2025年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学EP 卒業研究

何か書こう

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太 准教授

（2026年1月30日）

目 次

1　導入

幾何群論について語る。

Švarc-Milnor Lemma とは,「群が“よい”距離空間によい群作用をしているとき，その群の有限生成系が分かり，群の構造と空間の構造が“大雑把に”等しい」という主張であり，その内容から「幾何学的群論の基本補題」とも言われている．一般に，群が与えられたとき，その群が有限生成であるかどうかの判別は難しいのだが，この補題では生成系が分かるだけでなく，作用している空間の持つ構造と，群の持つ構造が大雑把に等しいことまで分かる．群のことを知りたければ，よく知られている距離空間への作用を考えればよく，逆に距離空間のことを知りたければ，よく知られている群の作用を考えればよい．まさに群と幾何を繋ぐ補題であるといえるだろう．

(もうちょい書きたい)

2　準備

2.1　Quasi-Isometry of Meric Spaces

この節では，空間同士を見積もるための道具となる写像について述べる．条件の厳しい等長写像から始まり，その条件を少しずつ緩めることによって，幾何学的群論における“大雑把な視点”を得ることができる．

以下，(X, d_X) を距離空間とし，省略して X と表記する．

Definition 2.1. 写像 $f\colon X \to Y$ が **等長埋め込み (isometric embedding)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ に関して，$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つことをいう．また，f が **等長写像 (isometry)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が等長埋め込みである．

(2) ある等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **等長 (isometric)** であるとは，等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Remark. 定義より，等長埋め込みならば単射な連続写像である．よって，等長写像は同相写像である．また，等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる．

Definition 2.2. 写像 $f\colon X \to Y$ が **bilipschitz 埋め込み (bilipschitz embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') \le d_Y(f(x), f(x')) \le c d_X(x, x')$$

が成り立つことをいう．また，f が **bilipschitz equivalence** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が bilipschitz 埋め込みである．

(2) ある bilipschitz 埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **bilipschitz equivalent** であるとは，bilipschitz equivalence な写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ に対し，$f\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ を，$f(n) = 2n$ とすると，これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込みである．実際，この写像は $c = 2$ とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす．また，$g\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を，$g(m) = m/2$ とすれば，f, g によって $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ は bilipschitz equivalent である．

Remark. bilipschitz 埋め込み は単射な連続写像である．よって，bilipschitz equivalence は同相写像である．また，bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる．

Definition 2.3. 写像 $f\colon X \to Y$ が 写像 $f'\colon X \to Y$ から **finite distance** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x \in X$ に対して，

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう．

Definition 2.4. 写像 $f\colon X \to Y$ が **擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$，$b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう．このとき，f を **(c, b)-quasi-isometric embedding** とも表現する．また，f が**擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が擬等長埋め込みである．

(2) ある擬等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y と finite distance，$g \circ f$ が id_X と finite distance である．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは，擬等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ に対し，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を，$f(x) = \lfloor x \rfloor$ と定めると，これは bilipschitz embedding ではないが，擬等長埋め込みである．実際，この写像は $c = 1, b = 1$ とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす．また，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{R}$ への包含写像を考えると，f と包含写像によって $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は擬等長である．

Remark. 擬等長埋め込みは連続とは限らない (実際上の例の f は連続でない)．同様に，擬等長写像は連続であるとは限らない．

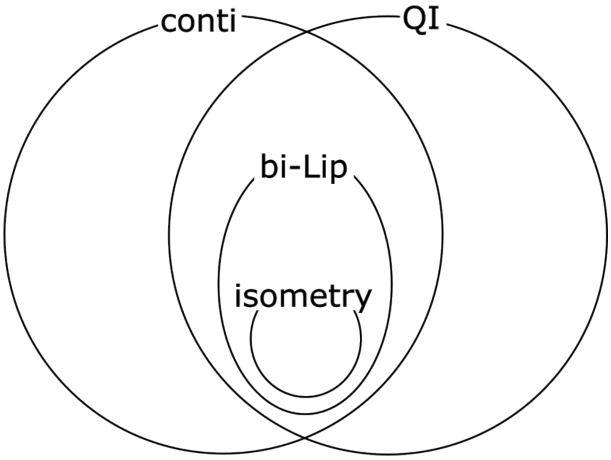

図 1: 各写像の関係

Remark. 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり，bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり，擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである．

