2025年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学EP 卒業研究

何か書こう

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太

（2026年1月30日）

概 要

頑張っていっぱい書こうね〜〜〜〜〜〜〜〜〜

目 次

1　準備

1.1　Quasi-Isometry of Meric Space

本論文では，(X, d_X)，(Y, d_Y) を距離空間とし，省略して X, Y と表記する．

Definition 1.1. 写像 $f\colon X \to Y$ が **等長埋め込み (isometry embedding)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ に関して，$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ が成り立つことをいう．また，f が **等長写像 (isometry)** であるというのは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が等長埋め込みである．

(2) ある等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **等長 (isometric)** であるとは，等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Remark. 定義より，等長埋め込みならば単射な連続写像である．よって，等長写像は同相写像である．また，等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる．

Definition 1.2. 写像 $f\colon X \to Y$ が **bilipschitz 埋め込み (bilipschitz embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x')$$

が成り立つことをいう．また，f が **bilipschitz equivalence (bi-Lip)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が bilipschitz 埋め込み である．

(2) ある bilipschitz 埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たす．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **bilipschitz equivalent** であるとは，bilipschitz equivalence な写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. $f\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ を，$f(n) = 2n$ とすると，これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込み である．実際，この写像は $c = 2$ とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす (ユークリッド距離から誘導される距離が入っているとみなしている)．かつ，$g\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を，$g(m) = m/2$ とすれば，f, g によって $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ は bilipschitz equivalent である．

Remark. bilipschitz 埋め込み は単射な連続写像である．よって，bilipschitz equivalence は同相写像である．また，bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる．

Definition 1.3. 写像 $f\colon X \to Y$ が 写像 $f'\colon X \to Y$ から **finite distance** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $x \in X$ に対して，

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう．

Definition 1.4. 写像 $f\colon X \to Y$ が **擬等長埋め込み (quasi-isometry embedding)** であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$，$b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し，任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう．このとき，f を **(c, b)-quasi-isometric embedding** とも表現する．また，f が**擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは，以下の二条件を満たすときをいう．

(1) f が擬等長埋め込みである．

(2) ある擬等長埋め込み $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y と finite distance，$g \circ f$ が id_X と finite distance である．

さらに，二つの距離空間 X, Y が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは，擬等長写像 $f\colon X \to Y$ が存在するときをいう．

Example. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を，$f(x) = \lfloor x \rfloor$ と定めると，これは bilipschitz embedding ではないが，擬等長埋め込みである．実際，この写像は $c = 1, b = 1$ とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす (ユークリッド距離から誘導される距離が入っているとみなしている)．また，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{R}$ への包含写像を考えると，f と包含写像によって $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は擬等長である．

Remark. 擬等長埋め込みは連続とは限らない (実際上の例の f は連続でない)．同様に，擬等長写像は連続であるとは限らない．

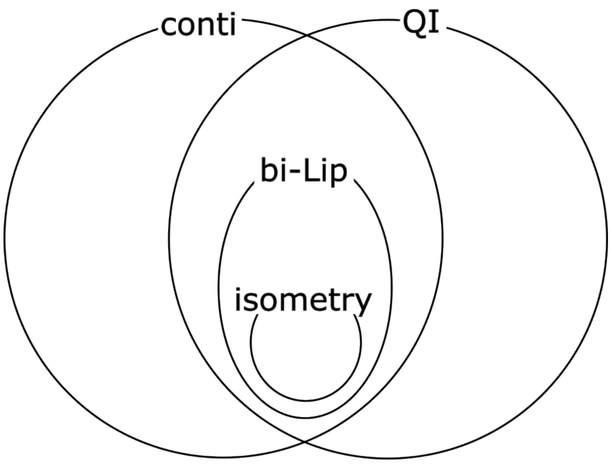

図 1: 各写像の関係

Remark. 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり，bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり，擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである．

Proposition 1.5. Definition 1.4 の 擬等長写像における二条件は，以下の二条件と同値.

