

2025 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

何か書こう

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太 准教授
(2026 年 1 月 30 日)

目次

1	導入	3
2	準備	3
2.1	Quasi-Isometry of Metric Spaces	3
2.2	Quasi-Isometry of Groups	5
2.3	Quasi-Geodesic	6
3	主定理	6
3.1	Švarc-Milnor Lemma	7
3.2	Švarc-Milnor Lemma の拡張	10
4	主定理 位相空間論 版	12
4.1	準備	12
4.2	Švarc-Milnor Lemma (位相空間論 版)	12
4.3	応用例	13
A	付録	13
A.1	Cayley Graphs	13
A.2	Group Actions	13

1 導入

幾何群論について語る。

Švarc-Milnor Lemma とは、「群が“よい”距離空間によい群作用をしているとき、その群の有限生成系が分かり、群の構造と空間の構造が“大雑把に”等しい」という主張であり、その内容から「幾何学的群論の基本補題」とも言われている。一般に、群が与えられたとき、その群が有限生成であるかどうかの判別は難しいのだが、この補題では生成系が分かるだけでなく、作用している空間の持つ構造と、群の持つ構造が大雑把に等しいことまで分かる。群のことを知りたければ、よく知られている距離空間への作用を考えればよく、逆に距離空間のことを知りたければ、よく知られている群の作用を考えればよい。まさに群と幾何を繋ぐ補題であるといえるだろう。

(もうちょい書きたい)

2 準備

2.1 Quasi-Isometry of Metric Spaces

この節では、空間同士を見積もるための道具となる写像について述べる。条件の厳しい等長写像から始まり、その条件を少しずつ緩めることによって、幾何学的群論における“大雑把な視点”を得ることができる。

以下、 (X, d_X) を距離空間とし、省略して X と表記する。

Definition 2.1. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **等長埋め込み (isometric embedding)** であるとは、任意の $x, x' \in X$ に関して、 $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つことをいう。また、 f が **等長写像 (isometry)** であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1) f が等長埋め込みである。
- (2) ある等長埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し、 $f \circ g = \text{id}_Y$ 、 $g \circ f = \text{id}_X$ を満たす。

さらに、二つの距離空間 X, Y が **等長 (isometric)** であるとは、等長写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう。

Remark. 定義より、等長埋め込みならば単射な連続写像である。よって、等長写像は同相写像である。また、等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる。

Definition 2.2. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **bilipschitz 埋め込み (bilipschitz embedding)** であるとは、ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し、任意の $x, x' \in X$ に対して、

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x')$$

が成り立つことをいう。また、 f が **bilipschitz equivalence** であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1) f が bilipschitz 埋め込みである。
- (2) ある bilipschitz 埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し、 $f \circ g = \text{id}_Y$ 、 $g \circ f = \text{id}_X$ を満たす。

さらに、二つの距離空間 X, Y が **bilipschitz equivalent** であるとは、bilipschitz equivalence な写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう。

Example. 通常の距離が入った距離空間 $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$ に対し、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ を、 $f(n) = 2n$ とすると、これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込みである。実際、この写像は $c = 2$ とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす。また、 $g: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を、 $g(m) = m/2$ とすれば、 f, g によって \mathbb{Z} と $2\mathbb{Z}$ は bilipschitz equivalent である。

Remark. bilipschitz 埋め込み は単射な連続写像である。よって、bilipschitz equivalence は同相写像である。また、bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる。

Definition 2.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が写像 $f': X \rightarrow Y$ から **finite distance** であるとは、ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し、任意の $x \in X$ に対して、

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう。

Definition 2.4. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が **擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは、ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し、任意の $x, x' \in X$ に対して、

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう。このとき、 f を **(c, b) -quasi-isometric embedding** と表現する。また、 f が **擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1) f が擬等長埋め込みである。
- (2) ある擬等長埋め込み $g: Y \rightarrow X$ が存在し、 $f \circ g$ が id_Y と finite distance, $g \circ f$ が id_X と finite distance である。

さらに、二つの距離空間 X, Y が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは、擬等長写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するときをいう。

