

Machine Learning: Theory and Implementation using Python

Keishi Okudera

2018 年 6 月 4 日

目次

第 1 章	線形代数	4
1.1	行列の定義	4
1.2	基礎演算	4
1.3	正方行列, ベクトル	6
1.4	分割ベクトル	7
1.5	内積, ノルム, 角度	8
第 2 章	Python	9
2.1	標準モジュール	9
2.1.1	print 関数	9
2.1.2	type 関数	9
2.1.3	format メソッド	10
2.2	numpy	10
2.2.1	ndarray オブジェクト	10
2.3	pandas	11
2.3.1	DataFrame オブジェクト	11
2.4	matplotlib	12
2.4.1	figure オブジェクトと axes オブジェクト	12
2.4.2	2 次元の散布図 scatter()	13
第 3 章	機械学習の概念	15
3.1	機械学習の定義	15
3.2	教師あり学習と教師なし学習	16
第 4 章	教師あり学習	17
4.1	トレーニングセットと仮説関数	17
4.2	線形回帰	18
4.2.1	目的関数	18
4.2.2	最急降下法	20
4.2.3	デザイン行列	22
4.2.4	デバッグ	24
4.3	多項式回帰	25
4.4	正規方程式	26

第 1 章

線形代数

数学的に厳密ではない箇所があるが、ご容赦いただきたい。後で追記する予定。

1.1 行列の定義

まずは行列を定義する。

定義 1.1 (行列). 実数の長方形配列を行列 (**matrix**) と呼ぶ. すなわち, 行列は一般的な形として以下のように配列された実数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$ の集まりである.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

なお, 上記のように m 個の行と n 個の列からなる行列を $m \times n$ 行列と呼び, m と n をこの行列の次元 (**dimension**) と呼ぶ. 行列の第 i 行と第 j 列にある a_{ij} をその行列の第 ij 要素 (**element**) または成分 (**entry**) と呼ぶ. たびたび, 行列はその成分 a_{ij} として $A = \{a_{ij}\}$ と表記する. なお, 行列に対して, 単なる数のことを, スカラー (**scalar**) と呼ぶ.

注意 1.1. 断りのない限り, 行列の成分は実数に限定する.

1.2 基礎演算

定義した行列に対して, 相等, 和・差, 積 (スカラー積と行列の積), そして転置という行列特有の操作を導入する.

定義 1.2 (行列の相等). 同じ次元を持つ 2 つの行列 A, B について, もし A の全ての要素が B のその対応する各要素に等しいならば, 行列は等しい (**equal**) といい, $A = B$ と書く.

定義 1.3 (スカラー乗法). 任意のスカラー k と任意の $m \times n$ 行列 $A = \{a_{ij}\}$ に対して, k と A のスカラー積 (**scalar product**) を, その第 ij 要素が ka_{ij} である $m \times n$ 行列と定義し, kA と書く. 特に, -1 と A のスカラー積 $(-1)A$ を, A の負 (**negative**) と呼び, $-A$ と略記する.

定理 1.1. 任意のスカラー c, k , 任意の行列 A に対して次式が成り立つ.

$$c(kA) = (ck)A = (kc)A = k(cA) \quad (1.1)$$

証明. 省略 (任意の ij 成分に対して成り立つことを示せばよい). \square

定義 1.4 (行列の加法と減法). 同じ行の数 m と同じ列の数 n をもつ任意の行列 $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}$ に対して, A と B の和 (**sum**) を, その第 ij 要素が $a_{ij} + b_{ij}$ である $m \times n$ 行列と定義し, $A + B$ と書く. また, 和 $A + (-B)$, すなわちその第 ij 要素が $a_{ij} - b_{ij}$ である $m \times n$ 行列を $A - B$ と書くこととし, この行列を A と B の差 (**difference**) と呼ぶ. 同じ数の行と列をもつ行列は加法あるいは減法に対して共形的 (**conformal**) であるという.

定理 1.2. 任意のスカラー c, k , 任意の共形的である行列 A, B, C に対して次式が成り立つ.

$$A + B = B + A \quad (1.2)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (1.3)$$

$$c(A + B) = cA + cB \quad (1.4)$$

$$(c + k)A = cA + kA \quad (1.5)$$

証明. 略 (任意の ij 成分に対して成り立つことを示せばよい). \square

定義 1.5 (行列の積). $m \times n$ 行列 A と $p \times q$ 行列 B について, $p = n$, すなわち A の列と B の行の数が等しいとき, 行列の積 (**matrix product**) AB は, $AB = \{c_{ij}\}$ としたとき, その第 ij 要素 c_{ij} が次式で表される $m \times q$ 行列と定義する.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (1.6)$$

なお, AB は, A による B への前からの乗法 (**premultiplication**) または B の A による後ろからの乗法 (**postmultiplication**) と呼ぶ.

定理 1.3. 任意のスカラー c , 任意の $m \times n$ 行列 A , $n \times q$ 行列 B , $q \times t$ 行列 C に対して次式が成り立つ.

$$A(BC) = (AB)C \quad (1.7)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (1.8)$$

$$(A + B)C = AC + BC \quad (1.9)$$

$$cAB = (cA)B = A(cB) \quad (1.10)$$

証明. 略 (任意の ij 成分に対して成り立つことを示せばよい). \square

問題 1.1. 任意の $m \times n$ 行列 A, B , $n \times q$ 行列 C, D に対して次式が成り立つことを示せ.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD \quad (1.11)$$

解答. 式 (1.8) において $(A + B)$ を A だとして適用し, その後に式 (1.9) を順に適用して展開したあと, 式 (1.2) で交換操作をすることで示せる.

$$\begin{aligned} (A + B)(C + D) &= (A + B)C + (A + B)D \\ &= AC + BC + AD + BD \\ &= AC + AD + BC + BD \end{aligned}$$

\square

定義 1.6 (転置). $m \times n$ 行列 A の転置 (**transposition**) は記号 A^T で表し, 各 ij 要素が A の第 ji 要素である $n \times m$ 行列を意味する. すなわち, 行列の転置は行を列として, 列を行として書き直すことで作る.

定理 1.4. 任意の行列 A に対して, 次式が成り立つ.

$$(A^T)^T = A \quad (1.12)$$

また, 加法に関して共形的である任意の行列 A, B に対して, 次式が成り立つ.

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (1.13)$$

また, 積が定義される任意の行列 A, B に対して, 次式が成り立つ.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (1.14)$$

証明. 任意の ij 成分に対して成り立つことを示せばよいので省略するが, 式 (1.14) のみ示す. $m \times n$ 行列 $A = \{a_{ij}\}$, $n \times q$ 行列 $B = \{b_{ij}\}$ とする. $q \times m$ 行列 $(AB)^T = \{d_{ij}\}$ の第 ij 成分は, $m \times q$ 行列 $AB = \{c_{ij}\}$ の第 ji 成分であるため, 式 (1.6) より

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

となる. 一方, $q \times n$ 行列 $B^T = \{b'_{ij}\}$, $n \times m$ 行列 $A^T = \{a'_{ij}\}$ としたとき, $q \times m$ 行列 $B^T A^T = \{d'_{ij}\}$ の第 ij 成分は, 式 (1.6) より

$$d'_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj}$$

となるが, $b'_{ik} = b_{ki}$, $a'_{kj} = a_{jk}$ であるため, 結局,

$$d'_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = d_{ij}$$

□

1.3 正方行列, ベクトル

行列の中でも, 特別な名前がつけられているものがある. ここでは正方行列と対称行列, ベクトルを定義する.