定数倍と定数分のズレを許してしまうという，擬等長の“大雑把な視点”が幾何学的群論では大切なのだが，その擬等長に関する定義について，それと同値なものを紹介する．

Proposition 2.5. Definition 2.4 の 擬等長写像における二条件は，以下の二条件と同値．

[1] f が擬等長埋め込みである．

[2] ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ をとると，$d_Y(f(x), y) \leq c$ を満たす．

Proof. Definition 2.4 を満たすならば［1］,［2］を満たすことの証明：
［2］を示せばよい．$f\colon X \to Y$ に対し，定義より，ある擬等長写像 $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y と finite distance である．任意の $y \in Y$ をとる．$x := g(y)$ と定めることで，

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす．
［1］,［2］を満たすならば Definition 2.4 を満たすことの証明：
仮定より，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対し，$\frac{1}{c} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + c$.

(2) 任意の $y \in Y$ に対しある $x \in X$ が存在し，$d_Y(f(x), y) \leq c$.

(2) と選択公理を用いて，$y \in Y$ に対し，$d_Y(f(x_y), y) \leq c$ を満たすような $x_y \in X$ を選ぶ． 写像 $g\colon Y \to X$ を，$y \mapsto x_y$ と定めると，$g \circ f$，$f \circ g$ ともに finite distance となる．実際に，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる．$f \circ g$ に関しても，任意の $y \in Y$ に対して，

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$$

が成立する． □

Definition 2.6. Proposition 2.5 の条件［2］を f が満たすとき，f は **quasi-dense image** をもつという．

2.2 Quasi-Isometry of Groups

2.1 節では距離空間同士を大雑把にみることについて述べたが，本節では群を距離空間に拡張し，群に対しても定義を行う．

以下，G を群として，S をその生成系とする．

Definition 2.7. 生成系 S による，群 G 上の **word metric** とは，$d_S\colon G \times G \to \mathbb{N}$,

$$d_S(g, h) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1},\ g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n\}$$

であり，これは G 上の距離関数である．

Example. 群 G の生成系 S からなる $\mathrm{Cay}(G, S)$ において，グラフ上の頂点間の距離とはまさに d_S のことである ($\mathrm{Cay}(G, S)$ の定義は Definition A.1 を参照されたい)．

Definition 2.8. G を有限生成群としたとき，G が距離空間 X に **bilipschitz equivalent** であるとは，G のある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G, d_S) と X が bilipschitz equivalent であることをいう．また，G が X に **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは，ある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G, d_S) と X が，quasi-isometric であることをいう．

Remark. 群 G とその生成系 S からできる距離空間 (G, d_S) では，G が有限生成であること，S を有限としていることに注意．

Example. 群 $\mathbb{Z}^2$ とその生成系 $S = \{(0,1), (1,0)\}$ からなる距離空間 $(\mathbb{Z}^2, d_S)$ は，距離空間 $\mathbb{R}^2$ と擬等長である．

群に組み込む距離関数を word metric にした場合，その定義からこれは生成系に大きく依存するため，距離空間と群が同じ構造を持つかどうかの議論が難しくなる．しかし，擬等長という“大雑把な視点”で見ると，生成系に依らずに議論することが可能である．

Proposition 2.9. S,S' をともに群 G の有限な生成系 としたとき，距離空間 (G, d_S) が 距離空間 (X, d_X) と f で bilipschitz equivalent ならば，$(G, d_{S'})$ と (X, d_X) も f で bilipschitz equivalent である．

Proof. $f\colon (X, d_X) \to (G, d_S)$，$f'\colon (X, d_X) \to (G, d_{S'})$ を共に bilipschitz equivalence とすると, 可換図式

$$\begin{tikzcd} & (G, d_S) \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\ (X, d_X) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & (G, d_{S'}) \end{tikzcd}$$

より，$f' = f \circ \mathrm{id} = f$ が成立する．bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので，あとは id が bilipschitz equivalence であることを示せばよい．c を,

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

とすると，S は有限なのでこれは有限値である．$g, h \in G$ をとり，$d_S(g, h) = n$ とし，$g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1})$ と表せられるとする．このとき，S' 上での g, h の word metric は,

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, s_1 s_2 \cdots s_n h) \\ &\leq d_{S'}(g, g s_1) + d_{S'}(g s_1, g s_1 s_2) + \cdots + d_{S'}(g s_1 s_2 \cdots s_{n-1}, g s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c + c + \cdots + c + c \\ &= cn = c d_S(g, h) \end{aligned}$$

