计算物理第五次作业　作业解答

隋源　2000011379

Jan 10th 2023

1. Kruskal, Zalusky 孤立子

KdeV 方程

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0$$

的差分迭代方程

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\varepsilon}{6}\frac{\Delta t}{\Delta x}[u_{i+1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j}][u_{i+1,j} - u_{i-1,j}] - \frac{\mu}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x^3}[u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}]$$

收敛条件满足

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\varepsilon|u| + 4\frac{\mu}{\Delta x^2}\right] < 1$$

本题中 $\varepsilon = 1, \mu = 0.22^2$, 初始条件 $u(x,0) = \cos(\pi x)$, 边界条件为周期条件。利用差分迭代方程计算离散时刻的函数图像，绘制成动图如 Solitons.gif(0-10s 的图像演化) 所示。其中大 t 结果的稳定性是通过控制收敛条件满足的（步长参数见源码 Solitons.py）观察动图可以清除地看到余弦波的色散过程，行成孤子交相传输。图中孤子顶端的不光滑点和最后的锯齿都是 $\Delta t, \Delta x$ 不够小导致的。二者在保证收敛条件满足（最好是远小于 1）的情况下越小越好。

2. 二维扩散方程

使用显式法运算，二维热传导方程

$$T_t = D(T_{xx} + T_{yy})$$

的差分迭代方程

$$T^{n+1}_{i,j} = T^n_{i,j} + \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2}[T^n_{i-1,j} + T^n_{i,j} + T^n_{i-1,j}] + \frac{D\Delta t}{2\Delta y^2}[T^n_{i,j-1} + T^n_{i,j} + T^n_{i,j+1}]$$

定义导数系数矩阵

$$A_{i,j}, B_{i,j} = -2\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}$$

其中 A, B 都是方阵，阶数分别于矩阵 T 的列和行相同。即哪个差分迭代写成矩阵形式

$$T^{n+1} = T^n + \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} T^n \cdot A + \frac{D\Delta t}{2\Delta y^2} B \cdot T^n$$

每次迭代完重新设置边界条件即可。本体参数见源码 Thermal.py，绘制成动图如 Thermal.gif(0-0.08s 的动画演示) 所示。可以看到扩散开始后中心的热量快速下降，周围温度缓慢升温，并随着边界条件不同产生了扩散趋向。稳定性同样通过收敛条件控制

$$2D\Delta t(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})^{-1} < 1$$

3. 二维波动方程

(1)

利用分离变量法写出二维波动方程通解是任意三角函数的乘积，再根据两个初始条件可直接写出解析解

$$u = \cos(\sqrt{5}\pi t) \sin \pi x \sin 2\pi y$$

(2)

与上一题相同，显示法运算二维波动方程

$$u_{tt} = \lambda(u_{xx} + u_{yy})$$

的差分迭代方程

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \frac{\lambda \Delta t^2}{\Delta x^2}[u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n] + \frac{\lambda \Delta t^2}{\Delta y^2}[u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n]$$

定义导数系数矩阵

$$A_{i,j}, B_{i,j} = -2\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}$$

其中 A, B 都是方阵，阶数分别于矩阵 T 的列和行相同。即哪个差分迭代写成矩阵形式

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \frac{\lambda \Delta t^2}{\Delta x^2} T^n \cdot A + \frac{\lambda \Delta t^2}{\Delta y^2} B \cdot T^n$$

稳定性通过收敛条件控制

$$\sqrt{\lambda}\Delta t(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})^{-1/2} < 1$$

计算矩阵迭代的程序为 Wave.py，每次矩阵迭代完后对边界点重新赋值以保证边界条件，让 u^0, u^1 一样实现初始条件，在最后的动画演示参数下，震荡顶点与解析解的差值基本在 10^{-5} 左右（可通过代码检验）。

$\sqrt{\lambda}\Delta t(\Delta x^{-2}+\Delta y^{-2})^{-1/2}$ 量级	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}
震荡顶点与解析解差值量级 (%)	10^{-3}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}

(3)

改变 Δt 来观察收敛条件对计算的影响。将数据汇成下表

表中都是收敛时的结果，事实上，量级一旦来到 1 就直接发散，对应收敛条件不难理解。

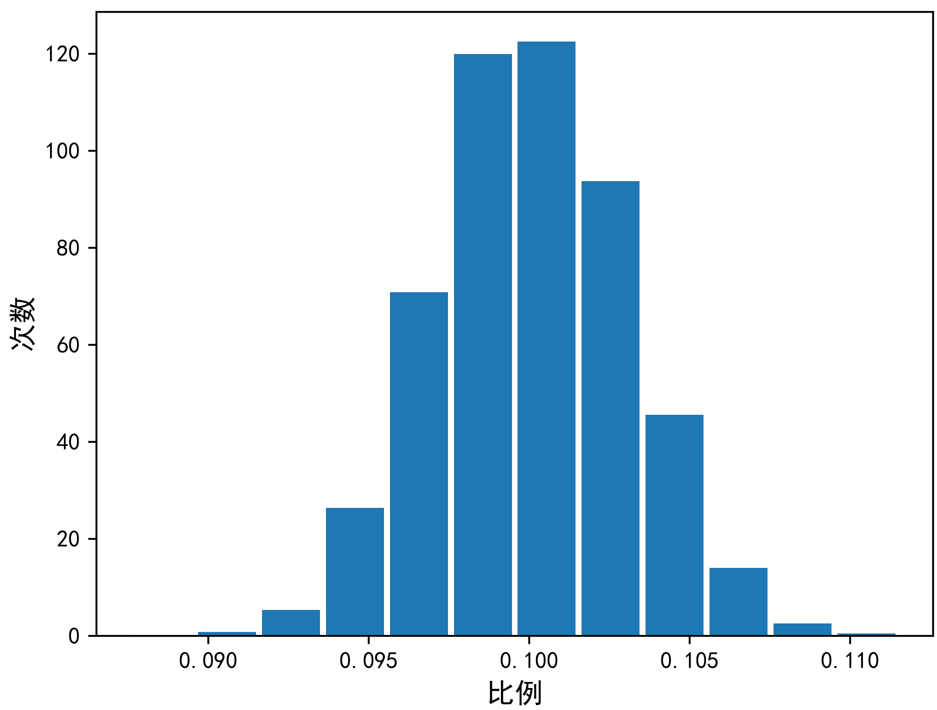
(4)

