

## 第十一次作业

(1) 考虑由两个全同的自旋为 1 的玻色子组成的系统, 哪些总自旋的本征态是对称的? 哪些是反对称的? 相应的空间波函数对称性又是什么样的?

(2) 证明薛定谔方程具有伽利略不变性。

提示: 设  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ ,  $t' = t$ ,  $\psi'(\mathbf{r}', t') = e^{imv^2 t'/2\hbar} \psi(\mathbf{r}, t)$ , 可得

$$\nabla' = \nabla, \quad (\partial_{t'} f)_{\mathbf{r}'} = (\partial_t f)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla f,$$
$$i\hbar \partial_{t'} \psi' = \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{-i\hbar \nabla}{m} - \mathbf{v} \right)^2 + V \right] \psi'.$$

(3)

作业题: 证明从狄拉克方程可以得到连续性方程  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} j^k = 0$ , 其中几率密度为  $\rho(x) = \tilde{\psi}^*(x) \psi(x) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^* \psi_{\alpha}$ , 几率流为  $j^k(x) = c \tilde{\psi}^*(x) \alpha^k \psi(x)$ ,  $\tilde{\psi}^*(x) = (\psi(x))^{\dagger}$  是具有  $N$  个分量的列向量函数。

(4)

作业题: 证明从狄拉克方程中的  $\gamma$  矩阵满足关系式  $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$ , 其中  $g^{\mu\nu}$  是闵可夫斯基空间的度规张量的逆变分量,  $g^{00} = 1$ ,  $g^{kk'} = -\delta_{kk'}$ .

## 第十二次作业

(1)

**作业题：**证明  $S$  具有唯一性（不包括系数不同）。

提示：假设  $S$  不具有唯一性，则有  $S^{-1}\gamma^\mu S = S'^{-1}\gamma^\mu S'$ ， $S'S^{-1}$  与所有  $\gamma^\mu$  的乘积都对易， $S'S^{-1}$  只能为常数。

(2)

**作业题：**证明  $g_{\mu\lambda}\varepsilon_\nu^\lambda + g_{\nu\lambda}\varepsilon_\mu^\lambda = 0$

提示：利用  $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta$ ，及方程右边一阶展开项的系数为零。

(3)

**作业题：**证明自由的狄拉克粒子总角动量守恒。

提示：总角动量为  $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$ ， $\vec{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ， $H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta$ ，可证得  $[J_k, H] = 0$ 。

(4)

**作业题：**证明在时间反演下  $\overline{\psi'}(x')\gamma_5\psi'(x') = -\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ ，

提示：利用  $\psi'(x') = U^*\psi^*(x)$ ， $\overline{\psi'}(x') = \tilde{\psi}(x)\tilde{U}\gamma^0$ ， $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ，

$$U = \gamma^1\gamma^3 = U^*, \quad \tilde{U} = U^{-1}, \quad (U\gamma_0)^{-1}(\gamma^\mu)^*(U\gamma^0) = \gamma^\mu,$$

并且  $\overline{\psi'}(x')\gamma_5\psi'(x')$  与它自己转置相同等性质，先把等式左侧取转置，

$$\text{得 } \tilde{\psi}^*(x) U^\dagger i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 U \psi(x) = \dots$$

## 第十三次作业

(1)

**作业题：**计算电子速度算符  $c \alpha^k$  在四种平面波上的期待值并给出低动量极限下的期待值。（提示：可以利用  $\chi_{\pm}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \chi_{\pm} = \pm \mathbf{e}$  来计算）

(2)

**作业题：**证明第一类与第三类平面波满足电荷共轭关系，即  $u_{\text{I}}(\mathbf{p}) \propto \Gamma u_{\text{III}}^*(-\mathbf{p})$ 。

# 第十二周高等量子力学作业

隋源 2000011379

Nov 29th 2022

## 1

(一) 总自旋为 2

根据角动量耦合理论，总自旋  $S = 2, M = \pm 2$  的态很容易确定为

$$|2, 2\rangle = |++\rangle$$

$$|2, -2\rangle = |--\rangle$$

对两边依次使用升降算符，得到

$$|2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle + |+0\rangle)$$

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+-\rangle + 2|00\rangle + |-+\rangle)$$

$$|2, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle + |-0\rangle)$$

(二) 总自旋为 1

由于  $|1, \pm 1\rangle, |2, \pm 1\rangle$  应正交归一，根据叠加原理可以得到总自旋  $S = 1, M = \pm 1$  的态

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle - |+0\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle - |-0\rangle)$$

