

2025 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

# 何か書こう

2264138 杉山 和輝

指導教員：野崎 雄太 准教授  
(2026年1月30日)

# 目 次

<b>1 導入</b>	<b>3</b>
<b>2 準備</b>	<b>3</b>
2.1 Quasi-Isometry of Meric Spaces . . . . .	3
2.2 Quasi-Isometry of Groups . . . . .	5
2.3 Quasi-Geodesic . . . . .	6
<b>3 主定理</b>	<b>6</b>
3.1 Švarc-Milnor Lemma . . . . .	7
3.2 Švarc-Milnor Lemma の拡張 . . . . .	10
<b>4 主定理 位相空間論 版</b>	<b>12</b>
4.1 準備 . . . . .	12
4.2 Švarc-Milnor Lemma (位相空間論 版) . . . . .	12
4.3 応用例 . . . . .	13
<b>A 付録</b>	<b>13</b>
A.1 Cayley Graphs . . . . .	13
A.2 Group Actions . . . . .	14
A.3 Covering Spaces . . . . .	14

# 1 導入

幾何群論について語る。

Svarc-Milnor Lemma とは、「群が“よい”距離空間により群作用をしているとき、その群の有限生成系が分かれり、群の構造と空間の構造が“大雑把に”等しい」という主張であり、その内容から「幾何学的群論の基本補題」とも言われている。一般に、群が与えられたとき、その群が有限生成であるかどうかの判別は難しいのだが、この補題では生成系が分かるだけでなく、作用している空間の持つ構造と、群の持つ構造が大雑把に等しいことまで分かる。群のことを知りたければ、よく知られている距離空間への作用を考えればよく、逆に距離空間のことを知りたければ、よく知られている群の作用を考えればよい。まさに群と幾何を繋ぐ補題であるといえるだろう。

(もうちょい書きたい)

# 2 準備

## 2.1 Quasi-Isometry of Metric Spaces

この節では、空間同士を見積もるために道具となる写像について述べる。条件の厳しい等長写像から始まり、その条件を少しずつ緩めることによって、幾何学的群論における“大雑把な視点”を得ることができる。

以下、 $(X, d_X)$  を距離空間とし、省略して  $X$  と表記する。

**Definition 2.1.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が **等長埋め込み** (isometric embedding) であるとは、任意の  $x, x' \in X$  に関して、 $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$  が成り立つことをいう。また、 $f$  が **等長写像** (isometry) であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1)  $f$  が等長埋め込みである。
- (2) ある等長埋め込み  $g: Y \rightarrow X$  が存在し、 $f \circ g = \text{id}_Y$ ,  $g \circ f = \text{id}_X$  を満たす。

さらに、二つの距離空間  $X, Y$  が **等長** (isometric) であるとは、等長写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在するときをいう。

**Remark.** 定義より、等長埋め込みならば单射な連続写像である。よって、等長写像は同相写像である。また、等長埋め込みは全射性を満たすと等長写像となる。

**Definition 2.2.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が **bilipschitz 埋め込み** (bilipschitz embedding) であるとは、ある定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在し、任意の  $x, x' \in X$  に対して、

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x')$$

が成り立つことをいう。また、 $f$  が **bilipschitz equivalence** であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1)  $f$  が bilipschitz 埋め込みである。
- (2) ある bilipschitz 埋め込み  $g: Y \rightarrow X$  が存在し、 $f \circ g = \text{id}_Y$ ,  $g \circ f = \text{id}_X$  を満たす。

さらに、二つの距離空間  $X, Y$  が **bilipschitz equivalent** であるとは、bilipschitz equivalence な写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在するときをいう。

**Example.** 通常の距離が入った距離空間  $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$  に対し、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$  を、 $f(n) = 2n$  とすると、これは等長埋め込みではないが bilipschitz 埋め込みである。実際、この写像は  $c = 2$  とすれば bilipschitz 埋め込み の定義を満たす。また、 $g: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  を、 $g(m) = m/2$  とすれば、 $f, g$  によって  $\mathbb{Z}$  と  $2\mathbb{Z}$  は bilipschitz equivalent である。

**Remark.** bilipschitz 埋め込み は单射な連続写像である。よって、bilipschitz equivalence は同相写像である。また、bilipschitz 埋め込み は全射性を満たすと bilipschitz equivalence となる。

**Definition 2.3.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が 写像  $f': X \rightarrow Y$  から **finite distance** であるとは、ある定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在し、任意の  $x \in X$  に対して、

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c$$

が成り立つことをいう。

**Definition 2.4.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が **擬等長埋め込み (quasi-isometric embedding)** であるとは、ある定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在し、任意の  $x, x' \in X$  に対して、

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + b$$

が成り立つことをいう。このとき、 $f$  を  **$(c, b)$ -quasi-isometric embedding** とも表現する。また、 $f$  が**擬等長写像 (quasi-isometry, QI)** であるとは、以下の二条件を満たすときをいう。

- (1)  $f$  が擬等長埋め込みである。
- (2) ある擬等長埋め込み  $g: Y \rightarrow X$  が存在し、 $f \circ g$  が  $\text{id}_Y$  と finite distance,  $g \circ f$  が  $\text{id}_X$  と finite distance である。

さらに、二つの距離空間  $X, Y$  が **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは、擬等長写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在するときをいう。

