Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (2021W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 2.1 Geben Sie jeweils eine (eindeutige) kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 7$.
Zeigen Sie jeweils auch die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben).

a) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}, \underline{\mathsf{c}}\}^*\}$ (w^r bezeichnet das Spiegelbild von w)

b) $L = \{\underline{\mathsf{a}}^k(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^{2n} \mid k > n, n \geq 0\}$

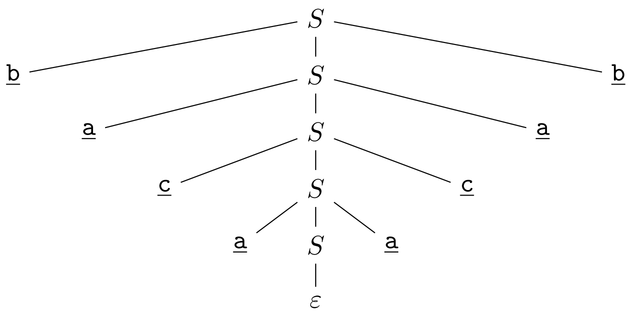
Lösung

a) $G = (\{S\}, \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}, \underline{\mathsf{c}}\}, \{S \to \underline{\mathsf{a}}S\underline{\mathsf{a}} \mid \underline{\mathsf{b}}S\underline{\mathsf{b}} \mid \underline{\mathsf{c}}S\underline{\mathsf{c}} \mid \varepsilon\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathsf{bacaacab}}$:

$S \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}S\underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{ba}}S\underline{\mathsf{ab}} \Rightarrow \underline{\mathsf{bac}}S\underline{\mathsf{cab}} \Rightarrow \underline{\mathsf{baca}}S\underline{\mathsf{acab}} \Rightarrow \underline{\mathsf{bacaacab}}$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathsf{bacaacab}}$:



Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:

$L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}, \underline{\mathsf{c}}\}^*\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_3 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{(}, \underline{[}, \underline{\langle}\}^* \{\underline{)}, \underline{]}, \underline{\rangle}\}^*$$

und

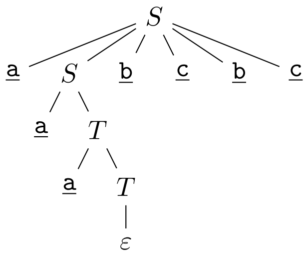
$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}, \underline{\langle}, \underline{\rangle}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}, \underline{\mathsf{c}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{(}) = h(\underline{)}) = \underline{\mathsf{a}}, \quad h(\underline{[}) = h(\underline{]}) = \underline{\mathsf{b}}, \quad h(\underline{\langle}) = h(\underline{\rangle}) = \underline{\mathsf{c}}.$$

b) $G = (\{S, T\}, \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}, \underline{\mathsf{c}}\}, \{S \to \underline{\mathsf{a}}S(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2 \mid \underline{\mathsf{a}}T, \quad T \to \underline{\mathsf{a}}T \mid \varepsilon\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathsf{a}}^3(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2$:

$S \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}S(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2 \Rightarrow \underline{\mathsf{aa}}T(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2 \Rightarrow \underline{\mathsf{aaa}}T(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2 \Rightarrow \underline{\mathsf{aaa}}(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathsf{aaa}}(\underline{\mathsf{b}}\,\underline{\mathsf{c}})^2$:



Wir zeigen nun die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger:

$L = \{\underline{\mathtt{a}}^k(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}})^{2n} \mid k > n, n \geq 0\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{(}\}^*\{\underline{[},\underline{]}\}^+\{\underline{)}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[},\underline{]},\underline{(},\underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}},\underline{\mathtt{b}},\underline{\mathtt{c}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{(}) = h(\underline{[}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{)}) = (\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}})^2, \quad h(\underline{]}) = \varepsilon.$$

Aufgabe 2.2 Beweisen Sie mittels entsprechender Abschlusseigenschaften, dass die jeweils gegebene Sprache L nicht kontextfrei ist. (Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{\mathtt{0}}^{kn}\underline{\mathtt{1}}^{ln}\underline{\mathtt{2}}^{mn} \mid n \geq 1\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist.)

a) $L = \{(\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^m \mid n \geq 1\}$ (wobei m für Ihre Matrikelnummer ohne etwaige führende Nullen steht)

b) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^n(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{d}})^{3k} \mid n, k \geq 1\} \cap \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^{2n}\underline{\mathtt{c}}^k(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{d}})^{2l} \mid n, k, l \geq 1\}$

