Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2020W)
Lösungsvorschlag

Anmerkung: Zeichen mit reinem Symbolcharakter sind im Folgenden unterstrichen. Sie können, müssen das aber nicht in Ihrer Ausarbeitung beibehalten.

Aufgabe 1.1 Sei die Sprache D_2 gegeben durch folgende induktive Definition: D_2 ist die kleinste Menge, sodass

- $\varepsilon \in D_2$
- $w \in D_2 \Rightarrow \underline{[}w\underline{]} \in D_2, \underline{(}w\underline{)} \in D_2$
- $w_1, w_2 \in D_2 \Rightarrow w_1 w_2 \in D_2$

(*Anmerkung*: D_2 beschreibt die Sprache der wohlgeformten Klammerausdrücke über dem Alphabet $\{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}$. Beispielsweise gilt $\underline{[}\underline{]}\underline{(}\underline{[}\underline{]}\underline{)} \in D_2$, $\underline{(}\underline{]}\underline{)} \notin D_2$)
Geben Sie eine deterministische Turingmaschine M an, welche die Sprache D_2 akzeptiert, und erläutern Sie (jeweils) auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine. Es steht Ihnen dabei frei, ob Sie das auf Folie 26 definierte Modell (mit einem Band) oder das auf Folie 72 definierte Modell (mit zwei Bändern, einem Eingabe- und einem Arbeitsband, wobei M in diesem Fall die Kellerautomatenbedingung erfüllen soll) verwenden (oder beide :-)).

Lösung
Variante 1:
Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 4\}, \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}, \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}, X, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$$

wobei

δ	$\underline{[}$	$\underline{]}$	$\underline{(}$	$\underline{)}$	X	B
q_0	$(q_0, \underline{[}, R)$	(q_1, X, L)	$(q_0, \underline{(}, R)$	(q_2, X, L)	(q_0, X, R)	(q_3, B, L)
q_1	(q_0, X, R)				(q_1, X, L)	
q_2			(q_0, X, R)		(q_2, X, L)	
q_3					(q_3, B, L)	(q_4, B, S)
q_4						

Idee:
q_0: Der Lese-/Schreibkopf überliest alle Symbole $\underline{[}$ bzw. $\underline{(}$ bis er das erste Symbol $\underline{]}$ bzw. $\underline{)}$ erreicht; dieses wird mit X überschrieben.
q_1, q_2: Über gegebenenfalls bereits mit X markierte Zellen wird die passende öffnende Klammer ebenfalls mit X überschrieben.
q_3: Hier wird sicher gestellt, dass sich nur noch mit X markierte Zellen auf dem Eingabeband befinden. Ist dies der Fall, so wechselt die Maschine in den Zustand q_4, den Endzustand.
q_4: Endzustand; Die Maschine erreicht diesen Zustand nur, wenn zu Beginn des Laufes ein wohlgeformter Klammerausdruck am Eingabeband war, und akzeptiert somit die Eingabe.

Variante 2:
Wir definieren nun eine (deterministische) Turingmaschine

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}, \{A, C, Z_0, B\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_f\})$$

in Normalform, welche D_2 akzeptiert; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

1 : $\delta(q_0, \underline{[}, B) = (q_0, A, R, R)$
2 : $\delta(q_0, \underline{(}, B) = (q_0, C, R, R)$
3 : $\delta(q_0, \underline{]}, B) = (q_1, B, S, L)$
4 : $\delta(q_1, \underline{]}, A) = (q_0, B, R, S)$
5 : $\delta(q_0, \underline{)}, B) = (q_1, B, S, L)$
6 : $\delta(q_1, \underline{)}, C) = (q_0, B, R, S)$
7 : $\delta(q_0, Z_2, B) = (q_2, B, S, L)$
8 : $\delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_f, Z_0, S, R)$

Erläuterung:

1 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{[}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

2 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{(}$ wird ein Symbol C in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$3, 4$: Für jedes eingelesene Symbol $\underline{]}$ wird ein Symbol A im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

$5, 6$: Für jedes eingelesene Symbol $\underline{)}$ wird ein Symbol C im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

$7, 8$: Wird Z_2 auf dem Eingabeband (d.h., das Ende der Eingabe) erreicht, so sollte das Arbeitsband leer sein. M geht dann in den (einzigen) Endzustand q_f über und akzeptiert somit die Eingabe.