**Example.** 通常の距離が入った距離空間  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  に対し、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  を、 $f(x) = \lfloor x \rfloor$  と定めると、これは bilipschitz embedding ではないが、擬等長埋め込みである。実際、この写像は  $c = 1, b = 1$  とすれば擬等長埋め込みの定義を満たす。また、 $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{R}$  への包含写像を考えると、 $f$  と包含写像によって  $\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{R}$  は擬等長である。

**Remark.** 擬等長埋め込みは連続とは限らない(実際上の例の  $f$  は連続でない)。同様に、擬等長写像は連続であるとは限らない。

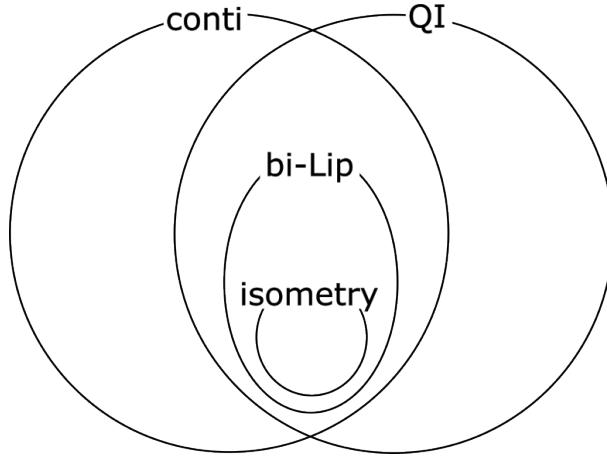


図 1: 各写像の関係

**Remark.** 等長埋め込み同士の合成写像は等長埋め込みであり、bilipschitz 埋め込み同士の合成写像は bilipschitz 埋め込みであり、擬等長埋め込み同士の合成は擬等長埋め込みである。

定数倍と定数分のズレを許してしまうという、擬等長の“大雑把な視点”が幾何学的群論では大切なのだが、その擬等長に関する定義について、それと同値なものを紹介する。

**Proposition 2.5.** Definition 2.4 の 擬等長写像における二条件は、以下の二条件と同値。

- [1]  $f$  が擬等長埋め込みである。

- [2] ある定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在し、任意の  $y \in Y$  に対してある  $x \in X$  をとると、 $d_Y(f(x), y) \leq c$  を満たす。

*Proof.* Definition 2.4 を満たすならば [1] , [2] を満たすことの証明 :

[2] を示せばよい.  $f: X \rightarrow Y$  に対し, 定義より, ある擬等長写像  $g: Y \rightarrow X$  が存在し,  $f \circ g$  が  $\text{id}_Y$  と finite distance である. 任意の  $y \in Y$  をとる.  $x := g(y)$  と定めることで,

$$d_Y(f(x), y) = d_Y((f \circ g)(y), y) \leq c$$

を満たす.

[1] , [2] を満たすならば Definition 2.4 を満たすことの証明 :

仮定より, ある定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  が存在し,

(1) 任意の  $x, x' \in X$  に対し,  $\frac{1}{c}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') + c$ .

(2) 任意の  $y \in Y$  に対しある  $x \in X$  が存在し,  $d_Y(f(x), y) \leq c$ .

(2) と選択公理を用いて,  $y \in Y$  に対し,  $d_Y(f(x_y), y) \leq c$  を満たすような  $x_y \in X$  を選ぶ. 写像  $g: Y \rightarrow X$  を,  $y \mapsto x_y$  と定めると,  $g \circ f$ ,  $f \circ g$  ともに finite distance となる. 実際に, 任意の  $x \in X$  に対して,

$$\begin{aligned} d_X((g \circ f)(x), x) &= d_X(x_{f(x)}, x) \\ &\leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + c^2 \\ &\leq c \cdot c + c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

となる.  $f \circ g$  に関しても, 任意の  $y \in Y$  に対して,

$$d_Y((f \circ g)(y), y) = d_Y(f(x_y), y) \leq c$$

が成立する.  $\square$

**Definition 2.6.** Proposition 2.5 の条件 [2] を  $f$  が満たすとき,  $f$  は **quasi-dense image** をもつという.

## 2.2 Quasi-Isometry of Groups

2.1 節では距離空間同士を大雑把にみることについて述べたが, 本節では群を距離空間に拡張し, 群に対しても定義を行う.

以下,  $G$  を群として,  $S$  をその生成系とする.

**Definition 2.7.** 生成系  $S$  による, 群  $G$  上の **word metric** とは,  $d_S: G \times G \rightarrow \mathbb{N}$ ,

$$d_S(g, h) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}, g^{-1}h = s_1s_2 \cdots s_n\}$$

であり, これは  $G$  上の距離関数である.

**Example.** 群  $G$  の生成系  $S$  からなる  $\text{Cay}(G, S)$  において, グラフ上の頂点間の距離とはまさに  $d_S$  のことである ( $\text{Cay}(G, S)$  の定義は Definition A.1 を参照されたい).

**Definition 2.8.**  $G$  を有限生成群としたとき,  $G$  が距離空間  $X$  に **bilipschitz equivalent** であるとは,  $G$  のある有限な生成系  $S$  がとれ, 距離空間  $(G, d_S)$  と  $X$  が bilipschitz equivalent であることをいう. また,  $G$  が  $X$  に **擬等長 (quasi-isometric)** であるとは, ある有限な生成系  $S$  がとれ, 距離空間  $(G, d_S)$  と  $X$  が, quasi-isometric であることをいう.

