YieldCurve研修の補修

目標：全体像の雰囲気をつかむこと

1．問題設定

1. 問題設定

DiscountCurve $D : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たす。

- $0 < D$
- $D_0 = 1$

DiscountCurveの使い道

$$\text{Call.PV} = D_t \mathbb{E}_0^t \left[(S_t - K)^+ \right]$$

ここ

DiscountCurveを求めたい！

…どうやって？　➡　マーケットに合わせる

1. 問題設定

マーケットに合わせる

DiscountCurve自体はマーケットで観測できない…
が、一部金利商品のquoteは観測できる。

Deposit-rate, SwapRate, SwapSpread,
FRA-rate, FuturesPrice …

モデル的には、これらはDiscountCurveの(汎)関数

➡ marketQuoteはDiscountCurveの制約式

Ex)

$$\text{SwapRate} = \frac{D_{t_0} - D_T}{\sum_i D_{t_i} \tau_i}$$

中島さんの
Lecture

DiscountCurve $D : [0, T] \to \mathbb{R}$ は以下を満たす。（qiはmarketQuote）
- $0 < D$
- $D_0 = 1$
- $f_i(D; q_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

THREE-MONTH SOFR FUTURES - QUOTES

1. 問題設定

DiscountCurve $D : [0, T] \to \mathbb{R}$ は以下を満たす。（qiはmarket quote）
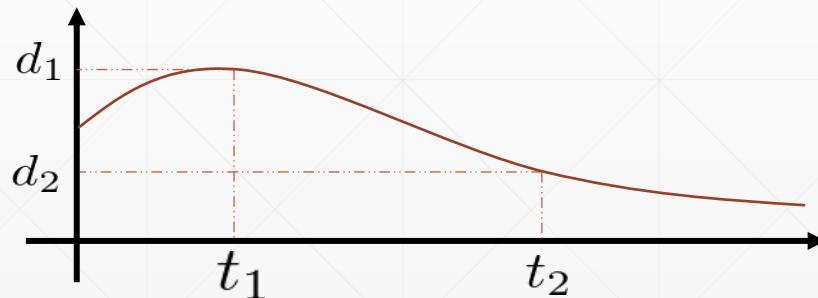
- $0 < D$
- $D_0 = 1$
- $f_i(D; q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$

marketQuoteは有限個

DiscountCurveは連続無限個くらいのパラメータがあってきまらない...

➡️ 何かしら仮定が必要。例えば、次を仮定する。

$$D_t = \mathrm{Interpolation}\,(t;\ (t_i, d_i)_{i=1,\ldots,n};\ \mathrm{Scheme})$$

どのように
補間するか

1. 問題設定

問題設定

$$D_t = \text{Interpolation}\left(t;\ (t_i, d_i)_{i=1,\dots,n};\ \text{Scheme}\right)$$

で、以下を満たすものを構築する
（diはn 自由度のモデルパラメータ、qiはmarketQuote）

- $0 < D$
- $D_0 = 1$
- $f_i(D; q_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

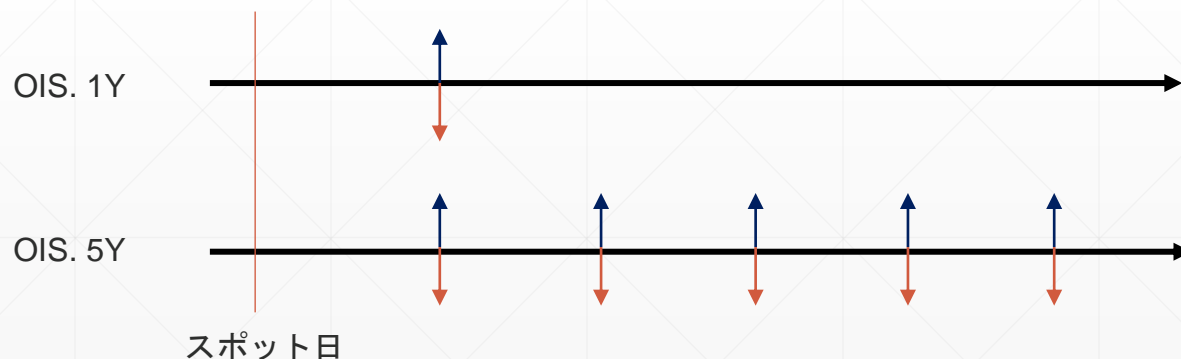これを解くことを、「カーブを引く」と言ったりします。

2．解き方例

2．解き方例１：線形代数的なBootStrap

中島さんの
Lecture

Deposit, SwapRate, SwapSpreadの定める制約式が
DiscountFactor（DiscountCurveの点）の線形結合で書けることを利用して、
逐次的に解く