となり，$d_{S'}(g, h) \leq c d_S(g, h)$ が得られる．同様の議論を S, S' を逆にしてすれば $d_S(g, h) \leq c d_{S'}(g, h)$ が得られる．id は全単射であることも含めると，id は bilipschitz equivalence である． □

Remark. Definition 2.8 と Proposition 2.9 より，距離空間に bilipschitz equivalent な群 (quasi-isometric な群) は，その (有限) 生成系の取り方に依らない．

2.3 Quasi-Geodesic

本節では，1 章でも記した，“よい”距離空間について述べる．

Definition 2.10. 距離空間 X 上の長さ $L \in \mathbb{R}_{>0}$ の **測地線 (geodesic)** とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への等長埋め込み，$\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **測地的 (geodesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような 等長埋め込み γ がとれるときをいう．

Example. $\mathbb{R}^n$ は測地的だが，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は測地的でない．実際，$(1, 0)$ と $(-1, 0)$ 間の距離は 2 だが，この測地線は原点を通ってしまう．一般に，$\mathbb{R}^n$ 上の凸集合は測地的である．

Definition 2.11. 距離空間 X 上の **(c, b)-擬測地線 ((c, b)-quasi-godesic)** とは，とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への (c, b)-擬等長埋め込み，$\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **(c, b)-擬測地的 ((c, b)-quasi-godesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような (c, b)-擬等長埋め込み，γ がとれるときをいう．また，(c, b) を省略し，単に擬測地線や擬測地的ともいう．

Example. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は，$(1, \epsilon)$-測地的である $(\epsilon > 0)$．これは，原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば，擬測地線が得られるからである．

3 主定理

本論文の主定理となる，Švarc-Milnor Lemma と，それに関連する主張について紹介する．

3.1 Švarc-Milnor Lemma

Theorem 3.1. G を群とし，(c,b)-測地的な距離空間 (X,d) 上に等長な群作用があるとする．もしある部分集合 $B\subset X$ が存在し，

(a) $\mathrm{diam}B := \sup_{x,y\in B} d(x,y) < \infty$,

(b) $\bigcup_{g\in G} g\cdot B = X$,

(c) 集合 $S := \{g\in G \mid g\cdot B'\cap B' \neq \emptyset\}$ が有限.

を満たすならば,

(1) S は G の有限生成系である．

(2) 任意の $x\in X$ に対して定まる写像 $\varphi\colon G\to X$; $g\mapsto gx$ によって，G と X は擬等長.

ただし，$B' := \{x\in X \mid y\in X,\ d_X(x,y)\leq 2b\}$ と定める．

Proof. (1) の証明：
$g\in G$ を任意にとる．$x\in B$ としたとき，X の仮定から $\gamma(0)=x$，$\gamma(L)=g\cdot x$ なる (c,b)-擬測地線 γ が存在する．$[0,L]$ をおおよそ $n := \lceil L\cdot c/b\rceil$ 等分した点列を $t_i (0\leq i\leq n)$ とする．厳密には,

$$t_i := i\cdot b/c\ (0\leq i\leq n-1),\ t_n := L$$

と定める．この点列と対応するように，$\mathrm{Im}\gamma$ に点列 $x_i\in X(0\leq i\leq n)$ をとる．つまり,

$$x_i := \gamma(t_i) \qquad (0\leq i\leq n)$$

である．B の仮定より，各 x_i に対して，$x_i\in g_i\cdot B$ となるような $g_i\in G$ を選ぶことができる (図 2 参照).