(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Lösung

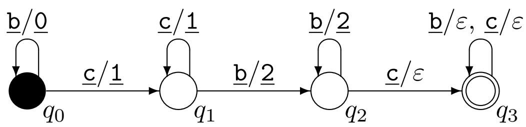
a) $L = \{(\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^m \mid n \geq 1\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache $L = \{(\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{c}}^n)^m \mid n \geq 1\}$ ist kontextfrei. Sei dann

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{\underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}, \delta, q_0, \{q_3\})$$

die (deterministische) *gsm* mit

$\delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}})$, $\delta(q_0, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \underline{\mathtt{1}})$, $\delta(q_1, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \underline{\mathtt{1}})$, $\delta(q_1, \underline{\mathtt{b}}) = (q_2, \underline{\mathtt{2}})$,
$\delta(q_2, \underline{\mathtt{b}}) = (q_2, \underline{\mathtt{2}})$, $\delta(q_2, \underline{\mathtt{c}}) = (q_3, \varepsilon)$, $\delta(q_3, \underline{\mathtt{b}}) = \delta(q_3, \underline{\mathtt{c}}) = (q_3, \varepsilon)$.



Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^n\underline{\mathtt{2}}^n \mid n \geq 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

(*Anmerkung*: Man beachte, dass in diesem Fall die Verwendung eines Homomorphismus nicht ausreicht, da der erste Block von Symbolen $\underline{\mathtt{b}}$ auf Symbole $\underline{\mathtt{0}}$ abgebildet werden muss, während der zweite Block auf eine entsprechende Anzahl von Symbolen $\underline{\mathtt{2}}$ abgebildet werden muss.)

b) Wir überlegen zunächst, dass $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n}\underline{\mathtt{b}}^{4n}\underline{\mathtt{c}}^{n}(\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{d}})^{12n} \mid n \geq 1\}$.

L ist nicht kontextfrei. Beweis indirekt.

Angenommen, L ist kontextfrei. Sei dann

$$h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}^*$$

ein Homomorphismus mit

$$h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{0}}, \quad h(\underline{\mathtt{b}}) = \varepsilon, \quad h(\underline{\mathtt{c}}) = \underline{\mathtt{1}}, \quad h(\underline{\mathtt{d}}) = \underline{\mathtt{2}}.$$

Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^{2n}\underline{\mathtt{1}}^{n}\underline{\mathtt{2}}^{12n} \mid n \geq 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 2.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Sei Σ ein ein-elementiges Alphabet (also beispielsweise $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}\}$). Dann ist jede Sprache über Σ entscheidbar.

b) Ist L regulär, so gibt es eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform, die L erzeugt.

c) Die Grammatik $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to Saa \mid a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S)$ erzeugt eine reguläre Sprache.

d) Die Grammatik $G_4 = (\{A, B\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}, \{A \to \underline{\mathtt{0}}B \mid \underline{\mathtt{1}}, B \to A\underline{\mathtt{1}}\}, A)$ ist regulär.

e) Ist L kontextsensitiv, so ist jede Grammatik, die L erzeugt, monoton oder kontextsensitiv.

f) Es gibt kontextfreie Sprachen, deren Komplement nicht entscheidbar ist.

Lösung

a) **Falsch.** Auch für ein ein-elementiges Alphabet Σ gilt: Σ^* ist abzählbar (unendlich), die Menge aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ ist aber überabzählbar. Von diesen ist jedoch nur eine abzählbare Menge entscheidbar. (Es gibt ja nur abzählbar (unendlich) viele Turingmaschinen). Dementsprechend gibt es unentscheidbare Sprachen über Σ.

b) **Richtig.** Jede reguläre Sprache ist kontextfrei, und jede kontextfreie Sprache kann von einer kontextfreien Grammatik erzeugt werden. Nachdem es auch zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform gibt, ist diese Aussage korrekt.

c) **Richtig.** Zwar ist die Grammatik G selbst nicht regulär (wegen z.B. der Produktion $S \to S\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$). Die von G erzeugte Sprache $\mathcal{L}(G) = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}^*$ ist hingegen regulär (und damit auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar).

d) **Falsch.** Die Grammatik G_4 ist kontextfrei und monoton, aber nicht regulär. Man beachte, dass die rechten Seiten der Produktionen zwar jeweils aus einem Terminal- und einem Nonterminalsymbol bestehen ($A \to \underline{\mathtt{0}}B$ bzw. $B \to A\underline{\mathtt{1}}$), die Terminalsymbole dort aber einmal links und einmal rechts vom Nonterminalsymbol vorkommen, was in regulären Produktionen nicht zulässig ist.