定義 1.7 (正方行列). 行の数と列の数が同じ行列を正方行列 (**square matrix**) と呼び, $n \times n$ 正方行列における n を次数 (**order**) という. また, $n \times n$ 正方行列において $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を (第 1, 第 2, 等の) 対角要素 (**diagonal element**) と呼び, 対角要素以外の要素を非対角要素 (**off-diagonal element**) と呼ぶ.

定義 1.8 (対称行列). $A^T = A$ である行列 A , すなわち第 ij 要素が第 ji 要素と等しい行列を対称行列 (**symmetric matrix**) という.

定理 1.5. 任意の行列 X に対して, $X^T X$ は対称行列である.

証明. 式 (1.14), 式 (1.12) より, $(X^T X)^T = X^T (X^T)^T = X^T X$. \square

定義 1.9 (ベクトル). ただ 1 個の列をもつ行列, すなわち以下の行列を列ベクトル (**column vector**) と呼ぶ.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

同様に, ただ 1 個の行をもつ行列を行ベクトル (**row vector**) と呼ぶ. なお, 上記のように m 個の要素からなるベクトルを m 次元ベクトルと呼ぶ. たびたび, ベクトルはその第 i 成分 a_i として $\mathbf{a} = \{a_i\}$ と表記する. また, 上記の列ベクトルを文章中で書く場合, 行ベクトルと転置を用いて $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ とすることが多い.

1.4 分割ベクトル

行列はベクトルを横だったり縦だったりにくっつけたものともいえる. 行列においてその要素をベクトルに分割したものを分割ベクトルという.

定義 1.10 (分割ベクトル). 任意の $m \times n$ 行列 $A = \{a_{ij}\}$ を m 個の行ベクトル $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ($i = 1, 2, \dots, m$) で分割したとき, その行ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ を分割行ベクトル (**partitioned row vector**) という. また, n 個の列ベクトル $\mathbf{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ ($j = 1, 2, \dots, n$) で分割した時, その列ベクトル $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_n$ を分割列ベクトル (**partitioned column vector**) という. これらを用いて, A は次式で表記される.

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \cdots & \mathbf{a}'_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

注意 1.2. 行ベクトルは基本的に定義して使わないため, 行ベクトルへの分割をするときは, m 個の列ベクトル $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ ($i = 1, 2, \dots, m$) を定義して次式で表記することが多い.

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1^T & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m^T & \text{---} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

定理 1.6. $m \times n$ 行列 A , $n \times q$ 行列 B とする. このとき, 行列の積 AB は分割ベクトルを用いて次式で計算できる.

$$AB = \begin{bmatrix} \text{---} & \mathbf{a}_1^T & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{a}_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{a}_m^T & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_q \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_q \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

証明. 式 (1.6) より, AB の任意の第 ij 成分 c_{ij} について以下が成り立つことから示される.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j$$

□

1.5 内積, ノルム, 角度

ここでは, 内積, (通常の) ノルム, 角度を定義する.

定義 1.11 (内積). 2 個の n 次元列ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ に対して, 内積 (inner product) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は次式で定義される.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (1.18)$$

注意 1.3. 本書では $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ という表記はあまり使用せず, $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ を使用する.

定理 1.7. 内積について次式が成り立つ.

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ のとき}) \quad (1.20)$$

$$(k\mathbf{a})^T \mathbf{b} = k\mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (1.21)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}^T \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c} + \mathbf{a}^T \mathbf{d} + \mathbf{b}^T \mathbf{d} \quad (1.22)$$

証明. 略.

□

定義 1.12 ((通常の) ノルム). n 次元列ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して, (通常の) ノルム ((usual norm)) $\|\mathbf{a}\|$ は次式で定義される.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \quad (1.23)$$

定理 1.8. 通常のノルムについて次式が成り立つ.

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0 \quad (\text{等号成立は } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ のとき}) \quad (1.24)$$

$$\|k\mathbf{a}\| = |k|\|\mathbf{a}\| \quad (1.25)$$

証明. 略.

□

定義 1.13 (角度). 2 つの $\mathbf{0}$ でない n 次元列ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, そのなす角度 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を, その余弦を用いて次式で定義する.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \quad (1.26)$$

第 2 章

Python

2.1 標準モジュール

2.1.1 print 関数

Python にはあらかじめ入っている関数はいくつかある。最も基本的な関数が `print` 関数である。

Grammar 2.1.

- `print([object])`: `[object]` の表示結果を返す。 `print` 関数は少々特殊で、表示結果を変数に代入するということとはできない (代入文を書いても表示結果が出るだけで、その変数には `None` が格納される)。 `[str]` の場合、 `[str]` の中に `\n` を書くと、そこで改行されて表示される (`[str]` 自身から `\n` がなくなるわけではないので注意)。

Code 2.1 (py1.py).

```
print('~~~Hello world!~~~')
print('---Hello\nworld!---')
```

```
~~~Hello world!~~~
---Hello
world!---
```

Code 2.2 (py2.py).

```
x = 10
print('---')
p = print(x)
print('---')
print(p)
```

```
---
10
---
None
```

2.1.2 type 関数

Python は多種多様な型を持つため、最初のうちは型をいろいろ確認しながらやるのが良い。

Grammar 2.2.

- `type([object])`: `[object]` の型を返す. `type([object])` の返回值自体も `type` 型を持つ.

Code 2.3 (py3.py).

```
x = 'Hello_world!'
type_x = type(x)
print(type_x)
print(type(type_x))
```

```
<class 'str'>
<class 'type'>
```

2.1.3 format メソッド

特に `print` 文を使うときに便利な `format` メソッドを紹介する. これは `str` オブジェクトに作用し, 文字列中に任意の変数等の中身を文字列として挿入できるものである.

Grammar 2.3.

- `[str].format([object],[object],...)`: `[str]` の中に記入した `{}` に, `[object]` の中身を文字列として代入する. なお, `{}` は何個あってもよく, `{}` には `[object],[object],...` の順にそれぞれ代入されていく.

Code 2.4 (py4.py).

```
p = {'x':3, 'y':5}
string = 'p={}, type={}'.format(p, type(p))
print(string)
```

```
p={'x': 3, 'y': 5}, type=<class 'dict'>
```

2.2 numpy**2.2.1 ndarray オブジェクト**

`ndarray` オブジェクトは, `list` オブジェクトから作成できる. `list` オブジェクトと `ndarray` の見た目には, 要素間にカンマがあるかないかの違いがある.

Grammar 2.4.

- `np.array([list])`: `list` オブジェクトから `ndarray` オブジェクトを作成する.

Code 2.5 (num1.py).