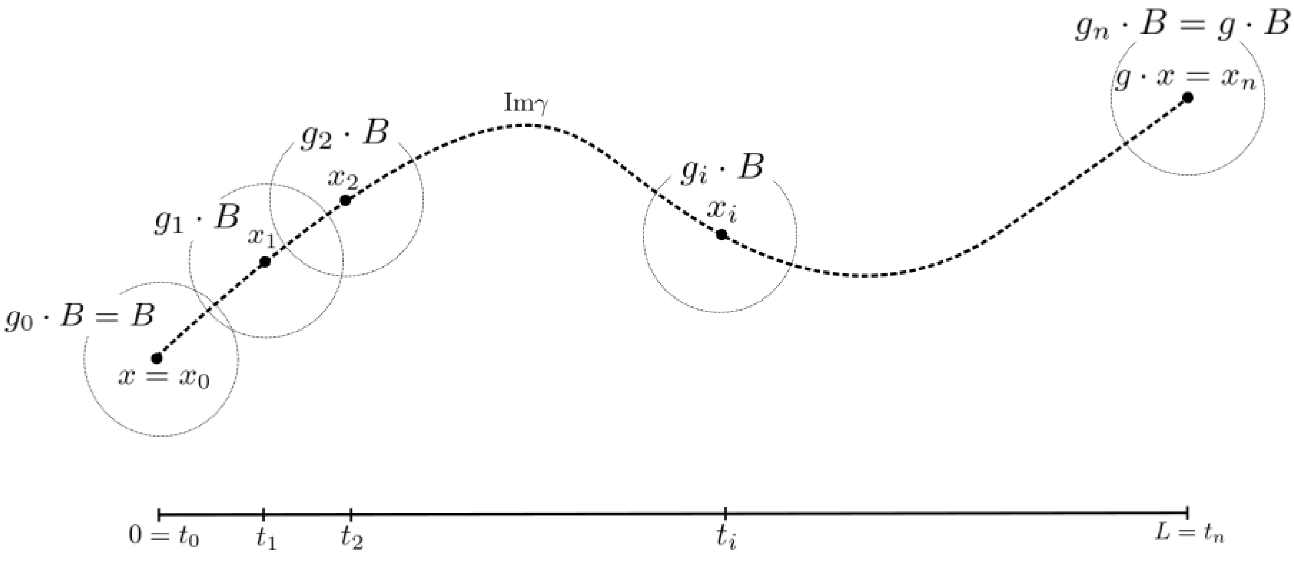

図 2: t_i, x_i, g_i の関係

ここで，$g_0=e$，$g_n=g$ としておく．γ は (c,b)-擬測地線 なので，不等式

$$d(x_{i-1},x_i)\leq c|t_{i-1}-t_i| + b = c\cdot b/c + b = 2b$$

を得る．等長に群作用をしていることに注意すると,

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x\in X \mid y\in g_{i-1}\cdot B,\ d_X(x,y)\leq 2b\} \\ &= \{x\in X \mid g_{i-1}^{-1}\cdot y\in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1}\cdot x, g_{i-1}^{-1}\cdot y)\leq 2b\} \\ &= g_{i-1}\cdot\{x'\in X \mid y'\in B,\ d_X(x',y')\leq 2b\} \\ &= g_{i-1}\cdot B' \end{aligned}$$

を得る．$x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$ でもあるので，

$$\begin{aligned} g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' \neq \emptyset, \\ (g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' \neq \emptyset. \end{aligned}$$

よって，$(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ であり，$s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ とすれば，g は $g = g_n = e(g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2)\cdots(g_{n-1}^{-1}g_n) = es_1s_2\cdots s_n$ と S の元で表すことができる．

(2) の証明：
B の仮定より，任意の $x \in X$ は B に含まれていると考えてよい ($x \in g \cdot B$ となる $g \cdot B$ を改めて B とすればよいため).

［1］写像 $\varphi(g) = g \cdot x$ に関して，quasi-dense image であること．

［2］擬等長埋め込みであること．

の二点を示す．

［1］ φ が quasi-dense image であること：
任意の $x' \in X$ に関して，$x' \in g' \cdot B$ となる $g' \in G$ がとれるため，

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \mathrm{diam}(g' \cdot B) = \mathrm{diam}B.$$

仮定より diam$B$ は有限なので，φ が quasi-dense image であることが示された．

［2］ φ が 擬等長埋め込みであること：
ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し， 任意の $g, h \in G$ に対して，

$$\frac{1}{C}d_S(g,h) - B \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq Cd_S(g,h) + B.$$

であることを示せばいいが，word metric の定義と G が等長に作用していることから，

$$\begin{aligned} d_S(g,h) &= d_S(e, g^{-1}h) \\ d_X(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_X(g \cdot x, h \cdot x) \\ &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &= d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \end{aligned}$$

が成立する．以上より，ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し， 任意の $g \in G$ に対して，

$$\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e,g) + B$$

が成立することを示せばよい．

［$2-1$］ $\frac{1}{C}d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g))$ が成立すること：
任意に $g \in G$ をとる．このとき，g に対して proof of (1) と同様の議論により $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ がとれ，$g = s_1s_2\cdots s_n$ と表せられる．このときの γ を用いて，

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) = d_X(x, g \cdot x) &= d_X(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{1}{c}L - b \\ &\geq \frac{1}{c}\frac{b(n-1)}{c} - b = \frac{b}{c^2}n - b - \frac{b}{c^2} \\ &\geq \frac{1}{c^2}d_S(e,g) - b - \frac{b}{c^2} \end{aligned}$$