良い点：　　簡単。（たぶん）速い。
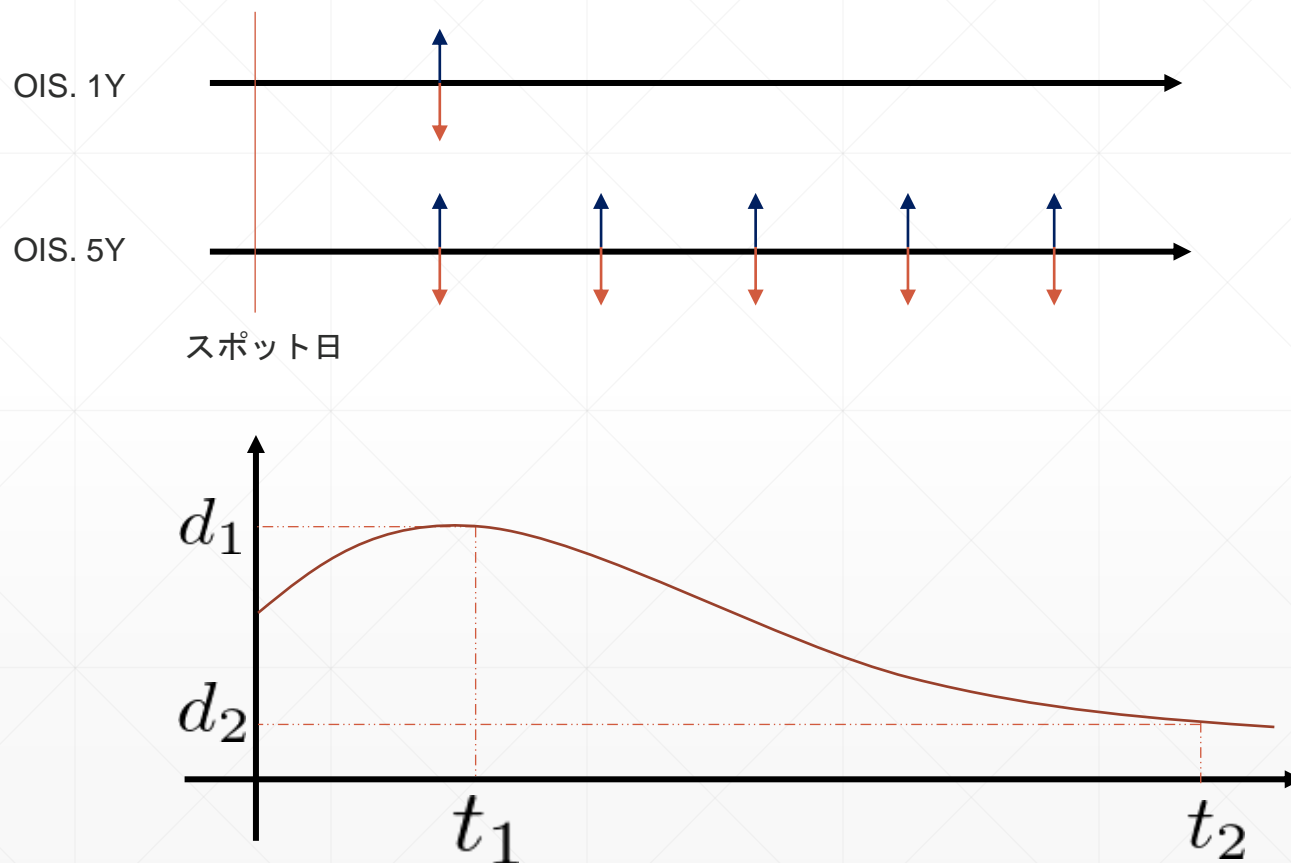微妙?な点：　本当に解けます…？

紐を1か所ずつ逐次的に
外すイメージ

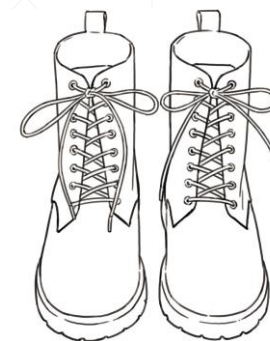OIS. 1Y

OIS. 5Y

スポット日

2．解き方例2：球根法的なBootStrap

適切な仮定の下で、(例えば)1次元Newton法を使う

紐を1か所ずつ逐次的に
外すイメージ

OIS. 1Y

OIS. 5Y

スポット日

d_1

d_2

t_1

t_2

OIS.1Yを使ってd1を計算

OIS.5Yを使ってd2を計算

2. 解き方例3：全部一度に求めさせる

(例えば)n次元Newton法を使う

OIS. 1Y

OIS. 5Y

スポット日

d_1

d_2

t_1

t_2