Example. 通常の距離が入った距離空間 \mathbb{R}, \mathbb{Z} に対し、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ を、 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ と定めると、これは bilipschitz embedding ではないが、擬等長埋め込みである。実際、この写像は $c = 1, b = 1$ とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす。また、 \mathbb{Z} から \mathbb{R} への包含写像を考えると、 f と包含写像によって \mathbb{Z} と \mathbb{R} は擬等長である。

Remark. 擬等長埋め込みは連続とは限らない (実際上の例の f は連続でない)。同様に、擬等長写像は連続であるとは限らない。

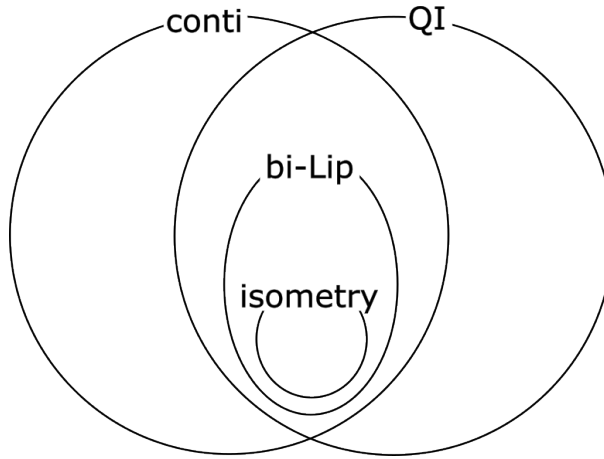


図 1: 各写像の関係

Remark. 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり、bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり、擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである。

定数倍と定数分のズレを許してしまうという、擬等長の“大雑把な視点”が幾何学的群論では大切なのだが、その擬等長に関する定義について、それと同値なものを紹介する。

Proposition 2.5. Definition 2.4 の 擬等長写像における二条件は、以下の二条件と同値。

- [1] f が擬等長埋め込みである。
- [2] ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し、任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ をとると、 $d_Y(f(x), y) \leq c$ を満たす。

Proof. Definition 2.4 を満たすならば [1] , [2] を満たすことの証明 :

[2] を示せばよい. $f: X \rightarrow Y$ に対し, 定義より, ある擬等長写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在し, $f \circ g$ が id_Y と finite distance である. 任意の $y \in Y$ をとる. $x := g(y)$ と定めることで,

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす.

[1] , [2] を満たすならば Definition 2.4 を満たすことの証明 :

仮定より, ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し,

$$(1) \text{ 任意の } x, x' \in X \text{ に対し, } \frac{1}{c}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + c.$$

$$(2) \text{ 任意の } y \in Y \text{ に対しある } x \in X \text{ が存在し, } d_Y(f(x), y) \leq c.$$

(2) と選択公理を用いて, $y \in Y$ に対し, $d_Y(f(x_y), y) \leq c$ を満たすような $x_y \in X$ を選ぶ. 写像 $g: Y \rightarrow X$ を, $y \mapsto x_y$ と定めると, $g \circ f, f \circ g$ ともに finite distance となる. 実際に, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる. $f \circ g$ に関しても, 任意の $y \in Y$ に対して,

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$$

が成立する. □

Definition 2.6. Proposition 2.5 の条件 [2] を f が満たすとき, f は **quasi-dense image** をもつという.

2.2 Quasi-Isometry of Groups

2.1 節では距離空間同士を大雑把にみることにについて述べたが, 本節では群を距離空間に拡張し, 群に対しても定義を行う.

以下, G を群として, S をその生成系とする.

Definition 2.7. 生成系 S による, 群 G 上の **word metric** とは, $d_S: G \times G \rightarrow \mathbb{N}$,

$$d_S(g, h) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}, g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n\}$$

であり, これは G 上の距離関数である.

Example. 群 G の生成系 S からなる $\text{Cay}(G, S)$ において, グラフ上の頂点間の距離とはまさに d_S のことである ($\text{Cay}(G, S)$ の定義は Definition A.1 を参照されたい).

Definition 2.8. G を有限生成群としたとき, G が距離空間 X に **bilipschitz equivalent** であるとは, G のある有限な生成系 S がとれ, 距離空間 (G, d_S) と X が bilipschitz equivalent であることをいう. また, G が X に **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは, ある有限な生成系 S がとれ, 距離空間 (G, d_S) と X が, quasi-isometric であることをいう.

Remark. 群 G とその生成系 S からできる距離空間 (G, d_S) では, G が有限生成であること, S を有限としていることに注意.