とすることで，下からの不等式が得られる．

$[2-2]$　$d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e,g) + B$ が成立すること：
任意に $g \in G$ をとる．$d_S(e,g) = n$ とし，$g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられるとする．このとき，各 $s_i \in S \cup S^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ に対して，S の定義 $B' \cap s_i \cdot B' \neq \emptyset$ より，

$$d_X(x, s_i \cdot x) \leq \mathrm{diam}B + 2b + \mathrm{diam}B = 2(\mathrm{diam}B + b)$$

が成立する (図 3 参照).

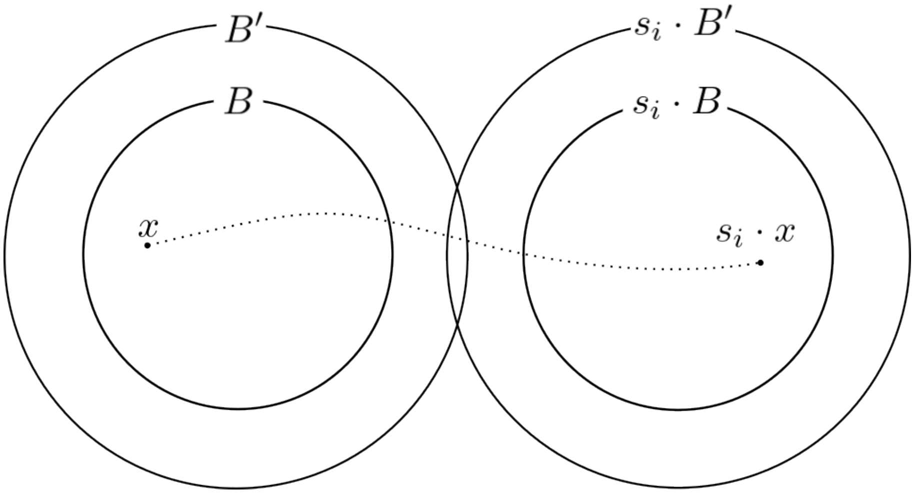

図 3: $d_X(x, s_i \cdot x)$ の不等式

これより，

$$\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g)) = d_X(x, g \cdot x) &= d_X(x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\
&\leq d_X(x, s_1 x) + d_X(s_1 x, s_1 s_2 x) + \cdots + d_X(s_1 s_2 \cdots s_{n-1} x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\
&= d_X(x, s_1 x) + d_X(x, s_2 x) + \cdots + d_X(x, s_n x) \\
&\leq 2(\mathrm{diam}B + b) \cdot n \\
&= 2(\mathrm{diam}B + b) \cdot d_S(e,g)
\end{aligned}$$

を得る．　□

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{R}^2$ に群 $\mathbb{Z}^2$ が，

$$(1,0) \cdot (x,y) = (x+2, y)$$
$$(0,1) \cdot (x,y) = (x, y+2)$$

からなる作用をしているとする．作用の仕方からこれは等長な群作用である．$\mathbb{R}^2$ を $(1, 1/2)$-擬測地的空間とし，部分集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ を，

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$$

とすれば，これは Theorem3.1 の条件 (a),(b) を満たす．$S \subset \mathbb{Z}^2$ は，

$$\begin{aligned}
S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\
&= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}
\end{aligned}$$

となり，条件 (c) を満たす．よって，Theorem 3.1 より，$\mathbb{Z}^2$ は S によって生成され，$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{Z}^2$ は擬等長である．

