TIL Tutorium

Themenbereiche des 1. Übungsblatts

Marek Sefranek und Alexander Woda

E192 Institut für Logic and Computation

Inhalte

Satz von Rice

Satz von Rice - Definition

Jede nicht triviale Eigenschaft der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist unentscheidbar.

Satz von Rice - Eigenschaft

- Eine Eigenschaft P beschreibt eine Teilmenge der rekursiv aufzählbaren Sprachen.
- Liegt eine Sprache L in P, so ist P eine Eigenschaft von L.
- P ist eine triviale Eigenschaft, wenn sie auf alle oder keine rekursiv aufzählbare Sprache zutrifft.

Satz von Rice - Frage 1

Hält die Turingmaschine in einem Endzustand, wenn sie mit leerem Band gestartet wird?

Satz von Rice - Frage 1

Hält die Turingmaschine in einem Endzustand, wenn sie mit leerem Band gestartet wird?

Nicht entscheidbar

Satz von Rice - Frage 1

Hält die Turingmaschine in einem Endzustand, wenn sie mit leerem Band gestartet wird?

Nicht entscheidbar, weil die Eigenschaft $P = \{ L \mid \epsilon \in L \}$ nicht trivial ist.

Satz von Rice - Frage 1

Hält die Turingmaschine in einem Endzustand, wenn sie mit leerem Band gestartet wird?

Nicht entscheidbar, weil die Eigenschaft $P = \{ L \mid \epsilon \in L \}$ nicht trivial ist.

Beispiel: $\{\epsilon\} \in P$
Gegenbeispiel: $\{\underline{1}\} \notin P$ mit $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$

Satz von Rice - Frage 2

Wird die Sprache L von genau einer Turingmaschine akzeptiert?

Satz von Rice - Frage 2

Wird die Sprache L von genau einer Turingmaschine akzeptiert?

Entscheidbar

Satz von Rice - Frage 2

Wird die Sprache L von genau einer Turingmaschine akzeptiert?

Entscheidbar, weil die Eigenschaft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache zutrifft ($P = \{\}$) und somit trivial ist.

Satz von Rice - Frage 2

Wird die Sprache L von genau einer Turingmaschine akzeptiert?

Entscheidbar, weil die Eigenschaft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache zutrifft ($P = \{\}$) und somit trivial ist.

Für jede rekursiv aufzählbare Sprache gibt es beliebig viele Turingmaschinen. Aus einer konkreten Turingmaschine lassen sich zum Beispiel unendlich viele weitere konstruieren, die die gleiche Sprache beschreiben indem man unerreichbare Zustände hinzufügt.

Satz von Rice - Frage 3

Enthält die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ein Wort, das in weniger als 1000 Schritten von M akzeptiert wird?

Satz von Rice - Frage 3

Enthält die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ein Wort, das in weniger als 1000 Schritten von M akzeptiert wird?

Entscheidbar

Satz von Rice - Frage 3

Enthält die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ein Wort, das in weniger als 1000 Schritten von M akzeptiert wird?

Entscheidbar, aber der Satz von Rice ist nicht anwendbar, weil es sich um keine Eigenschaft der Sprache handelt.

Satz von Rice - Frage 3

Enthält die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ein Wort, das in weniger als 1000 Schritten von M akzeptiert wird?

Entscheidbar, aber der Satz von Rice ist nicht anwendbar, weil es sich um keine Eigenschaft der Sprache handelt.

Wir können einen naiven Entscheidungsalgorithmus geben: Wir betrachten alle Wörter über dem Alphabet Σ, deren Länge kürzer als 1000 Zeichen ist. Hält die Maschine nach höchstens 999 Schritten, so kann mit ”Ja” geantwortet werden und ansonsten ”Nein”.

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit - Frage 1

Ist $L \cup \overline{L}$ rekursiv aufzählbar, so sind auch L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar.

Entscheidbarkeit - Frage 1

Ist $L \cup \overline{L}$ rekursiv aufzählbar, so sind auch L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar.

Falsch

Entscheidbarkeit - Frage 1

Ist $L \cup \overline{L}$ rekursiv aufzählbar, so sind auch L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar.

Falsch, da $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$ ist (regulär und somit jedenfalls rekursiv aufzählbar). Es kann kein Rückschluss auf L und $\overline{L}$ getroffen werden. Beispielsweise, wird das Halteproblem betrachtet, dessen Komplement nicht rekursiv aufzählbar ist.

Entscheidbarkeit - Frage 2

Falls $A \leq PCP$ und $\overline{A} \leq PCP$, dann ist A entscheidbar.

Entscheidbarkeit - Frage 2

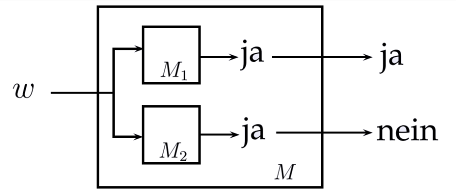
Falls $A \leq PCP$ und $\overline{A} \leq PCP$, dann ist A entscheidbar.

Richtig

Entscheidbarkeit - Frage 2

Falls $A \leq PCP$ und $\overline{A} \leq PCP$, dann ist A entscheidbar.

Richtig, da aus $A \leq PCP$ folgt, dass A rekursiv aufzählbar ist, und aus $\overline{A} \leq PCP$, dass $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar ist. Damit ist A laut Definition entscheidbar.



Entscheidbarkeit - Frage 3

Es gibt unentscheidbare Sprachen über $\Sigma = \{\underline{a}\}$.

Entscheidbarkeit - Frage 3

Es gibt unentscheidbare Sprachen über $\Sigma = \{\underline{a}\}$.

