4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 2** **SS 2016** **27.6.2016**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

6.) Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Nicht alle Katzen haben einen Besitzer, der für sie sorgt.
(*Not every cat is owned by someone, who cares for it.*)

(2) Jeder Besitzer einer Katze kennt mindestens einen weiteren Katzenbesitzer.
(*Every owner of a cat knows at least one further owner of a cat.*)

(6 Punkte)

Lösung:
Signatur $\langle \{K, B, S\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$K(x)$ ... x ist eine Katze (einstellig)
$B(x, y)$ ... x ist besitzt y (zweistellig)
$S(x, y)$ ... x sorgt für y (zweistellig)

Formeln:
(1): $\neg\forall x[K(x) \supset \exists y(B(y, x) \wedge S(y, x))]$ oder (äquivalent) $\exists x[K(x) \wedge \neg\exists y(B(y, x) \wedge S(y, x))]$
(2): $\forall x[\exists y(K(y) \wedge B(x, y)) \supset \exists z(z \neq x \wedge \exists u(K(u) \wedge B(z, u)))]$

7.) Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$[\forall y\exists zQ(y, h(z, b)) \wedge Q(x, y)] \supset \forall xQ(x, h(b, x))$
Beachten Sie die Klammerung und unsere Schreibkonventionen. Spezifizieren Sie die beiden Interpretationen formal und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell.

Hinweis: Markieren Sie alle *freien* Variablenvorkommen in der Formel. **(6 Punkte)**

Lösung:
Die beiden Variablenvorkommen in der Teilformel $Q(x, y)$ sind frei, alle anderen Variablenvorkommen sind gebunden.

Modell $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$:
$D = \omega$; $\Phi(Q) =$"$\leq$", $\Phi(h) =$"$+$", $\Phi(b) = 0$, $\xi(x) = \xi(y) = 0$, beliebig sonst.

Es genügt die rechte Teilformel wahr zu machen. Gemäß der Interpretation $\mathcal{I}$ besagt diese Teilformel: Jede natürliche Zahl n ist kleiner oder gleich $0+n$. Das ist richtig; daher ist auch die gesamte Implikation wahr. (Ein noch einfacheres Modell erhält man, in dem man $\Phi(Q) = \mathbf{t}$ setzt. Alles andere, inklusive der Domäne, kann dann beliebig gewählt werden.)

Gegenbeispiel $\mathcal{J}$: Wie $\mathcal{I}$, mit Ausnahme von $\Phi(Q) =$"$<$" und $\xi(y) = 1$.

Gemäß dieser Interpretation besagt die Teilformel $\forall y\exists zQ(y, h(z, b)) \wedge Q(x, y)$: "Für alle natürlichen Zahlen n gibt es eine natürliche Zahl m, sodass $n < m + 0$ und es gilt $0 < 1$." Damit ist der linke Teil der Implikation wahr in $\mathcal{J}$. Hingegen besagt die rechte Teilformel unter $\mathcal{J}$: Jede natürliche Zahl n ist echt kleiner als $0 + n$. Dies ist falsch. Daher ist die gesamte Implikation falsch.

8.) Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:
$\forall x\, P(x, f(h(x))) \supset \exists x\, P(x, h(x))$ ist eine logische Konsequenz der Formeln $\forall x\, x = h(x)$ und $\exists x[P(x, f(x)) \supset \forall x\, P(x, a)]$.
Markieren Sie γ- und δ-Formeln und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln.

(6 Punkte)

Lösung:
Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Konsequenzbehauptung richtig ist:

