

2025 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

何か書こう

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太

(2026 年 1 月 30 日)

概要

頑張っていっぱい書こうね~~~~~

目次

1	準備	4
1.1	Quasi-Isometry of Metric Space	4
1.2	Quasi-Isometry of Group	6
1.3	Quasi-Geodesic	7
2	主定理 幾何学的群論 版	7
2.1	Švarc-Milnor lemma	7
2.2	Švarc-Milnor lemma の拡張	10
3	主定理 位相空間論 版	12
3.1	準備	12
3.2	Švarc-Milnor lemma (位相空間論 版)	13
3.3	応用例	13
A	付録	14
A.1	Cayley Graph	14
A.2	Group Action	14

1 準備

1.1 Quasi-Isometry of Metric Space

本論文では, $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, 省略して X, Y と表記する.

Definition 1.1. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **等長埋め込み (isometry embedding)** であるとは, 任意の $x, x' \in X$ に関して, $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つことをいう. また, f が **等長写像 (isometry)** であるというのは, 以下の二条件を満たすときをいう.

- (1) f が等長埋め込みである.
- (2) ある等長埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$ を満たす.

さらに, 二つの距離空間 X, Y が **等長 (isometric)** であるとは, 等長写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう.

Remark. 定義より, 等長埋め込みならば単射な連続写像である. よって, 等長写像は同相写像である. また, 等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる.

Definition 1.2. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **bilipschitz 埋め込み (bilipschitz embedding)** であるとは, ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x')$$

が成り立つことをいう. また, f が **bilipschitz equivalence (bi-Lip)** であるとは, 以下の二条件を満たすときをいう.

- (1) f が bilipschitz 埋め込み である.
- (2) ある bilipschitz 埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$ を満たす.

さらに, 二つの距離空間 X, Y が **bilipschitz equivalent** であるとは, bilipschitz equivalence な写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう.

Example. $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ を, $f(n) = 2n$ とすると, これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込み である. 実際, この写像は $c = 2$ とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす (ユークリッド距離から誘導される距離が入っているとみなしている). かつ, $g: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を, $g(m) = m/2$ とすれば, f, g によって \mathbb{Z} と $2\mathbb{Z}$ は bilipschitz equivalent である.

Remark. bilipschitz 埋め込み は単射な連続写像である. よって, bilipschitz equivalence は同相写像である. また, bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる.

Definition 1.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が 写像 $f': X \rightarrow Y$ から **finite distance** であるとは, ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し, 任意の $x \in X$ に対して,

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう.

Definition 1.4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **擬等長埋め込み (quasi-isometry embedding)** であるとは, ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して,

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう. このとき, f を **(c, b) -quasi-isometric embedding** と表現する. また, f が **擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは, 以下の二条件を満たすときをいう.

- (1) f が擬等長埋め込みである.

(2) ある擬等長埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $f \circ g$ が id_Y と finite distance, $g \circ f$ が id_X と finite distance である.

さらに, 二つの距離空間 X, Y が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは, 擬等長写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう.

Example. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ を, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ と定めると, これは bilipschitz embedding ではないが, 擬等長埋め込みである. 実際, この写像は $c=1, b=1$ とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす (ユークリッド距離から誘導される距離が入っているとみなしている). また, \mathbb{Z} から \mathbb{R} への包含写像を考えると, f と包含写像によって \mathbb{Z} と \mathbb{R} は擬等長である.

Remark. 擬等長埋め込みは連続とは限らない (実際上の例の f は連続でない). 同様に, 擬等長写像は連続であるとは限らない.

