第十一次作业

（1）考虑由两个全同的自旋为 1 的玻色子组成的系统，哪些总自旋的本征态是对称的？哪些是反对称的？相应的空间波函数对称性又是什么样的？

（2）证明薛定谔方程具有伽利略不变性。

提示：设$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$，$t' = t$，$\psi'(\mathbf{r}', t') = e^{imv^2 t'/2\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)$，可得

$$\nabla' = \nabla,\ (\partial_{t'} f)_{\mathbf{r}'} = (\partial_t f)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}\cdot\nabla f,$$

$$i\hbar\partial_{t'}\psi' = [\frac{m}{2}\left(\frac{-i\hbar\nabla}{m} - \mathbf{v}\right)^2 + V]\,\psi'。$$

（3）

作业题：证明从狄拉克方程可以得到连续性方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_k \dfrac{\partial}{\partial x^k} j^k = 0$，其中几率密度为 $\rho(x) = \widetilde{\psi}^*(x)\psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha^*\psi_\alpha$，几率流为 $j^k(x) = c\widetilde{\psi}^*(x)\alpha^k\psi(x)$，$\widetilde{\psi}^*(x) = (\psi(x))^\dagger$ 是具有N个分量的列向量函数。

（4）

作业题：证明从狄拉克方程中的γ矩阵满足关系式 $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$，

其中 $g^{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基空间的度规张量的逆变分量，$g^{00} = 1$，$g^{kk'} = -\delta_{kk'}$.

第十二次作业

（1）

作业题：证明 S 具有唯一性（不包括系数不同）。

提示：假设 S 不具有唯一性，则有 $S^{-1}\gamma^{\mu}S=S'^{-1}\gamma^{\mu}S'$，$S'S^{-1}$ 与所有 γ^{μ} 的乘积都对易，$S'S^{-1}$ 只能为常数。

（2）

作业题：证明 $g_{\mu\lambda}\varepsilon_{\nu}^{\lambda}+g_{\nu\lambda}\varepsilon_{\mu}^{\lambda}=0$

提示：利用 $g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}=g_{\alpha\beta}x'^{\alpha}x'^{\beta}$，及方程右边一阶展开项的系数为零。

（3）

作业题：证明自由的狄拉克粒子总角动量守恒。

提示：总角动量为 $\vec{J}=\vec{L}+\frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}$，$\vec{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$，$H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta$，可证得 $[J_k,H]=0$。

（4）

作业题：证明在时间反演下 $\overline{\psi'}(x')\gamma_5\psi'(x')=-\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$,

提示：利用 $\psi'(x')=U^{*}\psi^{*}(x)$，$\overline{\psi'}(x')=\widetilde{\psi}(x)\widetilde{U}\gamma^{0}$，$\gamma_5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$,

$U=\gamma^1\gamma^3=U^{*}$，$\widetilde{U}=U^{-1}$，$(U\gamma_0)^{-1}(\gamma^{\mu})^{*}(U\gamma^0)=\gamma^{\mu}$,

并且 $\overline{\psi'}(x')\gamma_5\psi'(x')$ 与它自己转置相同等性质，先把等式左侧取转置，

得 $\widetilde{\psi}^{*}(x)\,U^{\dagger}\,\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\,U\,\psi(x)=\cdots$

第十三次作业

（1）

作业题：计算电子速度算符 $c\,\alpha^k$ 在四种平面波上的期待值并给出低动量极限下的期待值。（提示：可以利用 $\chi^\dagger_\pm\,\boldsymbol{\sigma}\,\chi_\pm = \pm\boldsymbol{e}$ 来计算）

（2）

作业题：证明第一类与第三类平面波满足电荷共轭关系，即 $u_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}) \propto \mathit{\Gamma}\,u^*_{\mathrm{III}}(-\boldsymbol{p})$ 。