**Remark.** 群  $G$  とその生成系  $S$  からできる距離空間  $(G, d_S)$  では,  $G$  が有限生成であること,  $S$  を有限としていることに注意.

**Example.** 群  $\mathbb{Z}^2$  とその生成系  $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$  からなる距離空間  $(\mathbb{Z}^2, d_S)$  は, 距離空間  $\mathbb{R}^2$  と擬等長である.

群に組み込む距離関数を word metric にした場合, その定義からこれは生成系に大きく依存するため, 距離空間と群が同じ構造を持つかどうかの議論が難しくなる. しかし, 擬等長という“大雑把な視点”で見ると, 生成系に依らずに議論することが可能である.

**Proposition 2.9.**  $S, S'$  をともに群  $G$  の有限な生成系としたとき、距離空間  $(G, d_S)$  が距離空間  $(X, d_X)$  と  $f$  で bilipschitz equivalent ならば、 $(G, d_{S'})$  と  $(X, d_X)$  も  $f$  で bilipschitz equivalent である。

*Proof.*  $f: (X, d_X) \rightarrow (G, d_S)$ ,  $f': (X, d_X) \rightarrow (G, d_{S'})$  を共に bilipschitz equivalence とすると、可換図式

$$\begin{array}{ccc} & & (G, d_S) \\ f \swarrow & & \downarrow \text{id} \\ (X, d_X) & \xrightarrow{f'} & (G, d_{S'}) \end{array}$$

より、 $f' = f \circ \text{id} = f$  が成立する。bilipschitz equivalence の合成写像は bilipschitz equivalence なので、あとは  $\text{id}$  が bilipschitz equivalence であることを示せばよい。 $c$  を、

$$c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(e, s)$$

とすると、 $S$  は有限なのでこれは有限値である。 $g, h \in G$  をとり、 $d_S(g, h) = n$  とし、 $g^{-1}h = s_1s_2 \cdots s_{n-1}s_n$  ( $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n \in S \cup S^{-1}$ ) と表せられるとする。このとき、 $S'$  上での  $g, h$  の word metric は、

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, s_1s_2 \cdots s_n h) \\ &\leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + \cdots + d_{S'}(gs_1s_2 \cdots s_{n-1}, gs_1s_2 \cdots s_{n-1}s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_{n-1}) + d_{S'}(e, s_n) \\ &\leq c + c + \cdots + c + c \\ &= cn = cd_S(g, h) \end{aligned}$$

となり、 $d_{S'}(g, h) \leq cd_S(g, h)$  が得られる。同様の議論を  $S, S'$  を逆にしてすれば  $d_S(g, h) \leq cd_{S'}(g, h)$  が得られる。 $\text{id}$  は全単射であることも含めると、 $\text{id}$  は bilipschitz equivalence である。□

**Remark.** Definition 2.8 と Proposition 2.9 より、距離空間に bilipschitz equivalent な群 (quasi-isometric な群) は、その (有限) 生成系の取り方に依らない。

### 2.3 Quasi-Geodesic

本節では、1章でも記した、“よい”距離空間について述べる。

**Definition 2.10.** 距離空間  $X$  上の長さ  $L \in \mathbb{R}_{>0}$  の 測地線 (geodesic) とは、 $[0, L] \subset \mathbb{R}$  から  $X$  への等長埋め込み、 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$  のことである。また、 $X$  が 測地的 (geodesic) であるとは、任意の  $x, x' \in X$  において、 $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(L) = x'$  となるような 等長埋め込み  $\gamma$  がとれるときをいう。

**Example.**  $\mathbb{R}^n$  は測地的だが、 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  は測地的でない。実際、 $(1, 0)$  と  $(-1, 0)$  間の距離は 2 だが、この測地線は原点を通ってしまう。一般に、 $\mathbb{R}^n$  上の凸集合は測地的である。

**Definition 2.11.** 距離空間  $X$  上の  $(c, b)$ -擬測地線 (( $c, b$ )-quasi-geodesic) とは、 $\gamma: [0, L] \subset \mathbb{R}$  から  $X$  への  $(c, b)$ -擬等長埋め込み、 $\gamma: [0, L] \rightarrow X$  のことである。また、 $X$  が  $(c, b)$ -擬測地的 (( $c, b$ )-quasi-geodesic) であるとは、任意の  $x, x' \in X$  において、 $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(L) = x'$  となるような  $(c, b)$ -擬等長埋め込み、 $\gamma$  がとれるときをいう。また、 $(c, b)$  を省略し、単に擬測地線や擬測地的ともいう。

**Example.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  は、 $(1, \epsilon)$ -測地的である ( $\epsilon > 0$ )。これは、原点中心で十分小さい半径の円で原点を迂回すれば、擬測地線が得られるからである。

## 3 主定理

本論文の主定理となる、Švarc-Milnor Lemma と、それに関連する主張について紹介する。

### 3.1 Švarc-Milnor Lemma

**Theorem 3.1.**  $G$  を群とし,  $(c, b)$ -測地的な距離空間  $(X, d)$  上に等長な群作用があるとする. もしある部分集合  $B \subset X$  が存在し,

- (a)  $\text{diam}B := \sup_{x, y \in B} d(x, y) < \infty$ ,
- (b)  $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$ ,
- (c) 集合  $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$  が有限.