［1］f が擬等長埋め込みである．

［2］ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ をとると，$d_Y(f(x), y) \leq c$ を満たす．

Proof. (Definition 1.4 $\Rightarrow$ の証明) ［2］を示せばよい．$f\colon X \to Y$ に対し，定義より，ある擬等長写像 $g\colon Y \to X$ が存在し，$f \circ g$ が id_Y と finite distance である．任意の $y \in Y$ をとる．$x := g(y)$ と定めることで，

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす．
($\Rightarrow$ Definition 1.4 の証明) ［1］［2］より，ある定数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対し，$\frac{1}{c} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c d_X(x, x') + c$.

(2) 任意の $y \in Y$ に対しある $x \in X$ が存在し，$d_Y(f(x), y) \leq c$.

(2) と選択公理を用いて，$y \in Y$ に対し，$d_Y(f(x_y), y) \leq c$ を満たすような $x_y \in X$ を選ぶ． 写像 $g\colon Y \to X$ を，$y \mapsto x_y$ と定めると，$g \circ f$，$f \circ g$ ともに finite distance となる．実際に，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる．$f \circ g$ に関しても，任意の $y \in Y$ に対して，

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \le c$$

が成立する． $\square$

Definition 1.6. Proposition 1.5 の条件［2］を f が満たすとき，f は **quasi-dense image** をもつという．

1.2 Quasi-Isometry of Group

以下，G を群として，S をその生成系とする．

Definition 1.7. 生成系 S による，群 G 上の **word metric** とは，$d_S\colon G \times G \to \mathbb{N}$,

$$d_S(g,h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid s_1, s_2, \dots s_n \in S \cup S^{-1},\ g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n\}$$

であり，これは G 上の距離関数である．

Example. 群 G の生成系 S からなる $\mathrm{Cay}(G,S)$ において，グラフ上の頂点間の距離とはまさに d_S のことである ($\mathrm{Cay}(G,S)$ の定義は Definition A.1 を参照していただきたい).

Definition 1.8. G を有限生成群としたとき，G が距離空間 X に **bilipschitz equivalent** であるとは，G のある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G, d_S) と X が bilipschitz equivalent であることをいう．また，G が X に **quasi-isometric** であるとは，ある有限な生成系 S がとれ，距離空間 (G, d_S) と X が，quasi-isometric であることをいう．

Remark. 群からできる距離空間では，群が有限生成であること，生成系を有限としていることに注意.

Example. 群 $\mathbb{Z}^2$ とその生成系 $S = \{(0,1),(1,0)\}$ からなる距離空間は，距離空間 $\mathbb{R}^2$ と quasi-isometric である．

Proposition 1.9. S,S' をともに群 G の有限な生成系 としたとき，距離空間 (G, d_S) が 距離空間 (X, d_X) と f で bilipschitz equivalent ならば，$(G, d_{S'})$ と (X, d) も f で bilipschitz equivalent である．

Proof. $f\colon (X, d_X) \to (G, d_S)$，$f'\colon (X, d_X) \to (G, d_{S'})$ を共に bilipschitz equivalence とすると, 以下の可換図式より，$f' = f \circ \mathrm{id} = f$ が成立する．bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので，あとは id が bilipschitz equivalence であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
 & (G, d_S) \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\
(X, d_X) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\
 & (G, d_{S'})
\end{tikzcd}$$

(S が有限なので) 有限値

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

をとる．$g, h \in G$ をとり，$d_S(g,h) = n$ とし，$g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ $(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1})$ と表せられるとする．このとき，S' 上での g, h の word metric は,

$$\begin{aligned}
d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, s_1 s_2 \cdots s_n h) \\
&\le d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1 s_2) + \cdots + d_{S'}(gs_1 s_2 \cdots s_{n-1}, gs_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n) \\
&= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\
&\le c + c + \cdots + c + c \\
&= cn = c d_S(g,h)
\end{aligned}$$

となり，上からの不等式が得られる．同様の議論を S, S' を逆にしてすれば下からの不等式が得られる．id は全単射なので，bilipschitz equivalence である． $\square$

Remark. Definition 1.8 と Proposition 1.9 より，距離空間に bilipschitz equivalent な群 (quasi-isometric な群) は，その (有限) 生成系の取り方に依らない．

