

OPTIMALIZÁCIA RIADENIA DRONU S MINIMALIZÁCIOU POUŽITÉHO PALIVA

*Semestrálny projekt v akademickom roku 2024/2025
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
v Bratislave*

Jakub Novotný (0,2) DAV
Marek Šugár (0,2) DAV
Tuan Dávid Nguyen Van (0,2) DAV
Timotej Šimkovič (0,2) DAV
Martin Kostolník (0,2) DAV

OBSAH:

ÚVOD:	3
RIEŠENIE ÚLOHY A	4
RIEŠENIE ÚLOHY B	6
RIEŠENIE ÚLOHY C	9
IMPLEMENTÁCIA ÚLOHY OPTIMÁLNEHO RIADENIA	10
NADSTAVBA	12
EXPERIMENTOVANIE S RÔZNYMI DRUHMI VSTUPNÝCH DÁT	12
MODELOVANIE OPTIMÁLNEHO RIADENIA S OHRANIČENÍM MAXIMÁLNEJ HNACEJ SÍLY MOTOROV	17
ANALÝZA VPLYVU VARIABILNEJ HODNOTY HMOTNOSTI A ODPORU PROSTREDIA NA VÝSLEDKY MODELU	21
ANALÝZA VPLYVU ORIENTÁCIE DVOCH MOTOROV NA OPTIMÁLNU HODNOTU SPOTREBY PALIVA	25
ROZŠÍRENIE OPTIMALIZAČNÉHO ALGORITMU PRE \mathbb{R}^3 SO 4 MOTORMI.....	30

ÚVOD:

Predložený report vznikol v rámci riešenia semestrálneho projektu na predmete **Lineárne programovanie** v zimnom semestri akademického roka 2024/2025. Predmetom projektu je optimalizácia riadenia lietajúceho vozidla (*dronu*) v zjednodušenom súradnicovom systéme \mathbb{R}^2 s minimalizáciou využitého paliva a s vytýčenou trasou, ktorú v čase T dron musí prejsť.

V riešení úlohy je v zjednodušenej podobe braná do úvahy dynamika letu, ako vplyv zemskej tiaže a odporu prostredia, v ktorom sa vozidlo pohybuje. V kapitole **Riešenie úlohy A** je pomocou rekurzívnej definície premenných vektorov pozície a rýchlosti, definovaný rekurzívny vektor z_k , resp. z_{k+1} , ktorý obsahuje definície oboch vektorov rýchlosti a pozície v zodpovedajúcom časovom momente k , resp. $k + 1$.

Riešenie úlohy A je ďalej rozvinuté v kapitole **Riešenie úlohy B**, v ktorej je presne rozpracovaný rekurzívny vzťah vektora z_k , resp. z_{k+1} za pomoci premennej matice hnacích síl dvoch motorov dronu vo všetkých časových údajov $t \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Kapitola **Riešenie úlohy C** zhŕňa všetky získané maticové ohraničenia v dvoch predchádzajúcich kapitolách do podoby uceleného zadania úlohy lineárneho programovania.

V predposlednej kapitole **Implementácia úlohy optimalizácie riadenia** je presne zhrnutý proces implementácie a algoritmizácie úlohy optimalizácie riadenia dronu v prostredí jazyka **Python** a knižnice **cvxpy**. Táto kapitola sa do značnej miery dopĺňa s o niečo detailnejšou dokumentáciou, ktorá sa nachádza vo všetkých zdrojových skriptoch optimalizačného algoritmu. Z toho dôvodu, pre plné porozumenie stratégie implementácie, odporúčame hlavne dokumentácie zdrojových kódov a túto kapitolu ako skôr všeobecný nadhľad k stratégii prístupu riešenia a zhrnutie získaných optimálnych riešení pre zadané dáta.