を満たすならば,

- (1)  $S$  は  $G$  の有限生成系である.
- (2) 任意の  $x \in X$  に対して定まる写像  $\varphi: G \rightarrow X ; g \mapsto gx$  によって,  $G$  と  $X$  は擬等長.

ただし,  $B' := \{x \in X \mid y \in X, d_X(x, y) \leq 2b\}$  と定める.

*Proof.* (1) の証明 :

$g \in G$  を任意にとる.  $x \in B$  としたとき,  $X$  の仮定から  $\gamma(0) = x, \gamma(L) = g \cdot x$  なる  $(c, b)$ -擬測地線  $\gamma$  が存在する.  $[0, L]$  をおおよそ  $n := \lceil L \cdot c/b \rceil$  等分した点列を  $t_i (0 \leq i \leq n)$  とする. 厳密には,

$$t_i := i \cdot b/c \quad (0 \leq i \leq n-1), \quad t_n := L$$

と定める. この点列と対応するように,  $\text{Im}\gamma$  に点列  $x_i \in X (0 \leq i \leq n)$  をとる. つまり,

$$x_i := \gamma(t_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

である.  $B$  の仮定より, 各  $x_i$  に対して,  $x_i \in g_i \cdot B$  となるような  $g_i \in G$  を選ぶことができる (図 2 参照).

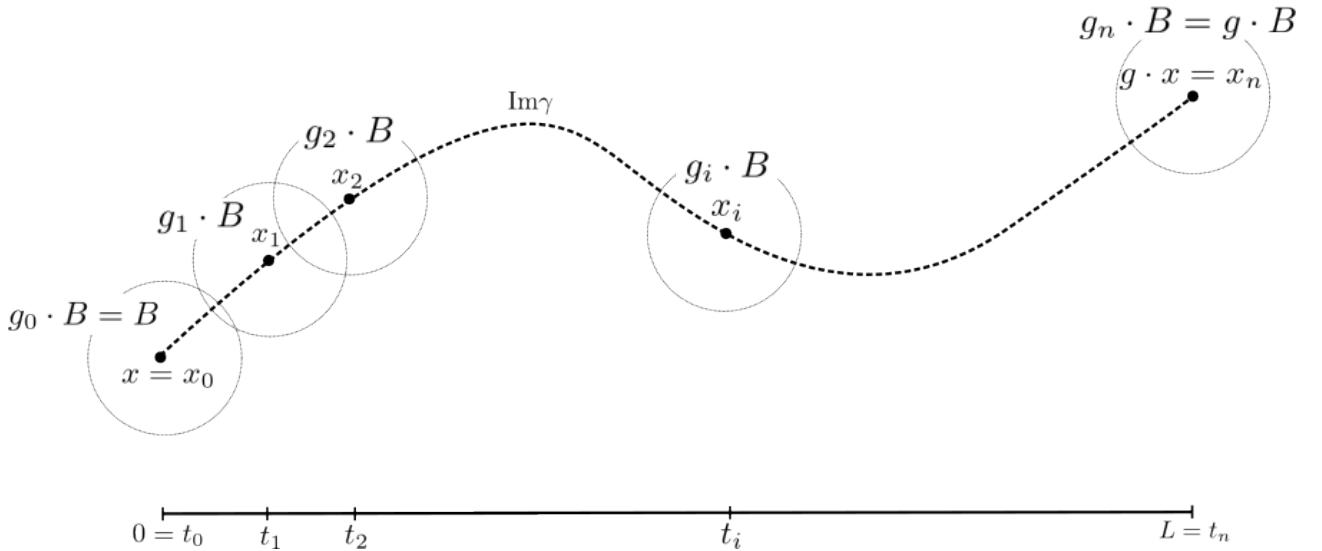


図 2:  $t_i, x_i, g_i$  の関係

ここで,  $g_0 = e, g_n = g$  としておく.  $\gamma$  は  $(c, b)$ -擬測地線 なので, 不等式

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq c|t_{i-1} - t_i| + b = c \cdot b/c + b = 2b$$

を得る. 等長に群作用をしていることに注意すると,

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2b\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る.  $x_i \in g_i \cdot B \subset g_i \cdot B'$  でもあるので,

$$\begin{aligned} g_i \cdot B' \cap g_{i-1} \cdot B' &\neq \emptyset, \\ (g_{i-1}^{-1} \cdot g_i) \cdot B' \cap B' &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

よって,  $(g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$  であり,  $s_i := (g_{i-1})^{-1} \cdot g_i \in S$  とすれば,  $g$  は  $g = g_n = e(g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2) \cdots (g_{n-1}^{-1}g_n) = es_1s_2 \cdots s_n$  と  $S$  の元で表すことができる.

(2) の証明 :

$B$  の仮定より, 任意の  $x \in X$  は  $B$  に含まれていると考えてよい ( $x \in g \cdot B$  となる  $g \cdot B$  を改めて  $B$  とすればよいいため).

[1] 写像  $\varphi(g) = g \cdot x$  に関して, quasi-dense image であること.

[2] 擬等長埋め込みであること.

の二点を示す.