(Die von G_4 erzeugte Sprache $\mathcal{L}(G_4) = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^{n+1} \mid n \geq 0\}$ ist natürlich ebenfalls kontextfrei, aber sicher nicht regulär).

e) **Falsch.** Jede kontextsensitive Sprache kann z.B. auch von einer unbeschränkten Grammatik erzeugt werden. (Darüberhinaus sind auch reguläre und kontextfreie Sprachen kontextsensitiv und können dementsprechend natürlich ebenso von regulären (sofern die Sprache regulär ist) bzw. kontextfreien Grammatiken erzeugt werden.) Hier ein einfaches Gegenbeispiel: Die Sprache $L = \{\underline{\mathtt{a}}\}$ ist regulär und damit auch kontextsensitiv. Sie wird z.B von der kontextfreien, kontextsensitiven und monotonen Grammatik $G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}\}, S)$ erzeugt, aber auch von der unbeschränkten Grammatik $G' = (\{S, A, B, C\}, \{\underline{\mathtt{a}}\}, \{S \to ABC, ABC \to \underline{\mathtt{a}}\}, S)$, welche weder monoton noch kontextsensitiv ist.

f) **Falsch.** Zwar sind kontextfreie Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen, kontextsensitive (wie auch entscheidbare) aber sehr wohl. Nachdem $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{rec}$, ist also das Komplement einer kontextfreien Sprache jedenfalls kontextsensitiv und damit entscheidbar.

Aufgabe 2.4 Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist, oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist in **NP**.

b) Sei $E = \{L \mid L \in \mathbf{P}, L \notin \mathbf{NP}\}$ eine Eigenschaft rekursiv aufzählbarer Sprachen L. Dann ist E genau dann entscheidbar, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

c) Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ dann ist jedes Problem in **NP** auch **NP**-hart (**NP**-schwer).

d) Sei $A \leq_p B$ und B **NP**-hart. Dann ist $A \in \mathbf{NP}$.

e) Sei $A \leq_p B$ und B **NP**-vollständig. Dann gilt: A ist entscheidbar.

f) Sei A **NP**-vollständig, und $\overline{A}$ (das Komplement von A) in **P**. Dann gilt: $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

g) Sei $A = \{w \mid w \in \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}\}$, wobei

$$w = \begin{cases} \underline{\mathtt{0}} & \text{wenn } \mathbf{NP} = \textbf{co-NP} \\ \underline{\mathtt{1}} & \text{wenn } \mathbf{NP} \neq \textbf{co-NP} \end{cases}$$

Dann ist A nicht entscheidbar.

Lösung

a) **Richtig.** Ist das Komplement einer Sprache endlich, so ist diese Sprache (wie auch ihr Komplement) regulär. Reguläre Sprachen ihrerseits sind eine echte Teilmeng von **P**, und damit auch von **NP**.

b) **Falsch.** Diese Eigenschaft ist trivial, da sie auf keine einzige rekursiv aufzählbare Sprache zutrifft, denn es gilt jedenfalls $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Unabhängig davon, ob also $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ gilt oder nicht, ist E entscheidbar, da die Frage $L \in E$ immer mit "nein" beantwortet werden kann.

c) **Falsch.** Lässt sich jedes $L \in \mathbf{NP}$ in Polynomialzeit auf ein L' reduzieren, so ist L' **NP**-schwer. Die Reduktion f erfüllt dabei die Eigenschaft $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L'$, d.h. wenn x in L ist (eine Ja-Instanz), dann ist $f(x)$ in L' . Ist hingegen x nicht in L (eine Nein-Instanz), so ist auch $f(x)$ nicht in L' .