Posledná kapitola **Nadstavba k pôvodnej úlohe** prináša viacero modifikácií úlohy. V kapitole postupne analyzujeme vplyv niektorých vybraných parametrov optimalizácie na optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy a následne rozširujeme poznatky zo simulácie v \mathbb{R}^2 do implementácie v \mathbb{R}^3 . Okrem iného, v tejto kapitole analyzujeme viacero zaujímavých nastavbových experimentov optimalizácie pre rôzne vstupné dáta.

Pre lepšiu orientáciu a aj následné odvolávanie sa v texte na priebežné výsledky alebo zadania parametrov experimentov, je v reporte využité číselné označovanie výsledkov, resp. experimentov. Všetky označenia sú uvedené v pravom okraji príslušnej stránky. Report obsahuje 6 kapitol, 5 podkapitol a 27 ilustrácií.

autori
december 2024 v Bratislave

RIEŠENIE ÚLOHY A

V prvom rade si ustanovme zadané rekurzívne definície vektora rýchlosti $v_{k+1} \in \mathbb{R}^2$ a vektora pozície $x_{k+1} \in \mathbb{R}^2$ jednotlivo po zložkách:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \Delta t v_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} + \Delta t v_k^{(2)} \end{bmatrix} \\ v_{k+1} &= \begin{bmatrix} v_{k+1}^{(1)} \\ v_{k+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(1)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(1)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(2)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(2)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

pričom vektor sily $f_k \in \mathbb{R}^2$ je definovaný ako:

$$f_k = \begin{bmatrix} f_k^{(1)} \\ f_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) u_k^{(1)} + \cos(\theta_2) u_k^{(2)} \\ \sin(\theta_1) u_k^{(1)} + \sin(\theta_2) u_k^{(2)} - mg \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kde $u_k^{(1)}, u_k^{(2)} \in \mathbb{R}_+$ sú zložky vektora hnacej sily, ktorú generujú dva motory dronu, m je hmotnosť dronu a g je gravitačné zrýchlenie.

Definujme samotný vektor z_k , resp. z_{k+1} jednotlivo po zložkách, berúc do úvahy $x_k \in \mathbb{R}^2$ a zároveň $v_k \in \mathbb{R}^2$:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ v_k^{(1)} \\ v_k^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \\ v_{k+1}^{(1)} \\ v_{k+1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Využitím rekurzívnych vzťahov (1) je možné rozšíriť definíciu vektora z_{k+1} na:

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \Delta t v_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} + \Delta t v_k^{(2)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(1)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(1)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(2)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(2)} \end{bmatrix}$$

Cieľom je definovať vektor z_{k+1} pomocou vektorov z_k a u_k v tvare $Az_k + Bu_k + C$. Definujme každú maticu jednotlivo.

Vyšetrujúc jednotlivé zložky vektora z_{k+1} a ich rekurzívne definície ľahko nahliadneme, že pomocou matice A a vektora z_k dokážeme definovať celý vektor pozície a časť vektora rýchlosti. Ak definujeme maticu A ako:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & e^{-\alpha \Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha \Delta t} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

tak súčin Az_k nadobudne podobu:

$$Az_k = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \Delta t v_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} + \Delta t v_k^{(2)} \\ e^{-\alpha\Delta t} v_k^{(1)} \\ e^{-\alpha\Delta t} v_k^{(2)} \end{bmatrix},$$

čím sme naozaj plnohodnotne definovali vektor pozície a z časti vektor rýchlosti.

Prezerajúc nedodefinované časti vo vektore rýchlosti je jasné, že je nutné využiť definíciu vektora hnacej sily (2). Definujme vektor $\widetilde{z_{k+1}}$, ktorý reprezentuje zvyšné členy v definíciách vektora rýchlosti, resp. pozície, v súčine Az_k :

$$\widetilde{z_{k+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_k^{(1)}}{m} \Delta t \\ \frac{f_k^{(2)}}{m} \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t}{m} (\cos(\theta_1) u_k^{(1)} + \cos(\theta_2) u_k^{(2)}) \\ \frac{\Delta t}{m} (\sin(\theta_1) u_k^{(1)} + \sin(\theta_2) u_k^{(2)} - mg) \end{bmatrix}$$