[1]  $\varphi$  が quasi-dense image であること :

任意の  $x' \in X$  に関して,  $x' \in g' \cdot B$  となる  $g' \in G$  がとれるため,

$$d_X(x', \varphi(g')) = d_X(x', g' \cdot x) \leq \text{diam}(g' \cdot B) = \text{diam}B.$$

仮定より  $\text{diam}B$  は有限なので,  $\varphi$  が quasi-dense image であることが示された.

[2]  $\varphi$  が 擬等長埋め込みであること :

ある定数  $C > 0, B \geq 0$  が存在し, 任意の  $g, h \in G$  に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(g, h) - B \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq Cd_S(g, h) + B.$$

であることを示せばいいが, word metric の定義と  $G$  が等長に作用していることから,

$$\begin{aligned} d_S(g, h) &= d_S(e, g^{-1}h) \\ d_X(\varphi(g), \varphi(h)) &= d_X(g \cdot x, h \cdot x) \\ &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &= d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \end{aligned}$$

が成立する. 以上より, ある定数  $C > 0, B \geq 0$  が存在し, 任意の  $g \in G$  に対して,

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$$

が成立することを示せばよい.

[2-1]  $\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g))$  が成立すること :

任意に  $g \in G$  をとる. このとき,  $g$  に対して proof of (1) と同様の議論により  $s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$  がとれ,  $g = s_1s_2 \cdots s_n$  と表せられる. このときの  $\gamma$  を用いて,

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(\gamma(0), \gamma(L)) \\ &\geq \frac{1}{c}L - b \\ &\geq \frac{1}{c} \frac{b(n-1)}{c} - b = \frac{b}{c^2}n - b - \frac{b}{c^2} \\ &\geq \frac{1}{c^2}d_S(e, g) - b - \frac{b}{c^2} \end{aligned}$$

とすることで、下からの不等式が得られる。

[2-2]  $d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$  が成立すること：

任意に  $g \in G$  をとる。 $d_S(e, g) = n$  とし、 $g = s_1 s_2 \cdots s_n$  と表せられるとする。このとき、各  $s_i \in S \cup S^{-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対して、 $S$  の定義  $B' \cap s_i \cdot B' \neq \emptyset$  より、

$$d_X(x, s_i \cdot x) \leq \text{diam}B + 2b + \text{diam}B = 2(\text{diam}B + b)$$

が成立する(図3参照)。

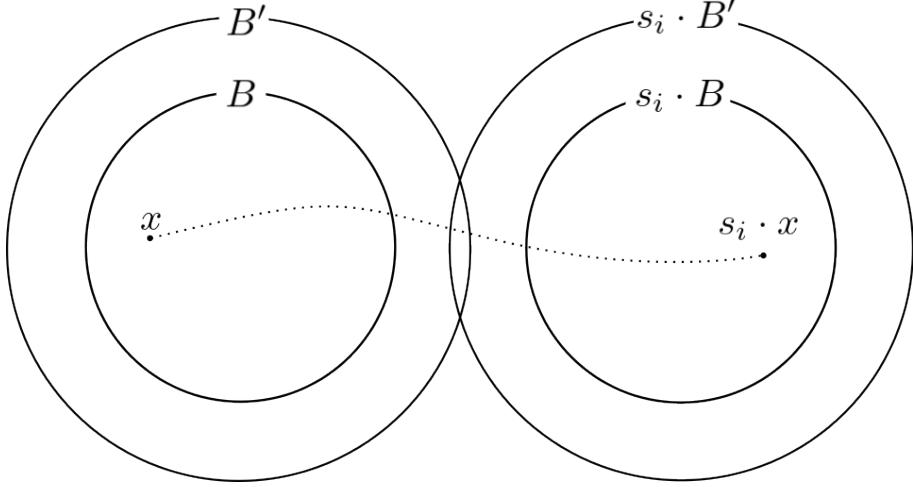


図3:  $d_X(x, s_i \cdot x)$  の不等式

これより、

$$\begin{aligned} d_X(\varphi(e), \varphi(g)) &= d_X(x, g \cdot x) = d_X(x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &\leq d_X(x, s_1 x) + d_X(s_1 x, s_1 s_2 x) + \cdots + d_X(s_1 s_2 \cdots s_{n-1} x, s_1 s_2 \cdots s_n x) \\ &= d_X(x, s_1 x) + d_X(x, s_2 x) + \cdots + d_X(x, s_n x) \\ &\leq 2(\text{diam}B + b) \cdot n \\ &= 2(\text{diam}B + b) \cdot d_S(e, g) \end{aligned}$$

を得る。  $\square$

**Example.** 通常の距離が入った距離空間  $\mathbb{R}^2$  に群  $\mathbb{Z}^2$  が、

$$\begin{aligned} (1, 0) \cdot (x, y) &= (x + 2, y) \\ (0, 1) \cdot (x, y) &= (x, y + 2) \end{aligned}$$

からなる作用をしているとする。作用の仕方からこれは等長な群作用である。 $\mathbb{R}^2$  を  $(1, 1/2)$ -擬測地的空間とし、部分集合  $B \subset \mathbb{R}^2$  を、

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

とすれば、これは Theorem3.1 の条件 (a),(b) を満たす。 $S \subset \mathbb{Z}^2$  は、

$$\begin{aligned} S &= \{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

となり、条件 (c) を満たす。よって、Theorem 3.1 より、 $\mathbb{Z}^2$  は  $S$  によって生成され、 $\mathbb{R}^2$  と  $\mathbb{Z}^2$  は擬等長である。