1.3 Quasi-Geodesic

Definition 1.10. 距離空間 X 上の長さ $L \in \mathbb{R}_{>0}$ の **測地線 (geodesic)** とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への等長埋め込み，$\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **測地的 (geodesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような 等長埋め込み γ がとれるときをいう．

Example. $\mathbb{R}^n$ は測地的だが，$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は測地的でない．実際，$(1, 0)$ と $(-1, 0)$ 間の距離は 2 だが，この測地線は原点を通ってしまう．一般に，$\mathbb{R}^n$ 上の凸集合は測地的である．

Definition 1.11. 距離空間 X 上の **(c, b)-擬測地線 ((c, b)-quasi-godesic)** とは，とは，$[0, L] \subset \mathbb{R}$ から X への (c, b)-擬等長埋め込み，$\gamma\colon [0, L] \to X$ のことである．また，X が **(c, b)-擬測地的 ((c, b)-quasi-godesic)** であるとは，任意の $x, x' \in X$ において，$\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = x'$ となるような (c, b)-擬等長埋め込み，γ がとれるときをいう．また，(c, b) を省略し，単に擬測地線や擬測地的ともいう．

Example. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は，$(1, \epsilon)$-測地的である ($\epsilon > 0$)．これは，原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば，擬測地線が得られるからである．

2 主定理 幾何学的群論 版

本論文の主定理となる，Švarc-Milnor lemma と，それに関連する主張について紹介する．

2.1 Švarc-Milnor lemma

Theorem 2.1. G を群とし，距離空間 X 上に等長な群作用があるとする．もし

(i) ある定数 $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，X は (c, b)-測地的 である．

(ii) ある部分集合 $B \subset X$ が存在し，

  (a) $\mathrm{diam} B < \infty$,

  (b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$,

  (c) 集合 $S = \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ が有限.

を満たすならば,

(1) S は G の (有限) 生成系である．

(2) 任意の $x \in X$ に対して定まる写像 $\varphi\colon G \to X; g \mapsto gx$ によって，G と X は擬等長.

ただし，$B' := \{x \in X \mid y \in X,\ d_X(x, y) \leq 2b\}$ と定める．

Proof of (1). $g \in G$ を任意にとる．$x \in B$ としたとき，X の仮定から $\gamma(0) = x$，$\gamma(L) = g \cdot x$ なる (c, b)-擬測地線 γ が存在する．$[0, L]$ をおおよそ $n = \lceil L \cdot c/b \rceil$ 等分した点列を $t_i (0 \leq i \leq n)$ とする．厳密には,

$$t_i := i \cdot b/c \ (0 \leq i \leq n-1),\ t_n := L$$

と定める．この点列と対応するように，$\mathrm{Im}\gamma$ に点列 $x_i \in X (0 \leq i \leq n)$ をとる．つまり,

$$x_i := \gamma(t_i) \qquad (0 \leq i \leq n)$$

である．B の仮定より，各 x_i に対して，$x_i \in g_i \cdot B$ となるような $g_i \in G$ を選ぶことができる (図 2 参照).

