4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 1 — WS 2017 — 21. März 2018**			
Matrikelnummer	Familienname	Vorname	Gruppe **A**

1.) Sei $L = \{(\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^5 \mid n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

2.) Sei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}$. Die Sprache L ist definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

- $\varepsilon \in L$.
- Für jedes Symbol $a \in \Sigma$ gilt $a \in L$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in L$, so ist auch $awa \in L$.

a) Geben Sie die Sprache an, die durch obige induktive Definition spezifiziert ist.

(1 Punkt)

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik mit höchstens 5 Produktionen an, die L erzeugt.

(3 Punkte)

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform.

(6 Punkte)

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob es für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L genau eine unbeschränkte Grammatik gibt, die L erzeugt.

(6 Punkte)

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Sei $A \leq_p B$ und $B \in \mathbf{NP}$. Dann gilt: A ist entscheidbar.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch
- Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch
- Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.
  Begründung: ☐ richtig ☐ falsch

(6 Punkte)

1.) Sei $L = \{(\underline{a}^n\underline{c}^n)^5 \mid n \geq 0\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(8 Punkte)

$w = (a^m c^m)^5 \qquad |w| = 10m > m$

→ Aufteilen in xyz, wobei $|xy| \leq m$
und $|y| > 0$ → y besteht nur aus a

$i = 2 \rightarrow w = a^{m+|y|} c^m (a^m c^m)^4 \notin L$

da $|y| > 0$

2.) Sei $\Sigma = \{\underline{a}, \underline{b}\}$. Die Sprache L ist definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

- $\varepsilon \in L$.
- Für jedes Symbol $a \in \Sigma$ gilt $a \in L$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in L$, so ist auch $awa \in L$.

a) Geben Sie die Sprache an, die durch obige induktive Definition spezifiziert ist.

(1 Punkt)

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik mit höchstens 5 Produktionen an, die L erzeugt.

(3 Punkte)

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform.

(6 Punkte)

a) $L = \{ c d c^r \mid b \in \{a, b, \varepsilon\}, c \in \{a, b\}^* \}$

b) $G = \langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb\}, S \rangle$

c)

1-2) Unnötige Produktionen: keine vorhanden

3) Elimination der ε-Produktionen:

$G_3 = \langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \to a \mid b \mid aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}, S \rangle$

4) Einheitsproduktionen: keine vorhanden

5)

$G_5 = \langle \{R, S, T, U, A, B\}, \{a, b\}, \{S \to a \mid b \mid AT \mid BU \mid AA \mid BB, T \to SA, U \to SB, A \to a, B \to b, R \to a \mid b \mid AT \mid BU \mid AA \mid BB \mid \varepsilon\}, R \rangle$

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob es für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L genau eine unbeschränkte Grammatik gibt, die L erzeugt.

(6 Punkte)

rek. aufz.

Diese Aussage ist falsch, denn zu jeder Sprache gibt es unendlich viele Grammatiken, die diese erzeugen. Denn sobald man eine Grammatik gefunden hat, kann man beliebig neue Nonterminale einfügen, die die generierte Sprache allerdings nicht verändern.

Der Satz von Rice sagt uns, dass wenn eine Eigenschaft auf alle rekursiv aufzählbaren Sprachen zutrifft, sie entscheidbar ist.

4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Sei $A \leq_p B$ und $B \in \mathbf{NP}$. Dann gilt: A ist entscheidbar.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch
- Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch
- Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

(6 Punkte)

a) Richtig, denn dadurch ist A auch in NP, und da die Sprachen in NP eine Teilmenge der entscheidbaren Sprachen ist, ist sie auch entscheidbar.

b) Richtig, denn wenn eine Sprache endlich ist, dann ist sie regulär, und dasselbe gilt für ihr Komplement. Desweiteren sind reguläre Sprachen Teilmenge der entscheidbaren.

c) Ja, denn man kann $\overline{A} \leq_p A$ und $B \leq_p \overline{B}$, da man einfach das Ergebnis negieren kann. Also

$$\overline{A} \leq_p A \leq_p B \leq_p \overline{B} \rightarrow \overline{A} \leq_p \overline{B}$$