```
import numpy as np

x = np.array([1,2,3])

mylist = [4.1,5.9,-6.3,7.0]
```

```
y = np.array(mylist)

print('x={},type={}'.format(x, type(x)))
print('y={},type={}'.format(y, type(y)))
print('mylist={},type={}'.format(mylist,type(mylist)))
```

```
x=[1 2 3],type=<class 'numpy.ndarray'>
y=[ 4.1 5.9 -6.3 7. ],type=<class 'numpy.ndarray'>
mylist=[4.1, 5.9, -6.3, 7.0],type=<class 'list'>
```

ndarray オブジェクトをリスト直打ちで作成するのは、大きい配列を作ろうとする場合は不便であるが、規則的な配列であれば、別のプログラムで書くことができる。

Grammar 2.5.

- `np.arange([int1],[int2],[int3])`: [int1] から [int2] の手前まで、[int3] ずつ増加していく ndarray オブジェクトを作成する。
- `np.arange(a)`: 0 から a の手前まで、1 ずつ増加していく ndarray オブジェクトを作成する。
- `np.random.randn(a)`: 標準正規分布に従う乱数から発生する a 個の要素の ndarray オブジェクトを作成する。

Code 2.6 (num2.py).

```
import numpy as np

x = np.arange(0,30,2)
y = np.arange(10)
z = np.random.randn(10)

print('x={}'.format(x))
print('y={}'.format(y))
print('z={}'.format(z))

x=[ 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28]
y=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
z=[ 0.41391684 -0.27481322 -0.29993306 -0.64974345  0.63441892  0.66554782 -0.52705262
 1.1350932 -0.6862161  1.15003734]
```

2.3 pandas

2.3.1 DataFrame オブジェクト

機械学習の元となるデータは基本的に表形式データであるため、まずそれを読み込むところから始める。pandas の DataFrame オブジェクトは、表形式データを格納できる。カンマ区切りのテキストファイル (txt, csv) は、`pd.read_csv()` で読み込める。

Grammar 2.6.

- `pd.read_csv([str], names=[list])`: [str] で指定したファイルパスのデータを読み込み DataFrame オブジェクトに格納する。name は、列名をつけるときに指定する。

Code 2.7 (pd1.py). ここで読み込む `ex1data1_test.txt` は、以下のようなデータである (5 行 2 列, カンマ区切り, 列名ヘッダーなし). 左は population of city in 10,000s, 右は profit in \$10,000s であるため, 読み込む際に列名をつけている.

```
6.1101,17.592
5.5277,9.1302
8.5186,13.662
7.0032,11.854
5.8598,6.8233
```

```
import pandas as pd

df = pd.read_csv('../data/ex1data1_test.txt', names=['population', 'profit'])
print('df=\n{}\n'.format(df, type(df)))
```

```
df=
   population  profit
0  6.1101  17.5920
1  5.5277   9.1302
2  8.5186  13.6620
3  7.0032  11.8540
4  5.8598   6.8233
type=<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
```

読み込んだ `DataFrame` から, 列 `column` を取り出したいときは, `[DataFrame][column].values` メソッドを使う. `ndarray` オブジェクトで取り出されるので, その後 `matplotlib` にデータを渡しやすい.

Grammar 2.7.

- `[DataFrame][column].values`: `[DataFrame]` の `column` 列を `ndarray` オブジェクトとして抜き出す.

Code 2.8 (pd2.py).

```
import pandas as pd

df = pd.read_csv('../data/ex1data1_test.txt', names=['population', 'profit'])

pop = df['population'].values
print('population={}, type={}'.format(pop, type(pop)))

population=[6.1101 5.5277 8.5186 7.0032 5.8598], type=<class 'numpy.ndarray'>
```

2.4 matplotlib

2.4.1 figure オブジェクトと axes オブジェクト

一つ一つのグラフの本体は, `matplotlib` では `axes` オブジェクトとして表され, `axes` オブジェクトは, `figure` オブジェクトの中で管理される. イメージとしては, `figure` オブジェクトは白のキャンバスであり, そこにグラフの素である `axes` オブジェクトを置いていく. 空の `axes` オブジェクトは, デフォルトの軸だけがセットされている.

Grammar 2.8.

- `plt.figure()`: 空の `figure` オブジェクトを作成する.
- `[figure].add_subplot(a,b,c)`: `figure` オブジェクトを a 行 b 列に分割した上で, c 番目の部分に空の `axes` オブジェクトを作成する.
- `[figure].savefig('XXXX.XXX')`: `figure` オブジェクトを `XXXX.XXX` として保存する.

Code 2.9 (fig1.py).

```
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure()
ax1 = fig.add_subplot(2,2,1)
ax2 = fig.add_subplot(2,2,2)
ax3 = fig.add_subplot(2,2,3)

fig.savefig('fig1.eps')
```

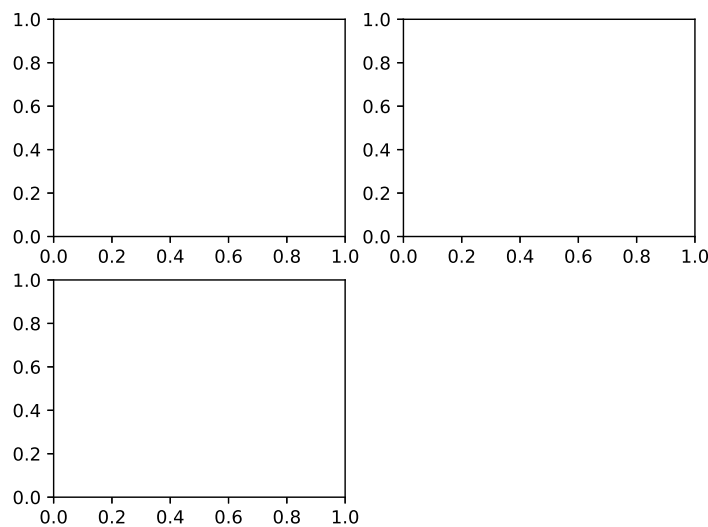


図 2.1 fig1.eps

2.4.2 2次元の散布図 `scatter()`

2次元の散布図は, `[axes].scatter()` で描画することができる. 散布図の場合は一つ一つの点がどれくらいの数値なのかがわかりにくいので, `[axes].grid()` でグリッド補助線を追加する. また, 各点についてどっちが x でどっちが y かわからないので横軸と縦軸に `[axes].set_xlabel([str])`, `[axes].set_ylabel([str])` でラベルをつける.

Grammar 2.9.

- `[axes].scatter(x,y)`: 2次元データ (x,y) の散布図を描画する. ここで, x,y は `ndarray` オブジェクトであり, 左のデータが横軸, 右のデータが縦軸である.
- `[axes].grid()`: `axes` オブジェクトにグリッド補助線を追加する.
- `[axes].set_xlabel([str])`: `axes` オブジェクトの横軸にラベルをつける.

- `[axes].set_ylabel([str])`: `axes` オブジェクトの縦軸にラベルをつける。

注意 2.1. 基本的に matplotlib に渡すデータは、`ndarray` オブジェクトであることが必要なので、以降はその前提とする。

Code 2.10 (fig2.py).

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)

x = np.arange(30)
y = np.arange(30) + 3 * np.random.randn(30)

ax.scatter(x, y)

ax.grid()
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')

fig.savefig('fig2.eps')
```