动画演示如 Wave.gif(0-1.5s 的动画演示) 所示。参数设置见源码 Wave.py

4. 随机数性质

(1)

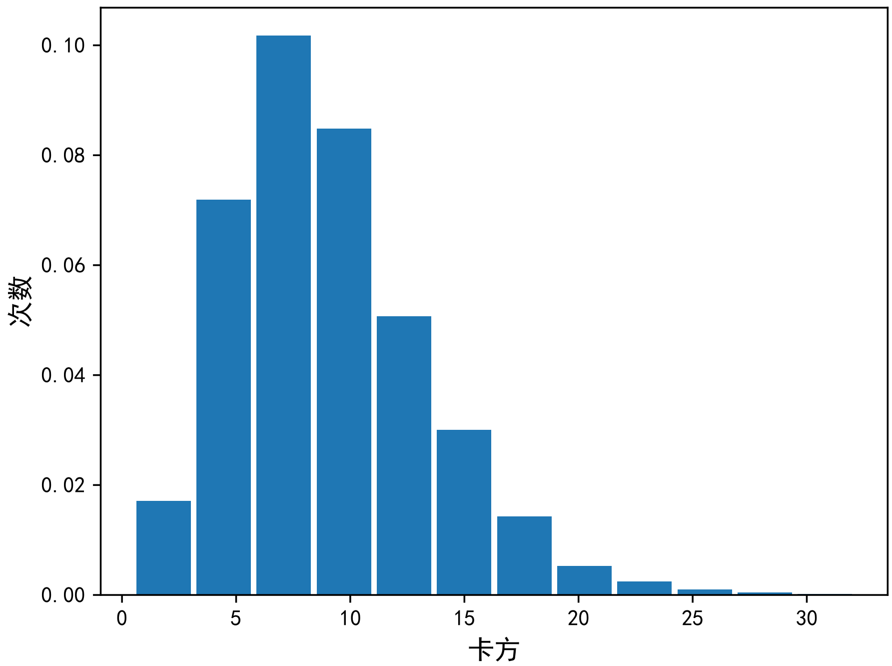
进行 1000 次 10000 点随机数投点，直方图如下表（源码为 Random.py）可以看出分布

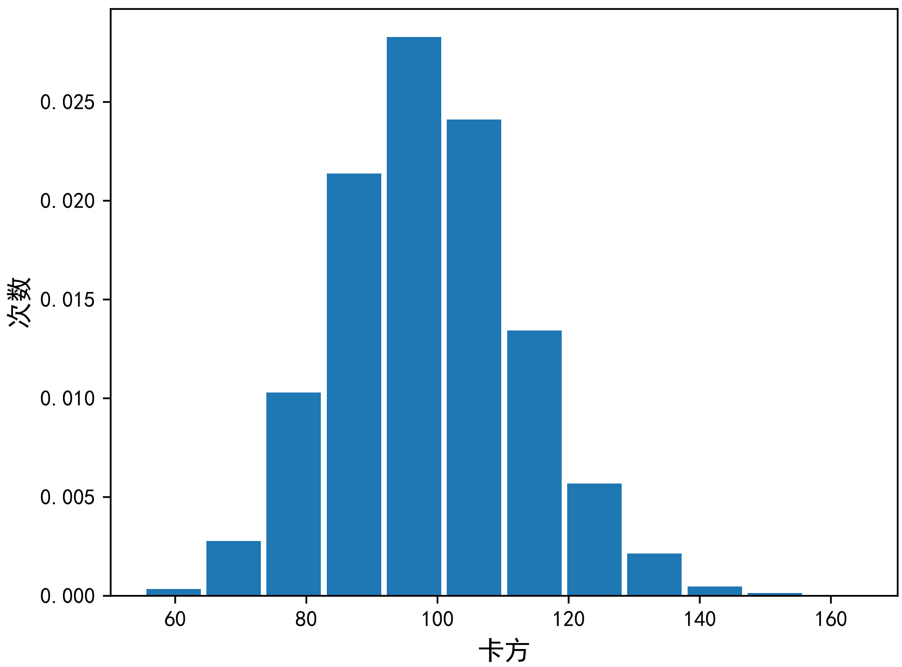


曲线基本是以 0.1 为中心，0.01 为最大误差分布，平均结果也与期望值接近，从单一区间来看准确度较好。

(2)

用卡方分别检验随机数的均匀性和独立性如下表（1000 次）





对照卡方表进行对比（自由度为 9 和 81）可以看到均匀性不算好，但独立性更差。这一定程度上揭示了伪随机数的性质。