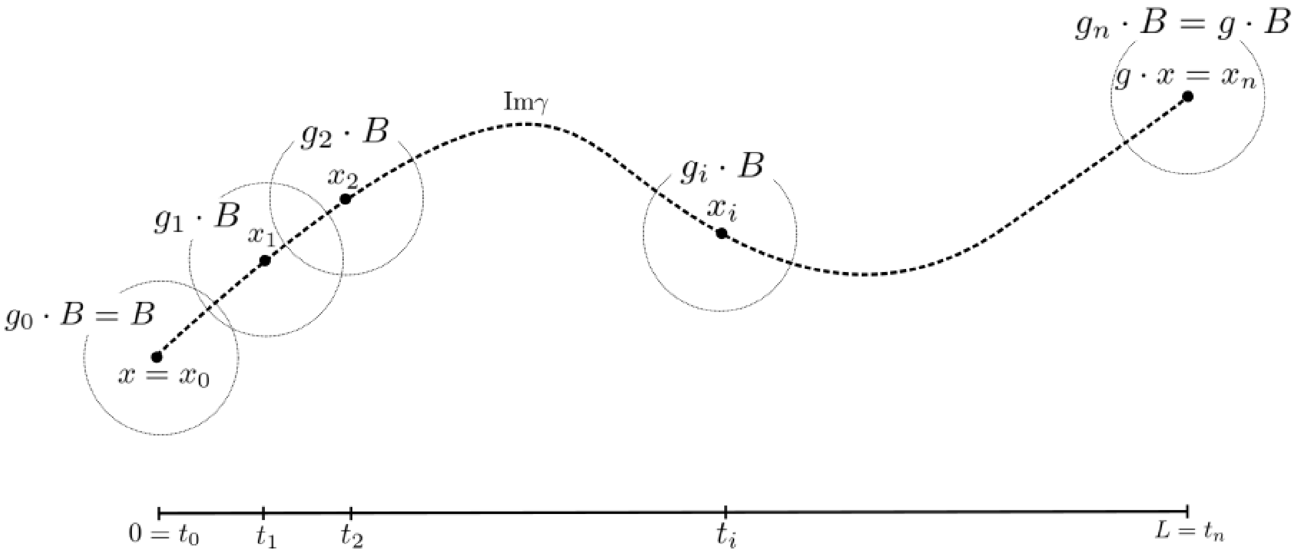

図 2: t_i, x_i, g_i の関係

ここで，$g_0 = e$，$g_n = g$ としておく．γ は (c, b)-擬測地線 なので，不等式

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq c|t_{i-1} - t_i| + b = c \cdot b/c + b = 2b$$

を得る．等長に群作用をしていることに注意すると，

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B,\ d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B,\ d_X(x', y') \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る．$x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$ でもあるので，

$$g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' \neq \emptyset,$$
$$(g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' \neq \emptyset.$$

よって，$(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ であり，$s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$ とすれば，g は $g = g_n = e(g_0^{-1} g_1)(g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1} g_n) = es_1 s_2 \cdots s_n$ と S の元で表すことができる． □

Proof of (2). B の仮定より，任意の $x \in X$ は B に含まれていると考えてよい ($x \in g \cdot B$ となる $g \cdot B$ を改めて B とすればよいため).

［1］写像 $\varphi(g) = g \cdot x$ に関して，quasi-dense image であること．

［2］擬等長埋め込みであること．

の二点を示す．

［1］ φ が quasi-dense image であること:
任意の $x' \in X$ に関して，$x' \in g' \cdot B$ となる $g' \in G$ がとれるため，

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \mathrm{diam}(g' \cdot B) = \mathrm{diam}B.$$

仮定より $\mathrm{diam}B$ は有限なので，φ が quasi-dense image であることが示された．

[2] φ が 擬等長埋め込みであること:
ある定数 $C>0, B\geq 0$ が存在し， 任意の $g,h\in G$ に対して，

$$\frac{1}{C}d_S(g,h)-B\leq d_X(\varphi(g),\varphi(h))\leq Cd_S(g,h)+B.$$

であることを示せばいいが，word metric の定義と G が等長に作用していることから，

$$\begin{aligned}d_S(g,h)&=d_S(e,g^{-1}h)\\ d_X(\varphi(g),\varphi(h))&=d_X(g\cdot x,h\cdot x)\\ &=d_X(x,(g^{-1}h)\cdot x)\\ &=d_X(\varphi(e),\varphi(g^{-1}h))\end{aligned}$$

が成立する．以上より，ある定数 $C>0, B\geq 0$ が存在し， 任意の $g\in G$ に対して，

$$\frac{1}{C}d_S(e,g)-B\leq d_X(\varphi(e),\varphi(g))\leq Cd_S(e,g)+B$$

が成立することを示せばよい．

[$2-1$] $\frac{1}{C}d_S(e,g)-B\leq d_X(\varphi(e),\varphi(g))$ が成立すること:
任意に $g\in G$ をとる．このとき，g に対して proof of (1) と同様の議論により $s_1,s_2,\ldots,s_n\in S\cup S^{-1}$ がとれ，$g=s_1s_2\cdots s_n$ と表せられる．このときの γ を用いて，

$$\begin{aligned}d_X(\varphi(e),\varphi(g))=d_X(x,g\cdot x)&=d_X(\gamma(0),\gamma(L))\\ &\geq\frac{1}{c}L-b\\ &\geq\frac{1}{c}\frac{b(n-1)}{c}-b=\frac{b}{c^2}n-b-\frac{b}{c^2}\\ &\geq\frac{1}{c^2}d_S(e,g)-b-\frac{b}{c^2}\end{aligned}$$