Vektor $\widetilde{z_{k+1}}$ je zrejme nutné definovať ako $Bu_k + C$. Ak definujeme matice ako:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta t g \end{bmatrix}, \quad (4)$$

tak zrejme bude platiť:

$$\begin{aligned} Bu_k + C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta t g \end{bmatrix} \\ &= \widetilde{z_{k+1}} \end{aligned}$$

Takto definované matice A, B, C , postupne v (3) a (4), a vzťah $Az_k + Bu_k + C$ naozaj definujú vektor z_{k+1} podľa zadaných požiadaviek.

RIEŠENIE ÚLOHY B

Využitím rekurzívneho vzorca z **Úlohy A**:

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \Delta t v_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} + \Delta t v_k^{(2)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(1)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(2)} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta t g \end{bmatrix},$$

zovšeobecniíme rekurzívnu definíciu vektora z_{k+1} do formy $P \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + Q$:

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} - \text{je potrebné vyriešiť obe zložky.}$$

$$x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t, x_k = x_{k-1} + v_{k-1} \Delta t, \dots, x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

Vďaka rekurzívnemu vzťahu nám vznikne táto závislosť:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_0 \Delta t \rightarrow x_2 = x_1 + v_1 \Delta t = v_0 \Delta t + v_1 \Delta t \rightarrow x_{k+1} = \Delta t \sum_{j=0}^k v_j$$

Kde v_j je opäť rekurzívne definovaná ako:

$$v_j = e^{-\alpha \Delta t} v_{j-1} + f_{j-1} \frac{\Delta t}{m}$$

Berúc do úvahy počiatočnú podmienku $v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, keďže na začiatku sa náš dron nehýbe, dostávame:

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{-\alpha \Delta t} v_0 + f_0 \frac{\Delta t}{m} = f_0 \frac{\Delta t}{m} \\ v_2 &= e^{-\alpha \Delta t} v_1 + f_1 \frac{\Delta t}{m} = e^{-\alpha \Delta t} f_0 \frac{\Delta t}{m} + f_1 \frac{\Delta t}{m} \\ v_3 &= e^{-\alpha \Delta t} v_2 + f_2 \frac{\Delta t}{m} = e^{-\alpha \Delta t} \left(e^{-\alpha \Delta t} f_0 \frac{\Delta t}{m} + f_1 \frac{\Delta t}{m} \right) + f_2 \frac{\Delta t}{m} \\ v_{k+1} &= \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha \Delta t})^{k-i} f_i \frac{\Delta t}{m} = \frac{\Delta t}{m} \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha \Delta t})^{k-i} f_i \end{aligned}$$

Kde f_i je vyjadrené nasledovne:

$$f_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} u_i^{(1)} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} u_i^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

Tým pádom:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{\Delta t}{m} \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha \Delta t})^{k-i} \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} u_i^{(1)} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} u_i^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \right) \\ x_{k+1} &= \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{j-1} (e^{-\alpha \Delta t})^{j-1-i} \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} u_i^{(1)} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} u_i^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Preto rekurzívna definícia vektora v_{k+1} je daná ako:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \cos(\theta_2) & \dots & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \sin(\theta_2) & \dots & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{(1)} \\ u_0^{(2)} \\ \vdots \\ u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix},$$

kde platí:

$$c = \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha\Delta t})^{k-i} = \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha\Delta t})^i = \frac{e^{-(k+1)\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \text{ (geometrická postupnosť)}$$