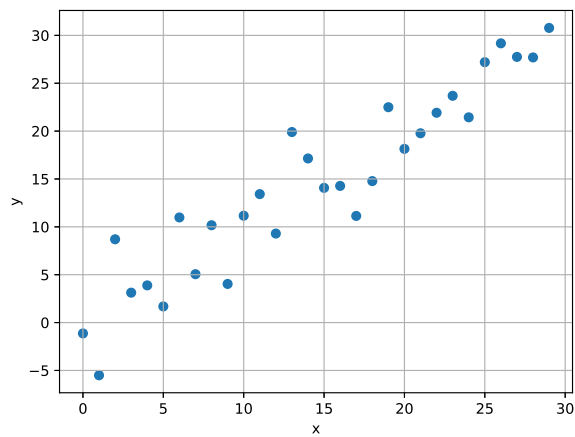


図 2.2 fig2.eps

第 3 章

機械学習の概念

3.1 機械学習の定義

Arthur Samuel は、機械学習を以下のとおり定義している。

定義 3.1 (機械学習 (Arthur Samuel(1959))). 機械学習 (**machine learning**) とは、明示的にプログラミングしなくてもコンピュータに学習能力を与える研究分野のことである。

では、学習とは何か。Tom Mitchell は、学習を、タスク T 、経験 E 、性能指標 P を用いて、以下の通り定義している。

定義 3.2 (学習, タスク T , 経験 E , 性能指標 P (Tom Mitchell(1998))). 性能指標 (**performance measure**) P で測定される、タスク (**task**) T における性能が経験 (**experience**) E により改善されることを、そのタスク T のクラスおよび性能指標 P に関して経験 E から学習 (**learn**) するという。

問題 3.1. 以下の機械学習の各事例においてタスク T 、経験 E 、性能指標 P を答えなさい。

1. 将棋プログラムが、自身を相手に数万回もの対局を行い、どのような棋譜が勝つまたは負ける傾向になるかを学習していき、人間よりも将棋が強くなった。
2. 電子メールクライアントが、どの電子メールをスパムとしてフラグを立てるかどうかを判断しようとしている。人間がどの電子メールがスパムかを電子メールクライアントに逐一報告していくことにより、より正確にスパムであるかどうかの判断を行えるようになっていった。
3. 過去の天気データから、将来の天気を予測する。

解答.

1. T は「将棋をさすこと」、 E は「自身を相手に数万回もの対局を行なった経験」、 P は「次の対戦で勝利する確率」。
2. T は「電子メールをスパムかどうか判断すること」、 E は「各電子メールがスパムかどうかの報告内容」、 P は「正しくスパムと判断できる確率」。
3. T は「将来の天気を予測すること」、 E は「過去の天気データ」、 P は「正しく天気を当てられる確率」。

□

3.2 教師あり学習と教師なし学習

機械学習には、教師あり学習と教師なし学習がある。それぞれ以下の通り定義される。

定義 3.3 (教師あり学習). 教師あり学習 (**supervised learning**) とは、入力に対して正しい出力がわかるデータを用いた機械学習のことである。

定義 3.4 (教師なし学習). 教師なし学習 (**unsupervised learning**) とは、単にデータが与えられ、そのデータから何らかの構造関係を導出する機械学習のことである。

教師あり学習は、回帰問題と分類問題に分けられる。

定義 3.5 (回帰問題). 回帰問題 (**regression problem**) とは、出力が連続値である教師あり学習のことである。

定義 3.6 (分類問題). 分類問題 (**classification problem**) とは、出力が離散値である教師あり学習のことである。

問題 3.2. 以下の機械学習の各事例において教師あり学習か教師なし学習か答えなさい。また、教師あり学習の場合、それが回帰問題であるか分類問題であるかを答えなさい。

1. 大量に在庫がある商品を抱えている。それが3ヶ月以内に何個売れるか予測する。
2. あるソフトウェアに使われている各ライセンスについて、それが正規ライセンスか不正ライセンスかを予測する。
3. 毎日何万ものニュースを集めてきて、関連する記事にグループ分けする。
4. ある人物の絵を見て、その人物の年齢を予測する。
5. 電子メールのやりとり履歴から、自動的にどれが密接な友人のグループかを特定する。
6. 2つのマイクで拾った2人の声を解析して分離する (Cocktail Party Problem)。

解答.

1. 教師あり学習の回帰問題。
2. 教師あり学習の分類問題。
3. 教師なし学習。
4. 教師あり学習の回帰問題。
5. 教師なし学習。
6. 教師なし学習。

□

第4章

教師あり学習

4.1 トレーニングセットと仮説関数

教師あり学習は、特徴量と目的変数の組のデータを用いて学習する。学習に使用するデータをトレーニングセットという。

定義 4.1 (トレーニングセット). $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m \subset ((\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n) \times \mathcal{Y})^m$ をトレーニングセット (training set) という。ここで、 m はトレーニングサンプル数 (number of training examples), $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ は i 番目の n 個の入力変数 (input variables) または特徴量 (features) で、 $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^T$ と表す。また、 $y^{(i)} \in \mathcal{Y}$ は i 番目の出力変数 (output variable) または目的変数 (target variable) である。また、トレーニングセットの i 番目の要素 $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) \in (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n) \times \mathcal{Y}$ をトレーニングサンプル (training example) という。また、入力変数のとる空間 $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ を入力変数空間 (space of input values), 出力変数のとる空間 \mathcal{Y} を出力変数空間 (space of output values) という。

問題 4.1. 次のトレーニングセットにおいて、 $x_3^{(4)}, y^{(2)}$ を答えよ。

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$x_4^{(i)}$	$y^{(i)}$
1	2104	5	1	45	460
2	1416	3	2	40	232
3	1534	3	2	30	315
4	852	2	1	36	178

解答. $x_3^{(4)} = 1, y^{(2)} = 232$. □

教師あり学習を使って解きたいタスク T は、入力変数から出力変数を予測することであるが、それは言い換えると入力変数を引数として出力変数を出力する写像を設定することである。この写像を仮説関数という。仮説関数を以下で定義する。

定義 4.2 (仮説関数). 入力変数 \mathbf{x} から出力変数 y への写像 $h: \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{Y}$, すなわち $h_{\theta}(\mathbf{x})$ を仮説関数 (hypothesis function) という。ここで、 θ は仮説関数のパラメータである (パラメータは複数あることがほとんどなのでベクトルとしている)。

すなわち、教師あり学習とは、仮説関数を設定し、トレーニングセットを用いて仮説関数の最適なパラメータを決定することといえる。

4.2 線形回帰

仮説関数は自らで与える必要があるが、仮説関数の形によって、教師あり学習に特別な名前がつくものがある。例えば、仮説関数を線形関数とし、出力変数空間を $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ としたときは線形回帰という。

