

Nelineárne najmenšie štvorce (GPS lokalizácia)

Tím: Jednotné programovacie družstvo a.s.

Lucia Ganajová, DAV - 0.25

Tuan Dávid Nguyen Van, DAV - 0.25

Jakub Novotný, DAV - 0.25

Marek Šugár, DAV - 0.25

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského v Bratislave

2025

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| A | Odvodenie Jacobiho matice systému | 4 |
| B | Vizualizácie účelových funkcií | 6 |
| C | Optimalizácia $\ F(x)\ _2^2$ a interpretácia výsledkov | 8 |
| D | Vizualizácia priebehu $\ F(x)\ _2^2$ a parametra μ^k | 11 |
| E | Riešenie úlohy v \mathbb{R}^3 | 13 |
| | E.1 Odvodenie Jacobiho matice pre prípad v \mathbb{R}^3 | 13 |
| | E.2 Optimalizácia $\ F(x)\ _2^2$ | 14 |
| F | Lokalizácia zariadenia | 16 |
| G | Nadstavba k pôvodnej úlohe | 18 |
| | G.1 Konvergenčná mapa pre prípad \mathbb{R}^2 | 18 |
| | G.2 Generalizácia optimalizačného algoritmu v \mathbb{R}^2 | 19 |
| | G.3 Generalizácia optimalizačného algoritmu v \mathbb{R}^3 | 22 |
| | G.4 Vizualizácia trajektórie hľadania riešenia v \mathbb{R}^3 | 23 |
| | G.5 Vytvorenie novej úlohy - lokalizácia známej polohy | 24 |

Uvedený report je výsledkom riešenia semestrálneho projektu na predmete **Metódy voľnej optimalizácie** v letnom semestri akademického roka 2024/2025. Predmetom projektu je využitie optimalizačných metód najmenších štvorcov pri spracovaní zjednodušeného GPS signálu, resp. pri lokalizácii GPS zariadenia vzhľadom na získané dáta z niekoľkých lokalizačných satelitov.

Riešenie problému je založené na dvoch vzájomne podobných situáciách. V prvej situácii uvažujeme zjednodušenú situáciu v \mathbb{R}^2 , kedy z dokopy piatich vysieláčov sú k dispozícii hodnoty nepresných vzdialeností zariadenia od vysieláča. V kapitolách **A** – **D** je postupne priblížený matematický aparát potrebný k riešeniu úlohy a výsledky optimalizácie **Levenberg-Marquardtovým** algoritmom. Kapitoly pokrývajú riešenia úloh *A-D*

Získané poznatky zo zjednodušenej formy úlohy sú následne aplikované pri riešení zovšeobecnenej formy úlohy v \mathbb{R}^3 , kde je situácia zovšeobecnená do formy lokalizácie zariadenia vzhľadom na celú zemeguľu. Tejto problematike sú venované kapitoly **E** a **F**. V tejto časti je situácia transformovaná do trojrozmerných Karteziánskych súradníc, avšak je implementovaná aj konverzia súradníc do eliptických, využitím viacerých kartografických modelov rozmerov zemegule, za účelom formátovania výsledkov do geograficky vhodnejšieho súradnicového systému. Kapitoly pokrývajú riešenia úloh *E* a *F*.

Poznatky z predchádzajúcich kapitol sú následne rozšírené do rôznych modifikácií úlohy. Nosným prvkom nadstavby projektu sú zovšeobecnenia optimalizačných algoritmov pre situácie s premenným počtom lokalizačných satelitov v \mathbb{R}^2 aj \mathbb{R}^3 . Takto koncipované algoritmy poslúžili na analýzu špecifických situácií, v ktorých je analyzovaná odchýlka v lokalizáciách, v ktorých nie je k dispozícii signál z jedného, resp. viacerých lokalizačných satelitov. Okrem iného, využité algoritmy v **Kapitole F** sú v nadstavbe rozšírené, vďaka tomu je možné presne tvoriť Karteziánske dátové vstupy pre lokalizáciu predom daných súradníc vo formáte zemepisnej dĺžky a šírky. Táto možnosť je čitateľovi prezentovaná lokalizáciou presného stredu Eiffelovej veže v Paríži.

v Bratislave
máj 2025
autori

V nasledujúcich kapitolách sa postupne zameriame na aspekty riešenia úlohy v zjednodušenej dvoj-rozmernej forme. Nech $x \in \mathbb{R}^2$ je premenná, ktorá udáva pozíciu GPS zariadenia a $a_i \in \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, 5\}$ sú známe polohy GPS vysielateľov. Každý z vysielateľov dodáva informáciu o nameranej vzdialenosti $d_i \in \mathbb{R}$ medzi x a a_i . Nameraná hodnota predstavuje nepresnú vzdialenosť:

$$d_i = \|x - a_i\|_2 + v_i, \quad (1)$$

kde v_i predstavuje odchýlku merania. Poznajúc namerané hodnoty d_i a presné polohy vysielateľov a_i dostávame formu optimalizačnej úlohy

$$\min \sum_{i=1}^5 (\|x - a_i\|_2 - d_i)^2. \quad (2)$$

Kapitola A

Odvedenie Jacobiho matice systému

Označme jednotlivé štvorce obsiahnuté v sume 2 ako $f_i = \|x - a_i\|_2 - d_i$. Pre kompaktnejšiu reprezentáciu optimalizačného problému je možné čiastkové funkcie f_i zjednotiť ako

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Pre ďalšie kroky optimalizácie je vhodné vyjadriť Jacobiho maticu F , v reporte využijeme pre ňu označenie $DF(x)$, čo zodpovedá hodnote Jacobiho matice v bode x , pre ktorú platí:

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1^T \\ \nabla f_2^T \\ \vdots \\ \nabla f_5^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Odvoďme parciálnu deriváciu pre všeobecnú f_i . Predpis funkcie, najmä l_2 normu, je vhodnejšie vyjadriť vo forme súčtu a odmocniny, vďaka čomu budú zrejmejšie kroky derivovania. Teda f_i je možné rozpísať ako:

$$f_i = \sqrt{(x_1 - a_i^1)^2 + (x_2 - a_i^2)^2} - d_i, \quad (\text{A.3})$$

kde a_i^1 a a_i^2 predstavujú prvú a druhú zložku $a_i \in \mathbb{R}^2$. Pre parciálnu deriváciu teda platí:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{2x_j - 2a_i^j}{2\sqrt{(x_1 - a_i^1)^2 + (x_2 - a_i^2)^2}} = \frac{x_j - a_i^j}{\|x - a_i\|_2}. \quad (\text{A.4})$$

Dosádzajúc (A.4) do (A.2) dostávame plné znenie Jacobiho matice:

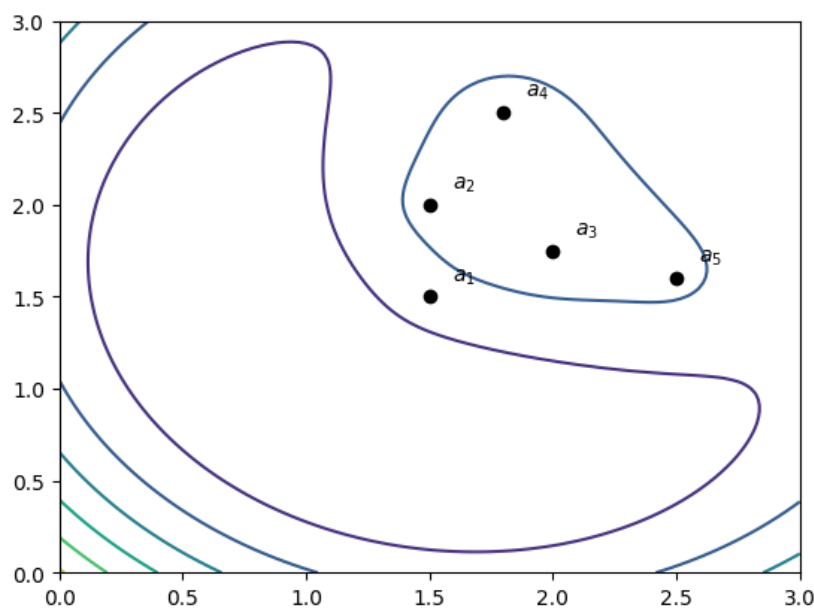
$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - a_1^1}{\|x - a_1\|_2} & \frac{x_2 - a_1^2}{\|x - a_1\|_2} \\ \frac{x_1 - a_2^1}{\|x - a_2\|_2} & \frac{x_2 - a_2^2}{\|x - a_2\|_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_1 - a_5^1}{\|x - a_5\|_2} & \frac{x_2 - a_5^2}{\|x - a_5\|_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Je vhodné si povšimnúť nedefinovateľnosť $DF(x)$, resp. čiastkových ∇f_i . Problematickým v prvkoch matice $DF(x)$ je ich menovateľ. Pre ktorýkoľvek menovateľ matice platí, vychádzajúc z definície normy, $\|x - a_i\|_2 \geq 0$ a práve situácia kedy $\|x - a_i\|_2 = 0$ je problematická. Táto situácia nastáva v prípade, že $x - a_i$ je nulový vektor, čiže v prípade, že $x = a_i$. Teda Jacobiho matica $DF(x)$ nie je definovaná $\forall x \in \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$, čiže pre x v pozícii niektorého z piatich vysieláčov.