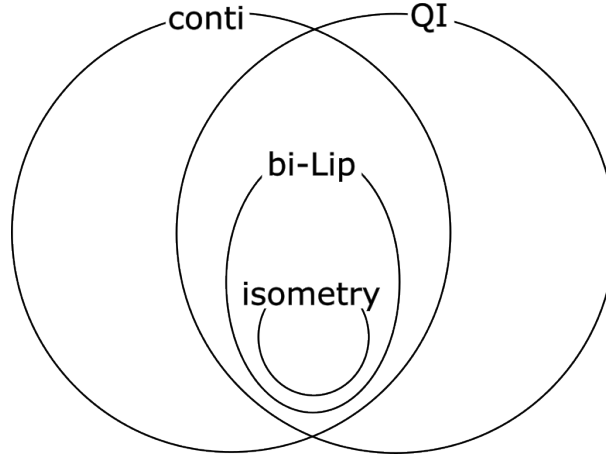


図 1: 各写像の関係

Remark. 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり, bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり, 擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである.

Proposition 1.5. Definition 1.4 の 擬等長写像における二条件は, 以下の二条件と同値.

[1] f が擬等長埋め込みである.

[2] ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し, 任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ をとると, $d_Y(f(x), y) \leq c$ を満たす.

Proof. (Definition 1.4 \Rightarrow の証明) [2] を示せばよい. $f: X \rightarrow Y$ に対し, 定義より, ある擬等長写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $f \circ g$ が id_Y と finite distance である. 任意の $y \in Y$ をとる. $x := g(y)$ と定めることで,

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす.

(\Rightarrow Definition 1.4 の証明) [1] [2] より, ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し,

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対し, $\frac{1}{c}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + c$.

(2) 任意の $y \in Y$ に対しある $x \in X$ が存在し, $d_Y(f(x), y) \leq c$.

(2) と選択公理を用いて, $y \in Y$ に対し, $d_Y(f(x_y), y) \leq c$ を満たすような $x_y \in X$ を選ぶ. 写像 $g: Y \rightarrow X$ を, $y \mapsto x_y$ と定めると, $g \circ f, f \circ g$ ともに finite distance となる. 実際に, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる. $f \circ g$ に関しても, 任意の $y \in Y$ に対して,

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$$

が成立する. □

Definition 1.6. Proposition 1.5 の条件 [2] を f が満たすとき, f は **quasi-dense image** をもつという.

1.2 Quasi-Isometry of Group

以下, G を群として, S をその生成系とする.

Definition 1.7. 生成系 S による, 群 G 上の **word metric** とは, $d_S: G \times G \rightarrow \mathbb{N}$,

$$d_S(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}, g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n\}$$

であり, これは G 上の距離関数である.

Example. 群 G の生成系 S からなる $\text{Cay}(G, S)$ において, グラフ上の頂点間の距離とはまさに d_S のことである ($\text{Cay}(G, S)$ の定義は Definition A.1 を参照していただきたい).

Definition 1.8. G を有限生成群としたとき, G が距離空間 X に **bilipschitz equivalent** であるとは, G のある有限な生成系 S がとれ, 距離空間 (G, d_S) と X が bilipschitz equivalent であることをいう. また, G が X に **quasi-isometric** であるとは, ある有限な生成系 S がとれ, 距離空間 (G, d_S) と X が, quasi-isometric であることをいう.

Remark. 群からできる距離空間では, 群が有限生成であること, 生成系を有限としていることに注意.

Example. 群 \mathbb{Z}^2 とその生成系 $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ からなる距離空間は, 距離空間 \mathbb{R}^2 と quasi-isometric である.

Proposition 1.9. S, S' をともに群 G の有限な生成系としたとき, 距離空間 (G, d_S) が 距離空間 (X, d_X) と f で bilipschitz equivalent ならば, $(G, d_{S'})$ と (X, d) も f で bilipschitz equivalent である.