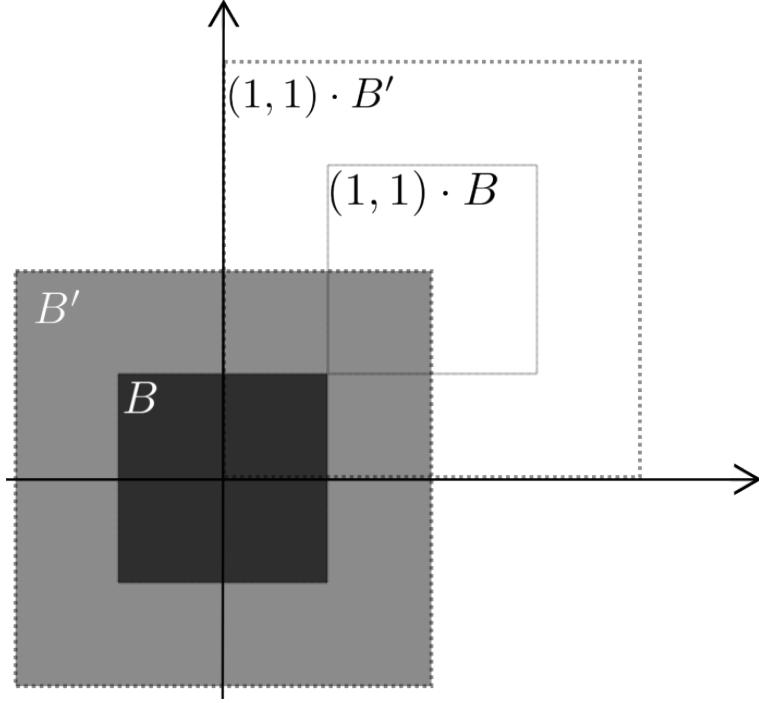


図 4:  $B, B'$  の図

### 3.2 Švarc-Milnor Lemma の拡張

Theorem 3.1 は、群作用が等長でなくても成立する。つまり、以下のとおりである。

**Theorem 3.2.** Theorem 3.1 は、群  $G$  が距離空間  $X$  に等長な群作用だけでなく、擬等長な群作用としても成立つ。

証明は、以下の Lemma 3.3–3.5 より与えられる。

**Lemma 3.3.** Theorem 3.1 の証明において、群作用が  $(c', b')$ -擬等長な作用でも  $x_i \in g_{i-1} \cdot B'$  が成立する。ただし、 $B' := \{x \in X \mid y \in X, d_X(x, y) \leq 2bc' + b'\}$  とする。

*Proof.* 群作用が  $(c', b')$ -擬等長なので、

$$\frac{1}{c'} d_X(g \cdot x, g \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq d_X(x, y)$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} x_i &\in \{x \in X \mid y \in g_{i-1} \cdot B, d_X(x, y) \leq 2b\} \\ &\subset \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, \frac{1}{c'} d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) - \frac{b'}{c'} \leq 2b\} \\ &= \{x \in X \mid g_{i-1}^{-1} \cdot y \in B, d_X(g_{i-1}^{-1} \cdot x, g_{i-1}^{-1} \cdot y) \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot \{x' \in X \mid y' \in B, d_X(x', y') \leq 2bc' + b'\} \\ &= g_{i-1} \cdot B' \end{aligned}$$

を得る。  $\square$

**Lemma 3.4.** Theorem 3.1 の証明において、群作用が  $(c', b')$ -擬等長な作用でも  $\text{diam}(g' \cdot B) < \infty$  である。

*Proof.* 群作用が  $(c', b')$ -擬等長なので、

$$d_X(g \cdot x, g \cdot y) \leq c' d_X(x, y) + b'$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}\text{diam}(g' \cdot B) &= \sup_{x,y \in g' \cdot B} d_X(x,y) \\ &= \sup_{x',y' \in B} d_X(g \cdot x', g \cdot y') \\ &\leq \sup_{x',y' \in B} c'd_X(x',y') + b' \\ &\leq c'\text{diam}B + b'\end{aligned}$$

となり、 $\text{diam}(g' \cdot B)$  は有限値。  $\square$

**Lemma 3.5.** Theorem 3.1 の証明において、群作用が  $(c', b')$ -擬等長な作用でも、定数  $C > 0, B \geq 0$  があり、任意の  $g, h \in G$  に関する不等式

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B$$

が成立するならば、定数  $C' > 0, B' \geq 0$  があり、任意の  $g, h \in G$  に関する不等式

$$\frac{1}{C'}d_S(g, h) - B' \leq d_X(\varphi(g), \varphi(h)) \leq C'd_S(g, h) + B'$$

が成立する。

*Proof.* word metric の定義から、

$$d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1}h) \quad (1)$$

が成立し、群作用が  $(c', b')$ -擬等長なことから、

$$\begin{aligned}d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\leq c'd_X(g \cdot x, h \cdot x) + c'b' = c'd_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b'\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) &= d_X(x, (g^{-1}h) \cdot x) \\ &\geq \frac{1}{c'}d_X(g \cdot x, h \cdot x) - \frac{b'}{c'} = \frac{1}{c'}d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'}\end{aligned} \quad (3)$$