Example. 群 \mathbb{Z}^2 とその生成系 $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$ からなる距離空間 (\mathbb{Z}^2, d_S) は, 距離空間 \mathbb{R}^2 と擬等長である.

群に組み込む距離関数を word metric にした場合, その定義からこれは生成系に大きく依存するため, 距離空間と群が同じ構造を持つかどうかの議論が難しくなる. しかし, 擬等長という“大雑把な視点”で見ると, 生成系に依らずに議論することが可能である.

Proposition 2.9. S, S' をともに群 G の有限な生成系 としたとき, 距離空間 (G, d_S) が 距離空間 (X, d_X) と f で bilipschitz equivalent ならば, $(G, d_{S'})$ と (X, d_X) も f で bilipschitz equivalent である.

Proof. $f: (X, d_X) \rightarrow (G, d_S)$, $f': (X, d_X) \rightarrow (G, d_{S'})$ を共に bilipschitz equivalence とすると, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} & & (G, d_S) \\ & \nearrow f & \downarrow \text{id} \\ (X, d_X) & & (G, d_{S'}) \\ & \searrow f' & \end{array}$$

より, $f' = f \circ \text{id} = f$ が成立する. bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので, あとは id が bilipschitz equivalence であることを示せばよい. c を,

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

とすると, S は有限なのでこれは有限値である. $g, h \in G$ をとり, $d_S(g, h) = n$ とし, $g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ ($s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1}$) と表せられるとする. このとき, S' 上での g, h の word metric は,

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, s_1 s_2 \cdots s_n h) \\ &\leq d_{S'}(g, g s_1) + d_{S'}(g s_1, g s_1 s_2) + \cdots + d_{S'}(g s_1 s_2 \cdots s_{n-1}, g s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c + c + \cdots + c + c \\ &= cn = cd_S(g, h) \end{aligned}$$

となり, $d_{S'}(g, h) \leq cd_S(g, h)$ が得られる. 同様の議論を S, S' を逆にしてすれば $d_S(g, h) \leq cd_{S'}(g, h)$ が得られる. id は全単射であることも含めると, id は bilipschitz equivalence である. \square

Remark. Definition 2.8 と Proposition 2.9 より, 距離空間に bilipschitz equivalent な群 (quasi-isometric な群) は, その (有限) 生成系の取り方に依らない.

2.3 Quasi-Geodesic

本節では, 1 章でも記した, “よい” 距離空間について述べる.

Definition 2.10. 距離空間 X 上の長さ $L \in \mathbb{R}_{>0}$ の **測地線 (geodesic)** とは, $[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への等長埋め込み, $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ のことである. また, X が **測地的 (geodesic)** であるとは, 任意の $x, x' \in X$ において, $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = x'$ となるような等長埋め込み γ がとれるときをいう.

Example. \mathbb{R}^n は測地的だが, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は測地的でない. 実際, $(1, 0)$ と $(-1, 0)$ 間の距離は 2 だが, この測地線は原点を通過してしまう. 一般に, \mathbb{R}^n 上の凸集合は測地的である.

Definition 2.11. 距離空間 X 上の (c, b) -**擬測地線 ((c, b)-quasi-geodesic)** とは, $[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への (c, b) -擬等長埋め込み, $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ のことである. また, X が (c, b) -**擬測地的 ((c, b)-quasi-geodesic)** であるとは, 任意の $x, x' \in X$ において, $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = x'$ となるような (c, b) -擬等長埋め込み, γ がとれるときをいう. また, (c, b) を省略し, 単に擬測地線や擬測地的ともいう.

Example. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は, $(1, \epsilon)$ -測地的である ($\epsilon > 0$). これは, 原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば, 擬測地線が得られるからである.

3 主定理

本論文の主定理となる, Švarc-Milnor Lemma と, それに関連する主張について紹介する.

3.1 Švarc-Milnor Lemma

Theorem 3.1. G を群とし, (c, b) -測地的な距離空間 (X, d) 上に等長な群作用があるとする. もしある部分集合 $B \subset X$ が存在し,

- (a) $\text{diam} B := \sup_{x, y \in B} d(x, y) < \infty$,
- (b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$,
- (c) 集合 $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ が有限.