(1)	$\mathbf{t} : \forall x\, x = h(x)$				Annahme – γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \exists x[P(x, f(x)) \supset \forall x\, P(x, a)]$				Annahme – δ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \forall x\, P(x, f(h(x))) \supset \exists x\, P(x, h(x))$				Annahme
(4)	$\mathbf{t} : P(c, f(c)) \supset \forall x\, P(x, a)$				von 2
(5)	$\mathbf{t} : \forall x P(x, f(h(x)))$				von 3 – γ-Formel
(6)	$\mathbf{f} : \exists x\, P(x, h(x))$				von 3 – γ-Formel
(7)	$\mathbf{f} : P(c, f(c))$	von 4	(8)	$\mathbf{t} : \forall x P(x, a)$	von 4 – γ-Formel
(9)	$\mathbf{t} : P(c, f(h(c)))$	von 5	(12)	$\mathbf{f} : P(a, h(a))$	von 6
(10)	$\mathbf{t} : c = h(c)$	von 1	(13)	$\mathbf{t} : P(a, a)$	von 8
(11)	$\mathbf{t} : P(c, f(c))$	$S^{=}10 \to 9$	(14)	$\mathbf{t} : a = h(a)$	von 1
	$\times$	Wid.: 7/11	(15)	$\mathbf{f} : P(a, a)$	$S^{=}14 \to 12$
				$\times$	Wid.: 13/15

9.) Analysieren Sie folgende partielle Korrektheitsaussage über $\mathbb{Z}$ mit dem Hoare-Kalkül.
Falls die Aussage falsch ist, geben Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel (Environment) an.
Andernfalls begründen Sie die Gültigkeit der im Beweis verwendeten Implikationsschritte.

$(\!|\ x < 0 \land xy \neq 0\ |\!)$
`if` $2 \cdot x \leq y$ `then` $x \Leftarrow x + y - 1$ `else` `begin` $y \Leftarrow y \cdot y;\ x \Leftarrow y$ `end`
$(\!|\ 2x < 3y\ |\!)$

(6 Punkte)

Lösung:
$(\!|\ x < 0 \land xy \neq 0\ |\!)$
`if` $2 \cdot x \leq y$ `then`
  $//(\!|\ x < 0 \land xy \neq 0 \land 2x \leq y\ |\!)$ If-Then-Regel
  $//(\!|\ 2(x + y - 1) < 3y\ |\!)$ Implikation 1
 $x \Leftarrow x + y - 1$
  $//(\!|\ 2x < 3y\ |\!)$ Assertion
 `else`
  $//(\!|\ x < 0 \land xy \neq 0 \land \neg(2x \leq y)\ |\!)$ If-Then-Regel
  $//(\!|\ 2y^2 < 3y^2\ |\!)$ Implikation 2
 `begin`
 $y \Leftarrow y \cdot y;$
  $//(\!|\ 2y < 3y\ |\!)$
 $x \Leftarrow y$
 `end`
  $//(\!|\ 2x < 3y\ |\!)$ Assertion
$(\!|\ 2x < 3y\ |\!)$

Begründung der Gültigkeit der Implikationen in $\mathbb{Z}$:

Implikation 1: $2(x + y - 1) < 3y \Longleftrightarrow 2x + 2y - 2 < 3y \Longleftrightarrow 2x < y + 2$
Letzteres folgt schon aus der Bedingung $2x \leq y$.

Implikation 2: Aus $xy \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und weiter $y^2 > 0$ und somit $2y^2 < 3y^2$.

10.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung; einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung; keinen Punkt bei falscher oder fehlender Begründung.)

- In der Formel $\forall z Q(z, f(y,z)) \supset \neg P(x,z)$ kommen genau zwei Variablen frei vor.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: y kommt im linken Disjunkt frei vor und sowohl x als auch z kommen im rechten Disjunkt frei vor. Es gibt also drei freie Variablen.

- Aus der Unentscheidbarkeit der Menge der prädikatenlogisch gültigen Formeln folgt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man für jede gegebene Formel feststellen kann, ob Sie unerfüllbar ist.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Da eine Formel genau dann unerfüllbar ist, wenn ihre Negation gültig ist, folgt aus der Unentscheidbarkeit von PL-Gültigkeit auch die Unentscheidbarkeit von PL-Unerfüllbarkeit.

- Wenn in einem Kalkül jede PL-Formeln beweisbar ist, dann ist der Kalkül nicht korrekt.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Nicht alle PL-Formeln sind gültig. Wenn aber nicht alle beweisbaren Formeln gültig sind, dann ist der Kalkül inkorrekt.

(6 Punkte)