Aufgabe 1.2 Im Folgenden bezeichnet PCP das Post'sche Korrespondenzproblem (s. Folie 65 f.)

a) Geben Sie für die folgenden PCPs eine Lösung an, oder begründen Sie deren Nichtlösbarkeit:
   (1) $K_1 = ((100, 0), (01, 001), (01, 01011))$
   (2) $K_2 = ((01, 01011), (01, 001), (000, 0), (1001, 001))$
   (3) $K_3 = ((01, 01011), (01, 10), (11, 00), (111, 1), (1100, 0011), (101, 0))$
   (4) $K_4 = ((01, 10), (01, 01011), (11, 00), (00, 11), (101, 0), (111, 1))$

b) Ist das unäre PCP (über einem ein-elementigen Alphabet, also $(x_1, y_1), ..., (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \{\underline{0}\}^+$, $1 \leq i \leq k$) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) (1) K_1 besitzt die Lösung (3,2,1,1)
   (2) K_2 besitzt die Lösung (3,4,2,1,4)
   (3) K_3 ist nicht lösbar. Es gibt nur zwei mögliche Anfänge, die beide nicht zielführend sind:
      - mit (111,1) ginge es nicht sinnvoll weiter
      - mit (01,01011) würde es zwar weitergehen, allerdings hat jedes weitere Paar oben maximal soviele Symbole 0 wie unten. Es würde also immer mindestens ein Symbol 0 unten übrig bleiben.
   (4) K_4 besitzt die Lösung (2,2,5,1,5,4,6)

b) Ja, das unäre PCP ist entscheidbar, denn:
   – Es gibt keine Lösung, wenn für alle $i \leq k$ entweder $|x_i| < |y_i|$ (die rechte Seite ist zu lang) oder $|x_i| > |y_i|$ (die linke Seite ist zu lang).
   – Gibt es ein $i \leq k$ mit $|x_i| = |y_i|$, dann ist das die Lösung.
   – Sonst gibt es nur noch folgende Möglichkeit: Es gibt ein $|x_i| > |y_i|$ und ein $|x_j| < |y_j|$. Dann ist $x_i^{|y_j|-|x_j|} x_j^{|x_i|-|y_i|} = y_i^{|y_j|-|x_j|} y_j^{|x_i|-|y_i|}$ eine Lösung.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern möglich, verwenden Sie dafür den *Satz von Rice* (und geben Sie, im Falle einer nicht trivialen Eigenschaft, auch immer ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an). (Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Ist das Komplement der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache rekursiv aufzählbar?

b) Ist die Codierung der Turingmaschine, welche die Sprache L akzeptiert, weniger als 1000 Symbole lang?

c) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L über Σ, dass $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$?

d) Macht eine Turingmaschine mehr als 100 Schritte, wenn sie mit dem leeren Band gestartet wird?

e) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache (mindestens) ein Palindrom?

f) Wird die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L auch von einem endlichen Automaten akzeptiert?

Lösung

a) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid L, \overline{L} \text{ sind rekursiv aufzählbar}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\} \in P$ aber $L_u \notin P$. (L_u bezeichnet das Halteproblem, siehe z.B. Folie 49.) Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

b) **Entscheidbar.** Die Menge aller Codes von Turingmaschinen, welche weniger als 1000 Zeichen umfassen ist endlich, und daher entscheidbar.

c) **Entscheidbar.** Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf alle rekursiv aufzählbare Sprachen L zu, dass $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$. Die Frage kann also immer mit "ja" beantwortet werden, und ist somit entscheidbar.