Kapitola B

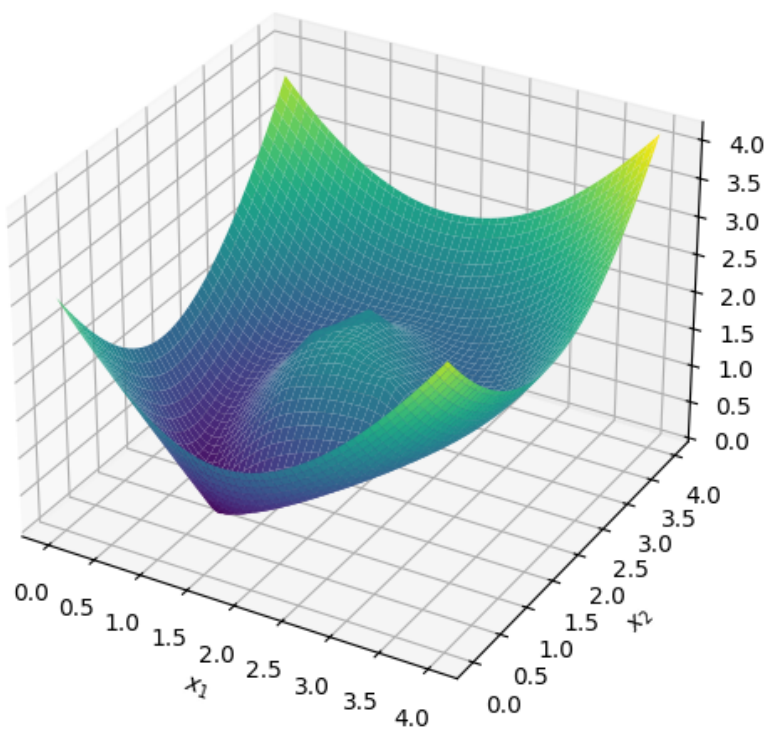
Vizualizácie účelových funkcií

Pre lepšiu predstavu o priebehu účelových funkcií je vhodné vizualizovať ich priebeh. Na Obr. B.1 sú vyobrazené vrstevnice funkcie $\|F(x)\|_2^2$ na $[0, 3] \times [0, 3]$ spolu so všetkými vysielacími, ktoré sú reprezentované ako čierne body.



Obr. B.1: Vrstevnice funkcie $\|F(x)\|_2^2$ na priestore $[0, 3] \times [0, 3]$ s vyznačenými polohami vysieláčov a_i

Obdobná vizualizácia pre $\|F(x)\|_2$, avšak v trojrozmernom priestore, je vyobrazená na Obr. B.2.



Obr. B.2: Vizualizácia $\|F(x)\|_2$ v trojrozmernom priestore

Kapitola C

Optimalizácia $\|F(x)\|_2^2$ a interpretácia výsledkov

Pre uvedený optimalizačný problém s účelovou funkciou 2 a premennou x je prirodzené uvažovať medzi dvomi optimalizačnými algoritmami – **Gauss-Newtonov** a **Levenberg-Marquardtov**. Pre potenciálny problém nedefinovateľnosti niektorých prvkov Jacobiho matice, ktorý bol bližšie rozobratý v Kapitole A, je vhodnejšie zvoliť práve Levenberg-Marquardtov algoritmus, ktorý nutne nevyžaduje plnú hodnotu Jacobiho matice $DF(x^k)$ v jednotlivých iteráciách $k \in \mathbb{N}$.

Kompletná implementácia algoritmu je uvedená v priloženom `.ipynb` súbore.

Pri optimalizácii uvedenou metódou je vhodné optimalizovať s rôznymi štartovacími bodmi x^0 . V súlade so zadáním projektu boli využité tri rôzne štartovacie body $x^0 = (1.8, 3.5)^T$, $x^0 = (2.2, 3.5)^T$ a $x^0 = (3.0, 1.5)^T$. Algoritmom optimalizované hodnoty premennej x , zaokrúhlené na 4 desatinné miesta, sú uvedené v Tabuľke C.1 nižšie.

| Štartovací bod | Optimalizované x^* |
|----------------------|----------------------------|
| $x^0 = (1.8, 3.5)^T$ | $x^* = (1.0724, 0.893)^T$ |
| $x^0 = (2.2, 3.5)^T$ | $x^* = (2.8602, 2.5101)^T$ |
| $x^0 = (3, 1.5)^T$ | $x^* = (1.0724, 0.893)^T$ |

Tabuľka C.1: *Prehľad výsledkov optimalizácie pre rôzne štartovacie body x^0*

Je možné pozorovať, že pre bod $(2.2, 3.5)^T$ boli optimalizáciou dosiahnuté odlišné hodnoty premennej x^* , ako pre zvyšné dva štartovacie body. Pre body $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$ boli dosiahnuté, zaokrúhlené, identické hodnoty. Vhodnosť jednotlivých štartovacích bodov možno vyšetriť analyzovaním hodnoty $\|F(x^*)\|_2^2$ pre všetky získané x^* . Získané hodnoty sú uvedené v Tabuľke C.2 nižšie (hodnoty sú opätovne zaokrúhlené na 4 desatinné miesta):

| Štartovací bod | $\ F(x^*)\ _2^2$ |
|----------------------|------------------|
| $x^0 = (1.8, 3.5)^T$ | 0.0006 |
| $x^0 = (2.2, 3.5)^T$ | 1.8275 |
| $x^0 = (3, 1.5)^T$ | 0.0006 |

Tabuľka C.2: *Optimalizované hodnoty účelovej funkcie $\|F(x)\|_2^2$*

Je možné pozorovať markantný rozdiel v hodnotách účelovej funkcie $\|F(x)\|_2^2$. Zatiaľ čo pri hodnotách $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$ pozorujeme zaokrúhlene identické hodnoty, pri druhej hodnote štartovacieho bodu $(2.2, 3.5)^T$ pozorujeme rádovo vyššiu hodnotu (konkrétne je daná hodnota približne 3000-násobkom hodnôt pre $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$). Berúc do úvahy zadané kritérium, numericky vhodnejšími sú hodnoty štartovacích bodov $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$.

Akousi "skúškou správnosti" je overenie zachovania jednotlivých vzdialeností $\|x^* - a_i\|_2 \approx d_i$. Berúc do úvahy odchýlku, ktorá bola vyjadrená v zadaní a v rovnici 1, nie sú hodnoty d_i pre všetky x^* presné. Presné percentuálne hodnoty relatívnych odchýlok optimalizovaných d_i od zadaných hodnôt sú uvedené v Tabuľke C.3 nižšie.

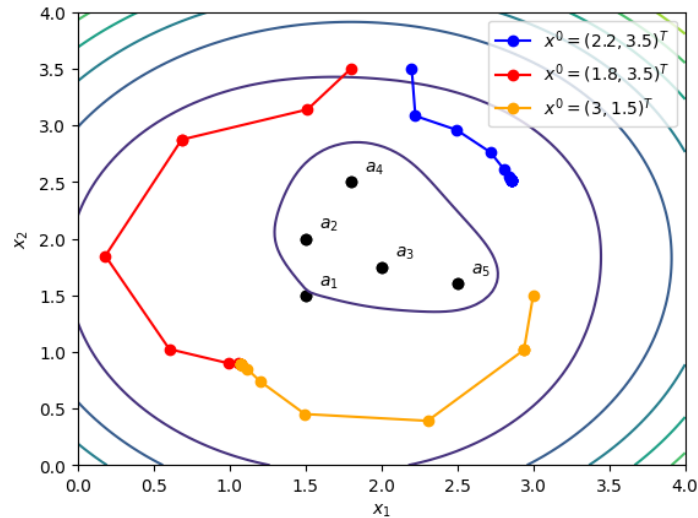
| Štartovací bod | Δd_1 | Δd_2 | Δd_3 | Δd_4 | Δd_5 |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $x^0 = (1.8, 3.5)^T$ | 1 % | 1,1 % | 1,03 % | 0,8 % | 0,43 % |
| $x^0 = (2.2, 3.5)^T$ | 125,9 % | 21,06 % | 8,16 % | 39,41 % | 38,82 % |
| $x^0 = (3, 1.5)^T$ | 1 % | 1,1 % | 1,03 % | 0,8 % | 0,43 % |

Tabuľka C.3: Prehľad relatívnych percentuálnych odchýlok medzi zadanými a optimalizovanými vzdialenosťami d_i

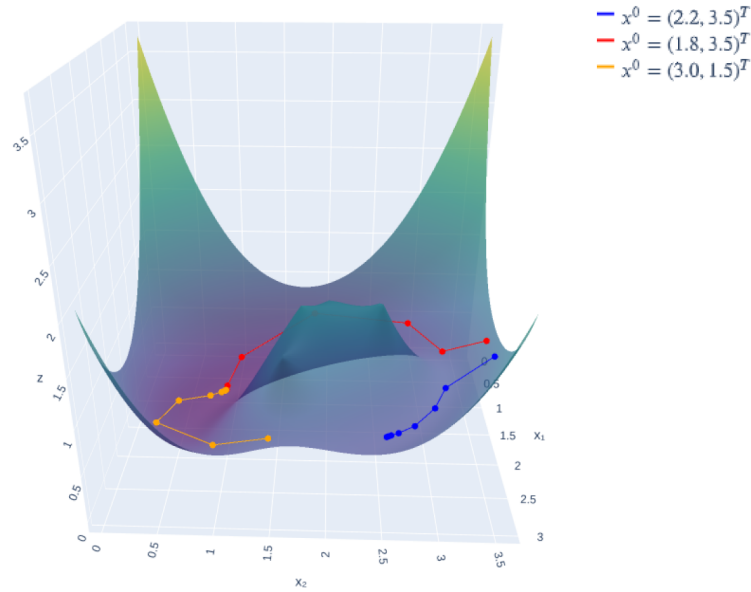
Z Tabuľky C.3 sú zrejme obrovské odchýlky pre štartovací bod $x^0 = (2.2, 3.5)^T$ od všetkých vy-sielačov a_i . Vzhľadom na toto kritérium je opätovne zrejماً vhodnosť štartovacích bodov $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$.