とすることで，下からの不等式が得られる．

[$2-2$] $d_X(\varphi(e),\varphi(g))\leq Cd_S(e,g)+B$ が成立すること:
任意に $g\in G$ をとる．$d_S(e,g)=n$ とし，$g=s_1s_2\cdots s_n$ と表せられるとする．このとき，各 $s_i\in S\cup S^{-1}$ $(1\leq i\leq n)$ に対して，S の定義 $B'\cap s_i\cdot B'\neq\emptyset$ より，

$$d_X(x,s_i\cdot x)\leq\mathrm{diam}B+2b+\mathrm{diam}B=2(\mathrm{diam}B+b)$$

が成立する (図 3 参照).
これより，

$$\begin{aligned}d_X(\varphi(e),\varphi(g))=d_X(x,g\cdot x)&=d_X(x,s_1s_2\cdots s_nx)\\ &\leq d_X(x,s_1x)+d_X(s_1x,s_1s_2x)+\cdots+d_X(s_1s_2\cdots s_{n-1}x,s_1s_2\cdots s_nx)\\ &=d_X(x,s_1x)+d_X(x,s_2x)+\cdots+d_X(x,s_nx)\\ &\leq 2(\mathrm{diam}B+b)\cdot n\\ &=2(\mathrm{diam}B+b)\cdot d_S(e,g)\end{aligned}$$

を得る． □

Example. 通常の距離が入った距離空間 $(\mathbb{R}^2,d)$ に群 $\mathbb{Z}^2$ が作用しているとする．$(1,0)\in\mathbb{Z}^2$ は $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を $(x+2,y)$ に送り，$(0,1)$ は $(x,y+2)$ に送るような群作用とする．作用の仕方からこれは等長な群作用である．$\mathbb{R}^2$ を $(1,1/2)$-擬測地的空間とし，部分集合 $B\subset\mathbb{R}^2$ を，

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1\leq x\leq 1,\,-1\leq y\leq 1\}$$

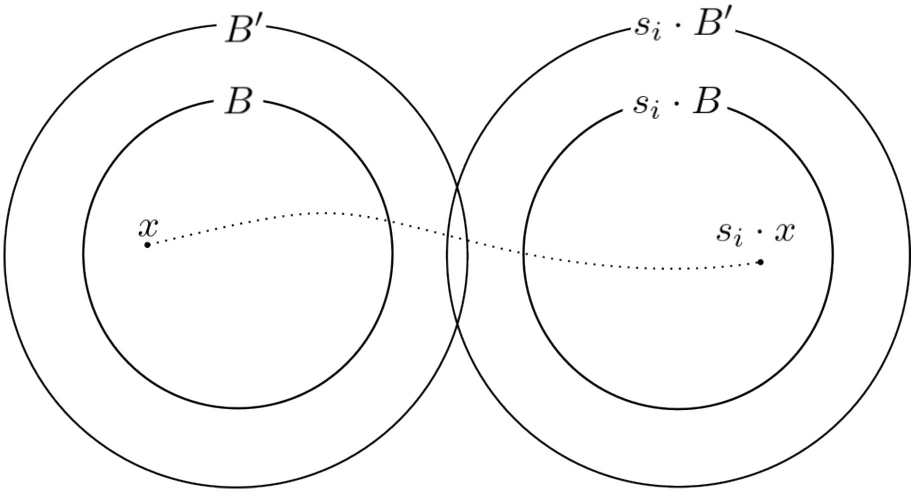

図 3: $d_X(x, s_i \cdot x)$ の不等式

とすれば，これは Theorem2.1 の条件 (a),(b) を満たす．$S \subset \mathbb{Z}^2$ は,

$$
\begin{aligned}
S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\
&= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}
\end{aligned}
$$