对两边依次使用升降算符，得到

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$$

(三) 总自旋为 0

由于  $|0, 0\rangle, |1, 0\rangle, |2, 0\rangle$  应正交归一，根据叠加原理可以得到

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+-\rangle - |00\rangle + |-+\rangle)$$

很容易看出  $S=0, 2$  的态是对称的， $S=1$  的态是反对称的。由于玻色子波函数应是交换对称的，因此  $S=0, 2$  对应的空间函数对称， $S=1$  对应的空间函数反对称。

## 2

作伽利略变换

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t$$

容易证明 ( $\nabla = \partial_{\mathbf{r}}, \nabla' = \partial_{\mathbf{r}'}$ )

$$(\partial_{\mathbf{r}} f)_t = (\partial_{\mathbf{r}'} f)_{t'}$$

$$(\partial_{t'} f)_{\mathbf{r}'} = (\partial_t f)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot (\partial_{\mathbf{r}} f)_t$$

设两个坐标系的波函数为  $\psi(\mathbf{r}, t), \psi'(\mathbf{r}', t')$ , 则初态满足

$$\psi(0, 0) = \psi'(0, 0)$$

利用空间和时间平移算符, 可以得到二者的转换关系

$$\psi(\mathbf{r}', t') = e^{-im(2\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - v^2 t)/2\hbar} \psi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

接下来验证薛定谔方程的伽利略协变性。原坐标下的薛定谔方程

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_{\mathbf{r}})^2 \psi + V \psi$$

而

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_{t'} \psi' &= i\hbar (\partial_t S) \psi + i\hbar S \partial_t \psi + i\hbar \mathbf{v} \cdot (\partial_{\mathbf{r}} \psi') \\ &= -\frac{1}{2} m v^2 \psi' + S \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_{\mathbf{r}})^2 \psi + i\hbar \mathbf{v} \cdot (\partial_{\mathbf{r}} \psi') + V' \psi' \\ &= \frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_{\mathbf{r}'} - m\mathbf{v})^2 \psi' + V' \psi' \end{aligned}$$

正好是另一坐标系下的薛定谔方程。这表明薛定谔方程是伽利略协变的, 与相对论不自洽。

## 3

满足洛伦兹协变和概率守恒的方程为狄拉克方程

$$-i\hbar \sum_k c \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + mc^2 \beta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

其中  $\alpha^k, \beta$  都为厄米矩阵。它的共轭为

$$i\hbar \sum_k c \alpha^k \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} + mc^2 \beta \psi^\dagger = -i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}$$

两式交叉相乘并作差, 得到

$$\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi + c \sum_k \psi^\dagger \alpha^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \alpha^k \psi = 0$$

令  $\rho = \psi^\dagger \psi, j^k = c \psi^\dagger \alpha^k \psi$ , 得到连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$$

## 4

gamma 矩阵

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta \alpha^k \quad (k = x, y, z)$$

其中  $\alpha^k, \beta$  均是二次方为 1 且两两反对易的厄米矩阵。接下来计算  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$  的值。

(一)  $\mu, \nu$  都不为 0

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \beta \alpha^\mu \beta \alpha^\nu + \beta \alpha^\nu \beta \alpha^\mu = -\beta^2 \{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$$

(二)  $\mu, \nu$  只有一个为 0, 不妨设  $\nu = 0$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \beta \alpha^\mu \beta + \beta^2 \alpha^\mu = 0$$

(三)  $\mu, \nu$  都为 0

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\beta^2 = 2$$

综上有

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

其中

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

# 第十三周高等量子力学作业

隋源 2000011379

Dec 6th 2022

## 1

狄拉克方程满足洛伦兹协变的条件

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$$

假设  $S$  不具有唯一性，那么存在  $S'$  使得

$$S^{-1}\gamma^\mu S = S'^{-1}\gamma^\mu S'$$

令  $T = S'S^{-1}$ ，则有

$$T\gamma^\mu T^{-1} = \gamma^\mu$$

很显然  $T$  是相似变换且变换结果与开始一致，因此只能是一个系数，即

$$S'S^{-1} = \text{const}$$

因而  $S$  具有唯一性。

## 2

无穷小洛伦兹变换下

$$x'^\mu \approx x^\mu + \varepsilon_\nu^\mu x^\nu$$

因此变换矩阵为

$$\Lambda \approx 1 + \varepsilon$$

由洛伦兹协变条件

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

保留至一阶小量

$$g\varepsilon + \varepsilon^T g = 0$$

由于  $g$  为对称矩阵，因而矩阵  $g\varepsilon$  反对称。写成矩阵元形式

$$g_{\mu\lambda}\varepsilon_\nu^\lambda + g_{\nu\lambda}\varepsilon_\mu^\lambda = 0$$