Berúc do úvahy všetky výsledky analýz, ako najvhodnejšie štartovacie body je možné považovať body $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$. Nevhodným bodom je $(2.2, 3.5)^T$, pri ktorom zrejme došlo k falošnej kon-vergencii a nesprávnej lokalizácii zariadenia.

Vhodnou vizualizáciou behov optimalizačného algoritmu je zakreslenie postupností jednotlivých bodov x^k do vrstevníc účelovej funkcie $\|F(x)\|_2^2$, resp. do jej priebehu v \mathbb{R}^3 . Takéto vizualizácie sú na Obr. C.1 a C.2.



Obr. C.1: Vizualizácia trajektórií bodov x^k jednotlivých optimalizačných behov (2D)



Obr. C.2: Vizualizácia trajektórií bodov x^k jednotlivých optimalizačných behov (3D)

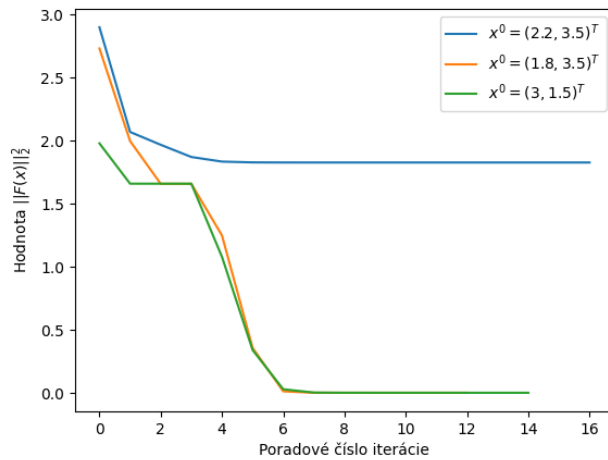
V prípadoch nami označených vhodných štartovacích bodov, je možné pozorovať konvergenciu k numericky približne rovnakému bodu, zatiaľ čo pri $(2.2, 3.5)^T$ pozorujeme koniec optimalizácie v bode relatívne vzdialenom od pravdepodobnej pozície zariadenia x . Čo stojí za spomenutie, je taktiež zaujímavé správanie hodnoty kroku pre štartovací bod $(2.2, 3.5)^T$. Jednotlivé kroky ku koncu optimalizácie sú obzvlášť malé v porovnaní s tými, ktoré mali zvyšné štartovacie body pred termináciou optimalizačného algoritmu. Táto skutočnosť indikuje, že algoritmus iteroval k pravdepodobne lokálnemu minimu funkcie. Táto skutočnosť vychádza z **heuristickej** vlastnosti Levenberg-Marquardtovho algoritmu.

Túto skutočnosť podporuje aj okolnosť, že algoritmus bol v tomto prípade ukončený terminačnou podmienkou pre gradient – konkrétne $2g_k < \epsilon$, v našom prípade $\epsilon = 10^{-6}$. Algoritmus v prvom prípade teda narazil na lokálne, avšak nie globálne minimum funkcie, to znamená, že optimalizácia vrátila "falošný" výsledok.

Kapitola D

Vizualizácia priebehu $\|F(x)\|_2^2$ a parametra μ^k

Obr. D.1 vizualizuje priebeh hodnoty $\|F(x^k)\|_2^2$ vzhľadom na poradové číslo jednotlivých iterácií.



Obr. D.1: Závislosť hodnoty účelovej funkcie $\|F(x^k)\|_2^2$ v jednotlivých iteráciách (k)

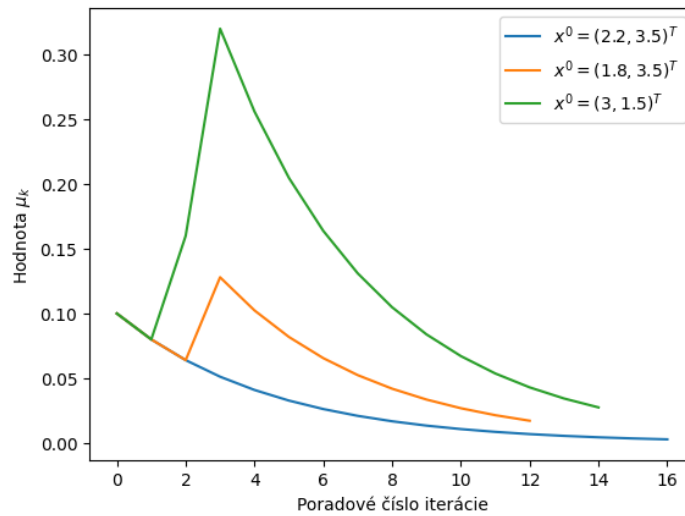
V prvom rade je vhodné podotknúť, že vo všetkých troch prípadoch optimalizácie došlo k terminácii algoritmu po splnení aspoň jednej z dvoch terminačných podmienok a nie po naplnení maximálneho počtu iterácií, ktorý bol vo všetkých troch prípadoch $k_{MAX} = 1000$. Naše dva vhodné štartovacie body boli zoptimalizované po 12 iteráciách pre $(1.8, 3.5)^T$, 14 iteráciách pre $(3, 1.5)^T$ a zvyšný štartovací bod po 16 iteráciách. Vo všetkých troch prípadoch sa jedná o relatívne nízky, výpočtovo a numericky vhodný počet iterácií.

Zaujímavé je správanie účelovej funkcie. Je zrejma nerastúca monotónnosť vo všetkých prípadoch. Priebehy pre $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$ sú veľmi podobné s menšou odchýlkou práve na začiatku optimalizácie, medzi iteráciami 0 a 2. Následne pozorujeme nepatrné odchýlky od jednotlivých hodnôt $\|F(x^k)\|_2^2$. Pre prvý štartovací bod pozorujeme podobný priebeh na počiatku optimalizácie, avšak od iterácie $k \approx 4$ je možné pozorovať takmer konštantný priebeh funkcie až po konečnú minimalizovanú hodnotu $\|F(x^*)\|_2^2 \approx 1,8275$.

Táto skutočnosť indikuje jednak už vyslovenú skutočnosť, že algoritmus bol terminovaný iba v lokálnom minime $\|F(x)\|_2^2$ a taktiež aj to, v súlade s pozorovaním veľmi malých krokov pred koncom optimalizácie, že kroky optimalizácie od $k \approx 4$ nijako markantne nezmenili hodnotu účelovej funkcie, čiže dochádzalo iba k akémusi korigovaniu pozície nájdeného minima v numericky zanedbateľných hodnotách, aby optimalizácia splnila tolerančnú konštantu ϵ .

Podobné správanie možno pozorovať aj pri štartovacích bodoch $(1.8, 3.5)^T$ a $(3, 1.5)^T$. V týchto prípadoch optimalizácia dokonvergovala k relatívne numericky prijateľnému riešeniu už pri $k \approx 7$ iterácií. V tomto prípade už k približne globálnemu minimu.

Obdobné správanie možno pozorovať aj pri analýze priebehu hodnoty parametra μ^k v závislosti od poradového čísla iterácie. Túto závislosť vizualizuje Obr. D.2.



Obr. D.2: Závislosť hodnoty parametra μ^k od poradového čísla iterácie (k)

Pri optimalizácii so štartovacím bodom $(2.2, 3.5)^T$ pozorujeme kontinuálny pokles hodnoty μ^k – v algoritme je konštantou zníženia μ^{k+1} vzhľadom na μ^k číslo 0,8. Tento kontinuálny pokles indikuje, že počas celej optimalizácie bola hodnota $\|F(x^{k+1})\|_2^2$ vždy nižšia ako $\|F(x^k)\|_2^2$, to znamená, že optimalizácia neustále nachádzala vždy lepšie hodnoty premennej x .

Naopak, rozdielne správanie je možné pozorovať pri zvyšných dvoch štartovacích bodoch. Pri $(1.8, 3.5)^T$ pozorujeme nárast (zdvojnásobenie) hodnoty μ^k pri druhej aj tretej iterácii. Od štvrtej vrátane pozorujeme kontinuálny pokles hodnoty μ^k . Tento priebeh znamená, že pri istej súvislej podmnožine iterácií optimalizácia nachádzala lokálne horšie, prinajlepšom identické, hodnoty x vzhľadom na minimalizáciu.