Využívajúc tieto poznatky dostávame:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [\Delta t \quad \dots \quad \Delta t] \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} &= \frac{\Delta t}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \ddots & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{-(k-1)\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) & e^{-(k-1)\alpha\Delta t} \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) \\ e^{-(k-1)\alpha\Delta t} \sin(\theta_1) & e^{-(k-1)\alpha\Delta t} \sin(\theta_2) & \dots & \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{(1)} \\ u_0^{(2)} \\ \vdots \\ u_{k-1}^{(1)} \\ u_{k-1}^{(2)} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{m} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^0 - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(2)} &= \frac{\Delta t^2}{m} \left\{ u_0^{(1)} \left(\cos(\theta_1) + e^{-\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) + \dots + e^{-(k-1)\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) \right) + \dots \right. \\ &\quad + u_1^{(1)} \left(\cos(\theta_1) + e^{-\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) + \dots + e^{-(k-2)\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) \right) + \dots \\ &\quad \left. - mg [0 + 1 + (e^{-\alpha\Delta t} + 1) + \dots + (e^{-(k-1)\alpha\Delta t} + \dots + 1)] \right\} \\ &= \frac{\Delta t^2}{m} \left\{ u_0^{(1)} \cos(\theta_1) (1 + e^{-\alpha\Delta t} + \dots + e^{-(k-1)\alpha\Delta t}) + \dots \right. \\ &\quad \left. - mg \left[\frac{e^{-0\alpha\Delta t} - 1 + e^{-\alpha\Delta t} - 1 + \dots + e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right] \right\} \\ &= \frac{\Delta t^2}{m} \left\{ u_0^{(1)} \cos(\theta_1) \left(\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) + \dots + u_1^{(1)} \cos(\theta_1) \left(\frac{e^{-(k-1)\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \right. \\ &\quad + \dots + u_{k-1}^{(2)} \cos(\theta_2) \left(\frac{e^{-\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \\ &\quad \left. - mg \left[\frac{e^{-(k+1)\alpha\Delta t} - 1 - (k+1)(e^{-\alpha\Delta t} - 1)}{(e^{-\alpha\Delta t} - 1)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Preto platí:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \cos(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \sin(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-(k+1)\alpha\Delta t} - (k+1)e^{-\alpha\Delta t} - k}{(e^{-\alpha\Delta t} - 1)^2} mg \end{bmatrix}$$

Teda z_{k+1} v závislosti od $[u_0 \cdots u_k]$ je:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \cos(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t^2}{m} \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \sin(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t^2}{m} \sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t}{m} e^{-\alpha\Delta t} \cos(\theta_2) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \sin(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t}{m} e^{-\alpha\Delta t} \sin(\theta_2) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{(1)} \\ u_0^{(2)} \\ \vdots \\ u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-(k+1)\alpha\Delta t} - (k+1)e^{-\alpha\Delta t}}{(e^{-\alpha\Delta t} - 1)^2} mg \\ 0 \\ \frac{e^{-(k+1)\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} mg \end{bmatrix}$$

Z tohto vzťahu vieme priamočiaro vytvoriť \bar{z}_k :

$$\bar{z}_k^T = [z_0 \cdots z_k] = [x_0^{(1)} \quad x_0^{(2)} \quad v_0^{(1)} \cdots x_k^{(2)} \quad v_k^{(1)} \quad v_k^{(2)}] = P \cdot \bar{u}^T + Q$$

$$P = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2 \cdot (k-1)} \\ \vdots \\ \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \cos(\theta_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -|| - \sin(\theta_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} e^{-0\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t^2}{m} \left(\frac{e^{-(k-1)\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} \right) \sin(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t^2}{m} \sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} e^{-k\alpha\Delta t} \cos(\theta_1) & \cdots & \frac{\Delta t}{m} e^{-\alpha\Delta t} \cos(\theta_2) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_1) & \frac{\Delta t}{m} \cos(\theta_2) \\ -|| - \sin(\theta_1) & \cdots & -|| - \sin(\theta_2) & -|| - \sin(\theta_1) & -|| - \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0_7^T & -mg & 0 & 0 & \cdots & -\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - k e^{-\alpha\Delta t} - k + 1}{(e^{-\alpha\Delta t} - 1)^2} mg & -\frac{e^{-k\alpha\Delta t} - 1}{e^{-\alpha\Delta t} - 1} mg \end{bmatrix}$$