### 3

泡利-狄拉克表象中， $\alpha, \beta, \Sigma$  矩阵的表达式为

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

容易证明代数关系

$$[\Sigma, \beta] = 0, \quad [\Sigma_i, \alpha_i] = 0, \quad [\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\alpha_k$$

自由粒子的哈密顿量

$$H = c\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

因此

$$[\Sigma_k, H] = cp_i[\Sigma_k, \alpha_i] + cp_j[\Sigma_k, \alpha_j] = 2ic(\alpha_j p_i - \alpha_i p_j)$$

另一方面

$$[L_k, H] = c[x_i p_j - x_j p_i, \alpha_i p_i + \alpha_j p_j + \alpha_k p_k] = i\hbar c(\alpha_i p_j - \alpha_j p_i)$$

因此有

$$[J_k, H] = [L_k, H] + \frac{\hbar}{2}[\Sigma_k, H] = 0$$

因此自由粒子角动量守恒。

### 4

根据时间反演的结论直接证明。计算等式左侧（由于是赝标量，可整体取转置，不影响证明）

$$\begin{aligned} \overline{\psi'}\gamma_5\psi' &= (U^*\psi^*)^\dagger\gamma^0\gamma_5(U^*\psi^*) \\ &= \tilde{\psi}\tilde{U}(i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)U^*\psi^* \\ &= \tilde{\psi}(\gamma^1\gamma^3)^{-1}(i\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^1\gamma^3)\psi^* \\ &= -i\tilde{\psi}(\gamma^1\gamma^3)^{-1}(\gamma^1\gamma^3)(\gamma^2\gamma^1\gamma^3)\psi^* \\ &= \tilde{\psi}(i\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi^* \\ &= \psi^\dagger(i\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\psi \\ &= -\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\ &= -\overline{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

(其中用到  $(\gamma^2)^T = \gamma^2, (\gamma^1)^T = -\gamma^1, (\gamma^3)^T = -\gamma^3$  的结论)



# 第十三周高等量子力学作业

隋源 2000011379

Dec 6th 2022

## 1

四种平面波的旋量

$$u_I = u_0 \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}) \\ k_0 \chi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{II} = u_0 \begin{pmatrix} \chi_-(\mathbf{p}) \\ -k_0 \chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{III} = u_0 \begin{pmatrix} -k_0 \chi_+(\mathbf{p}) \\ \chi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{IV} = u_0 \begin{pmatrix} k_0 \chi_-(\mathbf{p}) \\ \chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

其中  $u_0 = \sqrt{\frac{mc^2 + |E|}{2|E|}}$ ,  $k_0 = \frac{c|\mathbf{p}|}{mc^2 + |E|}$ 。旋量满足

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \chi_{\pm} = \pm \chi_{\pm}$$

因此速度算符的期待值为

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_I &= cu_0 \begin{pmatrix} k_0 \chi_+(\mathbf{p}) \\ \chi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = c \left[ \frac{2k_0}{1+k_0^2} u_I + \frac{1-k_0^2}{1+k_0^2} u_{III} \right] \\ c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{II} &= cu_0 \begin{pmatrix} k_0 \chi_-(\mathbf{p}) \\ -\chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = c \left[ \frac{2k_0}{1+k_0^2} u_{II} - \frac{1-k_0^2}{1+k_0^2} u_{IV} \right] \\ c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{III} &= cu_0 \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}) \\ -k_0 \chi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = c \left[ \frac{1-k_0^2}{1+k_0^2} u_I - \frac{2k_0}{1+k_0^2} u_{III} \right] \\ c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{IV} &= cu_0 \begin{pmatrix} -\chi_-(\mathbf{p}) \\ -k_0 \chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = c \left[ -\frac{1-k_0^2}{1+k_0^2} u_{II} - \frac{2k_0}{1+k_0^2} u_{IV} \right] \end{aligned}$$

低动量极限下有

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_I = cu_{III}, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{II} = -cu_{IV}, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{III} = cu_I, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{IV} = -cu_{II}$$

容易看出有 4 种本征态，对应的速度为  $\pm c$ 。

## 2

电荷共轭

$$\psi'(x) = \Gamma\psi^*(x)$$

利用  $\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  得到

$$u_{\text{I}}(\mathbf{p}) \propto \gamma^2 u_{\text{III}}^*(-\mathbf{p})$$

其中  $\gamma^2 = \beta\alpha_2$ 。故

$$\gamma^2 u_{\text{III}}^*(-\mathbf{p}) = u_0 \begin{pmatrix} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_0\chi_+(\mathbf{p}) \\ \chi_+(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = u_{\text{I}}$$

因此第一类与第三类平面波满足电荷共轭关系，证毕。