が成立する。仮定より、以下の不等式

$$\frac{1}{C}d_S(e, g) - B \leq d_X(\varphi(e), \varphi(g)) \leq Cd_S(e, g) + B \quad (4)$$

が成立するので、これらの不等式を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}d_S(g, h) - B &= \frac{1}{C}d_S(e, g^{-1}h) - B \quad (1) \text{ より} \\ &\leq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \quad (4) \text{ より} \\ &\leq c'd_X(\varphi(g), \varphi(h)) + c'b' \quad (2) \text{ より} \\ \frac{1}{Cc'}d_S(g, h) - \frac{B + c'b'}{c'} &\leq d_X(\varphi(g), \varphi(h))\end{aligned}$$

が得られ、もう一方も

$$\begin{aligned}Cd_S(g, h) + B &= Cd_S(e, g^{-1}h) + B \quad (1) \text{ より} \\ &\geq d_X(\varphi(e), \varphi(g^{-1}h)) \quad (4) \text{ より} \\ &\geq \frac{1}{c'}d_X(\varphi(g), \varphi(h)) - \frac{b'}{c'} \quad (3) \text{ より} \\ Cc'd_S(g, h) + (Bc' + b') &\geq d_X(\varphi(g), \varphi(h))\end{aligned}$$

が得られ、目的の不等式が成立する。  $\square$

## 4 主定理 位相空間論 版

Theorem 3.1 の主張を、位相空間論の視点で言い換えた主張が存在する。その主張に必要な用語の定義を 4.1 節で行った後、4.2 節にて述べる。

### 4.1 準備

**Definition 4.1.** 距離空間  $(X, d)$  が **proper** であるとは、任意の  $x \in X$ ,  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  に関して、集合

$$\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

が常にコンパクトになることをいう。

**Example.** ユークリッド空間は proper である一方、 $\mathbb{R}$  の部分空間として  $(0, 1)$  に相対位相を入れた空間は、 $(0, 1)$  自身は有界閉集合だがコンパクトでない。また、一つの頂点から無限本の辺が伸びているようなグラフは proper でない。

**Definition 4.2.** 群  $G$  が位相空間  $X$  に作用しているとする。この作用が **properly discontinuous** であるとは、任意のコンパクトな集合  $K \subset X$  に関して、

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることをさす。

**Example.**  $\mathbb{R}$  に  $\mathbb{Z}$  が加法で群作用をしているとき、この作用は properly discontinuous である。しかし、 $\mathbb{Q}$  が加法で群作用をしている場合、この作用は properly discontinuous ではない。

**Definition 4.3.** 群  $G$  が位相空間  $X$  に作用しているとする。この作用が **余コンパクト (cocompact)** であるとは、商空間  $G \backslash X$  がコンパクトであることをいう。言い換えると、あるコンパクトな集合  $K \subset X$  が存在し、

$$X = \bigcup_{g \in G} g \cdot K$$

を満たす。

**Example.**  $\mathbb{R}$  に  $\mathbb{Z}$  や  $\mathbb{Q}$  が加法で群作用をしているとき、この作用は余コンパクトである。一方、 $\mathbb{R}^2$  に  $\mathbb{Z}$  が作用する場合、これは余コンパクトでない（商空間は  $S^1 \times \mathbb{R}$  と同相であり、これはコンパクトでないため）。

### 4.2 Švarc-Milnor Lemma (位相空間論 版)

**Theorem 4.4.** 群  $G$  が、proper かつ擬測地的な距離空間  $(X, d)$  に、等長に作用しているとする。この群作用が properly discontinuous かつ余コンパクトであれば、 $G$  は有限生成であり、 $G$  と  $X$  は擬等長である。

*Proof.*  $X$  は擬測地的であるので、Thm 3.1 の仮定を満足するような  $B \subset X$  をみつければよい。以下、 $X$  は  $(1, b)$ -quasi-geodesic であるとする ( $b > 0$ )。自然な射影  $\pi: X \rightarrow G \backslash X$  は開写像であるので、開球  $B_1(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$  の像  $\pi(B_1(x))$  は  $G \backslash X$  上の開集合である。また、 $\pi(X) = G \backslash X$  より、 $\{\pi(B_1(x))\}_{x \in X}$  は  $G \backslash X$  の開被覆である。 $G \backslash X$  のコンパクト性より、これらから有限個  $\{\pi(B_1(x_k))\}_{1 \leq k \leq n}$  の開被覆で  $G \backslash X$  を覆うことができる。各開球  $B_1(x_k)$  の閉包  $\overline{B_1(x_k)}$  を考え、

$$B = \bigcup_{k=1}^n \overline{B_1(x_k)}$$

とすれば、

- (a)  $\text{diam } B < \infty$ .

$$(b) \bigcup_{g \in G} g \cdot B = X.$$

をみたす. また,  $B$  はコンパクト集合である ( $X$  の proper 性から各  $\overline{B_1(x_k)}$  はコンパクトであり,  $B$  はそれらの有限和のため). 同様の議論として,  $B' = \{x \in X \mid y \in B, d(x, y) \leq 2b\}$  とすれば, これはコンパクト集合である. そして群作用が properly discontinuous であることから,

$$\{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$$

は有限である (c).  $\square$

### 4.3 応用例

この定理の応用例として, 以下のような主張がある.