となり，条件 (c) を満たす．よって，Theorem 2.1 より，$\mathbb{Z}^2$ は S によって生成され，$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{Z}^2$ は擬等長である．

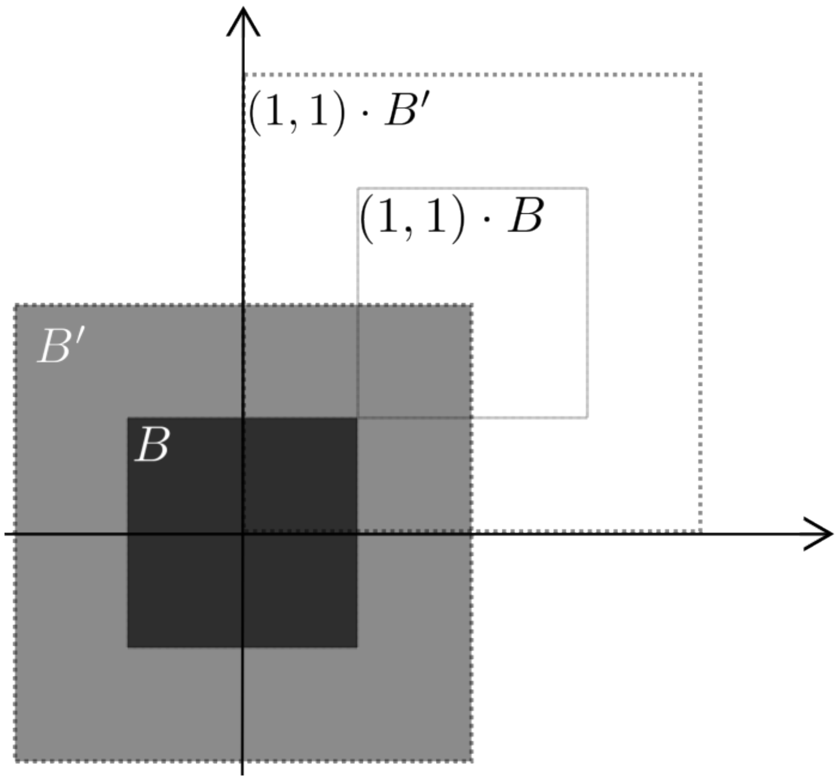

図 4: B, B' の図

2.2 Švarc-Milnor lemma の拡張

Theorem 2.1 は，群作用が等長でなくても成立する．つまり，以下のとおりである．

Theorem 2.2. Theorem 2.1 は，群 G が距離空間 X に“擬”等長な群作用としても成り立つ．

証明は，以下の Lemma 2.3，Lemma 2.4，Lemma 2.5 より与えらえる．

Lemma 2.3. Theorem 2.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長作用でも $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$ が成立する．ただし，$B' := \{x \in X \mid y \in X,\ d_X(x, y) \le 2bc' + b'\}$ とする．

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長作用より，

$$\frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, g \cdot y) - \frac{b'}{c'} \le d_X(x, y)$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned}
x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B,\ d_X(x, y) \le 2b\} \\
&\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B,\ \frac{1}{c'} d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) - \frac{b'}{c'} \le 2b\} \\
&= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B,\ d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \le 2bc' + b'\} \\
&= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B,\ d_X(x', y') \le 2bc' + b'\} \\
&= g_{i-1} \cdot B'
\end{aligned}$$

を得る． □

Lemma 2.4. Theorem 2.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長作用でも $\mathrm{diam}(g' \cdot B) < \infty$ である．

Proof. 群作用が (c', b')-擬等長作用より，

$$d_X(g \cdot x, g \cdot y) \le c' d_X(x, y) + b'$$

が成立する．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(g' \cdot B) &= \sup_{x, y \in g' \cdot B} d_X(x, y) \\
&= \sup_{x', y' \in B} d_X(g \cdot x', g \cdot y') \\
&\le \sup_{x', y' \in B} c' d_X(x', y') + b' \\
&\le c' \mathrm{diam} B + b'
\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{diam}(g' \cdot B)$ は有限値． □