RIEŠENIE ÚLOHY C

Účelovou funkciou predmetnej úlohy lineárneho programovania je vzťah vyjadrujúci celkovú spotrebu paliva v časovom rozsahu T :

$$F = \sum_{k=0}^{T-1} (u_k^{(1)} + u_k^{(2)})$$

Cieľom je tento vzťah minimalizovať, berúc do úvahy jednotlivé ohraničenia. Pohyb vozidla je zjednodušene simulovaný v súradnicovom systéme \mathbb{R}^2 , kde je podmienkou pohybu v štvorcovom regióne, definovanom ako:

$$\|x_k\|_{\infty} \leq x_{max}$$

Táto podmienka je definovaná vo forme Čebyševovej normy, ktorú, z definície normy, je možné jednoducho transformovať do formy lineárnych ohraničení ako:

$$\|x_k\|_{\infty} \leq x_{max} \Leftrightarrow (\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, T\}) (|x_i| \leq x_{max})$$

Lineárne ohraničenie $|x_i| \leq x_{max}$ je možné jednoducho transformovať do požadovanej formy $|x_i| \leq x_{max} \Leftrightarrow (-x_i \geq -x_{max} \wedge x_i \geq -x_{max})$.

Druhým dôležitým ohraničením je $x_j = w_j, j \in J \subset \{1, 2, \dots, T\}$, ktoré reprezentuje požiadavku toho, aby sa dron v čase $j\Delta t$ nachádzal na súradnici $w_j \in \mathbb{R}^2$. To je možné vyjadriť priamočiaro ako:

$$\begin{aligned} x_j &= w_j \\ x_j &= x_{j-1} + v_{j-1} \Delta t \end{aligned}$$

Celkové znenie úlohy lineárneho programovania je tým pádom:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{k=0}^{T-1} (u_k^{(1)} + u_k^{(2)}) \\ & v_{k+1} = \frac{\Delta t}{m} \sum_{i=0}^k (e^{-\alpha \Delta t})^{k-i} \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} u_i^{(1)} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} u_i^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \right) \\ & x_{k+1} = \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{j-1} (e^{-\alpha \Delta t})^{j-1-i} \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} u_i^{(1)} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} u_i^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \right) \\ & (\forall j \in J \subset \{0, 1, 2, \dots, T\}) (x_j = w_j) \\ & (\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, T\}) (-x_i \geq -x_{max} \wedge x_i \geq -x_{max}) \Leftrightarrow \|x_k\|_{\infty} \leq x_{max} \\ & (\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, T\}) (u_i^{(1)}, u_i^{(2)} \geq 0) \end{aligned}$$

IMPLEMENTÁCIA ÚLOHY OPTIMÁLNEHO RIADENIA

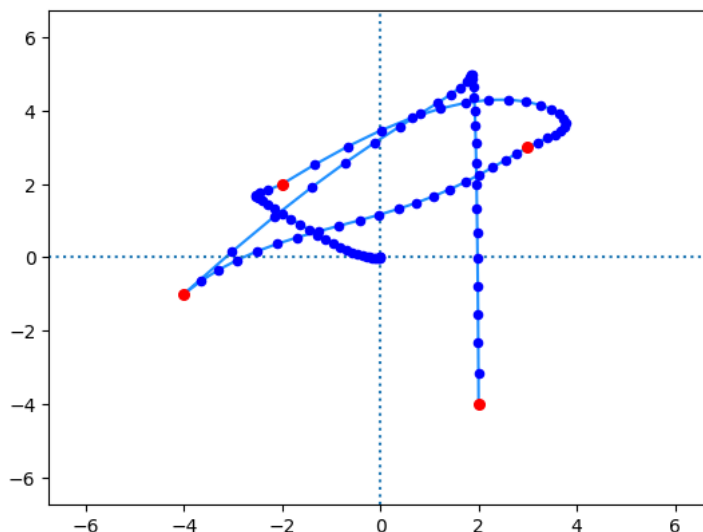
Optimalizačný model predmetnej úlohy nadobúda pre vyššie časové intervaly, resp. definície vstupnej premennej T značne vysoké množstvo premenných a k nim prislúchajúcich ohraňení, preto je prirodzené danú optimalizačnú úlohu algoritmizovať.

