Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2021W)
Lösungsvorschlag

Anmerkung: Zeichen mit reinem Symbolcharakter sind im Folgenden unterstrichen. Sie können, müssen das aber nicht in Ihrer Ausarbeitung beibehalten.

Aufgabe 1.1 Gegeben sei folgende (deterministische) Turingmaschine M:

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 4\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{0}, \underline{1}, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$$

wobei

δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	(q_2, X, R)		(q_0, Y, R)	(q_4, B, S)
q_1	$(q_1, \underline{0}, R)$	(q_3, Y, L)		(q_1, Y, R)	
q_2	(q_3, Y, L)	$(q_2, \underline{1}, R)$		(q_2, Y, R)	
q_3	$(q_3, \underline{0}, L)$	$(q_3, \underline{1}, L)$	(q_0, X, R)	(q_3, Y, L)	
q_4					

a) Geben Sie $L(M)$ (also die Sprache, die von M akzeptiert wird) an.

b) Geben Sie eine Turingmaschine M' nach der Definition von Folie 72 an, welche dieselbe Sprache akzeptiert ($L(M') = L(M)$). Ihre Maschine M' sollte dabei die Kellerautomatenbedingung erfüllen. Erläutern Sie auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine.

Lösung

a) $L(M) = \{w \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \mid |w|_{\underline{0}} = |w|_{\underline{1}}\}$.

M akzeptiert also all jene Wörter über dem Alphabet $\{\underline{0}, \underline{1}\}$, in denen die Symbole $\underline{0}$ und $\underline{1}$ unabhängig der Reihenfolge gleich oft vorkommen.

b) Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M' = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A, Z_0, B\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_f\})$$

welche $L = \{w \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \mid |w|_{\underline{0}} = |w|_{\underline{1}}\}$ akzeptiert; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

1 : $\delta(q_0, Z_2, B) = (q_3, B, S, L)$
2 : $\delta(q_0, \underline{0}, B) = (q_1, A, R, R)$
3 : $\delta(q_0, \underline{1}, B) = (q_2, A, R, R)$
4 : $\delta(q_1, \underline{0}, B) = (q_1, A, R, R)$
5 : $\delta(q_1, \underline{1}, B) = (q_1, B, S, L)$
6 : $\delta(q_1, \underline{1}, A) = (q_1, B, R, S)$
7 : $\delta(q_1, \underline{1}, Z_0) = (q_0, Z_0, S, R)$
8 : $\delta(q_1, Z_2, B) = (q_3, B, S, L)$
9 : $\delta(q_2, \underline{1}, B) = (q_2, A, R, R)$
10 : $\delta(q_2, \underline{0}, B) = (q_2, B, S, L)$
11 : $\delta(q_2, \underline{0}, A) = (q_2, B, R, S)$
12 : $\delta(q_2, \underline{0}, Z_0) = (q_0, Z_0, S, R)$
13 : $\delta(q_2, Z_2, B) = (q_3, B, S, L)$
14 : $\delta(q_3, Z_2, Z_0) = (q_f, Z_0, S, R)$

Erläuterung:

1 : Das Eingabeband war leer.

2 : Für das erste eingelesene Symbol $\underline{0}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben. (Weiter bei 4)

3 : Für das erste eingelesene Symbol $\underline{1}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben. (Weiter bei 8)

4 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{0}$ wird ein weiteres Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$5, 6$: Für jedes eingelesene Symbol $\underline{1}$ wird ein Symbol A im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

7 : Am Arbeitsband müsste ein Symbol A gelöscht werden, welches jedoch (noch) nicht vorhanden ist.

9 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{1}$ wird ein weiteres Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$10, 11$: Für jedes eingelesene Symbol $\underline{0}$ wird ein Symbol A im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

12 : Am Arbeitsband müsste ein Symbol A gelöscht werden, welches jedoch (noch) nicht vorhanden ist.

$8, 13, 14$: Wird Z_2 auf dem Eingabeband (d.h., das Ende der Eingabe) erreicht, so sollte das Arbeitsband leer sein. M' geht dann in den (einzigen) Endzustand q_f über und akzeptiert somit die Eingabe.