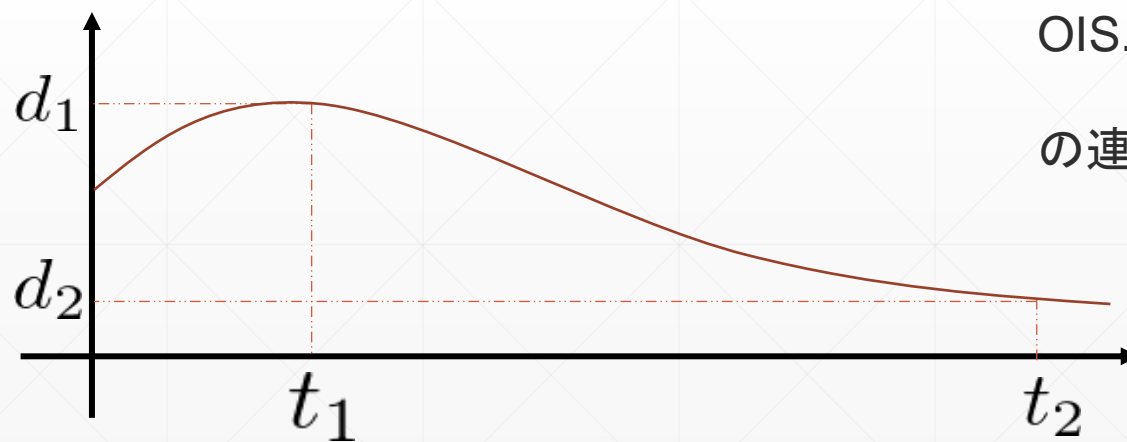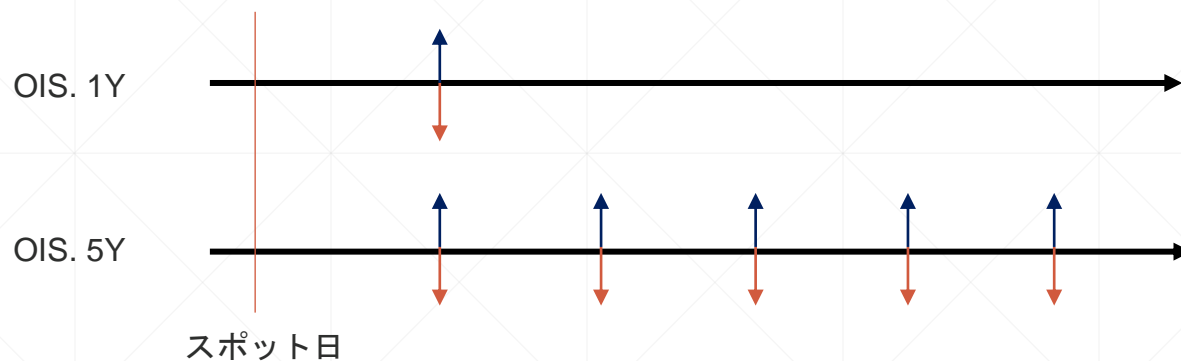
OIS.1Yの定める制約式
OIS.5Yの定める制約式

の連立方程式を、一気に計算する

余談：
n次元Newton法の場合おつりが出る。
　おつり
　　= Jacobian
　　= partial(DF) / partial(quote)

↑後々、リスク計算に使うこともある

3. 補間方法

3. 補間方法

$$D_t = \text{Interpolation}\left(t;\ (t_i, d_i)_{i=1,\ldots,n};\ \text{Scheme}\right)$$

で、以下を満たすものを構築する
（diはパラメータ、n 自由度、qiはmarketQuote）

- $0 < D$
- $D_0 = 1$
- $f_i(D; q_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$