Obdobné správanie pozorujeme aj pri štartovacom bode $(3, 1.5)^T$, pri ktorom dochádzalo k nárastu μ^k dokonca dlhšie – medzi prvou a treťou iteráciou. V oboch prípadoch sa preukazuje, že lokálne menej vhodný výsledok nemá vplyv globálne na celú optimalizáciu a opačne, kontinuálne približovanie k lepšej a lepšej hodnote premennej nutne neznamená v konečnom dôsledku úspešnú optimalizáciu.

Kapitola E

Riešenie úlohy v \mathbb{R}^3

Na základe získaných poznatkov v predchádzajúcich kapitolách je vhodné získané poznatky aplikovať na situácie, ktoré sú prakticky viacej uchopiteľné a viac podobné reálnym praktickým situáciám. Na tomto princípe je založené rozšírenie úlohy do troch rozmerov.

Optimalizačná situácia je založená na tom základe, že do lokalizácie zariadenia vstupuje aj čas získania, resp. spracovania signálu z niekoľkých satelitov.

Premennými v tejto modifikácii pôvodnej úlohy sú Karteziánske súradnice x_i , kde $i \in \{1, 2, 3\}$ a čas získania signálu t . Súradnice x_i predstavujú polohu lokalizovaného zariadenia a čas t predstavuje čas zachytenia GPS signálu zo satelitov.

Vzdialenosť zariadenia od i -teho satelitu je možné analyticky vyjadriť ako $\|x - s_i\|_2$, resp. alternatívne pomocou rýchlosti svetla $0.047(t - t_i)$, kde hodnota 0.047 predstavuje rýchlosť svetla $c \approx 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ preškálovanú na jednotku $R.(ms)^{-1}$, kde $R \approx 6371 km$ predstavuje polomer Zeme a t_i predstavuje čas odoslania signálu z i -teho satelitu.

Pomocou ekvivalentne definovaných analytických vzdialeností je možné uviesť, že situácia, kde disponujeme signálnymi dátami práve zo 4 satelitov, vedie na optimalizačnú úlohu:

$$\min \sum_{i=1}^4 (\|x - s_i\|_2 - 0.047(t - t_i))^2 \quad (E.1)$$

Účelová funkcia E.1 je problémom najmenších štvorcov a na jej riešenie bude využitá opätovne **Levenberg-Marquardtova** metóda optimalizácie, obdobne ako v predchádzajúcom príklade v \mathbb{R}^2 .

E.1 Odvodenie Jacobiho matice pre prípad v \mathbb{R}^3

Berúc do úvahy prítomnosť hneď štyroch neznámych veličín v optimalizačnej úlohe a štyroch satelitov, označme $f_i = \|x - s_i\|_2 - 0.047(t - t_i)$ zodpovedajúcu čiastkovú funkciu v E.1, a teda E.1 je možné ekvivalentne definovať ako:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \implies \min \|F(x)\|_2^2 \quad (E.2)$$

Pre celkovú Jacobiho maticu funkcie F platí:

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Pre jednotlivé parciálne derivácie platí:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{x_j - s_i^j}{\|x - s_i\|_2} \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0.047 \quad (\text{E.5})$$

kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $j \in \{1, 2, 3\}$. Tu podotkneme, že pre E.4 vychádzame z podobného postupu ako pri A.4

Využíjúc E.4, E.5 v E.3 dostávame podrobné znenie Jacobiho matice $DF(x)$ ako:

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - s_1^1}{\|x - s_1\|_2} & \frac{x_2 - s_1^2}{\|x - s_1\|_2} & \frac{x_3 - s_1^3}{\|x - s_1\|_2} & 0.047 \\ \frac{x_1 - s_2^1}{\|x - s_2\|_2} & \frac{x_2 - s_2^2}{\|x - s_2\|_2} & \frac{x_3 - s_2^3}{\|x - s_2\|_2} & 0.047 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_1 - s_4^1}{\|x - s_4\|_2} & \frac{x_2 - s_4^2}{\|x - s_4\|_2} & \frac{x_3 - s_4^3}{\|x - s_4\|_2} & 0.047 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

E.2 Optimalizácia $\|F(x)\|_2^2$

Preukazuje sa, že optimalizačná situácia je veľmi podobná tej v predchádzajúcich kapitolách. Konkrétnejšie, samotná implementácia Levenberg-Marquardtovho algoritmu nie je natoľko rozdielna od tej v \mathbb{R}^2 . Jediným rozdielom je prepočet matice $H_k = DF(x)^T DF(x) + \mu_k I$. V dvojrozmernom prípade je identita $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ v súčasnom trojrozmernom prípade platí $I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Táto skutočnosť vychádza z rozmerov Jacobiho matic, resp. súčinu $DF(x)^T DF(x)$ v oboch prípadoch.

Parametre $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ a $\mu_0 = 0.1$ ostávajú zachované z predchádzajúcej optimalizácie v \mathbb{R}^2 . Boli zvolené viaceré štartovacie body, optimalizované hodnoty (x, t) , zaokrúhlené na 5 desatinných miest, pre zvolené štartovacie body sú vyobrazené v Tabuľke E.1:

| Štartovací bod | (x, t) | $\ F(x)\ _2^2$ | $\ x\ _2$ |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|-----------|
| $x^0 = (3000, -30000, 30000, 39)^T$ | $(0.6665, 0.6665, 0.3325, 49.9904)^T$ | 2.9460×10^{-11} | 0.99946 |
| $x^0 = (5000, 3000, 30000, 30)^T$ | $(1.3169, 1.3169, 0.7904, 43.127)^T$ | 1.7870×10^{-14} | 2.0232 |
| $x^0 = (0, 0, 0, 50)^T$ | $(0.6664, 0.6664, 0.3324, 49.9923)^T$ | 5.3775×10^{-10} | 0.99932 |
| $x^0 = (1, 11, 111, 1111)^T$ | $(1.3169, 1.3169, 0.7904, 43.127)^T$ | 7.21×10^{-12} | 2.0232 |
| $x^0 = (300, -2000, 300, 2)^T$ | $(0.6664, 0.6664, 0.3324, 49.9922)^T$ | 4.758×10^{-10} | 0.99933 |

Tabuľka E.1: Výsledky optimalizácie pre rôzne štartovacie body

Z dovedna piatich rôznych štartovacích bodov boli experimentálne získané dva numericky podobné výsledky (x, t) . Označme $L_1 = (0.6664, 0.6664, 0.3324, 49.9922)^T$ a $L_2 = (1.3169, 1.3169, 0.7904, 43.127)^T$. V Tabuľke E.1 je možné pozorovať, že v oboch prípadoch je hodnota účelovej funkcie $\|F(x)\|_2^2$ približne

rovná 0, v oboch prípadoch pozorujeme hodnoty $\approx 10^{-10}$. Rozhodujúcim faktorom sa preukazuje byť norma $\|x\|_2$.

Vzhľadom na použitú jednotku v optimalizácii, ktorou je $R \approx 6371\text{km}$, čiže polomer Zeme, je vhodné považovať za platné tie výsledky optimalizácie, pre ktoré platí, že $\|x\|_2 \approx 1$, pretože v takom prípade x predstavuje pozíciu na povrchu Zeme v nadmorskej výške približne 0.

Výsledky, ktoré túto podmienku nespĺňajú, nie je avšak vhodné považovať za "*nesprávne*". V takom prípade sa pravdepodobne jedná o pozíciu vo vyššej nadmorskej výške. Vzhľadom na zadanie úlohy je však pre nás vhodné považovať za platné len tie výsledky, pre ktoré $\|x\|_2 \approx 1$. V konkrétnom prípade túto podmienku spĺňa x v L_1 . Iba doplníme, že ak by sme považovali za platný výsledok aj x v L_2 , nadmorská výška tejto pozície by bola $\approx 6528\text{ km}$, čo predstavuje výšku niekoľkonásobne prevyšujúcu priemernú výšku Medzinárodnej vesmírnej stanice v priestore voľného vesmíru.

Kapitola F

Lokalizácia zariadenia

Získané lokalizované dáta L_1 sú preškáľované do jednotiek polomeru Zeme R . Takéto preškáľovanie, ktorého účelom bolo vyhnúť sa problémom s počítačovou aritmetikou, ktoré mohli vzniknúť pri optimalizácii dát využitím rýchlosti svetla $c \approx 3 \times 10^8 m.s^{-1}$, je nevhodné v zmysle geografickej, resp. kartografickej lokalizácie. Konvenciou je použitie jednotiek **zemepisnej šírky** a **zemepisnej dĺžky** v stupňoch.