**Corollary 4.5.**  $M$  をコンパクトで境界のないリーマン多様体とする. その普遍被覆  $\widetilde{M}$  に, 基本群  $\pi_1(M)$  が被覆変換で群作用をしているとき,  $\pi_1(M)$  は有限生成であり,  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$  によって定まる写像

$$\pi_1(M) \rightarrow \widetilde{M}; g \mapsto g \cdot \tilde{x}$$

は擬等長写像である.

*Proof.*  $\widetilde{M}$  が proper かつ測地的な距離空間であること:

群作用が等長であること:

群作用が余コンパクトであること:

被覆空間の定義より,  $\pi_1(M) \backslash \widetilde{M}$  は  $M$  と同相である. 仮定より  $M$  はコンパクトなので,  $\pi_1(M) \backslash \widetilde{M}$  もそうである.

群作用が properly discontinuous であること:

任意のコンパクトな集合  $K \subset \widetilde{M}$  をとる. この  $K$  の十分小さい有限個の開被覆  $\{\tilde{U}_k\}_{1 \leq k \leq n}$  に関して, 被覆変換の一意性により  $g \cdot \tilde{U}_k \cap \tilde{U}_l$  を満たすような  $g \in G$  は,  $(k, l)$  のペアに対し高々一個である. したがって,

$$g \cdot K \cap K \subset g \cdot \left( \bigcup_{k=1}^n \tilde{U}_k \right) \cap \left( \bigcup_{k=1}^n \tilde{U}_k \right)$$

が空でないような  $g \in G$  は有限個である.  $\square$

## A 付録

ここでは幾何学的群論の分野にて基本的な概念となる Cayley グラフ や, その周辺の事項について述べる.

### A.1 Cayley Graphs

以下,  $G$  を群として,  $S$  をその生成系とする.

**Definition A.1.** 生成系  $S$  による群  $G$  の Cayley graph とは, 以下のようなグラフである. このグラフを  $\text{Cay}(G, S)$  と表記する.

(1) 頂点集合を  $G$  とする.

(2) 邻集合を  $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) \setminus \{e\}\}$  とする.

**Theorem A.2.**  $F$  が自由群であり,  $S$  がその生成系の場合,  $\text{Cay}(F, S)$  は tree である.

**Theorem A.3.**  $\text{Cay}(G, S)$  が tree であり, 任意の  $s, s' \in S$  に対して  $s \cdot s' \neq e$  のとき,  $G$  は自由群である.

## A.2 Group Actions

以下,  $G$  を群,  $X$  を集合とする.

**Definition A.4.** 群  $G$  が集合  $X$  上に作用する (group action) とは, 各  $g \in G$  に対して  $X$  から  $X$  への全単射な写像が存在し, その写像も  $g$  と表すとき,

- (1) 全ての  $g, h \in G$  と  $x \in X$  に対し,  $h(g(x)) = (hg)(x)$ .
- (2)  $e(x) = x$ .

が成立することである. ただし,  $e$  は単位元である.

**Remark.**  $g(x)$  を  $g \cdot x$  と表記する. また, 部分集合  $A \subset X$  に対し,  $g \cdot A := \{g \cdot x \mid x \in A\}$  とする.

**Definition A.5.** 群  $G$  による集合  $X$  への群作用が自由 (free) であるとは, 任意の  $g \in G \setminus \{e\}$  と任意の  $x \in X$  に対して,  $g \cdot x \neq x$  が成り立つときをいう.

**Definition A.6.**  $(V, E), (V', E')$  をグラフとする.  $f: (V, E) \rightarrow (V', E')$  が グラフ準同型 (graph homomorphism) であるとは, 二条件

- (1)  $f: V \rightarrow V'$  が写像.
- (2)  $\{v, v'\} \in E \Rightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$ .

が成り立つときをいう. また,  $f$  が グラフ同型 (graph isomorphism) であるとは, 二条件

- (1)  $f: V \rightarrow V$  が全単射.
- (2)  $\{v, v'\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(v')\} \in E'$ .

が成り立つときをいう.

**Definition A.7.** 群  $G$  がグラフ  $(V, E)$  にグラフ同型に作用しているとする. この作用が 自由 (free) であるとは, 任意の  $g \in G \setminus \{e\}$  に対して, 以下の二条件

- (1) 任意の  $v \in V$  に対して,  $g(v) \neq v$  が成り立つ.
- (2) 任意の  $v, v' \in V$  に対して,  $\{g(v), g(v')\} \neq \{v, v'\}$  が成り立つ.

が成立することをいう.

**Proposition A.8.** 群  $G$  の生成系を  $S$  とする.  $\text{Cay}(G, S)$  への左群作用が free であることと, 位数が 2 である元が  $S$  に存在しないことは同値.

**Definition A.9.** 群  $G$  が集合  $X$  に群作用しているとする. 元  $x \in X$  における, この群作用による軌道 (orbit) とは, 集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

のことである. また, この群作用による  $X$  の 商集合 (quotient) とは, 集合

$$G \setminus X := \{G \cdot x \mid x \in X\} \subset 2^X$$

のことである.

**Definition A.10.** 群  $G$  が集合  $X$  に群作用しているとする. 元  $x \in X$  における, この群作用による安定化群 (stabiliser group) とは, 群

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$$

のことである. また, 元  $g \in G$  における 不動点? 固定点? (fixed set) とは, 集合

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$$

のことである.

## A.3 Covering Spaces