定義 4.3 (線形回帰). トレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m \subset ((\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n) \times \mathcal{Y})^m$ について、 $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ であり、かつ仮説関数が式 (4.1) である教師あり学習を、特に線形回帰 (**linear regression**) という。ここで、特徴量 $\mathbf{x}^{(i)}$ は、常に 1 の値をとるような特徴量 $x_0^{(i)} = 1$ を付して $\mathbf{x}^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^T \in 1 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ と置き直すこととする。また、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ とする。

$$\begin{aligned} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) &= \theta_0 x_0^{(i)} + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \cdots + \theta_n x_n^{(i)} \\ &= \sum_{j=0}^n \theta_j x_j^{(i)} \\ &= \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

問題 4.2. ある大学生について、1 年次の成績で優をとった個数から 2 年次にいくつ優をとるのか予測したい。そこで、何人かの大学生の 1 年次の成績の優の個数 x と 2 年次の成績の優の個数 y を集めた。その結果が次表である。このとき、次の問いに答えよ。

x	y
3	4
2	1
4	3
0	1

1. m はいくつか。
2. 仮説関数として $h_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \theta_0 + \theta_1 x$ を設定し、本トレーニングセットを用いて線形回帰を行なった結果、パラメータは $\theta_0 = -1$, $\theta_1 = 2$ となった。このとき、1 年次の優の個数が 6 だった大学生の 2 年次の優の個数を予測せよ。

解答.

1. $m = 4$.
2. $h_{\boldsymbol{\theta}}(x) = -1 + 2x$ なので、 $h_{\boldsymbol{\theta}}(6) = -1 + 2 \cdot 6 = 11$.

□

4.2.1 目的関数

さて、仮説関数のパラメータをどう決めるかという問題がある。パラメータをでたらめに与えても良い予測値を返さないで、経験 E のトレーニングセットを使って、性能指標 P を高めるように仮説関数のパラメータをアップデートしていくが必要になる。この手順を学習アルゴリズムといい、性能指標を測る関数を目的関数という。

定義 4.4 (学習アルゴリズム, 目的関数). 性能指標を測る関数 $J(\theta)$ を目的関数またはコスト関数 (**cost function**) といい, この目的関数で測った性能指標が良くなるように仮説関数 (のパラメータ θ) をアップデートしていく手順を学習アルゴリズム (**learning algorithm**) という.

回帰問題における性能指標としては, 各トレーニングサンプル $(x^{(i)}, y^{(i)})$ での仮説関数 $h_{\theta}(x^{(i)})$ と $y^{(i)}$ の二乗誤差平均が考えられる. この二乗誤差平均を計算する目的関数を最小二乗誤差関数という.

定義 4.5 (最小二乗誤差関数). トレーニングセット $\{(x^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m \subset ((1 \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_n) \times \mathcal{Y})^m$ について, 式 (4.2) で表される目的関数 $J(\theta)$ を最小二乗誤差関数 (**squared error function**) という.

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \quad (4.2)$$

注意 4.1. m ではなく $2m$ で割っているのは, 微分したときに出てくる 2 が消えるようにしているからである. m でも特段の問題はない (同じ結果が得られる).

問題 4.3. あるトレーニングセット $\{(x^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^3$ をプロットしたところ以下の散布図となった (簡単のため, 特徴量 x に $x_0 = 1$ である特徴量は追加していない). 仮説関数を $h_{\theta}(x) = \theta x$, 目的関数 $J(\theta)$ を最小二乗誤差関数としたとき, $J(0)$ を求めよ.

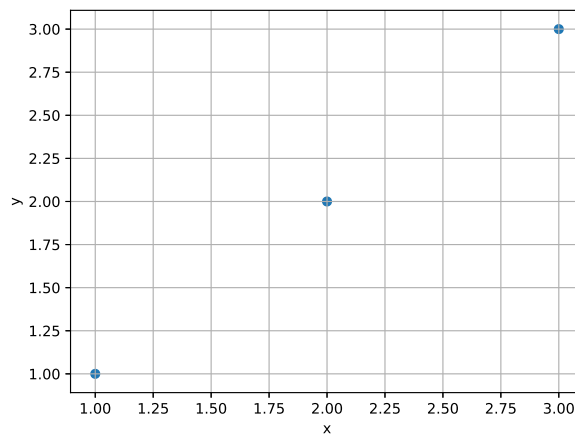


図 4.1 lrfig1.eps

解答. 目的関数 $J(\theta)$ は次式となる.

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (\theta x^{(i)} - y^{(i)})^2 \end{aligned}$$

$\theta = 0$ を代入し, 散布図から $y^{(i)}$ を読み取ると,

$$\begin{aligned} J(0) &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (-y^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{6} ((-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2) \\ &= \frac{14}{6} \end{aligned}$$

Code 4.1 (lrfig1.eps 作成プログラム (lrfig1.py)).

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)

x = np.array([1,2,3])
y = x

ax.scatter(x, y)

ax.grid()
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')