Aufgabe 1.2 Sind die folgenden Instanzen des PCP (Post'schen Korrespondenzproblems, s. Folie 65 f.) lösbar? Falls ja, so geben Sie eine Lösung an, falls nein, begründen Sie deren Nichtlösbarkeit:

a) $K_1 = ((10111, 10), (1, 111), (10, 0))$

d) $K_2 = ((10, 1), (11, 01), (01, 0))$

c) $K_3 = ((1, 0), (0000, 0), (0, 01))$

b) $K_4 = ((10, 1), (11, 01), (01, 0), (0, 0100))$

e) $K_5 = ((10, 101), (011, 11), (101, 011))$

Lösung

a) K_1 besitzt die Lösung (1,2,2,3).

b) K_2 ist nicht lösbar. Wir beobachten, dass die linken Seiten der Paare gleich lang wie bzw. länger als die rechten Seiten sind. Sinnvollerweise kann nur mit $(10, 1)$ bzw. $(01, 0)$ begonnen werden, wodurch das zahlenmäßige Missverhältnis zwischen linker und rechter Seite der Paare nie ausgeglichen werden kann.

c) K_3 ist nicht lösbar. Das erste und das dritte Paar müssten in einer potentiellen Lösung gleich oft vorkommen. Dadurch wären aber bereits auf der rechten Seite mehr Symbole 0 als 1, was durch das zweite Paar nur noch schlimmer werden kann.

d) K_4 besitzt die Lösung (3,1,1,4).

e) K_5 ist nicht lösbar. Jede potenzielle Lösung müsste mit dem ersten Wortpaar beginnen. Wann immer aber die Sequenz der rechten Seite ein Symbol 1 Vorsprung hat, ist die einzig aussichtsreiche Fortsetzung das dritte Wortpaar, welches den Vorsprung der rechten Seite nicht aufheben kann.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern möglich, verwenden Sie dafür den *Satz von Rice* (und geben Sie, im Falle einer nicht trivialen Eigenschaft, auch immer ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an. Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache ein Wort mit gerader Länge?

b) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L über Σ, dass $L = \overline{L}$?

c) Hält eine Turingmaschine auf der leeren Eingabe in höchstens 100 Schritten?

d) Kann die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L auch als regulärer Ausdruck dargestellt werden?

e) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L über Σ, dass $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$?

Lösung

a) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid L \text{ enthält ein Wort mit gerader Länge}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B. $\{\underline{0}\underline{0}\} \in P$ aber $\{\underline{1}\} \notin P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

b) **Entscheidbar.** Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache L zu, dass $L = \overline{L}$. Die Frage kann also immer mit "nein" beantwortet werden, und ist somit entscheidbar.

c) **Entscheidbar**. Dieses Problem ist entscheidbar, ein einfacher Entscheidungsalgorithmus ist z.B. folgender: Lasse die Maschine mit leerem Band 101 Schritte laufen. Ist dies möglich, so antworte "nein", andernfalls (d.h., hält die Maschine bereits früher) antworte "ja". (Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da es sich nicht um eine Eigenschaft der von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen handelt, sondern um die Turingmaschinen selbst.)

d) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: $P = \{L \mid L \text{ ist regulär}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B. $\{\underline{0}\} \in P$ aber $\{\underline{0}^n\underline{1}^n \mid n \geq 0\} \notin P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

e) **Entscheidbar.** Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf alle rekursiv aufzählbaren Sprache L zu, dass $L \cup \overline{L} = \Sigma^*$. Die Frage kann also immer mit "ja" beantwortet werden, und ist somit entscheidbar.

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Sei $L_1 \subset \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ eine Sprache, die nicht entscheidbar ist. Dann ist auch $L_2 = \{\underline{1}w \mid w \in L_1\}$ nicht entscheidbar.

b) Seien A und B entscheidbar. Dann ist auch $A - B$ entscheidbar.
(*Hinweis:* $A - B$ bezeichnet die Mengendifferenz, auch geschrieben als $A \setminus B$)

c) Seien C und D rekursiv aufzählbar. Dann ist auch $C - D$ rekursiv aufzählbar.

d) Sei $A \subseteq B$ und B entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

e) Sei $A \leq B$ und B rekursiv, so ist auch das Komplement von A rekursiv.

f) Sei $A \leq B$, $B \leq C$ und C rekursiv aufzählbar, so gibt es eine Turingmaschine, die das Komplement von A akzeptiert.