Die Reduktion transformiert also ein Problem in ein anderes, erhält dabei aber die Eigenschaft, ob eine Ja- oder Nein-Instanz vorliegt. Dies ist jedoch mit $\{\}$ (nur Nein-Instanzen) und Σ^* (nur Ja-Instanzen) nicht möglich.

d) **Falsch.** Nachdem nicht jedes **NP**-schwere Problem notwendigerweise in **NP** liegt, muss dies auch nicht auf A zutreffen.

e) **Richtig.** Aufgrund der Reduktion gilt dann $A \in \mathbf{NP}$, und jedes Problem in **NP** ist per Definition entscheidbar.

f) **Richtig.** $\mathbf{P}$ ist unter Komplement abgeschlossen. Wenn also $\overline{A} \in \mathbf{P}$ ist, muss demnach auch $A \in \mathbf{P}$ sein. Ein $\mathbf{NP}$-vollständiges Problem kann aber nur dann in $\mathbf{P}$ sein, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

g) **Falsch.** Die Sprache A ist also entweder $\{\underline{0}\}$ oder $\{\underline{1}\}$. Diese Sprachen sind beide entscheidbar, also ist A jedenfalls entscheidbar. (Es spielt dabei keine Rolle, welche von beiden Sprachen A ist.)

Aufgabe 2.5

a) Finden und beschreiben Sie den Fehler im folgenden “Beweis” für $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$:

Wir betrachten folgenden Algorithmus für SAT:

- Durchlaufe für die gegebene Formel ϕ alle möglichen Belegungen der Variablen mit den Wahrheitswerten.
- Akzeptiere ϕ, wenn eine der durchlaufenen Belegungen ϕ erfüllt.

Dieser Algorithmus hat eine mit der Anzahl der Variablen exponentiell wachsende Laufzeit. Daher hat das Problem SAT einen exponentiellen Aufwand und kann nicht in $\mathbf{P}$ liegen. Weil aber SAT in $\mathbf{NP}$ liegt, muß also $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ gelten.

b) Es ist nicht bekannt, ob das Komplement von jeder Sprache in $\mathbf{NP}$ selbst wiederum in $\mathbf{NP}$ liegt (d.h., ob $\mathbf{NP}$ unter Komplement abgeschlossen ist bzw. ob $\mathbf{NP}$=$\mathbf{co\text{-}NP}$).

Finden und beschreiben Sie den Fehler in folgendem vermeintlichen “Beweis”, welcher dies aber für alle Probleme in $\mathbf{NP}$ behauptet:

> **Satz:** Ist $L \in \mathbf{NP}$, so ist auch $\overline{L} \in \mathbf{NP}$.
>
> **Beweis:** Sei N eine nicht-deterministische Turingmaschine (NTM), welche L in polynomiell beschränkter Zeit akzeptiert. Vertausche nun die Endzustände von N mit Nicht-Endzuständen von N und umgekehrt. Offensichtlich akzeptiert die so konstruierte NTM N' die Sprache $\overline{L}$ in polynomiell beschränkter Zeit. Es gilt also $\overline{L} \in \mathbf{NP}$. □

Lösung

a) Die Vorgabe eines Algorithmus mit exponentiellem Aufwand zur Lösung eines gegebenen Problems bedeutet nicht, dass das Problem eine exponentielle Komplexität besitzt und damit in $\mathbf{NP}$ liegt. Der Denkfehler besteht darin, dass aus der Tatsache, dass man nicht auf triviale Weise einen effizienten (polynomiellen) Algorithmus findet, geschlossen wird, dass ein solcher effizienter (polynomieller) Algorithmus auch nicht existieren kann.

b) Die Maschine N' akzeptiert genau jene Wörter, für welche es in N mindestens eine Folge möglicher Bewegungen gibt, die von der Startkonfiguration zu einer Endkonfiguration in einem nicht-akzeptierenden Zustand führt. Dies könnten aber durchaus auch Wörter sein, welche von N akzeptiert werden:

N akzeptiert ein Wort $w \in L$ genau dann, wenn es mindestens eine Folge von Bewegungen gibt, die in einem Endzustand hält. Es kann somit für dieses Wort $w \in L$ aber auch (Bewegungs-)Pfade geben, die in einem Nicht-Endzustand halten, was dann beim Vertauschen der Endzustände mit Nicht-Endzuständen allerdings dazu führt, dass N' dieses Wort ebenfalls akzeptiert, obwohl $w \notin \overline{L}$.

N' akzeptiert also nicht $\overline{L}$, sondern eigentlich eine Obermenge von $\overline{L}$.