Proof. $f: (X, d_X) \rightarrow (G, d_S)$, $f': (X, d_X) \rightarrow (G, d_{S'})$ を共に bilipschitz equivalence とすると, 以下の可換図式より, $f' = f \circ \text{id} = f$ が成立する. bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので, あとは id が bilipschitz equivalence であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} & & (G, d_S) \\ & \nearrow f & \downarrow \text{id} \\ (X, d_X) & & (G, d_{S'}) \\ & \searrow f' & \end{array}$$

(S が有限なので) 有限値

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

をとる. $g, h \in G$ をとり, $d_S(g, h) = n$ とし, $g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ ($s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1}$) と表せられるとする. このとき, S' 上での g, h の word metric は,

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, s_1 s_2 \cdots s_n h) \\ &\leq d_{S'}(g, g s_1) + d_{S'}(g s_1, g s_1 s_2) + \cdots + d_{S'}(g s_1 s_2 \cdots s_{n-1}, g s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c + c + \cdots + c + c \\ &= cn = c d_S(g, h) \end{aligned}$$

となり, 上からの不等式が得られる. 同様の議論を S, S' を逆にすれば下からの不等式が得られる. id は全単射なので, bilipschitz equivalence である. □

Remark. Definition 1.8 と Proposition 1.9 より、距離空間に bilipschitz equivalent な群 (quasi-isometric な群) は、その (有限) 生成系の取り方に依らない。

1.3 Quasi-Geodesic

Definition 1.10. 距離空間 X 上の長さ $L \in \mathbb{R}_{>0}$ の **測地線 (geodesic)** とは、 $[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への等長埋め込み、 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ のことである。また、 X が **測地的 (geodesic)** であるとは、任意の $x, x' \in X$ において、 $\gamma(0) = x$ 、 $\gamma(L) = x'$ となるような等長埋め込み γ がとれるときをいう。

Example. \mathbb{R}^n は測地的だが、 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は測地的でない。実際、 $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ 間の距離は 2 だが、この測地線は原点を通過してしまう。一般に、 \mathbb{R}^n 上の凸集合は測地的である。

Definition 1.11. 距離空間 X 上の **(c, b) -擬測地線 $((c, b)$ -quasi-geodesic)** とは、 $[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への (c, b) -擬等長埋め込み、 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ のことである。また、 X が **(c, b) -擬測地的 $((c, b)$ -quasi-geodesic)** であるとは、任意の $x, x' \in X$ において、 $\gamma(0) = x$ 、 $\gamma(L) = x'$ となるような (c, b) -擬等長埋め込み、 γ がとれるときをいう。また、 (c, b) を省略し、単に擬測地線や擬測地的ともいう。

Example. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、 $(1, \epsilon)$ -測地的である ($\epsilon > 0$)。これは、原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば、擬測地線が得られるからである。

2 主定理 幾何学的群論 版

本論文の主定理となる、Švarc-Milnor lemma と、それに関連する主張について紹介する。

2.1 Švarc-Milnor lemma

Theorem 2.1. G を群とし、距離空間 X 上に等長な群作用があるとする。もし

- (i) ある定数 $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し、 X は (c, b) -測地的 である。
- (ii) ある部分集合 $B \subset X$ が存在し、
 - (a) $\text{diam} B < \infty$,
 - (b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$,
 - (c) 集合 $S = \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ が有限。

を満たすならば、

- (1) S は G の (有限) 生成系である。
- (2) 任意の $x \in X$ に対して定まる写像 $\varphi: G \rightarrow X; g \mapsto gx$ によって、 G と X は擬等長。

ただし、 $B' := \{x \in X \mid y \in B, d_X(x, y) \leq 2b\}$ と定める。

Proof of (1). $g \in G$ を任意にとる。 $x \in B$ としたとき、 X の仮定から $\gamma(0) = x$ 、 $\gamma(L) = g \cdot x$ なる (c, b) -擬測地線 γ が存在する。 $[0, L]$ をおおよそ $n = \lceil L \cdot c/b \rceil$ 等分した点列を $t_i (0 \leq i \leq n)$ とする。厳密には、

$$t_i := i \cdot b/c \ (0 \leq i \leq n-1), \ t_n := L$$

と定める。この点列と対応するように、 $\text{Im} \gamma$ に点列 $x_i \in X (0 \leq i \leq n)$ をとる。つまり、

$$x_i := \gamma(t_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

である。 B の仮定より、各 x_i に対して、 $x_i \in g_i \cdot B$ となるような $g_i \in G$ を選ぶことができる (図 2 参照)。