fig.savefig('lrfig1.eps')
```

4.2.2 最急降下法

「性能指標が良くなるように仮説関数のパラメータ θ をアップデートしていく」とはどういうことか。目的関数が最小二乗誤差関数の場合、その最小二乗誤差がどんどん小さくなっていくことが、性能指標が良くなっていくといえる。すなわち、目的関数を最小にするパラメータ θ を見つければよい。それを見つけるための手法が学習アルゴリズムである。

学習アルゴリズムの中で一般的なものとして最急降下法がある。最急降下法とは、目的関数 $J(\theta)$ のグラフ上に適当に点を打ち (すなわちパラメータ θ として適当に初期値を決め)、その点からあたりを見渡してもっとも勾配が急な方向に一定程度進み、進んだ後の点からまたあたりを見渡してもっとも勾配が急な方向に一定程度進み...を繰り返して、どこを見渡しても勾配がないような点を探す方法である。

最急降下法を行うためには、関数上のある点について勾配が急な方向はどの方向であるかを計算しなければならない。勾配が最も急な方向を向くベクトルを勾配ベクトルといい、以下で定義される。

定義 4.6 (勾配ベクトル). k 次元ベクトル $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)^T$ からスカラー値に写る関数 $f(\theta)$ 、すなわち $f: \theta \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ である関数 $f(\theta)$ において、勾配ベクトル $\nabla_{\theta} f = \frac{\partial f}{\partial \theta}$ は次式で定義される。

$$\nabla_{\theta} f = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

問題 4.4. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の関数 $f(x, y)$ のある点 $P(x, y)$ における最大勾配方向が勾配ベクトルの方向と同方向であることを示せ。

解答. 勾配とは、関数 f の変化度合いであり、勾配が最大ということは、関数の変化度合いが最も大きいということである。点 $P(x, y)$ と、そこから微小量 Δx , Δy だけ動かした点 $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ においてそれぞれ関数値を求めて差をとったものを変化度合い Δf とすると、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (\Delta x, \Delta y)$ に

注意して、以下の通り変形できる。

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\
 &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\
 &= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\
 &= \nabla f \cdot (\Delta x, \Delta y) \\
 &= \nabla f \cdot \overrightarrow{PQ}
 \end{aligned}$$

すなわちこれは、関数の変化度合いは勾配ベクトルと点 P から点 Q へ方向ベクトル、すなわち微小量を動かした方向のベクトルの内積となっている。ここで、角度の定義より、

$$\Delta f = \|\nabla f\| \|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta$$

となる。ここで、 θ は、 ∇f と \overrightarrow{PQ} のなす角である。関数の変化度合い Δf が最大となるのは、 $\cos \theta = 1$ 、すなわち $\theta = 0$ となる場合である。これはつまり ∇f と \overrightarrow{PQ} が同じ方向を向いているときに関数の変化度合い Δf が最大となるということである。以上より、点 P から関数の変化度合い Δf が最大となるように進むためには (点 Q をとるためには)、勾配ベクトルの方向に進めばよいということである。□

これで勾配が最も急な方向が勾配ベクトル方向であることがわかったので、それを用いて最急降下法を以下の通り定義する。

定義 4.7 (最急降下法). 関数 $J(\theta)$ を最小とする θ を次の手順で見つけるアルゴリズムを、**最急降下法 (gradient descent algorithm)** という。ここで、 $\alpha (> 0)$ を学習率といい、勾配が最大の方向にどの程度移動させるかの強さを表す。

Algorithm 1 最急降下法

- 1: トレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$, 仮説関数 $h_{\theta}(\mathbf{x})$, 目的関数 $J(\theta)$ を用意
 - 2: $\alpha \leftarrow$ 初期値
 - 3: $\theta \leftarrow$ 初期値
 - 4: **while** θ が収束または有限回繰り返す **do**
 - 5: $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ を代入して $J(\theta)$ を計算
 - 6: $\nabla_{\theta} J$ を計算
 - 7: $\theta \leftarrow \theta - \alpha \nabla_{\theta} J$ ▷ パラメータ $\theta_0, \theta_1 \dots$ は同タイミングで更新
 - 8: **end while**
-

問題 4.5. $x_0^{(i)} = 1$ も含め特徴量が $n + 1$ 個のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ の線形回帰において、目的関数 $J(\theta)$ を最小二乗誤差関数としたとき、 $\nabla_{\theta} J$ を計算せよ。

解答. $\nabla_{\theta} J$ の j 番目の要素 $\frac{\partial J}{\partial \theta_j}$ を計算すると以下となる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \theta_j} &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \theta_j} (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m 2(h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)}\end{aligned}$$

$j = 0$ のときは $\frac{\partial}{\partial \theta_0} h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) = 1$ であることに注意してまとめると,

$$\nabla_{\theta} J = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) \\ \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) x_1^{(i)} \\ \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) x_2^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) x_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

となる ($\nabla_{\theta} J$ は $n+1$ 次元ベクトルである). □

4.2.3 デザイン行列

最急降下法アルゴリズムは, 式 (4.4) を用いて $\nabla_{\theta} J$ の各要素に対して逐次計算を行っていけば単純に実装できるが, 各要素の和の計算を各要素に対して行い, 反復してくことは少々ややこしい. 行列計算を容易に行えるプログラミング言語で実装する場合には, できるだけ逐次計算をしないように, 行列計算やベクトル計算を用いて工夫して実装することが簡潔かつバグも少ない.

デザイン行列を定義し, 行列計算により $\nabla_{\theta} J$ を計算できることを示す.

定義 4.8 (デザイン行列). $x_0^{(i)} = 1$ も含め特徴量が $n+1$ 個のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ において, 式 (4.5) で定義する行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ をデザイン行列 (**design matrix**) という. デザイン行列は, 特徴量 $\mathbf{x}^{(i)}$ を転置してサンプル数の分縦に並べたもので表される. ここで, 特徴量として $x_0 = 1$ が加わっていることに注意する.

$$X = \begin{bmatrix} \text{---} & \mathbf{x}^{(1)T} & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{x}^{(2)T} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \mathbf{x}^{(m)T} & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \cdots & x_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

問題 4.6. 次のトレーニングセットにおいて, デザイン行列 X を答えよ.

解答. サンプル数が 4 つで, 特徴量が $x_0 = 1$ を含めると 5 つなので, X は 4×5 次元の行列となり,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2104 & 5 & 1 & 45 \\ 1 & 1416 & 3 & 2 & 40 \\ 1 & 1534 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 852 & 2 & 1 & 36 \end{bmatrix}$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$x_4^{(i)}$	$y^{(i)}$
1	2104	5	1	45	460
2	1416	3	2	40	232
3	1534	3	2	30	315
4	852	2	1	36	178

□

デザイン行列を使うと、線形回帰の仮説関数のベクトルを簡潔に表すことができる。

問題 4.7. $x_0^{(i)} = 1$ も含め特徴量が $n + 1$ 個のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題を考える。このとき、 $(h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(1)}), h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(2)}), \dots, h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(m)}))^T$ を $X, \boldsymbol{\theta}$ を用いて表せ。

解答.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(1)}) \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(2)}) \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(m)}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}^{(1)} \\ \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}^{(m)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \theta_0 + \theta_1 x_1^{(1)} + \theta_2 x_2^{(1)} + \dots + \theta_n x_n^{(1)} \\ \theta_0 + \theta_1 x_1^{(2)} + \theta_2 x_2^{(2)} + \dots + \theta_n x_n^{(2)} \\ \vdots \\ \theta_0 + \theta_1 x_1^{(m)} + \theta_2 x_2^{(m)} + \dots + \theta_n x_n^{(m)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \\
 &= X\boldsymbol{\theta}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

□

この結果を用いることで、目的関数を最小二乗誤差関数とした線形回帰問題において、目的関数をより簡潔に表すことができる。