Transformácia dát z násobkov R do zemepisnej dĺžky a šírky bolo vykonané pomocou zadaného iteračného algoritmu:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \arctg\left(\frac{x_3}{p(1-e)}\right) \\ v_0 &= \frac{a}{\sqrt{1-\sin^2(\psi_0)}} \\ \psi_i &= \arctg\left(\frac{x_3+ev_{i-1}\sin(\psi_{i-1})}{p}\right) \\ v_i &= \frac{a}{\sqrt{1-e\sin^2(\psi_i)}},\end{aligned}$$

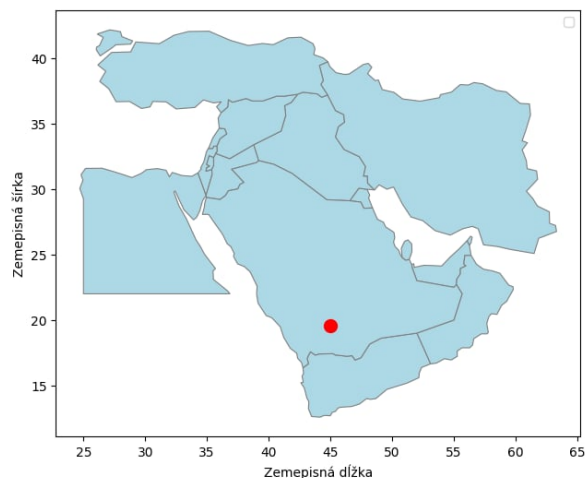
kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e = \frac{a^2-b^2}{a^2}$, $p = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ a ψ_n predstavuje **zemepisnú šírku**. **Zemepisná dĺžka** je daná ako $\arctg(\frac{x_1}{x_2})$. **Nadmorská výška** je daná po iteračnom algoritme ako $\frac{p}{\cos(\psi)-v_n}$. Iba spomenieme, že v iteračnom predpise x_i , kde $i \in \{1, 2, 3\}$ predstavujú zložky optimalizovaného x .

V iteračnom predpise a predstavuje tzv. **rovníkový polomer** a b predstavuje **polárny polomer**. Tieto rozmery jednoznačne definujú rotačný elipsoid, ktorým Zem je. Predmetom viacerých výskumov je spresnenie týchto dvoch hodnôt a jestvuje viacero rôznych modelov, ktoré jednoznačne definujú tieto dve hodnoty. Pri lokalizácii zariadenia bol zvolený, vzhľadom na zadanie projektu, model podľa **Airyho**, kde $a = 6377563.396$ m a $b = 6356256.909$ m.

Lokalizáciou L_1 vyššie definovaným algoritmom pre $n = 3$ získavame výsledok:

Zemepisná šírka $\approx 19.551^\circ$
Zemepisná dĺžka $\approx 44.998^\circ$
Nadmorská výška ≈ -1.1 km

Lokalizáciou zariadenia zisťujeme, že zariadenie sa nachádza na území **Saudskej Arábie** v blízkosti približne tristotisícového mesta Abha. Na Obr. F.1 je lokalita zariadenia vykreslená na mape Blízkeho východu.



Obr. F.1: Lokalizácia zariadenia v kontexte regiónu Blízkeho východu pomocou modelu *Airy, 1830*

Okrem samotnej lokalizácie s konkrétnym modelom *Airy, 1830* boli bližšie analyzované aj výsledky lokalizácie pomocou iných dostupných modelov. Hodnoty, ktorými je definovaný konkrétny model, boli vkladané do iteračného algoritmu ako hodnoty **rovníkového** a **polárneho polomeru**. Hodnoty lokalizácie zariadenia pomocou piatich vybraných modelov uvádzame v Tabuľke F.1 nižšie.

| Model referenčného elipsoidu | Zemepisná dĺžka | Zemepisná šírka |
|------------------------------|-----------------|-----------------|
| <i>Maupertuis, 1738</i> | 44.99888° | 19.62098° |
| <i>Everest, 1830</i> | 44.99888° | 19.55094° |
| <i>Krassovsky, 1940</i> | 44.99888° | 19.55197° |
| <i>Global ITRS</i> | 44.99888° | 19.55198° |
| <i>Global GPS</i> | 44.99888° | 19.55198° |

Tabuľka F.1: Porovnanie súradníc pre rôzne modely referenčného elipsoidu

Vďaka získaným dátam je možné pozorovať zanedbateľné odchýlky v lokalizovaní zariadení podľa rôznych modelov. Najvyššiu odchýlku, od jednak ostatných vybraných a od výsledku získaného pomocou modelu *Airy, 1830*, dosahuje model *Maupertuis, 1738*. Chronologicky, približne od roku 1940, pozorujeme numericky zanedbateľné odchýlky, ktoré možno v praktických účeloch považovať za irelevantné.

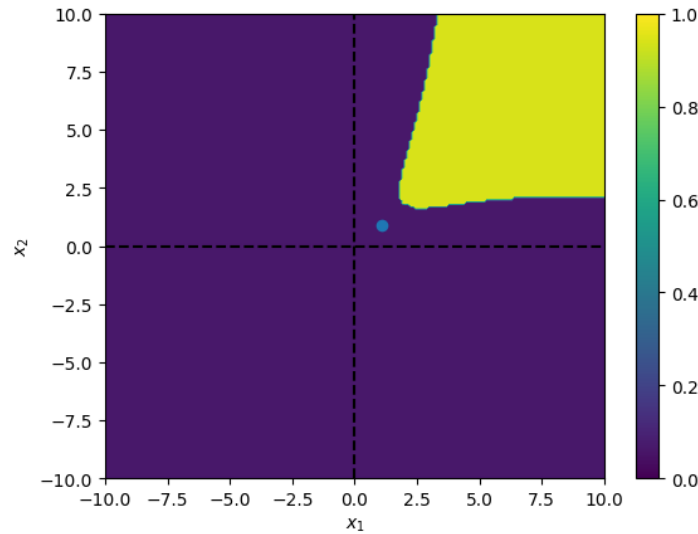
Kapitola G

Nadstavba k pôvodnej úlohe

G.1 Konvergenčná mapa pre prípad \mathbb{R}^2

V kapitolách, ktoré pojednávajú o optimalizácii v \mathbb{R}^2 sme detailne narazili na problém falošnej konverencie. V Kapitole C sme pre rôzne štartovacie body disponovali rôznymi lokalizáciami zariadenia a následnou interpretáciou rôznych pomocných vizualizácií a vzťahov bola pojednávaná vhodnosť rôznych štartovacích bodov.

Táto problematika nás bližšie naviedla na rozšírenie tejto úlohy do takej podoby, že vhodnosť štartovacích bodov dokážeme experimentálne posúdiť a vizualizovať ako funkciu v rovine \mathbb{R}^2 . Vizualizácia optimalizovanej funkčnej hodnoty $\|F(x^*)\|_2^2$ v závislosti od štartovacieho bodu $(x_1, x_2)^T$ je na Obr. G.1.



Obr. G.1: Závislosť optimalizovanej hodnoty $\|F(x)\|_2^2$ od štartovacieho bodu optimalizácie $(x_1, x_2)^T$

Na Obr. G.1 sa preukazuje, že drvivá väčšina, až 85.04% optimalizácií pre štartovacie body z $[-10, 10] \times [-10, 10]$ konverguje ku skutočnému minimu, $[1.0723, 0.893]^T$, účelovej funkcie 2. Zvyšných

14.96% konverguje k falošnému minimu $[2.8602, 2.5101]^T$.

Podobné vizualizácie, resp. analýzy, dozaista dokážu podporiť správne rozhodnutia pri optimalizáciách v iných situáciách – s inými súradnicami satelitov, inými vzdialenosťami od satelitov alebo dokonca pri inom počte satelitov.

Obdobnú vizualizáciu a ďalšiu analýzu by bolo určite prospešné vytvoriť aj pre prípad lokalizácie zariadenia v \mathbb{R}^3 . Problematická je avšak percepčia takej vizualizácie – pre štartovacie body x^0 v tomto prípade platí $x^0 \in \mathbb{R}^4$, čo by bolo naozaj obtiažne prípadnú vizualizáciu úspešne interpretovať, dokonca aj vytvoriť. V tejto problematike avšak existujú rôzne metódy na redukciu rozmerov dát, ktoré by pre túto situáciu boli pravdepodobne prospešné *napr. PCA, LDA*.

G.2 Generalizácia optimalizačného algoritmu v \mathbb{R}^2

Doterajšie implementácie optimalizačných algoritmov boli založené na poznatku predom známých počtov jednotlivých parametrov – počet vysieláčov, resp. satelitov. Takáto situácia prináša zaujímavú modifikáciu úlohy, akési zovšeobecnenie implementácie optimalizácie, kde jedným zo vstupných parametrov algoritmu je aj počet vysieláčov, resp. satelitov.

Takáto implementácia má vysoký praktický význam, keďže v skutočnej, resp. našej približnej, inžinierskej praxi lokalizácia býva nezriedka vykonávaná jednak variabilným počtom satelitov a taktiež pri vyššom počte satelitov (*podľa informácií federálnych orgánov USA to je až 31*). Ďalším dôvodom, ktorý nás doviedol k danej nadstavbe, je možnosť experimentovania so situáciou, kedy umelo nevyužíjeme signál z niekoľkých rôznych satelitov a porovnáme navzájom výsledky.

Ako bolo opísané vyššie, koncepcia implementácie úlohy v \mathbb{R}^2 je založená na tom, že máme daných n vysieláčov so súradnicami a_i a ku každému z nich prislúchajúce vzdialenosti d_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré predstavujú nepresnú nameranú vzdialenosť zariadenia od i -teho vysieláča. Formalizovane, obdobne ako pôvodné znenie úlohy, kde $n = 5$, máme účelovú funkciu:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i(x)^2, \quad (\text{G.1})$$

kde $f_i = \|x - a_i\|_2 - d_i$ a $x \in \mathbb{R}^2$ predstavuje presnú súradnicu hľadaného GPS zariadenia. Úlohu vo všeobecnosti formulujeme ako:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{G.2})$$

resp. ako v pôvodnom znení:

$$\min \|F(x)\|_2^2 \quad (\text{G.3})$$

Kompletná implementácia opísanej situácie v \mathbb{R}^2 je k dispozícii, spoločne s technickou dokumentáciou kódu, v priloženom *.ipynb* kóde. Zamerajme sa tentoraz na opísanú situáciu, kedy lokalizujeme zariadenie z "poškodených" dát, teda v situáciách, kedy chýbajú dáta z niektorých vysielateľov. Rozšírime experiment na zadaných dátach, teda pracujeme s dátami zo zadania úloh A-D.