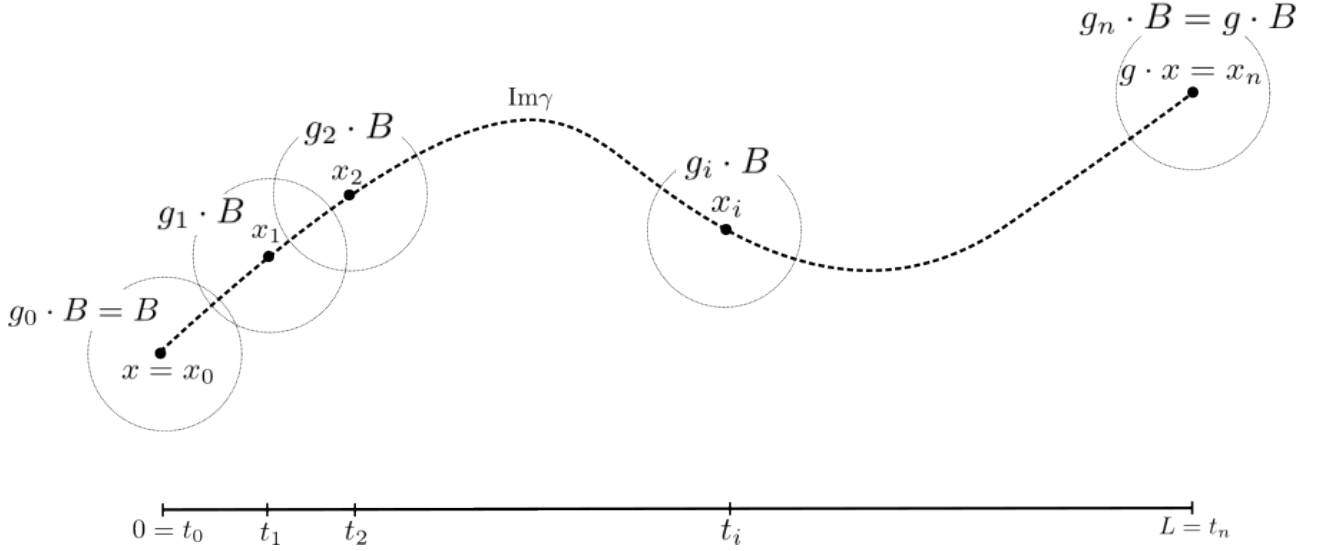


図 2: t_i, x_i, g_i の関係

ここで, $g_0 = e$, $g_n = g$ としておく. γ は (c, b) -擬測地線 なので, 不等式

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq c|t_{i-1} - t_i| + b = c \cdot b/c + b = 2b$$

を得る. 等長に群作用をしていることに注意すると,

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る. $x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$ でもあるので,

$$\begin{aligned} g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' &\neq \emptyset, \\ (g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

よって, $(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ であり, $s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ とすれば, g は $g = g_n = e(g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1}g_n) = es_1s_2 \cdots s_n$ と S の元で表すことができる. \square

Proof of (2). B の仮定より, 任意の $x \in X$ は B に含まれていると考えてよい ($x \in g \cdot B$ となる $g \cdot B$ を改めて B とすればよいため).

[1] 写像 $\varphi(g) = g \cdot x$ に関して, quasi-dense image であること.

[2] 擬等長埋め込みであること.

の二点を示す.

[1] φ が quasi-dense image であること:

任意の $x' \in X$ に関して, $x' \in g' \cdot B$ となる $g' \in G$ がとれるため,

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \text{diam}(g' \cdot B) = \text{diam}B.$$

仮定より $\text{diam}B$ は有限なので, φ が quasi-dense image であることが示された.

[2] φ が擬等長埋め込みであること:

ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し, 任意の $g, h \in G$ に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(g, h) - B \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq Cd_S(g, h) + B.$$

であることを示せばいいが, word metric の定義と G が等長に作用していることから,

$$\begin{aligned} d_S(g, h) &= d_S(e, g^{-1}h) \\ d_X(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_X(g \cdot x, h \cdot x) \\ &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &= d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \end{aligned}$$

が成立する. 以上より, ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$$

が成立することを示せばよい.