Lösung

a) **Richtig**. Angenommen, L_2 ist entscheidbar. Dann gibt es eine Turingmaschine M_2, die L_2 entscheidet. Daraus konstruieren wir eine Maschine M_1: Wir schreiben ein Symbol $\underline{\mathtt{1}}$ vor die Eingabe und wenden dann M_2 an. Damit wäre aber auch L_1 entscheidbar, was laut Angabe nicht der Fall ist. Widerspruch, L_2 muss also auch "nicht entscheidbar" sein.

b) **Richtig.** Nachdem A und B entscheidbar sind, gibt es entsprechende Turingmaschinen M_A und M_B, welche A bzw. B entscheiden. Mit Hilfe dieser Maschinen konstruieren wir eine Turingmaschine M, die $A - B$ entscheidet. Auf einem Input w simuliert M zunächst M_A auf dieser Eingabe. Falls M_A 0 zurückgibt, gibt auch M 0 zurück. Andernfalls simuliert M die Maschine M_B auf w. Auch diese Simulation hält in jedem Fall. Gibt M_B 0 zurück, so gibt M 1 zurück. Andernfalls gibt M 0 zurück. M entscheidet damit $A - B$.

c) **Falsch.** Gegenbeispiel: $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^*$ ist ebenso wie das Halteproblem L_u rekursiv aufzählbar. Allerdings ist $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^* - L_u = \overline{L}_u$, welches bekanntermaßen nicht rekursiv aufzählbar ist.

d) **Falsch**. Gegenbeispiel: $\{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}^*$ ist regulär und damit sicher entscheidbar. Eine Teilmenge davon ist allerdings auch z.B. das Halteproblem, welches unentscheidbar ist.

e) **Richtig.** Da B rekursiv (entscheidbar) ist, und A auf B reduziert werden kann, muss A auch entscheidbar sein. Nachdem entscheidbare Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, muss auch $\overline{A}$ entscheidbar sein.

f) **Falsch.** Diese Aussage gilt nicht im Allgemeinen. Nachdem C rekursiv aufzählbar ist, muss es auch A sein (da Reduktionen transitiv sind). Das sagt aber noch nichts über das Komplement von A aus. $\overline{A}$ könnte auch rekursiv aufzählbar sein, dann wären A wie auch $\overline{A}$ rekursiv (entscheidbar). A könnte aber auch ein Komplement haben, welches selbst nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 1.5 Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $\{yy^r \mid y \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\}$ (*Hinweis*: y^r bezeichnet das Spiegelbild von y.)

b) $\{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^n \mid n \geq 0\} \cup \{(\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^m \mid n \geq 0\}$ (wobei m für Ihre Matrikelnummer ohne etwaige führende Nullen steht)

c) $\{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^n\underline{\mathtt{a}}^k \mid n > k, k \geq 0\}$

Lösung

a) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 2 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^m\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ des ersten Wortteils bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $xy^0z = \underline{\mathtt{a}}^{m-|y|}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^m$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

b) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann p die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = (\underline{\mathtt{b}}^p \underline{\mathtt{c}}^p)^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2p \cdot m > p$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq p$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq p$ und $w = (\underline{\mathtt{b}}^p \underline{\mathtt{c}}^p)^m$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{b}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 5$ wählen, müsste auch $xy^5 z = \underline{\mathtt{b}}^{p+4\cdot|y|} \underline{\mathtt{c}}^p (\underline{\mathtt{b}}^p \underline{\mathtt{c}}^p)^{m-1}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

(*Anmerkung*: Hier ein Wort aus der Menge $\{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^n \mid n \geq 0\}$ zu wählen ist nicht zielführend, da diese regulär ist, wodurch damit kein Widerspruch erzielt werden kann.)

c) **Nicht regulär**. Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = (\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{m+1} \underline{\mathtt{a}}^m.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 3m + 2 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = (\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{m+1} \underline{\mathtt{a}}^m$, kann xy nur aus den Symbolen des ersten Wortteils (der ersten m Zeichen) bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $xy^0 z$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Für den Fall $|y|$ ungerade hat dann w_0 nicht mehr die Form $\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}^* \{\underline{\mathtt{a}}\}^*$; ist $|y|$ hingegen gerade, so fällt mindestens ein Block von Symbolen $\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}$ weg. Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.