4.0 VU Theoretische Informatik und Logik **Teil 1** **SS 2014** **23. Juni 2014**			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

1.) Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Sprachbeschreibungen an, in welcher Beziehung die dadurch spezifizierten Sprachen L_1 und L_2 zueinander stehen. Es gibt dabei jeweils folgende Möglichkeiten zur Auswahl ($i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$):

- $L_i \subset L_j$: L_i ist eine (echte) Teilmenge von L_j .
- $L_i = L_j$: L_i ist äquivalent zu L_j.
- $L_i = \overline{L_j}$: L_i ist das Komplement von L_j bezüglich Σ^*, wobei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}$.

Geben Sie jedenfalls auch an, welche Sprache durch die jeweilige Beschreibung spezifiziert wird.

a) $L_1 = \mathcal{L}(A_1)$, wobei $A_1 = (\{p\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{(p, \underline{\mathtt{a}}, p), (p, \underline{\mathtt{b}}, p)\}, p, \{\})$
$L_2 = (\{\underline{\mathtt{a}}\} \cup \{\underline{\mathtt{b}}\}^*)^*$

(3 Punkte)

Lösung: $L_1 = \{\}$, $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$, daher $L_1 = \overline{L_2}$

b) $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$, wobei $G_1 = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}} \mid \underline{\mathtt{b}}S\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}, S)$
L_2 über $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}$ ist die kleinste Menge für die gilt:

- $\varepsilon \in L_2$, $x \in L_2$ für jedes $x \in \Sigma$
- Ist $w \in L_2$ und $x \in \Sigma$, so ist auch $xwx \in L_2$

(3 Punkte)

Lösung: $L_1 = \{ww^r \mid w \in \Sigma^*\}$, $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^r\}$, daher $L_1 \subset L_2$

2.) Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^k\underline{\mathtt{b}}^l\underline{\mathtt{c}}^m \mid k, l, m \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{b}}^m\underline{\mathtt{c}}^{4n} \mid m, n \geq 0\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L_2 erzeugt. **(2 Punkte)**

Lösung: $G = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to AB, A \to \underline{\mathtt{a}}^2A\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon, B \to \underline{\mathtt{c}}^4B \mid \varepsilon\}, S)$

b) Geben Sie $L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

Lösung: $L_1 \cap L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^{4l} \mid l, m \geq 0\}$ $(L_1 \cap L_2 = L_2)$

c) Ist $L_1 \cap L_2$ eine kontextfreie Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Ja, $L_1 \cap L_2$ ist kontextfrei. Dies ist nicht verwunderlich, da kontextfreie Sprachen unter Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen sind (und eine kontextfreie Grammatik für diese Sprache wurde unter a) angegeben.)

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist entscheidbar, ob die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.

(6 Punkte)

Lösung: nicht entscheidbar, Satz von Rice
$P = \{L \mid L \text{ ist kontextfrei}\}$ ist eine nicht-triviale Eigenschaft, denn es gilt z.B.:
$\{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\} \in P$ und $\{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n \mid n \geq 0\} \notin P$.
Somit ist P nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

4.) Sei $A \leq_p B$ (wobei A und B in **NP** sein können, aber nicht müssen). Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A und B handelt, und/oder abhängig von der Lösung bisher unbewiesener Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A und B handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)

Begründen Sie Ihre Antwort.

- Wenn A **NP**-vollständig ist, so ist auch B **NP**-vollständig.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: Damit diese Aussage zutrifft, muss B in **NP** liegen. B kann aber auch durchaus schwieriger sein, sogar nicht rekursiv aufzählbar.

- B ist in **P** und A ist **NP**-vollständig.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: Es wäre möglich dass $P = NP$.

- B ist in **P**, und das Komplement von A ist nicht in **P**.
  Begründung: ☐ jedenfalls ☒ keinesfalls ☐ vielleicht

  Lösung: **P** ist unter Komplement abgeschlossen.

(6 Punkte)

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- $\{\}$ ist rekursiv aufzählbar.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: $\{\}$ ist regulär und damit sicher rekursiv aufzählbar.

- Das Halteproblem ist NP-vollständig.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Das Halteproblem ist nicht entscheidbar.

- Das Komplement einer kontextfreien Sprache ist entscheidbar.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{rec}$, entscheidbare Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.

(6 Punkte)