第十二周高等量子力学作业

隋源　2000011379

Nov 29th 2022

1

（一）总自旋为 2

根据角动量耦合理论，总自旋 $S=2,M=\pm2$ 的态很容易确定为

$$|2,2\rangle=|++\rangle$$

$$|2,-2\rangle=|--\rangle$$

对两边依次使用升降算符，得到

$$|2,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle+|+0\rangle)$$

$$|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|+-\rangle+2|00\rangle+|-+\rangle)$$

$$|2,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle+|-0\rangle)$$

（二）总自旋为 1

由于 $|1,\pm1\rangle,|2,\pm1\rangle$ 应正交归一，根据叠加原理可以得到总自旋 $S=1,M=\pm1$ 的态

$$|1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle-|+0\rangle)$$

$$|1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0-\rangle-|-0\rangle)$$

对两边依次使用升降算符，得到

$$|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$$

（三）总自旋为 0

由于 $|0,0\rangle,|1,0\rangle,|2,0\rangle$ 应正交归一，根据叠加原理可以得到

$$|2,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|+-\rangle-|00\rangle+|-+\rangle)$$

很容易看出 S=0，2 的态是对称的，S=1 的态是反对称的。由于玻色子波函数应是交换对称的，因此 S=0，2 对应的空间函数对称，S=1 对应的空间函数反对称。

2

作伽利略变换

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \quad t' = t$$

容易证明 $(\nabla = \partial_{\boldsymbol{r}}, \nabla' = \partial_{\boldsymbol{r}'})$

$$(\partial_{\boldsymbol{r}} f)_t = (\partial_{\boldsymbol{r}'} f)_{t'}$$

$$(\partial_{t'} f)_{\boldsymbol{r}'} = (\partial_t f)_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{v} \cdot (\partial_{\boldsymbol{r}} f)_t$$

设两个坐标系的波函数为 $\psi(\boldsymbol{r}, t), \psi'(\boldsymbol{r}', t')$，则初态满足

$$\psi(0,0) = \psi'(0,0)$$

利用空间和时间平移算符，可以得到二者的转换关系

$$\psi(\boldsymbol{r}', t') = e^{-im(2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - v^2 t)/2\hbar}\psi(\boldsymbol{r}, t) = S(\boldsymbol{r}, t)\psi(\boldsymbol{r}, t)$$

接下来验证薛定谔方程的伽利略协变性。原坐标下的薛定谔方程

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_{\boldsymbol{r}})^2\psi + V\psi$$

而

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_{t'}\psi' &= i\hbar(\partial_t S)\psi + i\hbar S\partial_t\psi + i\hbar\boldsymbol{v}\cdot(\partial_{\boldsymbol{r}}\psi') \\
&= -\frac{1}{2}mv^2\psi' + S\frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_{\boldsymbol{r}})^2\psi + i\hbar\boldsymbol{v}\cdot(\partial_{\boldsymbol{r}}\psi') + V'\psi' \\
&= \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_{\boldsymbol{r}'} - m\boldsymbol{v})^2\psi' + V'\psi'
\end{aligned}$$

正好是另一坐标系下的薛定谔方程。这表明薛定谔方程是伽利略协变的，与相对论不自洽。

3

满足洛伦兹协变和概率守恒的方程为狄拉克方程

$$-i\hbar\sum_k c\alpha^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + mc^2\beta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

其中 α^k, β 都为厄米矩阵。它的共轭为

$$i\hbar\sum_k c\alpha^k\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k} + mc^2\beta\psi^\dagger = -i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}$$

两式交叉相乘并作差，得到

$$\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi + c\sum_k \psi^\dagger\alpha^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\alpha^k\psi = 0$$

令 $\rho = \psi^\dagger\psi, j^k = c\psi^\dagger\alpha^k\psi$，得到连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_k\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0$$

4

gamma 矩阵

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^k = \beta\alpha^k \quad (k = x, y, z)$$

其中 α^k, β 均是二次方为 1 且两两反对易的厄米矩阵。接下来计算 $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ 的值。

（一）μ, ν 都不为 0

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu = -\beta^2\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$$

（二）μ, ν 只有一个为 0，不妨设 $\nu = 0$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \beta\alpha^\mu\beta + \beta^2\alpha^\mu = 0$$

（三）μ, ν 都为 0

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\beta^2 = 2$$

综上有

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

其中

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

第十三周高等量子力学作业

隋源　2000011379

Dec 6th 2022

1

狄拉克方程满足洛伦兹协变的条件

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

假设 S 不具有唯一性，那么存在 S' 使得

$$S^{-1}\gamma^\mu S = S'^{-1}\gamma^\mu S'$$

令 $T = S'S^{-1}$，则有

$$T\gamma^\mu T^{-1} = \gamma^\mu$$

很显然 T 是相似变换且变换结果与开始一致，因此只能是一个系数，即

$$S'S^{-1} = \text{const}$$

因而 S 具有唯一性。

2

无穷小洛伦兹变换下

$$x'^\mu \approx x^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu$$

因此变换矩阵为

$$\Lambda \approx 1 + \varepsilon$$

由洛伦兹协变条件

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

保留至一阶小量

$$g\varepsilon + \varepsilon^T g = 0$$

由于 g 为对称矩阵，因而矩阵 $g\varepsilon$ 反对称。写成矩阵元形式

$$g_{\mu\lambda}\varepsilon^\lambda_\nu + g_{\nu\lambda}\varepsilon^\lambda_\mu = 0$$