[2-1] $\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g))$ が成立すること:

任意に $g \in G$ をとる. このとき, g に対して proof of (1) と同様の議論により $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ がとれ, $g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられる. このときの γ を用いて,

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{1}{c}L - b \\ &\geq \frac{1}{c} \frac{b(n-1)}{c} - b = \frac{b}{c^2}n - b - \frac{b}{c^2} \\ &\geq \frac{1}{c^2}d_S(e, g) - b - \frac{b}{c^2} \end{aligned}$$

とすることで, 下からの不等式が得られる.

[2-2] $d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$ が成立すること:

任意に $g \in G$ をとる. $d_S(e, g) = n$ とし, $g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられるとする. このとき, 各 $s_i \in S \cup S^{-1}$ ($1 \leq i \leq n$) に対して, S の定義 $B' \cap s_i \cdot B' \neq \emptyset$ より,

$$d_X(x, s_i \cdot x) \leq \text{diam}B + 2b + \text{diam}B = 2(\text{diam}B + b)$$

が成立する (図 3 参照).

これより,

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &\leq d_X(x, s_1 x) + d_X(s_1 x, s_1 s_2 x) + \cdots + d_X(s_1 s_2 \cdots s_{n-1} x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &= d_X(x, s_1 x) + d_X(x, s_2 x) + \cdots + d_X(x, s_n x) \\ &\leq 2(\text{diam}B + b) \cdot n \\ &= 2(\text{diam}B + b) \cdot d_S(e, g) \end{aligned}$$

を得る. □

Example. 通常の距離が入った距離空間 (\mathbb{R}^2, d) に群 \mathbb{Z}^2 が作用しているとする. $(1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ は $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を $(x+2, y)$ に送り, $(0, 1)$ は $(x, y+2)$ に送るような群作用とする. 作用の仕方からこれは等長な群作用である. \mathbb{R}^2 を $(1, 1/2)$ -擬測地的空間とし, 部分集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ を,

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

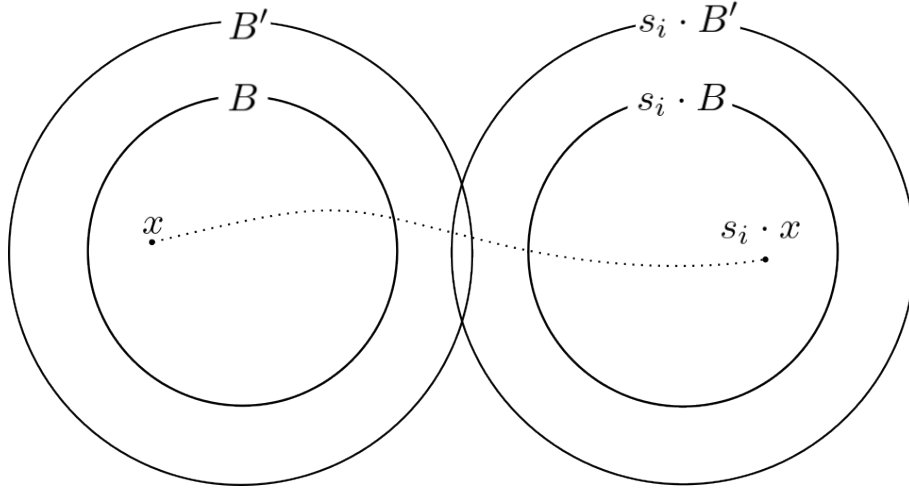


図 3: $d_X(x, s_i \cdot x)$ の不等式

とすれば, これは Theorem 2.1 の条件 (a),(b) を満たす. $S \subset \mathbb{Z}^2$ は,

$$\begin{aligned} S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

となり, 条件 (c) を満たす. よって, Theorem 2.1 より, \mathbb{Z}^2 は S によって生成され, \mathbb{R}^2 と \mathbb{Z}^2 は擬等長である.