を満たすならば,

- (1) S は G の有限生成系である.
- (2) 任意の $x \in X$ に対して定まる写像 $\varphi: G \rightarrow X; g \mapsto gx$ によって, G と X は擬等長.

ただし, $B' := \{x \in X \mid y \in X, d_X(x, y) \leq 2b\}$ と定める.

Proof. (1) の証明:

$g \in G$ を任意にとる. $x \in B$ としたとき, X の仮定から $\gamma(0) = x$, $\gamma(L) = g \cdot x$ なる (c, b) -擬測地線 γ が存在する. $[0, L]$ をおおよそ $n := \lceil L \cdot c/b \rceil$ 等分した点列を $t_i (0 \leq i \leq n)$ とする. 厳密には,

$$t_i := i \cdot b/c \quad (0 \leq i \leq n-1), \quad t_n := L$$

と定める. この点列と対応するように, $\text{Im} \gamma$ に点列 $x_i \in X (0 \leq i \leq n)$ をとる. つまり,

$$x_i := \gamma(t_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

である. B の仮定より, 各 x_i に対して, $x_i \in g_i \cdot B$ となるような $g_i \in G$ を選ぶことができる (図 2 参照).

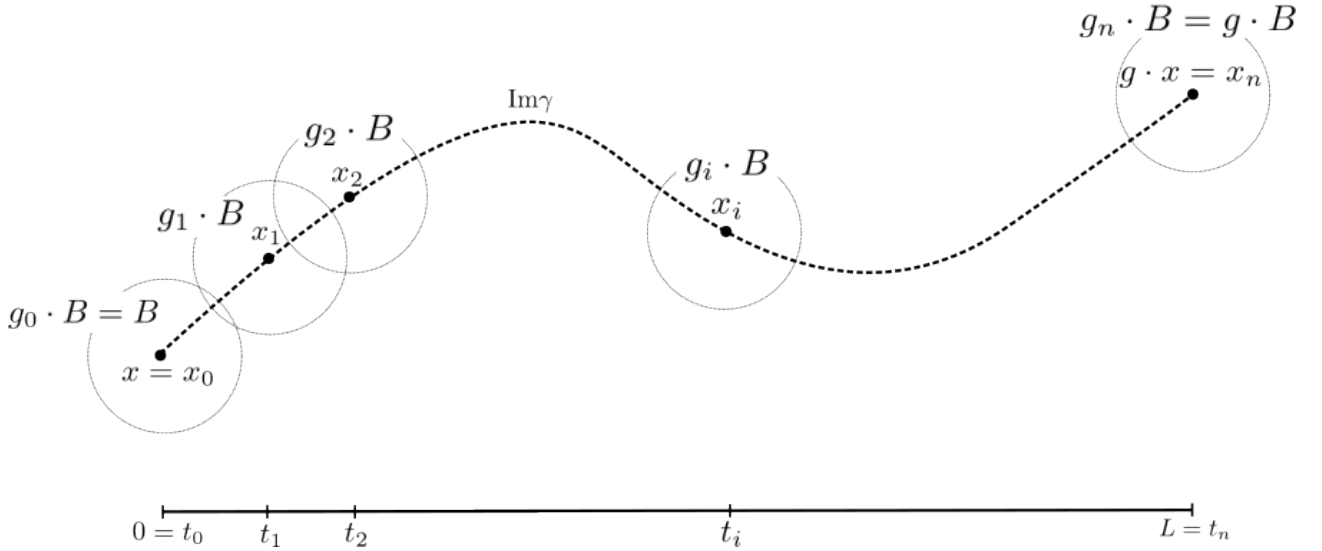


図 2: t_i, x_i, g_i の関係

ここで, $g_0 = e$, $g_n = g$ としておく. γ は (c, b) -擬測地線 なので, 不等式

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq c|t_{i-1} - t_i| + b = c \cdot b/c + b = 2b$$

を得る. 等長に群作用をしていることに注意すると,

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot x \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る. $x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$ でもあるので,

$$\begin{aligned} g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' &\neq \emptyset, \\ (g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

よって, $(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ であり, $s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ とすれば, g は $g = g_n = e(g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1}g_n) = es_1s_2 \cdots s_n$ と S の元で表すことができる.