3

泡利-狄拉克表象中，$\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\Sigma}$ 矩阵的表达式为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

容易证明代数关系

$$[\boldsymbol{\Sigma}, \beta] = 0, \quad [\Sigma_i, \alpha_i] = 0, \quad [\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\alpha_k$$

自由粒子的哈密顿量

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta mc^2$$

因此

$$[\Sigma_k, H] = cp_i[\Sigma_k, \alpha_i] + cp_j[\Sigma_k, \alpha_j] = 2ic(\alpha_j p_i - \alpha_i p_j)$$

另一方面

$$[L_k, H] = c[x_i p_j - x_j p_i, \alpha_i p_i + \alpha_j p_j + \alpha_k p_k] = i\hbar c(\alpha_i p_j - \alpha_j p_i)$$

因此有

$$[J_k, H] = [L_k, H] + \frac{\hbar}{2}[\Sigma_k, H] = 0$$

因此自由粒子角动量守恒。

4

根据时间反演的结论直接证明。计算等式左侧（由于是赝标量，可整体取转置，不影响证明）

$$\begin{aligned}
\overline{\psi'}\gamma_5\psi' &= (U^*\psi^*)^\dagger\gamma^0\gamma_5(U^*\psi^*) \\
&= \widetilde{\psi}\widetilde{U}(i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)U^*\psi^* \\
&= \widetilde{\psi}(\gamma^1\gamma^3)^{-1}(i\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^1\gamma^3)\psi^* \\
&= -i\widetilde{\psi}(\gamma^1\gamma^3)^{-1}(\gamma^1\gamma^3)(\gamma^2\gamma^1\gamma^3)\psi^* \\
&= \widetilde{\psi}(i\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi^* \\
&= \psi^\dagger(i\gamma^3\gamma^2\gamma^1)\psi \\
&= -\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\
&= -\overline{\psi}\gamma_5\psi
\end{aligned}$$

(其中用到 $(\gamma^2)^T = \gamma^2, (\gamma^1)^T = -\gamma^1, (\gamma^3)^T = -\gamma^3$ 的结论)

第十三周高等量子力学作业

隋源　2000011379

Dec 6th 2022

1

四种平面波的旋量

$$u_{\mathrm{I}} = u_0 \begin{pmatrix} \chi_+(\boldsymbol{p}) \\ k_0\chi_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{\mathrm{II}} = u_0 \begin{pmatrix} \chi_-(\boldsymbol{p}) \\ -k_0\chi_-(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{\mathrm{III}} = u_0 \begin{pmatrix} -k_0\chi_+(\boldsymbol{p}) \\ \chi_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \quad u_{\mathrm{IV}} = u_0 \begin{pmatrix} k_0\chi_-(\boldsymbol{p}) \\ \chi_-(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

其中 $u_0 = \sqrt{\frac{mc^2+|E|}{2|E|}}, k_0 = \frac{c|\boldsymbol{p}|}{mc^2+|E|}$。旋量满足

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \chi_\pm = \pm \chi_\pm$$

因此速度算符的期待值为

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{I}} = cu_0 \begin{pmatrix} k_0\chi_+(\boldsymbol{p}) \\ \chi_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = c\left[\frac{2k_0}{1+k_0^2}u_{\mathrm{I}} + \frac{1-k_0^2}{1+k_0^2}u_{\mathrm{III}}\right]$$

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{II}} = cu_0 \begin{pmatrix} k_0\chi_-(\boldsymbol{p}) \\ -\chi_-(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = c\left[\frac{2k_0}{1+k_0^2}u_{\mathrm{II}} - \frac{1-k_0^2}{1+k_0^2}u_{\mathrm{IV}}\right]$$

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{III}} = cu_0 \begin{pmatrix} \chi_+(\boldsymbol{p}) \\ -k_0\chi_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = c\left[\frac{1-k_0^2}{1+k_0^2}u_{\mathrm{I}} - \frac{2k_0}{1+k_0^2}u_{\mathrm{III}}\right]$$

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{IV}} = cu_0 \begin{pmatrix} -\chi_-(\boldsymbol{p}) \\ -k_0\chi_-(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = c\left[-\frac{1-k_0^2}{1+k_0^2}u_{\mathrm{II}} - \frac{2k_0}{1+k_0^2}u_{\mathrm{IV}}\right]$$

低动量极限下有

$$c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{I}} = cu_{\mathrm{III}}, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{II}} = -cu_{\mathrm{IV}}, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{III}} = cu_{\mathrm{I}}, \quad c\boldsymbol{\alpha} \cdot u_{\mathrm{IV}} = -cu_{\mathrm{II}}$$

容易看出有 4 种本征态，对应的速度为 $\pm c$。

2

电荷共轭

$$\psi'(x) = \Gamma\psi^*(x)$$

利用 $\psi(x) = u(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ 得到

$$u_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{p}) \propto \gamma^2 u^*_{\mathrm{III}}(-\boldsymbol{p})$$

其中 $\gamma^2 = \beta\alpha_2$。故

$$\gamma^2 u^*_{\mathrm{III}}(-\boldsymbol{p}) = u_0 \begin{pmatrix} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_0\chi_+(\boldsymbol{p}) \\ \chi_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = u_{\mathrm{I}}$$

因此第一类与第三类平面波满足电荷共轭关系，证毕。