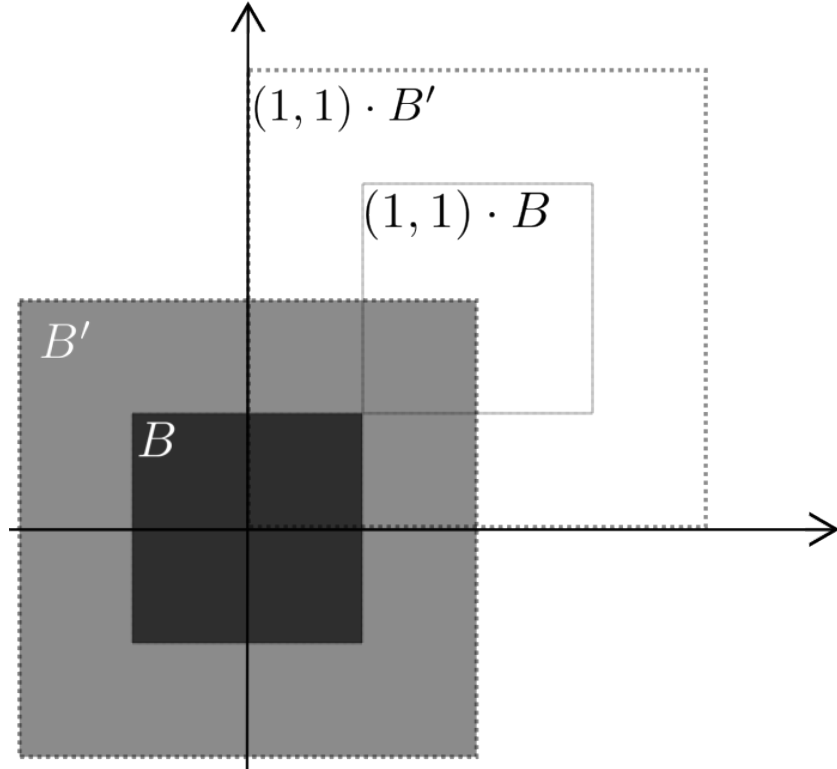


図 4: B, B' の図

2.2 Švarc-Milnor lemma の拡張

Theorem 2.1 は, 群作用が等長でなくても成立する. つまり, 以下のとおりである.

Theorem 2.2. Theorem 2.1 は、群 G が距離空間 X に“擬”等長な群作用としても成り立つ。

証明は、以下の Lemma 2.3, Lemma 2.4, Lemma 2.5 より与えられる。

Lemma 2.3. Theorem 2.1 の証明において、群作用が (c', b') -擬等長作用でも $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$ が成立する。ただし、 $B' := \{x \in X \mid y \in X, d_X(x, y) \leq 2bc' + b'\}$ とする。

Proof. 群作用が (c', b') -擬等長作用より、

$$\frac{1}{c'}d_X(g \cdot x, g \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq d_X(x, y)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, \frac{1}{c'}d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る。 □

Lemma 2.4. Theorem 2.1 の証明において、群作用が (c', b') -擬等長作用でも $\text{diam}(g' \cdot B) < \infty$ である。

Proof. 群作用が (c', b') -擬等長作用より、

$$d_X(g \cdot x, g \cdot y) \leq c'd_X(x, y) + b'$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \text{diam}(g' \cdot B) &= \sup_{x, y \in g' \cdot B} d_X(x, y) \\ &= \sup_{x', y' \in B} d_X(g \cdot x', g \cdot y') \\ &\leq \sup_{x', y' \in B} c'd_X(x', y') + b' \\ &\leq c'\text{diam}B + b' \end{aligned}$$

となり、 $\text{diam}(g' \cdot B)$ は有限値。 □

Lemma 2.5. Theorem 2.1 の証明において、群作用が (c', b') -擬等長作用でも、定数 $C > 0, B \geq 0$ があり、任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$$