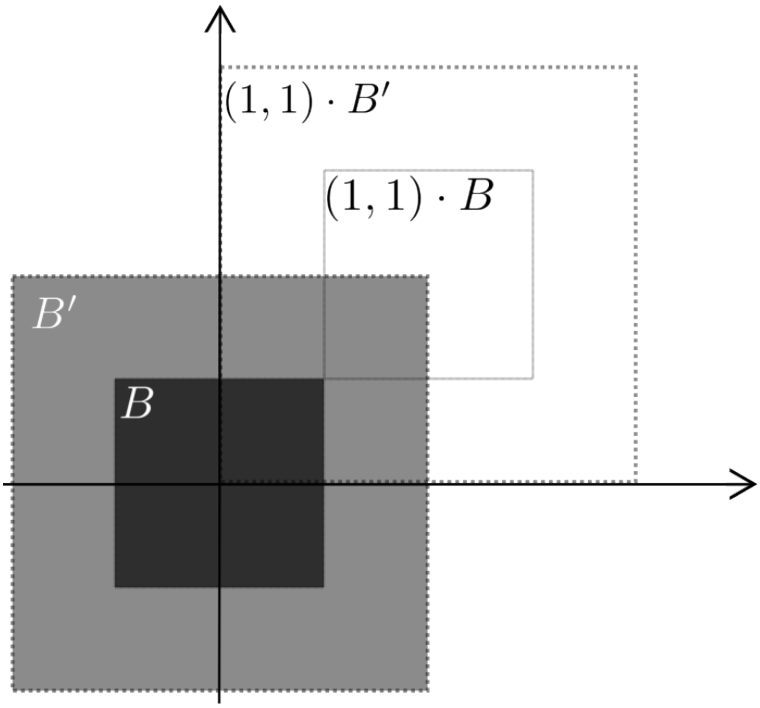

図 4: B, B' の図

3.2 Švarc-Milnor Lemma の拡張

Theorem 3.1 は，群作用が等長でなくても成立する．つまり，以下のとおりである．

Theorem 3.2. Theorem 3.1 は，群 G が距離空間 X に等長な群作用だけでなく，擬等長な群作用としても成り立つ．

証明は，以下の Lemma 3.3–3.5 より与えらえる．

Lemma 3.3. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長な作用でも $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$ が成立する．ただし，$B' := \{x \in X \mid y \in X,\ d_X(x, y) \leq 2bc' + b'\}$ とする．

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長なので，

$$\frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, g \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq d_X(x, y)$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B,\ d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, \frac{1}{c'} d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B,\ d_X(x', y') \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る． □

Lemma 3.4. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長な作用でも $\mathrm{diam}(g' \cdot B) < \infty$ である．

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長なので，

$$d_X(g \cdot x, g \cdot y) \leq c' d_X(x, y) + b'$$

が成立する．よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diam}(g' \cdot B) &= \sup_{x,y \in g' \cdot B} d_X(x,y) \\
&= \sup_{x',y' \in B} d_X(g \cdot x', g \cdot y') \\
&\leq \sup_{x',y' \in B} c' d_X(x', y') + b' \\
&\leq c' \mathrm{diam} B + b'
\end{aligned}
$$

となり，$\mathrm{diam}(g' \cdot B)$ は有限値. □

Lemma 3.5. Theorem 3.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長な作用でも，定数 $C > 0, B \geq 0$ があり，任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$
\frac{1}{C} d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e,g) + B
$$

が成立するならば，定数 $C' > 0, B' \geq 0$ があり，任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$
\frac{1}{C'} d_S(g,h) - B' \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq C' d_S(g,h) + B'
$$

が成立する．

Proof. word metric の定義から，

$$
d_S(g,h) = d_S(e, g^{-1}h) \tag{1}
$$

が成立し，群作用が (c', b')-擬等長なことから，

$$
\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\
&\leq c' d_X(g \cdot x, h \cdot x) + c'b' = c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b' \qquad (2) \\
d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\
&\geq \frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, h \cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

が成立する．仮定より，以下の不等式

$$
\frac{1}{C} d_S(e,g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e,g) + B \tag{4}
$$

が成立するので，これらの不等式を用いて，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C} d_S(g,h) - B &= \frac{1}{C} d_S(e, g^{-1}h) - B && (1)\text{ より} \\
&\leq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) && (4)\text{ より} \\
&\leq c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b' && (2)\text{ より} \\
\frac{1}{Cc'} d_S(g,h) - \frac{B + c'b'}{c'} &\leq d_X(\varphi(g), \varphi(h))
\end{aligned}
$$

が得られ，もう一方も

$$
\begin{aligned}
C d_S(g,h) + B &= C d_S(e, g^{-1}h) + B && (1)\text{ より} \\
&\geq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) && (4)\text{ より} \\
&\geq \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} && (3)\text{ より} \\
Cc' d_S(g,h) + (Bc' + b') &\geq d_X(\varphi(g), \varphi(h))
\end{aligned}
$$

