第三次作业

（1） 证明相干态的完备性，$\int d\alpha d\alpha^* |\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi$。

提示：把相干态用谐振子本征态展开后进行积分。

（2） 作为能量本征态的一维束缚态如果满足$\psi(-\infty) = 0$，证明其本征能量非简并。

提示：采用反证法，设另一简并解为$\phi(x)$，则可得$\psi''\phi = \phi''\psi$，再积分利用边界条件可得$\psi'\phi = \phi'\psi$…

（3） 计算一维谐振子在相干态表象下的传播子$K(\alpha', t'; \alpha, t) = \langle\alpha'|\hat{U}(t', t)|\alpha\rangle$。

提示：把相干态用谐振子本征态进行展开后对级数求和。

（4）

36. An electron moves in the presence of a uniform magnetic field in the z-direction ($\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$).

a. Evaluate

$$[\Pi_x, \Pi_y],$$

where

$$\Pi_x \equiv p_x - \frac{eA_x}{c}, \qquad \Pi_y \equiv p_y - \frac{eA_y}{c}.$$

b. By comparing the Hamiltonian and the commutation relation obtained in (a) with those of the one-dimensional oscillator problem, show how we can immediately write the energy eigenvalues as

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{|eB|\hbar}{mc}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

where $\hbar k$ is the continuous eigenvalue of the p_z operator and n is a nonnegative integer including zero.

第三周高等量子力学作业

隋源　2000011379

Sep 27th 2022

1

用粒子数表象展开相干态，并且假设 $\alpha = re^{i\theta}$，有

$$
\begin{aligned}
\iint \mathrm{d}^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \iint \mathrm{d}^2\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2} |n\rangle\langle m| \\
&= \iint \mathrm{d}^2\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}}{\sqrt{n!m!}} e^{-r^2} |n\rangle\langle m| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |n\rangle\langle m| \int \mathrm{d}r \frac{r^{n+m+1}}{\sqrt{n!m!}} e^{-r^2} \int \mathrm{d}\theta e^{i(n-m)\theta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |n\rangle\langle m| \int \mathrm{d}r \frac{r^{n+m+1}}{\sqrt{n!m!}} e^{-r^2} 2\pi\delta_{nm} \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int \mathrm{d}r r^{2n+1} e^{-r^2} \\
&= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \Gamma(n+1) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

其中用到了 Γ 函数定义

$$
\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} \mathrm{d}t
$$

2

若简并，则有

$$
\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{H}\phi = E\phi
$$

对一维波函数 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$ 有

$$
\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0, \quad \phi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\phi = 0
$$

两式分别乘另式波函数相减得到

$$\psi''\phi = \psi\phi''$$

积分得到

$$\psi'\phi - \psi\phi' = \text{const}$$

由边界条件得到 const=0，于是再积分得到

$$\psi = k\phi$$

其中 k 为常数。因而非简并。

3

传播子

$$\begin{aligned} K(\alpha', t'; \alpha, t) &= \langle \alpha' | U(t', t) | \alpha \rangle \\ &= \sum_n \langle \alpha' | n \rangle \langle n | e^{-iH(t'-t)/\hbar} | \alpha \rangle \\ &= \sum_n \langle \alpha' | n \rangle \langle n | \alpha \rangle e^{-iE_n(t'-t)/\hbar} \\ &= e^{-[|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 + i\omega(t'-t)]/2} \sum_n \frac{1}{n!} (\alpha \alpha'^*)^n e^{-i\omega(t'-t)n} \\ &= \exp\left\{ \alpha \alpha'^* e^{-i\omega(t'-t)} - [|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 + i\omega(t'-t)]/2 \right\} \end{aligned}$$

4

a.

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= \left[p_x - \frac{e}{c} A_x, p_y - \frac{e}{c} A_y \right] \\ &= -\frac{e}{c} ([p_x, A_y] + [A_x, p_y]) \\ &= \frac{i\hbar e}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{i\hbar e B}{c} \end{aligned}$$

b. 由磁矢势定义和规范变换条件可知

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} B y \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} B x \hat{\mathbf{y}}$$

令

$$\Pi_y = P, \quad \Pi_x = X, \quad \omega = \frac{|eB|}{mc}$$

则哈密顿量为

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

第一项不受其他影响，对应连续本征值；由 $[X, P] = i\hbar$ 关系，后两项完全等同于 $\omega = \frac{|eB|}{mc}$ 的一维谐振子。故能量本征值可立即给出

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar|eB|}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$