5-1. 参考课件《偏微分方程 A》,对 Kruskal, Zalusky 孤立子问题,给出数值解 (随时间演化的动画示意图,或者代表性时刻的帧图)及说明,注意保证大 t 时数值结果的稳定性。

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = \cos(\pi x) & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

 u, u_x, u_{xx} 为在[0,2]上的周期函数。

5-2. 参考课件《偏微分方程 B》,使用谱方法或者其他方法求解 2 维扩散方程,给出数值解(随时间演化的动画示意图,或者代表性时刻的帧图)及说明:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

其中D = 1, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$,

x 方向的边界条件为T(x = 0, y) = T(x = 1, y) = 0,

y 方向的边界条件为dT/dy(x, y = 0) = dT/dy(x, y = 1) = 0

5-3. 考虑由以下初始条件和边界条件给出的振动方膜的二维波动方程:

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & x, y \in [0, 1], t \ge 0 \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) & x, y \in (0, 1) \\ u = 0 & \text{boundary} & t \ge 0 \\ \partial u/\partial t|_{t=0} = 0 & x, y \in (0, 1) \end{cases}$$

边界由 x=0, x=1, y=0 及 y=1 给定。 λ 可以取为 1。

- 1) 使用分离变量法给出该方程的解析解。
- 2)使用二维差分网格,写出求解该方程的显式方法的算法,并编写数值求解离散波动方程的程序。特别是描述如何处理边界条件和初始条件,并将结果与封闭形式的解决方案进行比较。
- 3)给出不同差分步长(Δt , Δx 及 Δy)情形的数值表现,特别是考虑和校验数值稳定性条件(此处可以设置 $\lambda = 1.2$ 等不同值):

$$\Delta t \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2}$$

- 4) 对 $\Delta x = \Delta y$ 情形,给出结果的动画展示。
- 5-4. 参考课件《随机数及简明概率论》,选取某种程序自带的随机数产生方法,产生一组[0-1]之间均匀分布的随机数, 统计[0-0.1-0.2...0.9-1.0]各个区间的撒点数。重复上述步骤多次(如:10000次)
- 1) 请数值模拟,得到落入区间如[0.3-0.4]内的随机数的比例,给出这个比例的

10000 次数值的分布曲线,并给予论述说明;

2) 参照课件,构建Chi2 检验随机数的性质,并论述结果。