が成立するならば、定数 $C' > 0, B' \geq 0$ があり、任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C'}d_S(g, h) - B' \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq C'd_S(g, h) + B'$$

が成立する。

Proof. word metric の定義から、

$$d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1}h)$$

が成立し、群作用が (c', b') -擬等長作用なことから、

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\leq c' d_X(g \cdot x, h \cdot x) + c' b' = c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c' b' \\ d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\geq \frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, h \cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \end{aligned}$$

が成立する。仮定より、以下の不等式

$$\frac{1}{C} d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e, g) + B$$

が成立するので、これらの不等式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} d_S(g, h) - B &= \frac{1}{C} d_S(e, g^{-1}h) - B \\ &\leq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \\ &\leq c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c' b' \\ \frac{1}{Cc'} d_S(g, h) - \frac{B + c'b'}{c'} &\leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \end{aligned}$$

が得られ、もう一方も

$$\begin{aligned} C d_S(g, h) + B &= C d_S(e, g^{-1}h) + B \\ &\geq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \\ &\geq \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \\ Cc' d_S(g, h) + (Bc' + b') &\geq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \end{aligned}$$

が得られ、与式が成立する。 □

3 主定理 位相空間論 版

Thm 2.1 の主張を、位相空間論の視点で言い換えた主張が存在する。それに必要な用語の定義を先に行う。

3.1 準備

Definition 3.1. 距離空間 (X, d) が **proper** であるとは、任意の $x \in X$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して、集合

$$\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

が常に コンパクト になることをいう。ここでの位相とは、距離から自然に誘導される位相をさす。

Example. ユークリッド空間は proper である一方、 \mathbb{R} の部分空間として $(0, 1)$ に相対位相を入れた空間は、 $(0, 1)$ 自身は有界閉集合だがコンパクトでない。また、一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない。

Definition 3.2. 群 G が位相空間 X に作用しているとする。この作用が **properly discontinuous** であるとは、任意のコンパクトな集合 $K \subset X$ に関して、

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす。

Example. \mathbb{R} に \mathbb{Z} が加法で群作用をしているとき、この作用は properly discontinuous である。しかし、 \mathbb{Q} が加法で群作用をしている場合、この作用は properly discontinuous ではない。

Definition 3.3. 群 G が位相空間 X に作用しているとする。この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは、商空間 $G \backslash X$ がコンパクトであることをいう。言い換えると、あるコンパクトな集合 $K \subset X$ が存在し、

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす。

Example. \mathbb{R} に \mathbb{Z} や \mathbb{Q} が加法で群作用をしているとき、この作用は余コンパクトである。一方、 \mathbb{R}^2 に \mathbb{Z} が作用する場合、これは余コンパクトでない (商空間は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であり、これはコンパクトでないため)。

3.2 Švarc-Milnor lemma (位相空間論 版)

Theorem 3.4. 群 G が, proper かつ擬測地的な距離空間 (X, d) に、等長に作用しているとする。この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば、 G は有限生成であり、 G と X は擬等長である。

Proof. X は擬測地的であるので、Thm 2.1 の仮定を満足するような $B \subset X$ をみつけられよう。以下、 X は $(1, b)$ -quasi-geodesic であるとする ($b > 0$)。自然な射影 $\pi: X \rightarrow G \backslash X$ は開写像であるので、開球 $B_1(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$ の像 $\pi(B_1(x))$ は $G \backslash X$ 上の開集合である。また、 $\pi(X) = G \backslash X$ より、 $\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$ は $G \backslash X$ の開被覆である。 $G \backslash X$ のコンパクト性より、これらから有限個 $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \leq k \leq n}$ の開被覆で $G \backslash X$ を覆うことができる。各開球 $B_1(x_k)$ の閉包 $\overline{B_1(x_k)}$ を考え、

$$B = \bigcup_{k=1}^n \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば、

$$(a) \text{ diam} B < \infty.$$

$$(b) \bigcup_{g \in G} g \cdot B = X.$$

をみたす。また、 B はコンパクト集合である (X の proper 性から各 $\overline{B_1(x_k)}$ はコンパクトであり、 B はそれらの有限和のため)。同様の議論として、 $B' = \{x \in X \mid y \in B, d(x, y) \leq 2b\}$ とすれば、これはコンパクト集合である。そして群作用が properly discontinuous であることから、