K samotnej implementácii bol zvolený programovací jazyk Python spolu s externou knižnicou určenou na konvexnú optimalizáciu *cvxpy*. Konkrétne postupy programovania a detailná dokumentácia zdrojového kódu sa nachádza v priloženom *Python Interactive Notebook (.ipynb)* súbore. V tejto kapitole bližšie nahliadnime na konkrétne optimalizované hodnoty a aj optimalizované trajektórie chodu.

Definujme si vstupné dáta experimentov, ktoré boli poskytnuté v súboroch `A09thrusters_data` a `A09thrusters_data2`. Pre prvý spomenutý súbor sú vstupné parametre definované ako:

$$\begin{aligned} T = 101 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 50^\circ \quad \theta_2 = 120^\circ \quad x_{\max} = 5 \\ J = \{30, 50, 70, 100\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (E-1)$$

Beh optimalizačného algoritmu pre zadané dáta optimalizuje spotrebu na hodnotu 1067,03 jednotiek paliva. Optimálna trajektória tohto behu je vyobrazená na *Obrázku 1*. Červenou farbou sú vyznačené body x_j – táto konvencia bude užitá vo všetkých obdobných vizualizáciách.



Obrázok 1 Optimálna trajektória letu dronu pre experiment (E-1).

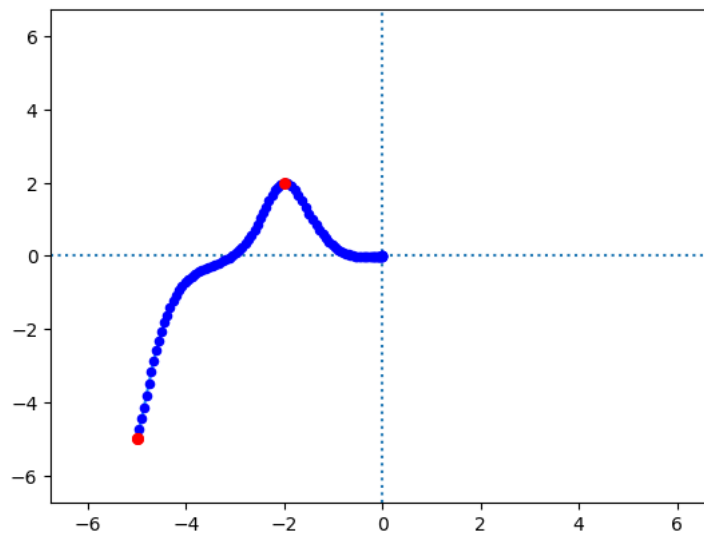
Definujme vstupné dáta experimentu podľa súboru `A09thrusters_data2`:

$$\begin{aligned} T = 101 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 100^\circ \quad \theta_2 = 180^\circ \quad x_{\max} = 5 \\ J = \{50, 99, 100\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (E-2)$$

Pre zadané dáta, optimalizačný algoritmus nedokázal nájsť riešenie – optimalizačná úloha, ktorá je daná zadanými parametrami je neprípustná, tým pádom nie je možné vykresliť jej optimálnu trajektóriu. Bližšie nazrime na charakter dát daného experimentu.

Je možné vypočítavať hraničné pozičné podmienky – konkrétne v čase $t = 99$ požadujeme, aby sa dron nachádzal na pozícii $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ a rovnako aj v čase $t = 100$ na rovnakej pozícii. Potenciálny problém nastáva s dynamikou letu. Inými slovami požadujeme, aby dron už v čase $t = 99$ v bode $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ zastavil a vyčkal na tejto pozícii do času $t = 100$.

