P**.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☒ keinesfalls ☐ vielleicht

  Lösung: **P** ist unter Komplement abgeschlossen.

(6 Punkte)

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist immer rekursiv aufzählbar.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Kontextfreie Sprachen sind eine echte Teilmenge der rekursiven Sprachen, deren Komplement rekursiv aufzählbar ist.

- Die Eigenschaft $P = \{\}$ ist nach dem Satz von Rice unentscheidbar.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: $P = \{\}$ ist trivial und damit, nach dem Satz von Rice entscheidbar.

- Ist L regulär, so ist jede Teilmenge von L regulär.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Gegenbeispiel: $\{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\} \subset \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$

(6 Punkte)