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

は有限である (c). □

3.3 応用例

この定理の応用例として、以下のような主張がある。

Corollary 3.5. コンパクトで境界のないリーマン多様体 M と、その普遍被覆 \widetilde{M} に関して、基本群 $\pi_1(M)$ は有限生成であり、 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ によって定まる写像

$$\pi_1(M) \rightarrow \widetilde{M}; g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である。なお、ここでの群作用は被覆変換による群作用とする。

Proof. (\widetilde{M} が proper かつ geodesic な metric space であること)

(群作用が isometric であること)

(群作用が cocompact であること)

(群作用が properly discontinuous であること) □

A 付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフ や、その周辺の事項について述べる。

A.1 Cayley Graph

以下、 G を群として、 S をその生成系とする。

Definition A.1. 生成系 S による群 G の **Cayley graph** とは、以下のようなグラフである。このグラフを $\text{Cay}(G, S)$ と表記する。

- (1) 頂点集合を G とする。
- (2) 辺集合を $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$ とする。

Theorem A.2. F が自由群であり、 S がその生成系の場合、 $\text{Cay}(F, S)$ は tree である。

Theorem A.3. $\text{Cay}(G, S)$ が tree であり、任意の $s, s' \in S$ に対して $s \cdot s' \neq e$ のとき、 G は自由群である。

A.2 Group Action

以下、 G を群、 X を集合とする。

Definition A.4. 群 G が集合 X 上に**作用する (group action)** とは、各 $g \in G$ に対して X から X への全単射な写像が存在し、その写像も g と表すとき、

- (1) 全ての $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し、 $h(g(x)) = (hg)(x)$ 。
- (2) $e(x) = x$ 。

が成立することである。ただし、 e は単位元である。

Remark. $g(x)$ を $g \cdot x$ と表記する。

Definition A.5. 群 G による X への群作用が**自由 (free)** であるとは、任意の $g \in G \setminus \{e\}$ と任意の $x \in X$ に対して、 $g \cdot x \neq x$ が成り立つときをいう。

Definition A.6. $(V, E), (V', E')$ をグラフとする。写像 $f: (V, E) \rightarrow (V', E')$ が **グラフ準同型 (graph homomorphism)** であるとは、二条件

- (1) $f: V \rightarrow V'$ が写像。
- (2) $\{v, v'\} \in E \Rightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$ 。

が成り立つときをいう。また、 f が **グラフ同型 (graph isomorphism)** であるとは、二条件

- (1) $f: V \rightarrow V'$ が全単射。
- (2) $\{v, v'\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$ 。

が成り立つときをいう。

Definition A.7. 群 G がグラフ (V, E) にグラフ同型に作用しているとする。この作用が **自由 (free)** であるとは、任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して、以下の二条件

- (1) 任意の $v \in V$ に対して、 $g(v) \neq v$ が成り立つ。
- (2) 任意の $v, v' \in V$ に対して、 $\{g(v), g(v')\} \neq \{v, v'\}$ が成り立つ。

が成立することをいう.

Proposition A.8. 群 G の生成系を S とする. $\text{Cay}(G, S)$ への左群作用が free であることと, 位数が 2 である元が S に存在しないことは同値.

Definition A.9. 群 G が 集合 X に群作用しているとする. 元 $x \in X$ における, この群作用による軌道 (orbit) とは, 集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである. また, この群作用による X の 商集合 (quotient) とは, 集合

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである.

Definition A.10. 群 G が 集合 X に群作用しているとする. 元 $x \in X$ における, この群作用による安定化群 (stabiliser group) とは, 群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

のことである. また, 元 $g \in G$ における 不動点? 固定点? (fixed set) とは, 集合

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$$

のことである.