# Theoretische Informatik und Logik
# Übungsblatt 3 (2021W)

**Aufgabe 3.1**
Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.
*Hinweis:* Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $3xy = z - 2$.

b) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $x + y$ ist gerade.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: Wenn $|x| > y$, dann ist $z < y$.

d) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: $x$ ist eine (leibliche) Tante von $y$.

e) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: $x$ hat eine (leibliche) Tante.

f) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Die Tiefe von $x$ ist größer als 3.
*Hinweis:* Die Tiefe eines Stacks ist die Anzahl der darin vorkommenden Stackelemente ($\underline{\mathtt{0}}$ oder $\underline{\mathtt{1}}$).

g) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: $x$ ist genau dann leer, wenn $y$ nicht leer ist.

**Aufgabe 3.2**
Es sei $\mathbb{B}$ ein abstrakter Datentyp für sogenannte 2-3-Bäume (kurz "Bäume") mit folgenden Komponenten:
– Eine Konstante $\bullet$ für den Baum, der nur aus einem Knoten (= Endknoten = Wurzel) besteht;
– eine zweistellige Funktion $f$, die angewendet auf zwei Bäume $b_1$ und $b_2$ den Baum liefert, der (mit einem neuen Wurzelknoten) $b_1$ als linken und $b_2$ als rechten Teilbaum hat;
– eine dreistellige Funktion $g$, die angewendet auf drei Bäume $b_1$, $b_2$, $b_3$ den Baum liefert, der unter dem (neuen) Wurzelkoten diese drei Teilbäume, in dieser Reihenfolge, hat.

a) Definieren Sie eine Signatur $\Sigma_{\mathbb{B}}$ zu $\mathbb{B}$ (analog zu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}$) und geben Sie zu jedem 2-3-Baum, der höchstens 4 Endknoten enthält, jeweils einen entsprechenden Term aus $\mathcal{T}(\mathbb{B})$ an.

b) Geben Sie einen Booleschen Ausdruck in $\mathcal{BA}(\mathbb{B})$ an, der ausdrückt, dass $x$ höchstens die Tiefe 1 hat. (*Hinweis:* Der Baum, der nur aus einem Knoten besteht, hat die Tiefe 0.)

c) Geben Sie eine PL-Formel über $\Sigma_{\mathbb{B}}$ an, die ausdrückt, dass $x$ mindestens die Tiefe 2 hat.

d) Zeigen Sie durch Induktion, dass Folgendes in jeder Umgebung $I$ gilt: Wenn ein Term $t \in \mathcal{T}(\mathbb{B})$ einen Baum mit $n$ Endknoten als Wert hat, so besteht $t$ aus mindestens $3n - 2$ Zeichen.

**Aufgabe 3.3**
Untersuchen Sie eine Variante $AL'(\mathbb{N})$ der Programmiersprache $AL(\mathbb{N})$, in der es keine $\underline{\text{while}}$-Schleifen, dafür aber $\underline{\text{loop}}$-Schleifen gibt. (Alles andere ist wie in $AL$.) Genauer:

a) In der Definition von $AL'(\mathbb{N})$ wird (AL4) durch folgende Klausel ersetzt:

**(AL′4)** Ist $\alpha$ aus $AL'(\mathbb{N})$ und $v \in IVS$ eine Variable, die in $\alpha$ nicht vorkommt, dann ist $\underline{\text{loop}}\ v\ \underline{\text{times}}\ \alpha \in AL'(\mathbb{N})$.

Formulieren Sie eine entsprechende Bedingung (MAL′4) zur formalen Festlegung der Semantik.
Informell lautet die Semantik: $\alpha$ wird in der Umgebung $I$ genau $I(v)$ mal ausgeführt.
Formulieren Sie (MAL′4) direkt (induktiv) und nicht durch Rückführung auf die $\underline{\text{while}}$-Schleife.

b) Überprüfen Sie Ihre Definition durch schrittweise Auswertung des $AL'(\mathbb{N})$-Programms

$$\underline{\text{loop}}\ \underline{\text{x}}\ \underline{\text{times}}\ \underline{\text{loop}}\ \underline{\text{y}}\ \underline{\text{times}}\ \underline{\text{z}}\underline{\leftarrow}\underline{\text{z}}\underline{*}\underline{(}\underline{\mathtt{1}}\underline{+}\underline{\mathtt{1}}\underline{)}$$

in einer Umgebung $I$ mit $I(\underline{\text{x}}) = 1$, $I(\underline{\text{y}}) = 2$, $I(\underline{\text{z}}) = 3$.

c) Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass $AL(\mathbb{N})$ universell ist. Ist auch $AL'(\mathbb{N})$ universell? Anders formuliert: Lassen sich alle partiell-berechenbaren Funktionen mit einem $AL'(\mathbb{N})$-Programm berechnen? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

**Aufgabe 3.4**

Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.

a) Manche Elefanten fürchten sich vor jeder Maus, die sie sehen.

b) Aishas Vater besucht beide Eltern von Berta, aber nicht die Mutter von Chen.

c) Zu jedem Haus, in dem ein Kind wohnt, gibt es ein anderes Haus, in dem genau ein Erwachsener wohnt.

d) Mohan hat zwei Schwestern, die beide Ärztinnen sind.

Wenn Ihnen ein Satz mehrdeutig erscheint, so diskutieren Sie alternative Interpretationen.

**Aufgabe 3.5**

Spezifizieren Sie zu folgenden Formeln jeweils ein Modell $\mathcal{I}$ und ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}$ über dem angegebenen Gegenstandsbereich $D$. Argumentieren Sie jeweils, warum $\mathcal{I}$ ein Modell und $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel ist. Geben Sie außerdem für jede Formel an, welche Variablen dort frei bzw. gebunden vorkommen. (Beachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Notationsvereinbarungen und Klammereinsparungsregeln.)

a) Über $D = Z$ (ganze Zahlen): $\exists y[P(x, f(y), c) \supset \forall x \neg P(x, c, f(x)) \vee \exists z P(y, x, z)]$

b) Über $D = \omega$ (natürliche Zahlen): $\exists x \forall y[Q(f(x)) \supset P(g(a, x), y)] \wedge \exists z(f(z) = g(x, y) \vee f(z) = a)$

c) Über $D = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ (Binärstrings): $\forall x \exists y R(f(x, y), g(x)) \supset \exists x \forall y R(g(y), f(y, x))$