

| 4.0 VU Theoretische Informatik und Logik<br>Teil 1                      SS 2017                      24. Oktober 2017 |              |         |                    |
|---|--------------|---------|--------------------|
| Matrikelnummer  | Familienname | Vorname | Gruppe<br><b>A</b> |

Tragen Sie **mit Kugelschreiber** Matrikelnummer, Nachnamen und Vornamen in Blockbuchstaben ein.  
 Legen Sie einen Lichtbildausweis bereit. **Erlaubte Unterlagen:** Vorlesungsfolien.  
 Schreiben Sie alle Lösungen auf diese Blätter und geben Sie die Prüfungsarbeit **ohne Zusatzblätter** ab.  
 Sie haben 90 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben beider Angabenteile. Viel Erfolg!

**Achtung! Sie sollten zwei getrennt geklammerte Angaben erhalten haben (weiß und grau). Sie müssen beide Teile der Prüfung bearbeiten!**

- 1.)  $L = \{u\#v^r \mid u \text{ ist Binärdarstellung (ohne führende Nullen) von } n, \text{ und } v \text{ von } n + 1, n > 0\}$   
 ist nicht regulär. Beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen.

(Wörter in  $L$  sind also z.B. 101#011 und 1111#00001)

(8 Punkte)



Bitte freilassen:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

2.) Die Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  seien so gegeben, dass  $L_2$ , wie auch  $L_1 \cdot L_2$  und  $L_2 \cdot L_1$  kontextfrei sind.

a) Geben Sie eine Sprache  $L_2$  so an, dass  $L_1$  auch kontextfrei sein muss. (2 Punkte)

$$L_2 = \{\epsilon\}$$

b) Geben Sie zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  so an, dass  $L_1$  nicht kontextfrei ist ( $L_1 \cdot L_2$  aber sehr wohl). (2 Punkte)

c) Geben Sie eine Sprache  $L_1$  so an, dass gilt:  $(L_1^*)^* = L_1$ . (2 Punkte)

$$\{0, 1\}^* \quad \left( (\{0, 1\}^*)^* \right)^* = \{0, 1\}^* \\ \{\epsilon\}$$

d) Ist das Wortproblem für  $L_2$  entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Ja. Das Wortproblem ist für alle rekursiven Sprachen entscheidbar.  $L_2$  ist kontextfrei und somit  $L_2 \in \mathcal{L}_{\text{rek}}$ , also entscheidbar.

- 3.) a) Finden und beschreiben Sie den Fehler im folgenden "Beweis" für  $P \neq NP$ :

Wir betrachten folgenden Algorithmus für SAT:

- Durchlaufe für die gegebene Formel  $\phi$  alle möglichen Belegungen der Variablen mit den Wahrheitswerten
- Akzeptiere  $\phi$ , wenn eine der durchlaufenen Belegungen  $\phi$  erfüllt.

Dieser Algorithmus hat eine mit der Anzahl der Variablen exponentiell wachsende Laufzeit. Daher hat das Problem SAT einen exponentiellen Aufwand und kann nicht in  $P$  liegen. Weil aber SAT in  $NP$  liegt, muß also  $P \neq NP$  gelten.

(4 Punkte)

- b) Das Problem  $A$  sei  $NP$ -hart. Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- a) Wenn  $P = NP$  ist, dann kann  $A$  in polynomieller Zeit gelöst werden.

Nur weil  $A$   $NP$ -hart ist, liegt es noch lange nicht in  $NP$ .  $\rightarrow$  Aussage ist falsch, da bei  $P = NP$

- b) Sei  $A \leq_p B$ . Dann gilt: Wenn  $B$   $NP$ -vollständig ist, so ist auch  $A$   $NP$ -vollständig.

Ja. Wenn  $A \leq_p B$  und  $B \in NP \Rightarrow A \in NP$

Da  $A$   $NP$ -hart  $\Rightarrow A$  ist  $NP$ -vollständig

(4 Punkte)

- 4.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

– Ist  $L \cup \bar{L}$  entscheidbar, so sind auch  $L$  und  $\bar{L}$  entscheidbar.

**Begründung:**

☐ richtig ☒ falsch

Sei  $L$  das Halteproblem  $\subset \{0,1\}^*$   
 $L$  und  $\bar{L}$  sind nicht entscheidbar.  
 aber  $L \cup \bar{L} = \Sigma^* \rightarrow$  rekursiv, also entscheidbar

– Sei  $Q = \{L \mid L \in \mathbf{NP}, L \notin \mathbf{P}\}$  eine Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen  $L$ . Dann ist  $Q$  genau dann entscheidbar, wenn  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ .

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

Wenn  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$  beschreibt  $Q$  die leere Menge.  
 $Q$  ist triviale Eigenschaft also laut S. o.  $Q$  entscheidbar

– Jedes unentscheidbare Problem enthält eine entscheidbare Teilmenge.

**Begründung:**

☒ richtig ☐ falsch

$\{\}$  ist Teilmenge jedes Problems.  
 Diese ist immer entscheidbar

(6 Punkte)