Označme ako "presný" výsledok optimalizácie x^* , ktorý bol získaný optimalizáciou úlohy pre $n = 5$ so štartovacím bodom $x^0 = (1.8, 3.5)^T$. Uvažujme situáciu, kedy nie je k dispozícii signál iba z jedného vysielateľa. Výsledky tejto situácie sú uvedené v Tabuľke G.1 nižšie, kde x_{OPT} predstavuje optimalizované x v danej situácii. Výsledky situácií, v ktorých chýba viacero vysielateľov, sú uvedené v priloženom súbore *2D_missing_signal.txt*.

| Chýbajúci vysielateľ | x_{OPT} | $\ x^* - x_{OPT}\ _2$ |
|----------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. | $(3.01616, 2.79814)^T$ | 2.72174 |
| 2. | $(1.06003, 0.90897)^T$ | 0.02019 |
| 3. | $(1.06337, 0.89618)^T$ | 0.00927 |
| 4. | $(1.08096, 0.88063)^T$ | 0.01505 |
| 5. | $(1.10024, 0.87797)^T$ | 0.03166 |

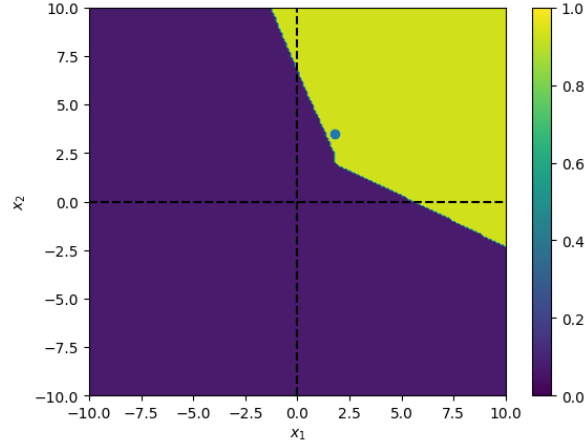
Tabuľka G.1: Porovnanie odchýlok lokalizácie pri strate signálu z jedného vysielateľa

Z Tabuľky G.1 je možné zistiť, že pri väčšine alternácií (2.-5.) experimentu, nájdené polohy zariadení nie sú obzvlášť vzdialené od pôvodne lokalizovaného zariadenia, keď sme disponovali plným signálom zo všetkých piatich satelitov. Odchýlky sú rádovo v stotínach. Najpresnejším výsledkom disponujeme pri chýbajúcom signále z 3. vysielateľa, naopak druhú najvyššiu odchýlku dostávame pri chýbajúcom signále z 5. vysielateľa.

Najpresnejší výsledok, dostávame v situácii, kedy nedisponujeme signálom z 1. vysielateľa. V tomto prípade je odchýlka rovná viac ako 2.7., čo je v kontexte úlohy a vzhľadom na ostatné experimenty, značná odchýlka.

Bližšie nazrieme na vierohodnosť riešenia pomocou hodnoty účelovej funkcie $\|F(x)\|_2^2$, kde F je definované vzhľadom na všeobecné n , teda podľa G.2. Je totiž možné, že minimalizácia našla falošné minimum optimalizácie a teda lokalizácia nie je korektná.

Hodnota $\|F(x)\|_2^2$ pre chýbajúci 1. vysielateľ je $\|F(x)\|_2^2 \approx 0.64727$. Podobne ako pri Obr. G.1 je vhodné vyhotoviť podobnú konvergenčnú mapu, ktorá nám preukáže správnosť získaného riešenia, prípadne prinesie informácie o tom, s akými vstupnými parametrami je možné optimalizáciu zlepšiť.



Obr. G.2: Závislosť optimalizovanej hodnoty $\|F(x)\|_2^2$ od štartovacieho bodu optimalizácie $(x_1, x_2)^T$

V porovnaní s Obr. G.1 je jasné, že oblasť falošnej konverencie je omnoho väčšia, konkrétnejšie oblasť, z ktorej zvolený štartovací bod dokonverguje k numericky vhodnému minimu a správne lokalizuje zariadenie, na $[-10, 10] \times [-10, 10]$, predstavuje $\approx 76.26\%$, čo je v porovnaní s 85.04% na Obr. G.1 rozdiel o necelých 9%. Vyznačený bod na Obr. G.2 predstavuje zvolený štartovací bod $(1.8, 3.5)^T$, ktorý jasne prináleží do *nevhodnej oblasti*. Voľbou iného štartovacieho bodu, napr. $x^0 = (-10, -10)$ už $x_{OPT} = (1.07263, 0.89542)^T$ a $\|F(x_{OPT})\|_2^2 \approx 0.000572$. Odchýlka od x^* je následne 0.00243 .

Táto nadstavba preukázala jednu dôležitú vlastnosť tejto úlohy a to konkrétne jej nekonzistentnosť pri strate signálu. Preukázalo sa, že stratou signálu a zachovaním konfigurácie optimalizácie sa buď pozmení lokalizácia zariadenia s uspokojivou numerickou odchýlkou alebo dôjde ku konvergencii k falošnému minimu $\|F(x)\|_2^2$ a teda k nesprávnej lokalizácii zariadenia. Inými slovami, strata signálu dokáže signifikantne ovplyvniť vhodnú množinu štartovacích bodov x^0 , ktoré vstupujú do optimalizácie účelovej funkcie.

V horeuvedenom súbore *2D_missing_signal.txt* demonštrujeme obdobnú analýzu na všetkých zvyšných chýbajúcich signáloch. Preukazuje sa, že zvýšená odchýlka $\|x^* - x_{OPT}\|_2 > 1$ znamená významné zvýšenie hodnoty $\|F(x)\|_2^2$ a pravdepodobne nesprávnu lokalizáciu zariadenia. Spomedzi 25 zvyšných analyzovaných situácií, v ktorých zachováme konfiguráciu optimalizácie, pozorujeme až 14 (56%) pravdepodobne nesprávnych lokalizácií. Na margo veci, zmenou štartovacieho bodu z $(1.8, 3.5)^T$ na $(-10, -10)^T$ dostávame len 3 pravdepodobne nesprávne lokalizácie. Tým pádom, je možné uvažovať, že korektnú optimalizáciu dosiahneme v prípadoch, keď štartovací bod x^0 je vzdialenejší od lokality zariadenia.

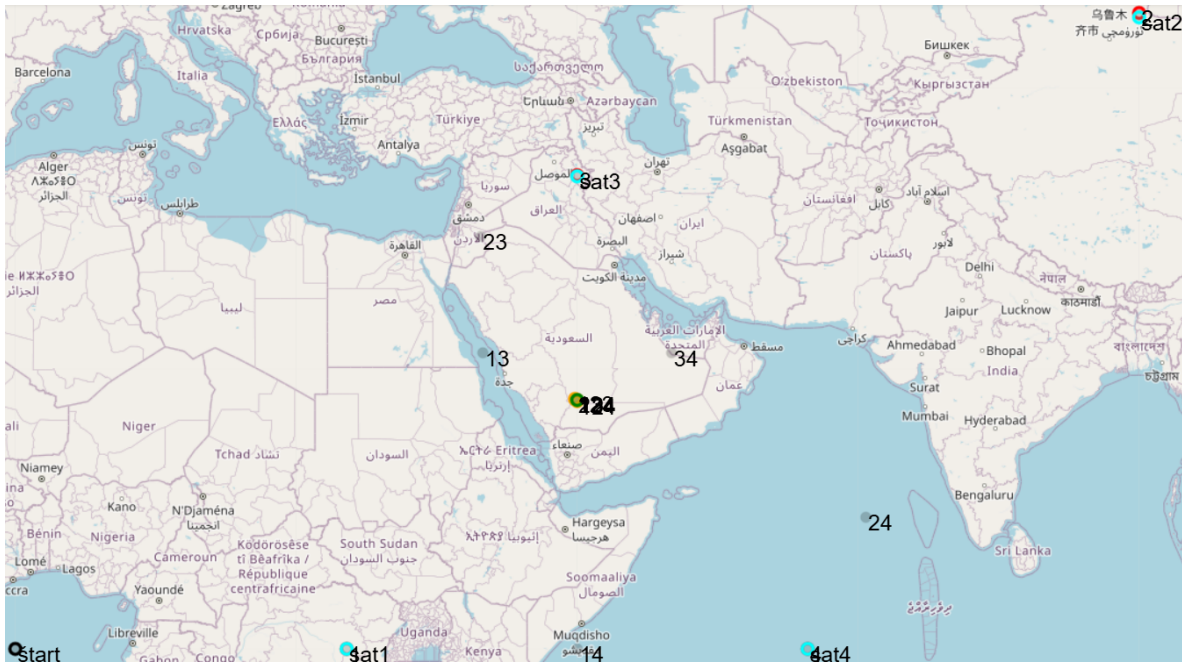
G.3 Generalizácia optimalizačného algoritmu v \mathbb{R}^3

Rovnako ako v prípade dvojrozsmernej optimalizácie, aj v tejto časti sa zaoberáme zovšeobecnením algoritmu pre prípad, keď nie je vopred známy počet satelitov. Táto flexibilita umožňuje simulovať realistickéjšie scenáre lokalizácie, v ktorých sa počet dostupných satelitov môže meniť. Vzhľadom na to, že v reálnych systémoch (napr. GPS) môže byť použitých až 31 satelitov, je schopnosť algoritmu prispôbiť sa tomuto parametru prakticky dôležitá.