Lemma 2.5. Theorem 2.1 の証明において，群作用が (c', b')-擬等長作用でも，定数 C, B があり，任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C} d_S(e, g) - B \le d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \le C d_S(e, g) + B$$

が成立するならば，定数 C', B' があり，任意の $g, h \in G$ に関しての不等式

$$\frac{1}{C'} d_S(g, h) - B' \le d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \le C' d_S(g, h) + B'$$

が成立する．

Proof. word metric の定義から，

$$d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1} h)$$

が成立し，群作用が (c', b')-擬等長作用なことから，

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\leq c' d_X(g \cdot x, h \cdot x) + c'b' = c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b' \\ d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\geq \frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, h \cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \end{aligned}$$

が成立する．仮定より，以下の不等式

$$\frac{1}{C} d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq C d_S(e, g) + B$$

が成立するので，これらの不等式を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} d_S(g, h) - B &= \frac{1}{C} d_S(e, g^{-1}h) - B \\ &\leq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \\ &\leq c' d_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b' \\ \frac{1}{Cc'} d_S(g, h) - \frac{B + c'b'}{c'} &\leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \end{aligned}$$

が得られ，もう一方も

$$\begin{aligned} C d_S(g, h) + B &= C d_S(e, g^{-1}h) + B \\ &\geq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \\ &\geq \frac{1}{c'} d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \\ Cc' d_S(g, h) + (Bc' + b') &\geq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \end{aligned}$$

が得られ，与式が成立する． □

3 主定理 位相空間論 版

Thm 2.1 の主張を，位相空間論の視点で言い換えた主張が存在する．それに必要な用語の定義を先に行う．

3.1 準備

Definition 3.1. 距離空間 (X, d) が **proper** であるとは，任意の $x \in X$，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ に関して，集合

$$\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

が常に コンパクト になることをいう．ここでの位相とは，距離から自然に誘導される位相をさす．

Example. ユークリッド空間は proper である一方，$\mathbb{R}$ の部分空間として $(0, 1)$ に相対位相を入れた空間は，$(0, 1)$ 自身は有界閉集合だがコンパクトでない．また，一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない．

Definition 3.2. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **properly discontinuous** であるとは，任意のコンパクトな集合 $K \subset X$ に関して，

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は properly discontinuous である．しかし，$\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしている場合，この作用は properly discontinuous ではない．

Definition 3.3. 群 G が位相空間 X に作用しているとする．この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは，商空間 $G\backslash X$ が コンパクトであることをいう．言い換えると，ある コンパクト な集合 $K \subset X$ が存在し，

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす．

Example. $\mathbb{R}$ に $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ が加法で群作用をしているとき，この作用は余コンパクトである．一方，$\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{Z}$ が作用する場合，これは余コンパクトでない (商空間は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であり，これはコンパクトでないため)．

3.2 Švarc-Milnor lemma (位相空間論 版)

Theorem 3.4. 群 G が，proper かつ擬測地的な距離空間 (X, d) に，等長に作用しているとする．この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば，G は有限生成であり，G と X は擬等長である．

Proof. X は擬測地的であるので，Thm 2.1 の仮定を満足するような $B \subset X$ をみつければよい．以下，X は $(1, b)$-quasi-geodesic であるとする ($b > 0$)．自然な射影 $\pi\colon X \to G\backslash X$ は開写像であるので，開球 $B_1(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$ の像 $\pi(B_1(x))$ は $G\backslash X$ 上の開集合である．また，$\pi(X) = G\backslash X$ より，$\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$ は $G\backslash X$ の開被覆である．$G\backslash X$ のコンパクト性より，これらから有限個 $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \leq k \leq n}$ の開被覆で $G\backslash X$ を覆うことができる．各開球 $B_1(x_k)$ の閉包 $\overline{B_1(x_k)}$ を考え，

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば，

(a) $\mathrm{diam} B < \infty$.