d) **Entscheidbar**. Dieses Problem ist entscheidbar, ein einfacher Entscheidungsalgorithmus ist z.B. folgender: Lasse die Maschine mit leerem Band 101 Schritte laufen. Ist dies möglich, so antworte "ja", andernfalls (d.h., hält die Maschine bereits früher) antworte "nein". (Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da es sich nicht um eine Eigenschaft der von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen handelt, sondern um die Turingmaschinen selbst.)

e) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid L \text{ enthält ein Palindrom}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\underline{0}\} \in P$ aber $\{\underline{10}\} \notin P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

f) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: $P = \{L \mid L \text{ ist regulär}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\underline{0}\} \in P$ aber $L_u \notin P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist $L \cup \overline{L}$ rekursiv aufzählbar, so sind auch L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar.

b) Für jede unentscheidbare Sprache L gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.

c) Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.

d) Ist eine Sprache L entscheidbar, so ist auch jede Teilmenge von L entscheidbar.

e) Sei $A \leq B$ und B rekursiv aufzählbar, so ist auch das Komplement von A rekursiv aufzählbar.

f) Sei $A \leq B$ und B entscheidbar, so ist auch das Komplement von A entscheidbar.

g) Falls $A \leq PCP$ und $\overline{A} \leq PCP$, dann ist A entscheidbar. (PCP bezeichnet das Post'sche Korrespondenzproblem.)

Lösung

a) **Falsch**. $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$, also regulär und damit jedenfalls rekursiv aufzählbar. Daraus kann man aber nicht auf L oder $\overline{L}$ schließen. (L könnte z.B. das Halteproblem sein, dessen Komplement nicht rekursiv aufzählbar ist.)

b) **Richtig.** Denn für ein $w \notin L$ ist $\{w\} \cup L$ unentscheidbar, wenn L unentscheidbar ist. Ein solches w existiert immer: $L \subset \Sigma^*$, da Σ^* entscheidbar ist. (Es gibt sogar unendlich viele Elemente in $\overline{L} = \Sigma^* - L$, da $\overline{L}$ sonst endlich und damit entscheidbar wäre, was aber im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von L steht.)

c) **Richtig.** Ja, jede unentscheidbare Sprache enthält eine endliche Teilmenge, und endliche Mengen sind immer entscheidbar.

d) **Falsch**. Gegenbeispiel: $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^*$ ist regulär und damit sicher entscheidbar. Eine Teilmenge davon ist allerdings auch z.B. das Halteproblem, welches unentscheidbar ist.

e) **Falsch.** Diese Aussage gilt nicht im Allgemeinen. Nachdem B rekursiv aufzählbar ist, muss es auch A sein. Das sagt aber noch nichts über das Komplement von A aus. $\overline{A}$ könnte auch rekursiv aufzählbar sein, dann wären A wie auch $\overline{A}$ rekursiv (entscheidbar). A könnte aber auch ein Komplement haben, welches selbst nicht rekursiv aufzählbar ist.

f) **Richtig.** Da B rekursiv (entscheidbar) ist, und A auf B reduziert werden kann, muss A auch entscheidbar sein. Nachdem entscheidbare Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, muss auch $\overline{A}$ entscheidbar sein.

g) **Richtig**. Aus $A \leq PCP$ folgt, dass A rekursiv aufzählbar ist, aus $\overline{A} \leq PCP$ folgt, dass $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar ist. Damit ist A laut Definition (Folie 41) entscheidbar.

Aufgabe 1.5 Sind folgende Sprachen regulär? Falls ja, so geben Sie einen entsprechenden deterministischen endlichen Automaten (oder regulären Ausdruck) an; falls nein, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen.
(*Hinweis*: 1 der folgenden 4 Sprachen ist regulär.)

a) $\{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{n \bmod 3} \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{0}}^n \underline{\mathtt{1}}^m \mid n > m\}$

b) $L_{ADD} = \{u \underline{+} v \underline{=} w \mid u, v, w \in \{\underline{\mathtt{0}}, \ldots, \underline{\mathtt{9}}\}^* \text{ und } z(u) + z(v) = z(w)\}$, wobei $z(x)$ die durch die Darstellung x repräsentierte Zahl darstellt.