Na rozdiel od 2D prípadu sa však teraz pohybujeme v trojrozmernom priestore, kde do výpočtov vstupuje aj **nadmorská výška**. Táto skutočnosť umožňuje detailnejšiu analýzu výsledkov – nie len z hľadiska presnosti lokalizácie, ale aj z hľadiska topografie terénu.

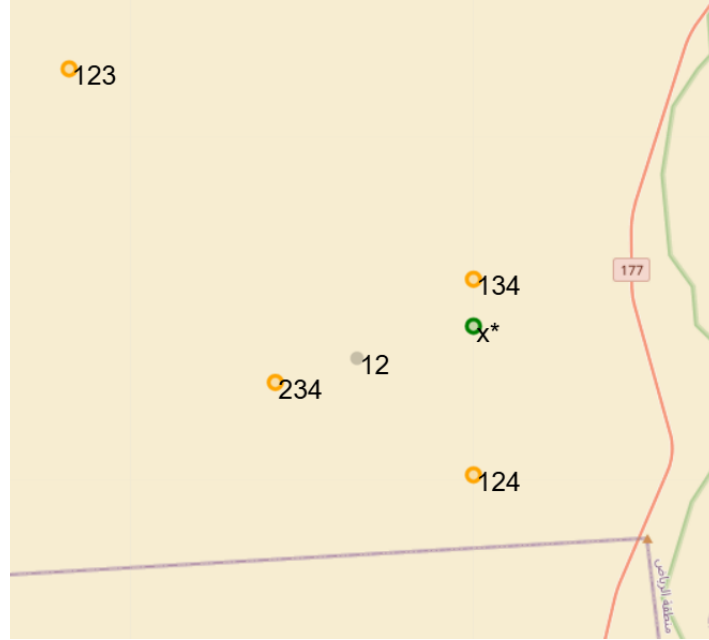
Opäť máme k dispozícii n vysielačov so súradnicami s_i a k nim prislúchajúce časy odoslania signálov t_i . Cieľom je nájsť takú polohu x a čas t , ktoré minimalizujú rozdiel medzi skutočnou vzdialenosťou a časom prijatia signálu s meraním. Formulácia úlohy zostáva analogická ako v dvojrozmernom prípade – definujeme reziduálne funkcie $f_i(x) = \|x - s_i\| - 0.047(t - t_i)$, kde $x \in \mathbb{R}^3$. Tieto funkcie tvoria vektorovú funkciu $F(x) = [f_1 f_2 \dots f_n]^T$. Účelová funkcia ostáva naďalej $\min \|F(x)\|_2^2$

Implementácia je prispôbená na zadania úloh E , F , ktoré obsahujú údaje pre 3D lokalizáciu. V experimentoch analyzujeme, analogicky ku 2D prípadu, správanie optimalizačného algoritmu pri rôznych počtoch použitých satelitov, resp. pri chýbajúcich dátach z niektorých satelitov, čím testujeme robustnosť lokalizácie. Na Obr. G.3 je znázornený výstup experimentu, kde sme postupne vynechávali signály z rôznych satelitov. Obr. G.4 je priblíženou verziou vizualizácie do kontextu Saudskej Arábie.



Obr. G.3: Porovnanie výsledkov lokalizácie pri strate signálu z vybraných vysielačov

Na Obr. G.3 a G.4 je zelenou farbou znázornená poloha "presného" bodu a tyrkysovou farbou sú znázornené polohy satelitov označené číslom satelitu. Je ľahké odpozorovať, že satelity sú v okolí bodu



Obr. G.4: Porovnanie výsledkov lokalizácie pri strate signálu z vybraných vysielateľov - priblížené

z rôznych svetových strán. Samotné experimenty sú znázornené čiernou (keď fungovalo **0** satelitov, konštantná funkcia, poloha je v štartovacom bode), červenou (funguje **1** satelit), sivou (fungujú **2** satelity) a oranžovou (fungujú **3** satelity). Z experimentov je možné vidieť vzory:

- Ak funguje iba i -ty satelit, priblížime sa k nemu na vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za čas t_i , teda riešenie bude ležať približne pod satelitom, pretože ako štartovací bod bol zvolený stred Zeme. Označme toto riešenie ako r_i .
- Ak fungujú 2 satelity i, j , tak riešenie bude čo najviac medzi satelitmi, ale bude vychýlené práve z tej strany, z ktorej štartujeme. Označme toto riešenie ako r_{ij} , máme štvoruholník (r_i, s_i, r_j, s_j) , r_{ij} bude ležať v tomto štvoruholníku bližšie k r_k , kde k je číslo satelitu, ktorý poslal signál neskôr.
- Pri 3 fungujúcich satelitoch i, j, k sa riešenie r_{ijk} nachádza v trojuholníku (r_{ij}, r_{jk}, r_{ki})
- Pri 4 fungujúcich satelitoch, teda všetkých, je správne riešenie x^* ako je vidieť na Obr. G.4 v štvoruholníku medzi ostatnými $r_{123}, r_{134}, r_{124}, r_{234}$

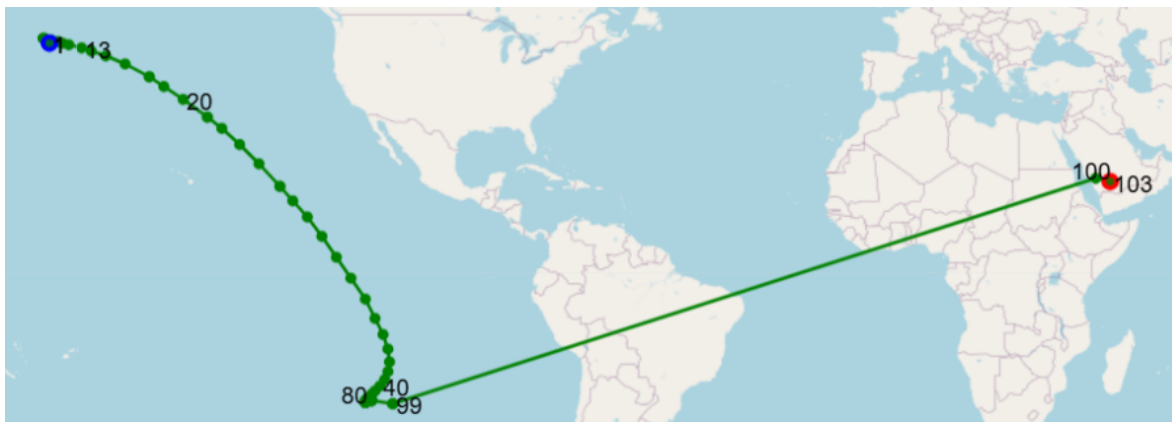
V podstate tieto riešenia zobrazené na mape sa dajú predstaviť ako uzol, kde sú zviazané štyri lano. Každé lano drží jeden satelit a ťahá lano takou konštantou silou, ktorá zodpovedá času $t - t_i$. Uzol sa bude postupne posúvať až kým nezastane. Satelit, ktorý poslal signál najneskôr ťahá najviac. To zodpovedá zadaniu $t = [19.9, 2.4, 32.6, 19.9]$ kde 2. satelit ťahá najmenej a 3. satelit ťahá najviac, 1. a 4. satelit ťahajú lano rovnako silno. Preto riešenie r_{14} je presne medzi nimi. Keď "ťahali" po trojiciach a potom "ťahali" všetky tak x^* ležalo v štvoruholníku $r_{123}, r_{134}, r_{124}, r_{234}$ a bolo najbližšie k bodu r_{134} , čo je bod, keď "ťahali" satelity 1,3,4, ktoré "ťahali" oveľa viac ako 2 (teda všetky ťahajú silnejšie ako 2 a v súčte je to omnoho viac).

G.4 Vizualizácia trajektórie hľadania riešenia v \mathbb{R}^3

Na konci kapitoly C sme zobrazili 2D účelovú funkciu, teda bolo možné ju zobraziť v 3D grafe. Tentokrát máme 4D účelovú funkciu z kapitoly E, ktorú by sme museli zobraziť v 4D grafe - ak by sme

chceli vrstevnice a $5D$ ak by sme chceli celú funkciu. Keďže takéto vysoké dimenzie si človek nevie ani predstaviť, i napriek tomu, že sme načrtli možné použitie metód redukcie dimenzie dát, tak budeme zobrazovať trajektóriu na mape, teda neberieme do úvahy čas prijatia signálu ani nadmorskú výšku.

Na Obr. G.5 je zobrazené, aká bola trajektória hľadania riešenia vzhľadom na zemský povrch. Štartovací bod sme zvolili taký, pri ktorom nám norma polohy zariadenia bola ≈ 1 , teda vyšetrený bod $x^0 = (3000, -30000, 300000)$.