(b) $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$.

をみたす．また，B はコンパクト集合である (X の proper 性から各 $\overline{B_1(x_k)}$ はコンパクトであり，B はそれらの有限和のため)．同様の議論として，$B' = \{x \in X \mid y \in B,\ d(x, y) \leq 2b\}$ とすれば，これはコンパクト集合である．そして群作用が properly discontinuous であることから，

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

は有限である (c). □

3.3 応用例

この定理の応用例として，以下のような主張がある．

Corollary 3.5. コンパクトで境界のないリーマン多様体 M と，その普遍被覆 $\widetilde{M}$ に関して，基本群 $\pi_1(M)$ は有限生成であり，$\tilde{x} \in \widetilde{M}$ によって定まる写像

$$\pi_1(M) \to \widetilde{M}\ ;\ g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である．なお、ここでの群作用は被覆変換による群作用とする．

Proof. ($\widetilde{M}$ が proper かつ geodesic な metric space であること)
(群作用が isometric であること)
(群作用が cocompact であること)
(群作用が properly discontinuous であること) □

A　付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフ や，その周辺の事項について述べる．

A.1　Cayley Graph

以下，G を群として，S をその生成系とする．

Definition A.1. 生成系 S による群 G の **Cayley graph** とは，以下のようなグラフである．このグラフを $\mathrm{Cay}(G, S)$ と表記する．

(1) 頂点集合を G とする．

(2) 辺集合を $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G,\ s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$ とする．

Theorem A.2. F が自由群であり，S がその生成系の場合，$\mathrm{Cay}(F, S)$ は tree である．

Theorem A.3. $\mathrm{Cay}(G, S)$ が tree であり，任意の $s, s' \in S$ に対して $s \cdot s' \neq e$ のとき，G は自由群である．

A.2　Group Action

以下，G を群，X を集合とする．

Definition A.4. 群 G が集合 X 上に**作用する (group action)** とは, 各 $g \in G$ に対して X から X への全単射な写像が存在し, その写像も g と表すとき,

(1) 全ての $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し, $h(g(x)) = (hg)(x)$.

(2) $e(x) = x$.

が成立することである．ただし, e は単位元である．

Remark. $g(x)$ を $g \cdot x$ と表記する．

Definition A.5. 群 G による X への群作用が**自由 (free)** であるとは，任意の $g \in G \setminus \{e\}$ と任意の $x \in X$ に対して，$g \cdot x \neq x$ が成り立つときをいう．

Definition A.6. $(V, E), (V', E')$ をグラフとする．写像 $f\colon (V, E) \to (V', E')$ が **グラフ準同型 (graph homomorphism)** であるとは，二条件

(1) $f\colon V \to V$ が写像.

(2) $\{v, v'\} \in E \Rightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

が成り立つときをいう．また，f が **グラフ同型 (graph isomorphism)** であるとは，二条件

(1) $f\colon V \to V$ が全単射.

(2) $\{v, v'\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$.

が成り立つときをいう．

Definition A.7. 群 G がグラフ (V, E) にグラフ同型に作用しているとする．この作用が **自由 (free)** であるとは，任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して，以下の二条件

(1) 任意の $v \in V$ に対して，$g(v) \neq v$ が成り立つ．

(2) 任意の $v, v' \in V$ に対して，$\{g(v), g(v')\} \neq \{v, v'\}$ が成り立つ．

が成立することをいう．

Proposition A.8. 群 G の生成系を S とする．$\mathrm{Cay}(G, S)$ への左群作用が free であることと，位数が 2 である元が S に存在しないことは同値.

Definition A.9. 群 G が 集合 X に群作用しているとする．元 $x \in X$ における，この群作用による**軌道 (orbit)** とは，集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである．また，この群作用による X の **商集合 (quotient)** とは，集合

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである．

Definition A.10. 群 G が 集合 X に群作用しているとする．元 $x \in X$ における，この群作用による**安定化群 (stabiliser group)** とは，群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

のことである．また，元 $g \in G$ における **不動点？固定点？ (fixed set)** とは，集合

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$$

のことである．

参考文献書く