(L_{ADD} enthält also z.B. die Wörter $\underline{\mathtt{11}}\underline{+}\underline{\mathtt{7}}\underline{=}\underline{\mathtt{18}}$ und $\underline{\mathtt{100}}\underline{+}\underline{\mathtt{11}}\underline{=}\underline{\mathtt{111}}$, hingegen ist z.B. $\underline{\mathtt{1}}\underline{+}\underline{\mathtt{1}}\underline{=}\underline{\mathtt{10}}$ nicht in L_{ADD}.)

c) $\{yzy^r \mid y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$ (*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

d) $\{yy^ry \mid y \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$

Lösung

a) **Nicht Regulär**. Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{0}}^m \underline{\mathtt{1}}^{m-1}$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m - 1 \geq m$.

Nach dem Pumping Lemma kann w in xyz so aufgeteilt werden, dass $|xy| \leq m$, $|y| > 0$ und für alle $i \geq 0$ gilt: $xy^iz \in L$.

Nachdem $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{0}}$ bestehen, wobei $y = \underline{\mathtt{0}}^k$ ist für $1 \leq k \leq m$.

Wählen wir nun z.B. $i = 0$, so müsste auch $\underline{\mathtt{0}}^{m-k}\underline{\mathtt{1}}^{m-1}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! (Denn offensichtlich fällt dadurch mindestens ein Symbol $\underline{\mathtt{0}}$ in der ersten Worthälfte weg, wodurch diese nun nicht mehr aus mehr Symbolen besteht, als die zweite Worthälfte) Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

(*Anmerkung*: Hier ein Wort aus der Menge $\{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{n \bmod 3} \mid n \geq 0\}$ zu wählen ist nicht zielführend, da diese regulär ist, wodurch damit kein Widerspruch erzielt werden kann.)

b) **Nicht Regulär**. Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{1}}^m\underline{+}\underline{\mathtt{0}}\underline{=}\underline{\mathtt{1}}^m$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 3 > m$.

Nach dem Pumping Lemma kann w in xyz so aufgeteilt werden, dass $|xy| \leq m$, $|y| > 0$ und für alle $i \geq 0$ gilt: $xy^iz \in L$.

Nachdem $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{1}}$ bestehen, wobei $y = \underline{\mathtt{1}}^k$ ist für $1 \leq k \leq m$.

Wählen wir nun z.B. $i = 0$, so müsste auch $\underline{\mathtt{1}}^{m-k}\underline{+}\underline{\mathtt{0}}\underline{=}\underline{\mathtt{1}}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! (Denn offensichtlich ist $z(\underline{\mathtt{1}}^m)$ nicht die Summe von $z(\underline{\mathtt{1}}^{m-k}) + z(\underline{\mathtt{0}})$.) Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

c) **Regulär**. $\{w = yzy^r \mid y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\} = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*$ und damit jedenfalls eine reguläre Sprache, welche z.B. von folgendem DEA akzeptiert wird:

$$A = (\{q\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{(q, \underline{\mathtt{a}}, q), (q, \underline{\mathtt{b}}, q), (q, \underline{\mathtt{c}}, q)\}, q, \{q\})$$

(*Anmerkung*: Auf den ersten Blick könnte man meinen, es handelt sich hier um eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache. Bei näherer Betrachtung sollte aber auffallen, dass $y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*$ sind. Somit kann man natürlich auch $w = yzy^r$ als $w = z$ lesen, wenn $y = \varepsilon$.)

d) **Nicht regulär**. Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}^{2m}\underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{b}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 6m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}^{2m}\underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{b}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $xy^0z = \underline{\mathtt{a}}^{m-|y|}\underline{\mathtt{b}}^{2m}\underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{b}}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.