Richtig

Entscheidbarkeit - Frage 3

Es gibt unentscheidbare Sprachen über $\Sigma = \{\underline{a}\}$.

Richtig, da ein Alphabet $|\ \Sigma\ | = 1$ genauso ausdruckskräftig ist wie ein Alphabet $|\ \Sigma'\ | > 1$. Intuitiv gesprochen ist es möglich, jedes mögliche Wort über Σ' mit einem Wort aus Σ zu codieren.

Entscheidbarkeit - Frage 3

Es gibt unentscheidbare Sprachen über $\Sigma = \{\underline{a}\}$.

Richtig, da ein Alphabet $|\ \Sigma\ | = 1$ genauso ausdruckskräftig ist wie ein Alphabet $|\ \Sigma'\ | > 1$. Intuitiv gesprochen ist es möglich, jedes mögliche Wort über Σ' mit einem Wort aus Σ zu codieren.

Somit ist Σ^* abzählbar (unendlich) und die Menge aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ überabzählbar. Da es nur abzählbar viele Turingmaschinen gibt, muss es unentscheidbare Sprachen über Σ geben.

Pumping Lemma

Pumping Lemma - Definition:

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

Sei L eine unendliche reguläre Sprache. Dann gibt es eine (nur von L abhängige) Schranke $m > 0$ so, dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq m$ Wörter x, y, z so existieren, dass

$$w = xyz \qquad \text{mit } |xy| \leq m \text{ und } |y| > 0$$

sowie

$$w_i = xy^iz \in L \qquad \text{für alle } i \geq 0.$$

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w =$$

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}\ \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r}\ \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}\ \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r}\ \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$.

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}\ \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r}\ \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit kann y nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen.

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}\ \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r}\ \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit kann y nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o} \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r} \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit kann y nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten. Wählen wir aber z.B. $i = 0$, bekommen wir $\underline{a}^{m-|y|}\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{a}^m\underline{b}$, was nicht in L liegt. Widerspruch!

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}\ \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r}\ \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit kann y nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten. Wählen wir aber z.B. $i = 0$, bekommen wir $\underline{a}^{m-|y|}\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{a}^m\underline{b}$, was nicht in L liegt. Widerspruch!

Frage: Was ist mit $L' = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^*\}$?

Pumping Lemma - Beispiel 1

$L = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^+\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o} \underbrace{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}}_{pqp^r} \underbrace{\underline{a}^m \underline{b}}_{o}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 5 \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit kann y nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten. Wählen wir aber z.B. $i = 0$, bekommen wir $\underline{a}^{m-|y|}\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}\,\underline{a}^m\underline{b}$, was nicht in L liegt. Widerspruch!

Frage: Was ist mit $L' = \{opqp^r o \mid o, p, q \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^*\}$? Hier ist $L' = \{\underline{a}, \underline{b}\}^*$ und somit die reguläre Allsprache über $\Sigma = \{\underline{a}, \underline{b}\}$.

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w =$$

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = (\underline{a}\,\underline{b})^m(\underline{b}\,\underline{a})^m.$$

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = (\underline{a}\,\underline{b})^m(\underline{b}\,\underline{a})^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 4m \geq m$.

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = (\underline{a}\,\underline{b})^m(\underline{b}\,\underline{a})^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 4m \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit muss y aus mindestens einem Symbol $\underline{a}$ oder $\underline{b}$ bestehen.

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = (\underline{a}\,\underline{b})^m(\underline{b}\,\underline{a})^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 4m \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit muss y aus mindestens einem Symbol $\underline{a}$ oder $\underline{b}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Pumping Lemma - Beispiel 2

$L = \{(\underline{a}\,\underline{b})^n(\underline{b}\,\underline{a})^n \mid n \geq 0\}$ ist **nicht regulär**.

Beweis: Angenommen, L ist regulär. Für beliebiges m (Konstante aus dem Pumping Lemma) wähle z.B. das Wort

$$w = (\underline{a}\,\underline{b})^m(\underline{b}\,\underline{a})^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 4m \geq m$. Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Somit muss y aus mindestens einem Symbol $\underline{a}$ oder $\underline{b}$ bestehen. Nach dem Pumping Lemma muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten. Wählen wir aber z.B. $i = 0$, bekommen wir jedenfalls ein Wort, in dem das Teilwort $\underline{b}\,\underline{b}$ nicht mehr exakt in der Mitte steht, und was somit nicht in L liegen kann. Widerspruch!

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine reguläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine reguläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine regulär Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär.

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine reguläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär. Dann haben wir

$$B = L \setminus A$$

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine regulära Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär. Dann haben wir

$$B = L \setminus A = L \cap \overline{A}$$

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine reguläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär. Dann haben wir

$$B = L \setminus A = L \cap \overline{A} = \overline{\overline{(L \cap \overline{A})}}$$

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine regeläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär. Dann haben wir

$$B = L \setminus A = L \cap \overline{A} = \overline{\overline{(L \cap \overline{A})}} = \overline{(\overline{L} \cup A)},$$

Pumping Lemma - Vereinigung zweier disjunkter Sprachen

Gegeben: Eine reguläre Sprache A und eine nicht reguläre Sprache B, wobei $A \cap B = \{\}$, d.h. A und B sind disjunkt.

Behauptung: Die Vereinigung $L = A \cup B$ der Sprachen A und B ist ebenfalls nicht regulär.

Beweis: Angenommen $L = A \cup B$ ist regulär. Dann haben wir

$$B = L \setminus A = L \cap \overline{A} = \overline{\overline{(L \cap \overline{A})}} = \overline{(\overline{L} \cup A)},$$

was regulär ist, da reguläre Sprachen unter Komplement und Vereinigung abgeschlossen sind. Widerspruch!

Fragen?