問題 4.8. $x_0^{(i)} = 1$ も含め特徴量が $n + 1$ 個のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題において、目的関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を最小二乗誤差関数とする。このとき、 $J(\boldsymbol{\theta})$ を $X, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}$ を用いて表せ。ここで、 $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)})^T$ とする。

解答.

$$\begin{aligned}
 J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)} & h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)} & \dots & h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)} \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)} \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

となるが、ここで、

$$\begin{bmatrix} h_{\theta}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)} \\ h_{\theta}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)} \\ \vdots \\ h_{\theta}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{\theta}(\mathbf{x}^{(1)}) \\ h_{\theta}(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ h_{\theta}(\mathbf{x}^{(m)}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix} = X\theta - \mathbf{y}$$

より、

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}(X\theta - \mathbf{y})^T(X\theta - \mathbf{y}) \quad (4.7)$$

□

これで目的関数を簡潔に書けたので、最後にそれを微分して $\nabla_{\theta}J$ を求める。ここで、1 次形式、2 次形式の勾配ベクトルを使用するので事前に述べておく。

定理 4.1 (1 次形式、2 次形式の勾配ベクトル)。

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (4.8)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x} \quad (4.9)$$

証明. 略 (具体的に計算してみよ)。

□

問題 4.9. $x_0^{(i)} = 1$ も含め特徴量が $n + 1$ 個のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題において、目的関数 $J(\theta)$ を最小二乗誤差関数とする。このとき、 $\nabla_{\theta}J$ を m , X , θ , \mathbf{y} で表せ。

解答. $X^T X$ は対称行列であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta}J &= \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{2m}(X\theta - \mathbf{y})^T(X\theta - \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{2m} ((X\theta)^T(X\theta) - (X\theta)^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T(X\theta) + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{2m} ((X\theta)^T(X\theta) - 2(X\theta)^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\theta} \left(\frac{1}{2m} (\theta^T X^T X \theta - 2\theta^T X^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \frac{1}{2m} (\nabla_{\theta}(\theta^T X^T X \theta) - 2\nabla_{\theta}(\theta^T X^T \mathbf{y}) + \nabla_{\theta}(\mathbf{y}^T \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2m} (2X^T X \theta - 2X^T \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{m} (X^T X \theta - X^T \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

□

4.2.4 デバッグ

最急降下法がうまく収束しているかを確認する手段としては、ループ 1 回ごとに $J(\theta)$ の値をプロットしていき、値が順調に減少していつているかどうかをみるという方法がある。これをデバッグという。

定義 4.9 (デバッグ)。

最急降下法において、横軸に繰り返し回数 (number of iterations), 縦軸に目的関数値をとり図示することをデバッグ (debugging) という。

例えば、以下のような図となれば、最急降下法はうまく収束している。

学習率 α をどう選ぶかは難しい。小さすぎると収束までにかかなりの時間がかかり、大きすぎると収束せずに発散することもある。ほどほどの数値が最も速く収束する。

問題 4.10. ある回帰問題の目的関数を最急降下法で最小化する。試しに、学習率 $\alpha = 0.01, 0.1, 1$ の3パターンで計算してデバッグしたところ、図 A,B,C の通りとなった。それぞれの図について、どの学習率で計算を行なったものと想定されるか答えよ。

Proof. A が $\alpha = 0.1$, B が $\alpha = 0.01$, C が $\alpha = 1$. □

特徴量は、与えられたものをそのまま使う必要はなく、それらを組み合わせるなどして自分で新しく作っても良い。うまく特徴量を作り出して、より単純な仮説関数にするという選択肢もある。

問題 4.11. 今、手元に特徴量 $x_1^{(i)}$:間口, $x_2^{(i)}$:奥行き, 出力変数 $y^{(i)}$:土地の価格がある。このとき、土地の価格を予測する問題を線形回帰で解くことを考えると、仮説関数としてまず $h_{\theta}(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)}$ が考えつくが、もっと簡単に仮説関数を定めるにはどうすれば良いか。

Proof. 新しい特徴量 $x_3^{(i)} = x_1^{(i)} x_2^{(i)}$:面積を設定し、仮説関数として $h_{\theta}(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x_3^{(i)}$ とする。 □

4.3 多項式回帰

仮説関数として、線形関数を選ぶ必要はない。仮説関数として多項式を設定した場合は多項式回帰と呼ばれる。

定義 4.10 (多項式回帰)。

回帰問題において、仮説関数を多項式とした場合、特に多項式回帰 (**polynomial regression**) という。

問題 4.12. トレーニングセット $\{(x_1^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^n$ をプロットしたところ、下図となった。これについての回帰問題を解きたい。仮説関数としてどのようなものが考えられるか。

Proof. 新しく特徴量として $x_2^{(i)} = (x_1^{(i)})^2$ を設定し、仮説関数として $h_{\theta}(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 (x_1^{(i)})^2$ とする。 □

複数の特徴量がある場合、各特徴量のとりうる範囲がだいたい同じような範囲にあると、最急降下法の収束速度は速くなる。特徴量を変換してとりうる範囲の調整を行うことを、特徴量スケーリングという。

定義 4.11 (特徴量スケーリング)。

トレーニングセット $\{(x^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^n$ について、 $x^{(i)}$ の各特徴量のとりうる範囲を同じような範囲に変換することを特徴量スケーリング (**feature scalling**) という。特に、特徴量 x_j の平均 μ_j を用いて $\frac{x_j - \mu_j}{s_j}$ のようにスケーリングすることを、平均標準化 (**mean normalization**) という。ここで、 s_j は、特徴量 x_j の標準偏差または $\max - \min$ とする。

注意 4.2. 特徴量スケーリングの方法は何か定まった方法があるわけではない。例えば、最大値で割るとか、平均を引いて最大と最小の差で割るとか、なんとなく 1000 分の 1 するとか、やり方はなんでもよいし、特徴量ごとに異なる方法をとっても良い。大事なことは全ての特徴量をだいたい似たような範囲にもっていくことである。なお、範囲としては、Andrew Ng 曰く、各特徴量のとりうる範囲がだいたい $-3 \sim 3$ の中の範囲をとるのを目安にしているとのこと。

特に、多項式回帰の場合は特徴量のオーダーが他の特徴量と比べて極端に異なることが多いため、特徴量スケールがほとんど必須となってくる。

問題 4.13. 住宅の平米数から住宅価格を予測する回帰問題を解くことを考える。集めたデータの平米数はおおむね 1 から 1000 フィートの範囲となっている。平米数と価格をプロットしたところ、以下の仮説関数があてはまりがよさそうと考えた。

$$h_{\theta}(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 \text{平米数}^{(i)} + \theta_2 \sqrt{\text{平米数}^{(i)}}$$

ここで、特徴量スケールングをしてより適切に回帰問題を解くために、新しく仮説関数を

$$h_{\theta}(x^{(i)}) = \theta_0 + \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)}$$

としたとき、 $x_1^{(i)}$ と $x_2^{(i)}$ はそれぞれどのようなおきのがよいか。ここで、 $\sqrt{1000} \doteq 32$ とする。

Proof. $x_1^{(i)} = \frac{\text{平米数}^{(i)}}{1000}$, $x_2^{(i)} = \frac{\sqrt{\text{平米数}^{(i)}}}{32}$. □

4.4 正規方程式

さて、最急降下法で収束して得られた θ は、どこを見渡しても勾配がない状態となっている。これは、言い換えると目的関数 $J(\theta)$ の勾配ベクトルがゼロベクトルとなる点 θ は、方程式 $\nabla_{\theta} J = \mathbf{0}$ の解である。この方程式は正規方程式という。

定義 4.12 (正規方程式)。

目的関数 $J(\theta)$ の回帰問題について、次式を正規方程式 (normal equation formula) という。

$$\nabla_{\theta} J = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

ここから、線形回帰問題において目的関数を最小二乗誤差関数とした場合の正規方程式を導出する。その準備のため、デザイン行列を定義する。

定義 4.13 (デザイン行列)。

特徴量が n のトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ において、次式で定義する行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ をデザイン行列 (design matrix) という。デザイン行列は、特徴量 $\mathbf{x}^{(i)}$ を転置してサンプル数の分縦に並べたもので表される。ここで、特徴量として $x_0 = 1$ が加わっていることに注意する。

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)T} \\ \mathbf{x}^{(2)T} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \cdots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

問題 4.14. 次のトレーニングセットにおいて、デザイン行列 X を答えよ。