(2) の証明:

B の仮定より, 任意の $x \in X$ は B に含まれていると考えてよい ($x \in g \cdot B$ となる $g \cdot B$ を改めて B とすればよい).

[1] 写像 $\varphi(g) = g \cdot x$ に関して, quasi-dense image であること.

[2] 擬等長埋め込みであること.

の二点を示す.

[1] φ が quasi-dense image であること:

任意の $x' \in X$ に関して, $x' \in g' \cdot B$ となる $g' \in G$ がとれるため,

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \text{diam}(g' \cdot B) = \text{diam}B.$$

仮定より $\text{diam}B$ は有限なので, φ が quasi-dense image であることが示された.

[2] φ が 擬等長埋め込みであること:

ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し, 任意の $g, h \in G$ に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(g, h) - B \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq Cd_S(g, h) + B.$$

であることを示せばいいが, word metric の定義と G が等長に作用していることから,

$$\begin{aligned} d_S(g, h) &= d_S(e, g^{-1}h) \\ d_X(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_X(g \cdot x, h \cdot x) \\ &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &= d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \end{aligned}$$

が成立する. 以上より, ある定数 $C > 0, B \geq 0$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$$

が成立することを示せばよい.

[2-1] $\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g))$ が成立すること:

任意に $g \in G$ をとる. このとき, g に対して proof of (1) と同様の議論により $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ がとれ, $g = s_1s_2 \cdots s_n$ と表せられる. このときの γ を用いて,

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{1}{c}L - b \\ &\geq \frac{1}{c} \frac{b(n-1)}{c} - b = \frac{b}{c^2}n - b - \frac{b}{c^2} \\ &\geq \frac{1}{c^2}d_S(e, g) - b - \frac{b}{c^2} \end{aligned}$$

とすることで、下からの不等式が得られる。

[2-2] $d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e, g) + B$ が成立すること：

任意に $g \in G$ をとる． $d_S(e, g) = n$ とし、 $g = s_1 s_2 \cdots s_n$ と表せられるとする． このとき、各 $s_i \in S \cup S^{-1}$ ($1 \leq i \leq n$) に対して、 S の定義 $B' \cap s_i \cdot B' \neq \emptyset$ より、

$$d_X(x, s_i \cdot x) \leq \text{diam} B + 2b + \text{diam} B = 2(\text{diam} B + b)$$

が成立する (図 3 参照)．

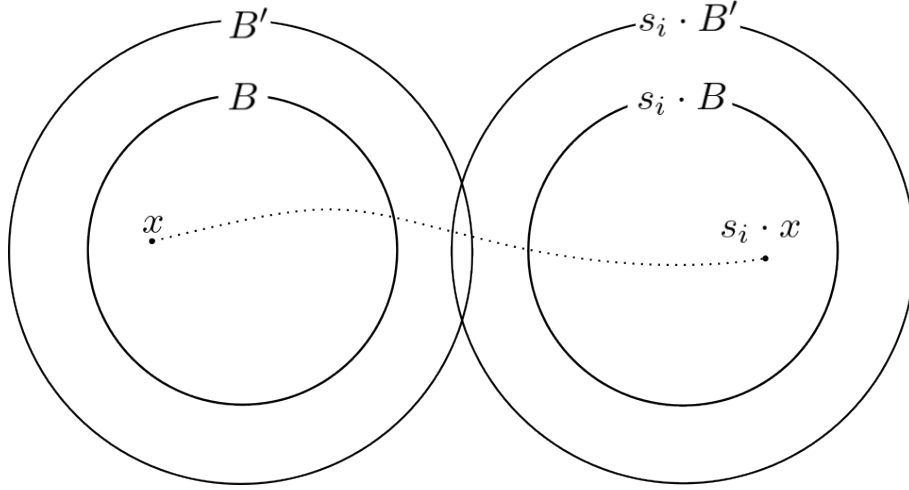


図 3: $d_X(x, s_i \cdot x)$ の不等式

これより、

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &\leq d_X(x, s_1 x) + d_X(s_1 x, s_1 s_2 x) + \cdots + d_X(s_1 s_2 \cdots s_{n-1} x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &= d_X(x, s_1 x) + d_X(x, s_2 x) + \cdots + d_X(x, s_n x) \\ &\leq 2(\text{diam} B + b) \cdot n \\ &= 2(\text{diam} B + b) \cdot d_S(e, g) \end{aligned}$$