40個のinstrumentsを使って40年分のDiscountCurveを引いた場合、
40個のデータで40×365日分のデータを補間で作っていることになる... （ほぼ補間説...）
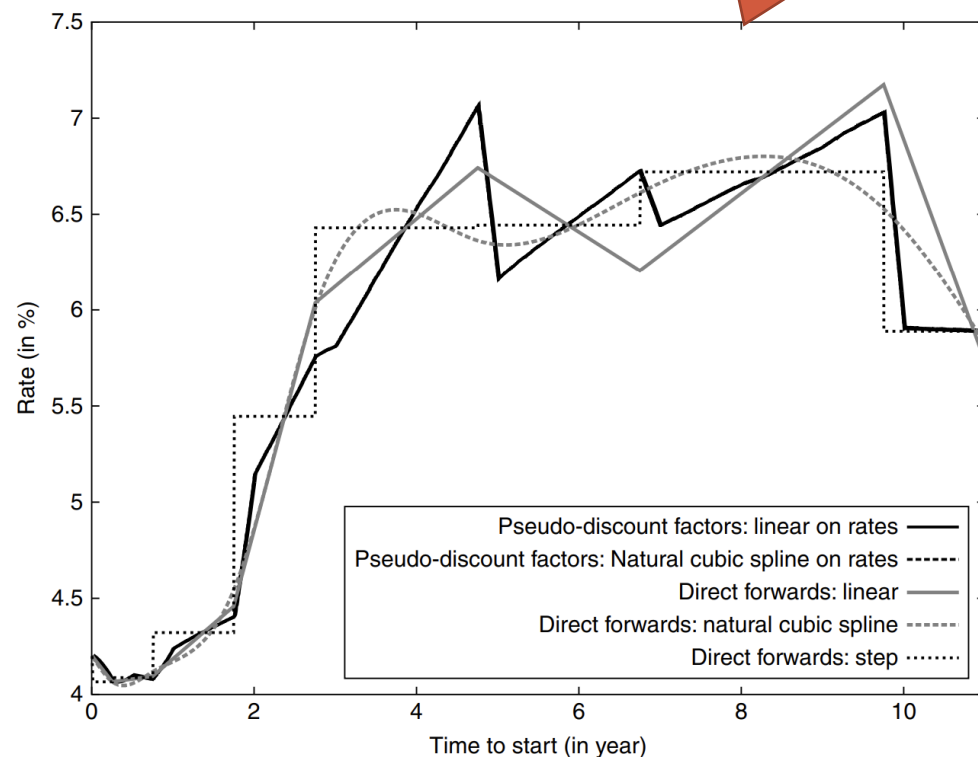
➡ 補間って大事なのでは？

3. 補間方法

Figure 3.2 Forward Ibor three months rates computed using pseudo-discount factors (in black) and direct forward rate curve (in grey) with natural cubic spline interpolation. The dashed lines are using linear interpolation and the dotted line a step function.

