Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 4 (2021W)

Allgemeine Hinweise: Nummerieren Sie alle auftretenden Formeln in Tableau-Beweisen und geben Sie entsprechende Herkunftshinweise bei allen Regelanwendungen an. Außerdem sind γ- und δ-Formeln jeweils als solche zu markieren. Beachten Sie die Notationsvereinbarungen auf Folie 321.

Aufgabe 4.1

Für jede der folgenden Behauptungen: Finden Sie entweder einen Tableau-Beweis oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $\forall x \neg[\neg P(f(a), x) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)]$ ist unerfüllbar.

b) Aus $\forall x(\exists y Q(x, y) \supset P(f(x)))$ und $\forall x f(g(x)) = x$ folgt $\exists y \exists x \neg Q(y, x) \vee P(c)$.

c) $\forall z \exists x(P(x, f(z)) \supset \forall y P(y, f(z)))$ und $\forall x f(x) = a$ folgt $\exists x P(x, a)$.

Aufgabe 4.2

Sind folgende Konsequenzbehauptungen richtig? Im positiven Fall ist ein Tableau-Beweis anzugeben, im negativen Fall ein vollständig spezifiziertes Gegenbeispiel. (Siehe Folie 409 für entsprechende PL-Formeln.)

a) Jede serielle und transititive Relation ist schwach gerichtet.

b) Jede symmetrische Relation ist schwach gerichtet.

Aufgabe 4.3

Betrachten Sie folgende Formeln (Axiome) zum Datentyp $\mathbb{B}$ aus Aufgabe 3.2.
(Wir lassen alle Unterstreichungen weg und schreiben $s \neq t$ für $\neg s = t$.)
A1: $\forall x \forall y f(x, y) \neq \bullet$
A2: $\forall x \forall y \forall z g(x, y, z) \neq \bullet$
A3: $\forall x \forall y \forall u \forall v \forall w f(x, y) \neq g(u, v, w)$
A4: $\forall x[x = \bullet \vee (\exists y \exists z f(y, z) = x \vee \exists u \exists v \exists w g(u, v, w) = x)]$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{A1, A2, A3, A4\}$ keine vollständige Axiomatisierung der Theorie $Th(\mathbb{B})$ ist, indem Sie ein Modell von $\mathcal{B}$ angeben, dessen Gegenstandsbereich aus nur endlich vielen Elementen besteht (während es natürlich unendlich viele verschiedene 2-3-Bäume gibt).

b) Geben Sie eine Formel F über der Signatur $\Sigma_{\mathbb{B}}$ an, die nicht logisch aus $\mathcal{B}$ folgt, obwohl sie über dem Datentyp $\mathbb{B}$ gültig ist. Begründen Sie Ihre Behauptung durch Angabe eines Gegenbeispiels zur Konsequenzbehauptung $\mathcal{B} \models F$.

c) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül, dass $\forall x \forall y \exists z(f(x, y) \neq f(y, x) \wedge x = f(z, z) \supset y \neq f(z, z))$ logisch gültig ist (und daher keine spezifischen Annahmen aus $Th(\mathbb{B})$ für den Beweis benötigt).

Aufgabe 4.4

Sind die folgenden Korrektheitsaussagen wahr oder falsch hinsichtlich partieller bzw. totaler Korrektheit? Argumentieren Sie informell mit Hilfe der Definition der Semantik von Korrektheitsaussagen. Es ist keine Ableitung im Hoare-Kalkül notwendig.

a) $\{x = x\}$ $x \leftarrow 2x$ $\{x = 2x\}$

b) $\{y = z\}$ `begin` $x \leftarrow 2y$`;` $x \leftarrow 2x$ `end` $\{x = 4z\}$

c) $\{x = 0\}$ `if` $x > y$ `then` $x \leftarrow x - y$ `else` $x \leftarrow y - x$ $\{x > 0\}$

d) $\{x = y\}$ `while` $y > 0$ `do` $y \leftarrow x$ $\{x \leq 0\}$

e) $\{x = y\}$ `while` $y > 0$ `do` $y \leftarrow x$ $\{x < 0\}$

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie mit Hilfe des Hoare-Kalküls, dass die folgende Korrektheitsaussage wahr hinsichtlich totaler Korrektheit („total korrekt") ist. Verwenden Sie die Formel $\boldsymbol{b = 2^{a+1} \wedge 0 < b \leq 2n}$ als Invariante und den Ausdruck $\boldsymbol{n - b}$ als Variante. Welche Funktion berechnet das Programm, wenn man a als das Ergebnis des Programms betrachtet?

$\{n \geq 1\}$
```
begin
  begin
    a ← 0;
    b ← 2
  end;
  while b ≤ n do
    begin
      a ← a + 1;
      b ← b + b
    end
end
```
$\{2^a \leq n < 2^{a+1}\}$