Proof. 特徴量が 4 つで、サンプル数が 4 つなので、 X は 4×5 次元の行列となり、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2104 & 5 & 1 & 45 \\ 1 & 1416 & 3 & 2 & 40 \\ 1 & 1534 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 852 & 2 & 1 & 36 \end{pmatrix}$$

□

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$x_4^{(i)}$	$y^{(i)}$
1	2104	5	1	45	460
2	1416	3	2	40	232
3	1534	3	2	30	315
4	852	2	1	36	178

デザイン行列を使うと、線形回帰の仮説関数のベクトルを簡潔に表すことができる。

問題 4.15. 特徴量が n であるトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題を考える。このとき、 $(h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(1)}), h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(2)}), \dots, h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(m)}))^T$ をデザイン行列 X を用いて表せ。

Proof.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(1)}) \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(2)}) \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(m)}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^{(1)} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\theta}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}^{(m)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 + \theta_1 x_1^{(1)} + \theta_2 x_2^{(1)} + \dots + \theta_n x_n^{(1)} \\ \theta_0 + \theta_1 x_1^{(2)} + \theta_2 x_2^{(2)} + \dots + \theta_n x_n^{(2)} \\ \vdots \\ \theta_0 + \theta_1 x_1^{(m)} + \theta_2 x_2^{(m)} + \dots + \theta_n x_n^{(m)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = X\boldsymbol{\theta} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

□

また、この結果を用いて、目的関数を最小二乗誤差関数とした線形回帰問題において、目的関数をより簡潔に表すことができる。

問題 4.16. 特徴量が n であるトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題において、目的関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を最小二乗誤差関数とする。このとき、 $J(\boldsymbol{\theta})$ をデザイン行列 X を用いて表せ。

Proof.

$$\begin{aligned}
 J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2m} \left(h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)}, h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)}, \dots, h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \right) \begin{pmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)} \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)} \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となるが、ここで、

$$\begin{pmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) - y^{(1)} \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) - y^{(2)} \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) - y^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(1)}) \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(2)}) \\ \vdots \\ h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(m)}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{pmatrix} = X\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}$$

より,

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \quad (4.14)$$

□

目的関数を簡潔に書けたので、行列の微分の性質を使い、正規方程式を導出する。

問題 4.17. 特徴量が n であるトレーニングセット $\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^m$ における線形回帰問題において、目的関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を最小二乗誤差関数とする。このとき、 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J = \mathbf{0}$ を簡単に表せ。

Proof. $X^T X$ は対称行列であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{2m} (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{2m} ((\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) - (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{2m} ((\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}) - 2(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{2m} (\boldsymbol{\theta}^T X^T X \boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\theta}^T X^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}) \right) \\ &= \frac{1}{2m} (\nabla_{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\theta}^T X^T X \boldsymbol{\theta}) - 2\nabla_{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\theta}^T X^T \mathbf{y}) + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} (\mathbf{y}^T \mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{2m} (2X^T X \boldsymbol{\theta} - 2X^T \mathbf{y}) \end{aligned}$$

より、 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J = \mathbf{0}$ とすると、

$$X^T X \boldsymbol{\theta} = X^T \mathbf{y} \quad (4.15)$$

□

正規方程式の導出まで終わった。最後は、これを $\boldsymbol{\theta}$ について解けば終わりである。ここで、 $X^T X$ が正則であれば、逆行列 $(X^T X)^{-1}$ を左から掛けることによって解けるが、正則でない場合（非正則、非可逆、特異の場合ともいう）、解を持たない（不能）もしくは複数または無数の解（不定）となる。ここで、不能や不定だからそれでお手上げ、というわけにはいかないのので、「いい感じの」の解を設定したいとする。この「いい感じ」の解は、 $X^T X$ のムーア・ペンローズ一般逆行列 $(X^T X)^+$ を用いて、次式で書ける。

$$\boldsymbol{\theta} = (X^T X)^+ X^T \mathbf{y} \quad (4.16)$$

この議論の詳細は、まだ著者が理解できていないため、今の所は割愛する。

では、どのような場合に $X^T X$ は非正則なのか。厳密には（著者がまだ理解できていないので）言わないが、Andrew Ng 曰く、以下2つの場合を念頭に置いておけばとりあえず良いとのこと。

1. 特徴量が冗長：例えば、住宅価格の予測についての特徴量で、縦の長さ、横の長さ、面積の3つを考えた場合、面積は縦の長さと横の長さですでに捉えられているので、面積という特徴量が冗長である。
2. データ数より特徴量が多い ($m \leq n$) : $n = 100$ 個の特徴量を、 $m = 10$ サンプルでフィッティングするのは、うまくいくこともあるかもしれないが良いアイデアではない。

教師あり学習の回帰問題について、パラメータを探す方法として最急降下法と正規方程式を解く方法の2種類を取り上げた。それぞれの手法のメリットやデメリットについて、Andrew Ng は以下の通り言及している。

- 最急降下法は、学習率 α を適切に選択する必要があるため、良さげな数値を何度か試行することが必要となってくる場合がある。一方で、正規方程式はその手間がない。
- 最急降下法の場合は、アルゴリズムがちゃんと機能しているか、ちゃんと収束しているかなどを確認しなければならないが、正規方程式はその手間がない。
- 正規方程式の場合、特徴量スケーリングを行う必要はない。
- 正規方程式は、逆行列を求める必要があるが、逆行列を計算するコストが非常に大きい。具体的には、逆行列の計算コストは特徴量 n の3乗のオーダーとなる。一方、最急降下法は特徴量 n 本に対する計算を繰り返すだけなので、計算コストは n のオーダーと非常に少ない。つまり、最急降下法は特徴量が数百万個あるような場合でも正しく機能する。だいたい $n = 10000$ が正規方程式ではなく最急降下法を選ぶ目安。

問題 4.18. プログラミング課題を後で追記

参考文献

- [1] Andrew Ng, “Machine Learning”, Stanford University, <https://www.coursera.org/learn/machine-learning>.
- [2] Charles Severance, “Programming for Everybody (Getting Started with Python)”, University of Michigan, <https://www.coursera.org/learn/python>.
- [3] Christopher Brooks, “Introduction to Data Science in Python”, University of Michigan, <https://www.coursera.org/learn/python-data-analysis>.
- [4] Christopher Brooks, “Applied Plotting, Charting & Data Representation in Python”, University of Michigan, <https://www.coursera.org/learn/python-plotting>.
- [5] McKinney W., “Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython”, 2nd Edition, O’Reilly Media, 2017.
- [6] Jake VanderPlas, “Python データサイエンスハンドブック”, O’Reilly Media, 2018.
- [7] 涌井良幸, “高校生からわかるベクトル解析”, ベレ出版, 2017.
- [8] David A. Harville, “統計のための行列代数 上”, 丸善出版, 2007.