を得る。 □

Example. 通常の距離が入った距離空間 \mathbb{R}^2 に群 \mathbb{Z}^2 が、

$$(1, 0) \cdot (x, y) = (x + 2, y)$$

$$(0, 1) \cdot (x, y) = (x, y + 2)$$

からなる作用をしているとする．作用の仕方からこれは等長な群作用である． \mathbb{R}^2 を $(1, 1/2)$ -擬測地的空間とし、部分集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ を、

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

とすれば、これは Theorem 3.1 の条件 (a), (b) を満たす． $S \subset \mathbb{Z}^2$ は、

$$\begin{aligned} S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

となり、条件 (c) を満たす． よって、Theorem 3.1 より、 \mathbb{Z}^2 は S によって生成され、 \mathbb{R}^2 と \mathbb{Z}^2 は擬等長である。

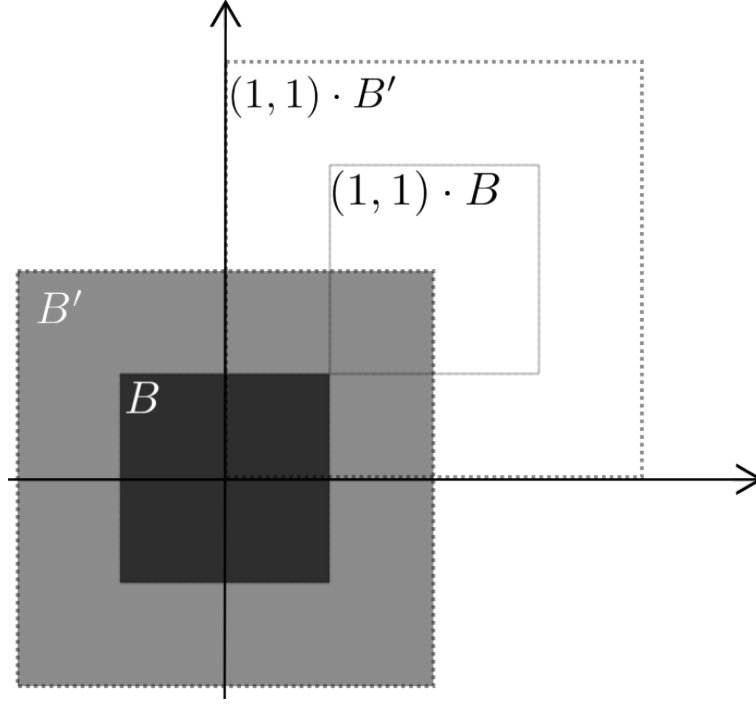


図 4: B, B' の図

3.2 Švarc-Milnor Lemma の拡張

Theorem 3.1 は、群作用が等長でなくても成立する。つまり、以下のとおりである。

Theorem 3.2. Theorem 3.1 は、群 G が距離空間 X に等長な群作用だけでなく、擬等長な群作用としても成り立つ。

証明は、以下の Lemma 3.3–3.5 より与えられる。

Lemma 3.3. Theorem 3.1 の証明において、群作用が (c', b') -擬等長な作用でも $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$ が成立する。ただし、 $B' := \{x \in X \mid y \in X, d_X(x, y) \leq 2bc' + b'\}$ とする。

Proof. 群作用が (c', b') -擬等長なので、

$$\frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, g \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq d_X(x, y)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, \frac{1}{c'} d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る。 □

Lemma 3.4. Theorem 3.1 の証明において、群作用が (c', b') -擬等長な作用でも $\text{diam}(g' \cdot B) < \infty$ である。

Proof. 群作用が (c', b') -擬等長なので、

$$d_X(g \cdot x, g \cdot y) \leq c' d_X(x, y) + b'$$

が成立する。よって,

$$\begin{aligned}
\text{diam}(g' \cdot B) &= \sup_{x, y \in g' \cdot B} d_X(x, y) \\
&= \sup_{x', y' \in B} d_X(g \cdot x', g \cdot y') \\
&\leq \sup_{x', y' \in B} c' d_X(x', y') + b' \\
&\leq c' \text{diam} B + b'
\end{aligned}$$

となり, $\text{diam}(g' \cdot B)$ は有限値. □

Lemma 3.5. Theorem 3.1 の証明において, 群作用が (c', b') -擬等長な作用でも, 定数 $C > 0, B \geq 0$ があり, 任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C} d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e, g) + B$$

が成立するならば, 定数 $C' > 0, B' \geq 0$ があり, 任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C'} d_S(g, h) - B' \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq C' d_S(g, h) + B'$$

が成立する.