が得られ，目的の不等式が成立する． □

4 主定理 位相空間論 版

Theorem 3.1 の主張を，位相空間論の視点で言い換えた主張が存在する．その主張に必要な用語の定義を 4.1 節で行った後，4.2 節にて述べる．

4.1 準備

Definition 4.1. 距離空間 (X, d) が **proper** であるとは，任意の $x \in X$，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して，集合

$$\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

が常にコンパクトになることをいう．

Example. ユークリッド空間は proper である一方，$\mathbb{R}$ の部分空間として $(0, 1)$ に相対位相を入れた空間は，$(0, 1)$ 自身は有界閉集合だがコンパクトでない．また，一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない．

Definition 4.2. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **properly discontinuous** であるとは，任意のコンパクトな集合 $K \subset X$ に関して，

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は properly discontinuous である．しかし，$\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしている場合，この作用は properly discontinuous ではない．

Definition 4.3. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは，商空間 $G\backslash X$ がコンパクトであることをいう．言い換えると，あるコンパクトな集合 $K \subset X$ が存在し，

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は余コンパクトである．一方，$\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{Z}$ が作用する場合，これは余コンパクトでない (商空間は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であり，これはコンパクトでないため).

4.2 Švarc-Milnor Lemma (位相空間論 版)

Theorem 4.4. 群 G が，proper かつ擬測地的な距離空間 (X, d) に，等長に作用しているとする．この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば，G は有限生成であり，G と X は擬等長である．

Proof. X は擬測地的であるので，Thm 3.1 の仮定を満足するような $B \subset X$ をみつければよい．以下，X は $(1, b)$-quasi-geodesic であるとする $(b > 0)$．自然な射影 $\pi \colon X \to G\backslash X$ は開写像であるので，開球 $B_1(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$ の像 $\pi(B_1(x))$ は $G\backslash X$ 上の開集合である．また，$\pi(X) = G\backslash X$ より，$\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$ は $G\backslash X$ の開被覆である．$G\backslash X$ のコンパクト性より，これらから有限個 $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \leq k \leq n}$ の開被覆で $G\backslash X$ を覆うことができる．各開球 $B_1(x_k)$ の閉包 $\overline{B_1(x_k)}$ を考え，

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば，

(a) $\mathrm{diam} B < \infty$.

(b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$.

をみたす．また，B はコンパクト集合である (X の proper 性から各 $\overline{B_1(x_k)}$ はコンパクトであり，B はそれらの有限和のため)．同様の議論として，$B' = \{x \in X \mid y \in B,\ d(x,y) \leq 2b\}$ とすれば，これはコンパクト集合である．そして群作用が properly discontinuous であることから，

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

は有限である (c). □

4.3 応用例

この定理の応用例として，以下のような主張がある．

Corollary 4.5. M をコンパクトで境界のないリーマン多様体とする．その普遍被覆 $\widetilde{M}$ に，基本群 $\pi_1(M)$ が被覆変換で群作用をしているとき， $\pi_1(M)$ は有限生成であり，$\tilde{x} \in \widetilde{M}$ によって定まる写像

$$\pi_1(M) \to \widetilde{M}\ ;\ g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である．

Proof. $\widetilde{M}$ が proper かつ測地的な距離空間であること：

群作用が等長であること：

群作用が余コンパクトであること：
被覆空間の定義より，$\pi_1(M)\backslash\widetilde{M}$ は M と同相である．仮定より M はコンパクトなので，$\pi_1(M)\backslash\widetilde{M}$ もそうである．

群作用が properly discontinuous であること：
任意のコンパクトな集合 $K \subset \widetilde{M}$ をとる．この K の十分小さい有限個の開被覆 $\{\widetilde{U}_k\}_{1 \leq k \leq n}$ に関して，被覆変換の一意性により $g \cdot \widetilde{U}_k \cap \widetilde{U}_l$ を満たすような $g \in G$ は，(k,l) のペアに対し高々一個である．したがって，

$$g \cdot K \cap K \subset g \cdot \Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{U}_k\Bigr) \cap \Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{U}_k\Bigr)$$

が空でないような $g \in G$ は有限個である． □

A 付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフ や，その周辺の事項について述べる．なおここで述べるグラフとは,・・・・

A.1 Cayley Graphs

群からできる Cayley グラフ とは，その生成系を用いて群の構造を可視化することを目的としており，幾何学的群論では幅広く用いられている．たくさんの性質を持っているが，ここではその定義と特徴的な定理の紹介に留める．

以下，G を群として，S をその生成系とする．

Definition A.1. 生成系 S による群 G の **Cayley graph** とは，以下のようなグラフである．このグラフを $\mathrm{Cay}(G,S)$ と表記する．

(1) 頂点集合を G とする．

(2) 辺集合を $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G,\ s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$ とする．

Example. $\mathbb{Z}^2$ の Cayley グラフとか.