https://link.springer.com/book/10.1057/9781137374660

補間方法によっては左のように、(見方によっては)ガタガタなカーブが出来上がる。補間方法には大きく分けて、

- 誰を
- どの方法で

補間するのか、というパラメータがある。

3. 補間方法

補間方法

線形補間
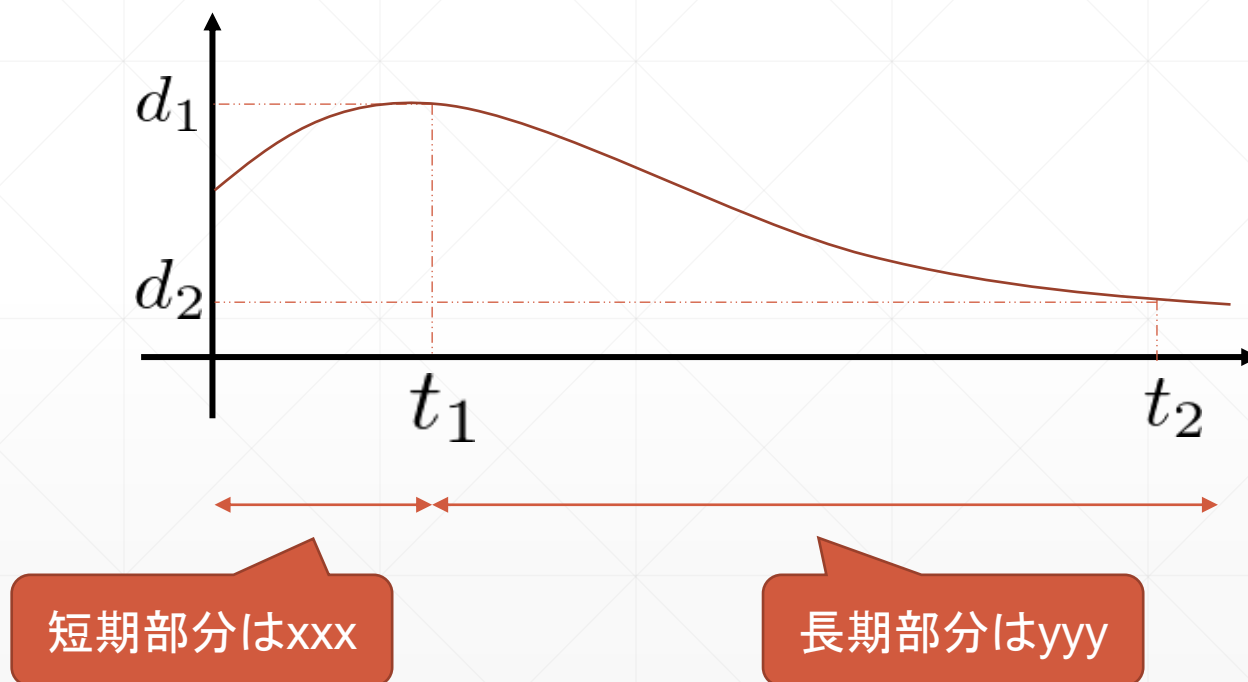
CubicSpline

...
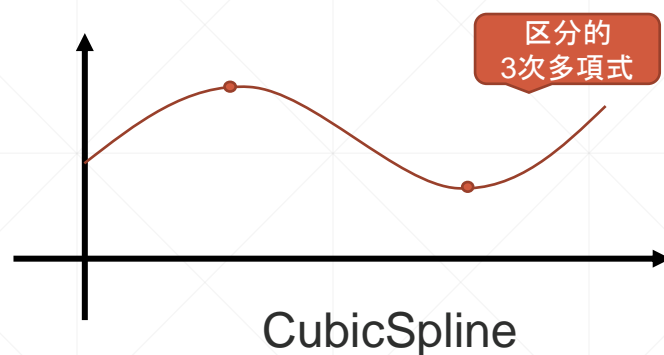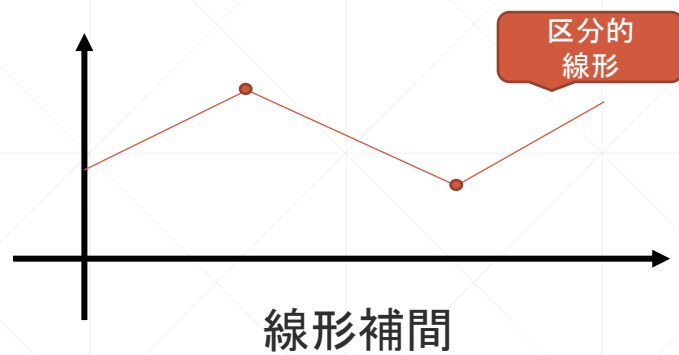
補間対象

$$D_t$$

DiscountCurve自体

$$\log D_t$$

LogDF

$$-\frac{d}{dt}\log D_t$$

瞬間フォワードレート

...

3．補間方法

他にも、Hybrid的な補間方法を考えることもできる...。

3. 補間方法

Table 1: A synopsis of the comparison between methods.

Yield curve type	Forwards positive?	Forward smoothness	Method local?	Forwards stable?	Bump hedges local?
Linear on discount	no	not continuous	excellent	excellent	very good
Linear on rates	no	not continuous	excellent	excellent	very good
Raw (linear on log of discount)	yes	not continuous	excellent	excellent	very good
Linear on the log of rates	no	not continuous	excellent	excellent	very good
Piecewise linear forward	no	continuous	poor	very poor	very poor
Quadratic	no	continuous	poor	very poor	very poor
Natural cubic	no	smooth	poor	good	poor
Hermite/Bessel	no	smooth	very good	good	poor
Financial	no	smooth	poor	good	poor
Quadratic natural	no	smooth	poor	good	poor
Hermite/Bessel on rt function	no	smooth	very good	good	poor
Monotone piecewise cubic	no	continuous	very good	good	good
Quartic	no	smooth	poor	very poor	very poor
Monotone convex (unameliorated)	yes	continuous	very good	good	good
Monotone convex (ameliorated)	yes	continuous	good	good	good
Minimal	no	continuous	poor	good	very poor

3. 補間方法

SECURED OVERNIGHT FINANCING RATE CHART

https://www.newyorkfed.org/markets/reference-rates/sofr