Obr. G.5: Vizualizácia priebehu hľadania riešenia v \mathbb{R}^3 na mape

Na Obr. G.5 je možné vidieť, že postupne to prešlo cez celý svet. Takisto je vidieť, že medzi 1. a 13., 40. a 80. iteráciou boli veľmi malé zmeny polohy x a zdá sa, že algoritmus dokonca mohol byť terminovaný jednou z podmienok z dôvodu malého spádu. V 99. iterácii je možné vidieť signifikantnú zmenu, a to skok z Tichého oceánu až do Saudskej Arábie.

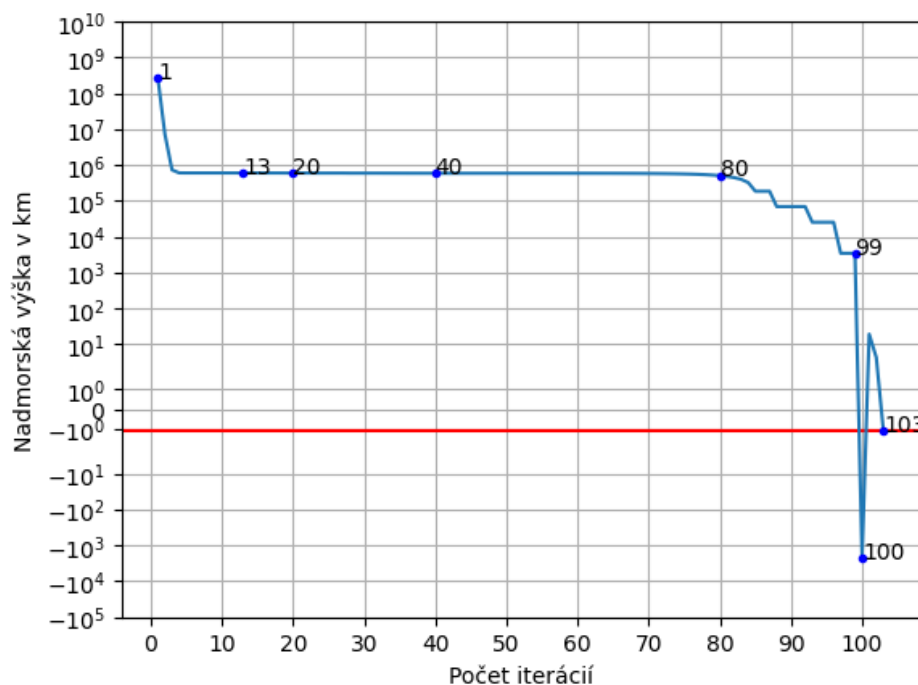
Keďže norma x^0 je veľmi vysoká, vieme povedať, že vzdialenosť tohto bodu od stredu Zeme je rovnako veľmi vysoká. Preto je vhodné zobraziť aj vizualizáciu závislosti nadmorskej výšky vzhľadom na počet iterácii (Obr. G.6).

Na Obr. G.6 je možné pozorovať, že štartovací bod je naozaj veľmi vzdialený od stredu Zeme, konkrétne je vzdialený 271 246 331 km od povrchu Zeme (priemerná vzdialenosť Zeme od Slnka je 149 miliónov km), teda tento bod je na druhej strane Slnčnej sústavy a predsa optimalizácia skončí na Zemi, dokonca s presnosťou na 100 m.

V grafe tiež je možné vidieť, že od 2. po 80. iteráciu sú body vo vzdialenosti Mesiaca od Zeme ($\approx 3.8 \times 10^5$ km), preto je projekcia na mapu stále irelevantná. Po 99. iterácii sa náhle priblížime k Zemi, kde dokonca v 100. iterácii je nadmorská výška -2200 km. V takej výške je hocijaký malý posun veľkým posunom na Obr. G.6, preto je na mape medzi 99. a 100. iteráciou taký značný posun.

G.5 Vytvorenie novej úlohy - lokalizácia známej polohy

Ako posledný krok projektu bola navrhnutá nová experimentálna úloha, v ktorej je cieľom algoritmu správne identifikovať presnú polohu známeho objektu – konkrétne geografický stred Eiffelovej veže v Paríži. Zmyslom tohto prístupu je verifikovať korektnosť výpočtu lokalizačného algoritmu v \mathbb{R}^3 na



Obr. G.6: Vizualizácia priebehu hľadania nadmorskej výšky v \mathbb{R}^3

dátach, ktoré vychádzajú z reálne známej pozície, pričom výstup by mal byť identický so vstupom.

Na účely spracovania boli geografické súradnice Eiffelovej veže (zemepisná šírka, dĺžka a nadmorská výška) konvertované do karteziánskych súradníc, ktoré slúžia ako vstup pre optimalizačný algoritmus. Tento krok bol realizovaný prostredníctvom známej transformačnej rovnice, ktorá zohľadňuje aj eliptický tvar Zeme a využíva geodetický model podľa Airyho, 1830.

$$v = \frac{a}{\sqrt{1 - e \sin^2(\psi)}}$$

$$x_1 = \frac{v \cos(\psi) \sin(\lambda)}{d}$$

$$x_2 = \frac{v \cos(\psi) \cos(\lambda)}{d}$$

$$x_3 = \frac{v(1 - e) \sin(\psi)}{d},$$

kde $d = R - h$, R je polomer Zeme, ψ je **zemepisná šírka**, λ je **zemepisná dĺžka** a h je **nadmorská výška**. Hodnota e je definovaná rovnako ako v kapitole F, teda pomocou **rovníkového polomeru** a a **polárneho polomeru** b , teda $e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

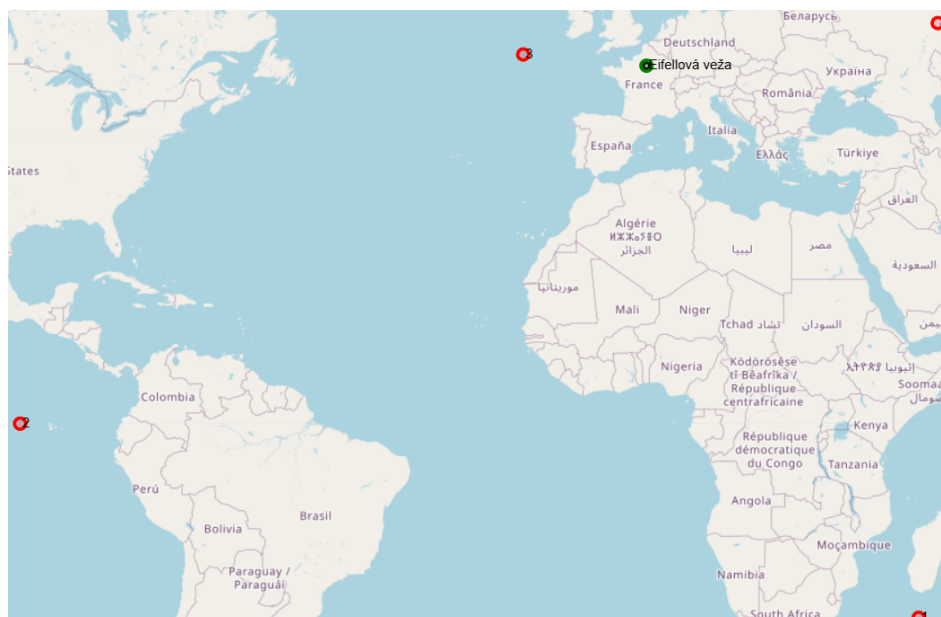
Pre samotnú lokalizáciu boli následne v priestore náhodne rozmiestnené štyri satelity, ktoré generovali simulované signály smerujúce k hľadanému bodu. Každému satelitu bola priradená presná pozícia v priestore spolu s časom odoslania signálu. Tieto údaje sú sumarizované v nasledujúcej tabuľke:

| Satelit | Zemepisná dĺžka | Zemepisná šírka | Nadmorská výška v km | Čas odoslania (ms) |
|---------|-----------------|-----------------|----------------------|--------------------|
| 1 | -29° | 45° | 578469 | 3.72896 |
| 2 | 0° | -96° | 322483 | 2 |
| 3 | 50° | -17° | 301808 | 29.41489 |
| 4 | 53° | 48° | 278251 | 23.49624 |

Tabuľka G.2: Súradnice satelitov a časy odoslania

Získané dáta boli spracované identickým optimalizačným algoritmom ako v predchádzajúcich úlohách. Vzhľadom na to, že poloha cieľového bodu bola dopredu známa, bolo možné presne porovnať výsledok algoritmu s očakávaným výstupom. Na Obr. G.7 je znázornená situácia lokalizačnej úlohy:

- **červené body** označujú priestorové rozmiestnenie jednotlivých satelitov,
- **čierny bod** predstavuje skutočnú polohu Eiffelovej veže (*referenčný cieľ*),
- **zelený bod** predstavuje výstup optimalizačného algoritmu.



Obr. G.7: Rozmiestnenie satelitov na mape, Eiffelová veža a optimálny bod

Ako je z Obr. G.7 zrejmé, výstup algoritmu sa nachádza presne v bode cieľa, čo potvrdzuje správnosť implementácie konverzie súradníc, ako aj správnosť rozmiestnenia satelitov a stanovenia časov odoslania signálov.