Proof. word metric の定義から,

$$d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1}h) \tag{1}$$

が成立し, 群作用が (c', b') -擬等長なことから,

$$\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\
&\leq c' d_X(g \cdot x, h \cdot x) + c' b' = c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c' b'
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\
&\geq \frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, h \cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'}
\end{aligned} \tag{3}$$

が成立する. 仮定より, 以下の不等式

$$\frac{1}{C} d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e, g) + B \tag{4}$$

が成立するので, これらの不等式を用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C} d_S(g, h) - B &= \frac{1}{C} d_S(e, g^{-1}h) - B && (1) \text{ より} \\
&\leq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) && (4) \text{ より} \\
&\leq c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c' b' && (2) \text{ より} \\
\frac{1}{C'} d_S(g, h) - \frac{B + c' b'}{C'} &\leq d_X(\varphi(g), \varphi(h))
\end{aligned}$$

が得られ, もう一方も

$$\begin{aligned}
C d_S(g, h) + B &= C d_S(e, g^{-1}h) + B && (1) \text{ より} \\
&\geq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) && (4) \text{ より} \\
&\geq \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} && (3) \text{ より} \\
C c' d_S(g, h) + (B c' + b') &\geq d_X(\varphi(g), \varphi(h))
\end{aligned}$$

が得られ, 目的の不等式が成立する. □

4 主定理 位相空間論 版

Theorem 3.1 の主張を、位相空間論の視点で言い換えた主張が存在する。それに必要な用語の定義を 4.1 節で行った後、4.2 節にてその主張を述べる。

4.1 準備

Definition 4.1. 距離空間 (X, d) が **proper** であるとは、任意の $x \in X$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して、集合

$$\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

が常にコンパクトになることをいう。

Example. ユークリッド空間は proper である一方、 \mathbb{R} の部分空間として $(0, 1)$ に相対位相を入れた空間は、 $(0, 1)$ 自身は有界閉集合だがコンパクトでない。また、一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない。

Definition 4.2. 群 G が位相空間 X に作用しているとする。この作用が **properly discontinuous** であるとは、任意のコンパクトな集合 $K \subset X$ に関して、

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす。

Example. \mathbb{R} に \mathbb{Z} が加法で群作用をしているとき、この作用は properly discontinuous である。しかし、 \mathbb{Q} が加法で群作用をしている場合、この作用は properly discontinuous ではない。

Definition 4.3. 群 G が位相空間 X に作用しているとする。この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは、商空間 $G \backslash X$ がコンパクトであることをいう。言い換えると、あるコンパクトな集合 $K \subset X$ が存在し、

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす。

Example. \mathbb{R} に \mathbb{Z} や \mathbb{Q} が加法で群作用をしているとき、この作用は余コンパクトである。一方、 \mathbb{R}^2 に \mathbb{Z} が作用する場合、これは余コンパクトでない (商空間は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であり、これはコンパクトでないため)。

4.2 Švarc-Milnor Lemma (位相空間論 版)

Theorem 4.4. 群 G が、proper かつ擬測地的な距離空間 (X, d) に、等長に作用しているとする。この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば、 G は有限生成であり、 G と X は擬等長である。

Proof. X は擬測地的であるので、Thm 3.1 の仮定を満足するような $B \subset X$ をみつけられよい。以下、 X は $(1, b)$ -quasi-geodesic であるとする ($b > 0$)。自然な射影 $\pi: X \rightarrow G \backslash X$ は開写像であるので、開球 $B_1(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$ の像 $\pi(B_1(x))$ は $G \backslash X$ 上の開集合である。また、 $\pi(X) = G \backslash X$ より、 $\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$ は $G \backslash X$ の開被覆である。 $G \backslash X$ のコンパクト性より、これらから有限個 $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \leq k \leq n}$ の開被覆で $G \backslash X$ を覆うことができる。各開球 $B_1(x_k)$ の閉包 $\overline{B_1(x_k)}$ を考え、

$$B = \bigcup_{k=1}^n \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば、

- (a) $\text{diam} B < \infty$.