Theorem A.2. F が自由群であり，S がその生成系の場合，$\mathrm{Cay}(F, S)$ は tree である．

Theorem A.3. $\mathrm{Cay}(G, S)$ が tree であり，任意の $s, s' \in S$ に対して $s \cdot s' \neq e$ のとき，G は自由群である．

A.2 Group Actions

以下，G を群，X を集合とする．

Definition A.4. 群 G が集合 X 上に**作用する (group action)** とは, 各 $g \in G$ に対して X から X への全単射な写像が存在し, その写像も g と表すとき,

(1) 全ての $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し, $h(g(x)) = (hg)(x)$.

(2) $e(x) = x$.

が成立することである．ただし, e は単位元である.

Remark. $g(x)$ を $g \cdot x$ と表記する．また，部分集合 $A \subset X$ に対し，$g \cdot A := \{g \cdot x \mid x \in A\}$ とする．

Definition A.5. 群 G による集合 X への群作用が**自由 (free)** であるとは，任意の $g \in G \setminus \{e\}$ と任意の $x \in X$ に対して，$g \cdot x \neq x$ が成り立つときをいう．

Proposition A.6. 群 G の生成系を S とする．$\mathrm{Cay}(G, S)$ への左群作用が free であることと，位数が 2 である元が S に存在しないことは同値.

Definition A.7. 群 G が 集合 X に群作用しているとする．元 $x \in X$ における，この群作用による**軌道 (orbit)** とは，集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである．また，この群作用による X の **商集合 (quotient)** とは，集合

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである．

Definition A.8. 群 G が 集合 X に群作用しているとする．元 $x \in X$ における，この群作用による**安定化群 (stabiliser group)** とは，群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

のことである．また，元 $g \in G$ における **不動点？固定点？ (fixed set)** とは，集合

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$$

のことである．

A.3 Fundamental Groups

以下，X を位相空間とする．

Definition A.9. X を位相空間とする．$I := [0,1]$ として，連続写像 $f\colon I \to X$ を **パス (path)** といい，$f(0) = f(1)$ のときを特に **ループ (loop)** という．また，パスの族 $f_t\colon I \to X$ $(0 \le t \le 1)$ が **ホモトピー (homotopy)** であるとは，以下の二条件：

(1) $f_t(0) = x_0$，$f_t(1) = x_1$ が $t \in I$ と独立.

(2) $F(s,t) := f_t(s)$ が，s, t に関して連続.

が成り立つときをいう．このとき，パス f_0 と f_1 を **ホモトピック (homotopic)** であるといい，$f_0 \simeq f_1$ と表記する．

Remark. Definition A.9 における $\simeq$ は同値関係である．

Definition A.10. パス $f, g\colon I \to X$ に関して，$f(1) = g(0)$ のとき，f と g の演算を

$$f \cdot g := \begin{cases} f(2s) & (s \in [0, 1/2]) \\ g(2s-1) & (s \in [1/2, 1]) \end{cases}$$

とする．$x_0 \in X$ を基点としたループの集合を Definition A.9 の同値関係 $\simeq$ で割り，演算

$$[f][g] := [f \cdot g]$$

を導入することで群ができる．この群を **基本群 (fundamental group)** といい，$\boldsymbol{\pi_1(X, x_0)}$ と表記する．

Remark. X が弧状連結のとき，X による基本群は基点に依らない．そこで，X が弧状連結のときは，基点を省略して単に $\pi_1(X)$ と表記する．

A.4 Covering Spaces

Definition A.11. 位相空間 X の **被覆空間 (covering space)** とは，位相空間 $\widetilde{X}$ と連続写像 $p\colon \widetilde{X} \to X$ の組であり，以下を満たすときをいう．

任意の $x \in X$ に対し，開近傍 $U \subset X$ と 開集合族 $\{\widetilde{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \widetilde{X}$ が存在し，三条件

(1) $\alpha, \beta \in \Lambda$ に関して，$\alpha \neq \beta$ ならば $\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta = \emptyset$.

(2) $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{U}_\lambda$.

(3) 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し，$p|_\lambda$ によって $\widetilde{U}_\lambda$ と U は同相.

を満たす．

Definition A.12. 位相空間 X の 被覆空間 $\widetilde{X}$ が **普遍被覆 (universal cover)** であるとは，X が弧状連結かつ $\pi_1(X)$ が自明群であることをいう．