12.04.2021

Sonntag, 16. Jänner 2022 20:31

1.) Sei $L = \{p\underline{a}^{2k}q \mid p,q \in \{\underline{b},\underline{c}\}^*,\ |p| = |q|,\ k \geq 1\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

Ang. L ist regulär. m = beliebige Konst.

$w = b^m aac^m$

Dann gilt $w \in L$ & $|w| = 2m+2$

w in xyz aufteilen, sodass $|xy| \leq m$ & $|y| > 0$. y kann nur aus Symbolen b bestehen.

Es muss $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten. Wenn $i = 2$ ist $|p| \neq |q|$ und somit nicht mehr ein Wort aus L. Weil $b^{m+|y|}aac^m$

2.) Sei $L = \{\underline{a}^{2n}\underline{b}^k\underline{c}^{4k}\underline{d}^n \mid n,k \geq 0\}$.

([ ])

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.
(D_n bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschiedenen Klammerpaaren.)

(4 Punkte)

$L = h(D_2, \underbrace{\{(\}^*, \{[\}^*, \{]\}^*, \{)\}^*}_{R})$

$h: \{(,),[,]\}^* \to \{a,b,c,d\}^*$

$h(() = aa,\ h()) = d,\ h([) = b,\ h(]) = cccc$

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt.

$G = \langle \{S, A\}, \{a,b,c,d\}, P, S]$

$P = \{S \to A \mid aaSd \mid \varepsilon,\ A \to \varepsilon \mid bAcccc\}$

gehört das da hin?

c) Ist L in polynomieller Zeit von einer nicht-deterministischen Turingmaschine (NTM) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Kontextfreie Sprachen liegen in NP daher sind sie in polynomieller Zeit entscheidbar

$CF \subseteq NP$

nicht-det. TM kann L in polynomieller Zeit entscheiden, wenn L in NP

3.)

a) Argumentieren Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass folgendes Problem nicht entscheidbar ist:

?

> Wird die von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{1}\}$ auch von einem Kellerautomaten akzeptiert?

Geben Sie dabei insbesondere eine konkrete Sprache L_1 an, die die entsprechende Eigenschaft hat, sowie eine konkrete Sprache L_2, die die entsprechende Eigenschaft nicht hat.

$L_1 = \{1\}^*$ .. Allsprache $\Rightarrow$ Es gibt Kellerautomaten, der diese rek. aufz. Sprache akzeptiert

L_2 = Halteproblem (Komplement d. Allsprache) nicht akzeptiert

$\hookrightarrow$ gilt nicht für alle Sprachen also nicht trivial

b) Geben Sie für die unter a) gefundenen Sprachen L_1 und L_2 jeweils an, ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar und/oder rekursiv aufzählbar sind.
(Es reicht z.B., *sämtliche* Markierungen in einer der untenstehenden ähnlichen Tabelle vorzunehmen.)

		regulär	kontextfrei	kontextsensitiv	rekursiv	rekursiv aufzählbar
Allsprache	L_1	x	x	x	x	x
Halteprobl.	L_2					x

?

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.) $\bar{A}$ höchst so schwer wie L_u

a) Falls $A \leq L_u$ und $\overline{A} \leq L_u$, dann ist A entscheidbar. (L_u bezeichnet das Halteproblem.)

b) Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn das Komplement von B endlich ist, dann ist $A \in \mathbf{P}$.

c) Wenn $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co\text{-}NP}$ dann gilt: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(6 Punkte)

a) Ja. Wenn $A \leq L_u$ & $\bar{A} \leq L_u$ sind A & $\bar{A}$ rek. aufz. Und weil rek. unter Komplement abgeschl. ist daher auch rek.

b) Ja, Wenn $\bar{B}$ endlich ist, ist $\bar{B}$ regulär. Reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschl. somit ist B in P. Daher ist $A \in P$.

c) Ja, $NP \neq$ CO-NP bedeutet, dass NP nicht unter Komplement abgeschl. ist. Somit kann $P = NP$ nicht gelten weil P unter kompl. abgeschl. ist, NP aber nicht.

5.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur – gemeinsam für beide Sätze – und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Devi ist eine Studierende, die jede Prüfung außer *Analysis_2* besteht.
(*Devi is a student who passes every exam except Analysis_2.*)

(2) Manche Prüfung wird nur von genau einer Studierenden bestanden.
(*Some exams are only passed by exactly one student.*)

(7 Punkte)

1) $\langle \{S, P, B\}, \{d, a\}, \{\} \rangle$

Prädikatensymbole:

$S(x)$ ... x ist eine Studierende 1-stellig

$P(x)$ .. x ist eine Prüfung 1-stellig

$B(x,y)$ .. x besteht y 2-stellig

Konstantensymbole

d ... Devi a ... Ana-2

PL-Formel: $\forall x[\text{Prüfung}(x) \supset (\text{Student}(d) \land ((B(d,x) \land x \neq a) \lor (\neg B(d,x) \land x = a)))]$

2) $\langle \{S, P, B\}, \{\}, \{\} \rangle$

Präd. Sym.

$S(x)$ .. x ist Studierende

$P(x)$ ... x ist Prüfung

$B(x,y)$ ... x besteht y

PL-F: $\exists x(P(x) \land \forall y((S(y) \land B(y,x)) \supset \neg \exists z(S(z) \land B(z,x) \land z \neq y))$