$$(b) \bigcup_{g \in G} g \cdot B = X.$$

をみます. また, B はコンパクト集合である (X の proper 性から各 $\overline{B_1(x_k)}$ はコンパクトであり, B はそれらの有限和のため). 同様の議論として, $B' = \{x \in X \mid y \in B, d(x, y) \leq 2b\}$ とすれば, これはコンパクト集合である. そして群作用が properly discontinuous であることから,

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

は有限である (c). □

4.3 応用例

この定理の応用例として, 以下のような主張がある.

Corollary 4.5. コンパクトで境界のないリーマン多様体 M と, その普遍被覆 \widetilde{M} に関して, 基本群 $\pi_1(M)$ は有限生成であり, $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ によって定まる写像

$$\pi_1(M) \rightarrow \widetilde{M}; g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である. なお, ここでの群作用は被覆変換による群作用とする.

Proof. (\widetilde{M} が proper かつ geodesic な metric space であること)

(群作用が isometric であること)

(群作用が cocompact であること)

(群作用が properly discontinuous であること) □

A 付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフ や, その周辺の事項について述べる.

A.1 Cayley Graphs

以下, G を群として, S をその生成系とする.

Definition A.1. 生成系 S による群 G の **Cayley graph** とは, 以下のようなグラフである. このグラフを $\text{Cay}(G, S)$ と表記する.

(1) 頂点集合を G とする.

(2) 辺集合を $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$ とする.

Theorem A.2. F が自由群であり, S がその生成系の場合, $\text{Cay}(F, S)$ は tree である.

Theorem A.3. $\text{Cay}(G, S)$ が tree であり, 任意の $s, s' \in S$ に対して $s \cdot s' \neq e$ のとき, G は自由群である.

A.2 Group Actions

以下, G を群, X を集合とする.

Definition A.4. 群 G が集合 X 上に作用する (group action) とは, 各 $g \in G$ に対して X から X への全単射な写像が存在し, その写像も g と表すとき,

(1) 全ての $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し, $h(g(x)) = (hg)(x)$.

$$(2) e(x) = x.$$

が成立することである。ただし, e は単位元である。

Remark. $g(x)$ を $g \cdot x$ と表記する。

Definition A.5. 群 G による集合 X への群作用が**自由 (free)** であるとは, 任意の $g \in G \setminus \{e\}$ と任意の $x \in X$ に対して, $g \cdot x \neq x$ が成り立つときをいう。

Definition A.6. $(V, E), (V', E')$ をグラフとする。 $f: (V, E) \rightarrow (V', E')$ が **グラフ準同型 (graph homomorphism)** であるとは, 二条件

- (1) $f: V \rightarrow V'$ が写像.
- (2) $\{v, v'\} \in E \Rightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

が成り立つときをいう。また, f が **グラフ同型 (graph isomorphism)** であるとは, 二条件

- (1) $f: V \rightarrow V'$ が全単射.
- (2) $\{v, v'\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

が成り立つときをいう。

Definition A.7. 群 G がグラフ (V, E) にグラフ同型に作用しているとする。この作用が **自由 (free)** であるとは, 任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して, 以下の二条件

- (1) 任意の $v \in V$ に対して, $g(v) \neq v$ が成り立つ.
- (2) 任意の $v, v' \in V$ に対して, $\{g(v), g(v')\} \neq \{v, v'\}$ が成り立つ.

が成立することをいう。

Proposition A.8. 群 G の生成系を S とする。 $\text{Cay}(G, S)$ への左群作用が free であることと, 位数が 2 である元が S に存在しないことは同値。

Definition A.9. 群 G が集合 X に群作用しているとする。元 $x \in X$ における, この群作用による**軌道 (orbit)** とは, 集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである。また, この群作用による X の **商集合 (quotient)** とは, 集合

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである。

Definition A.10. 群 G が集合 X に群作用しているとする。元 $x \in X$ における, この群作用による**安定化群 (stabiliser group)** とは, 群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

のことである。また, 元 $g \in G$ における **不動点? 固定点? (fixed set)** とは, 集合

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$$

のことである。