Problémom je orientácia motorov, ktorá pravdepodobne nedokáže vygenerovať požadovaný vektor sily, aby zastavila celú predchádzajúcu dynamiku drona a zachovať ho v danej pozícii za čas Δt . Značným problémom je orientácia oboch motorov *dol'ava*, s ktorou nie je možné vhodne zastaviť a zostať na danom mieste. Je ľahko preukázateľné, že s iným nastavením orientácie motorov, napr. $\theta_1 = 3^\circ$ a $\theta_2 = 94^\circ$, je úloha prípustná. S daným nastavením je optimalizovaná hodnota spotreby 962,04 jednotiek paliva. Vizualizácia trajektórie tohto pozmeneného experimentu je vyobrazená na Obrázku 2.



Obrázok 2 Optimálna trajektória letu dronu pre pozmenené parametre orientácie motorov experimentu (E-2).

Na záver tejto kapitoly je vhodné ešte poznamenať, že k využitej metóde vizualizácie trajektórie, ktorá je okrem iného využitá na vizualizáciu trajektórií v celom reporte, je pripojený aj animačný skript¹ v jazyku Python, ktorý je určený na „*krokové pozorovanie*“. Vo forme animácie letu je možné postupne *krok po kroku* sledovať vývoj letu. K skriptu sú pripojené zdrojové súbory, definujúce vstupné parametre animácie pre všetky experimenty, ktoré sa nachádzajú v danom reporte.

¹ Animačný skript je súčasťou zložky „*Animated Visualisation*“ pod názvom „*TrackVisualization.py*“

NADSTAVBA

Experimentovanie s rôznymi druhmi vstupných dát

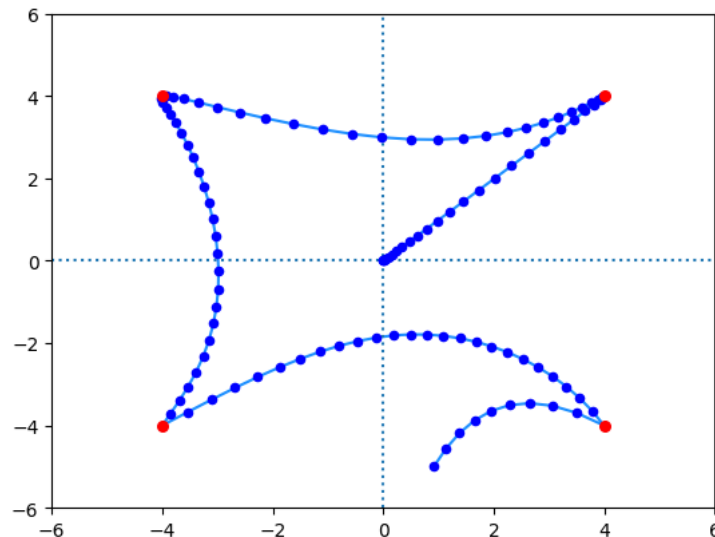
Ako bolo v predchádzajúcej kapitole priblížené, metodika tvorby jadra optimalizačného modelu bola vedená od začiatku vývoja v značne všeobecnej rovine – cieľom bolo vytvoriť všeobecný *interface*, ktorý dovoľuje jednoduchú optimalizačnú činnosť s rôznymi vstupnými dátami. Tento zámer do značnej miery podporil experimentovanie s rôznymi druhmi vstupných dát, ktorých výber je bližšie rozoberaný v tejto kapitole.

Obmena dát, od pôvodne zadaných, spočívala hlavne v rôznych druhoch pozičných podmienok – podmienok, ktoré vyjadrujú nutnosť, aby sa dron v čase $j\Delta t$ nachádzal na súradnici x_j . Ako prvý príklad uveďme optimalizáciu, v ktorej požadujeme, aby dron postupne navštívil vrcholy štvorca $\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$. Presné znenie všetkých vstupných dát je:

$$\begin{aligned} T = 110 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 3 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 45^\circ \quad \theta_2 = 135^\circ \quad x_{max} = 5 \\ J = \{25, 50, 75, 100\} \quad x_j = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned} \quad (EE-1)$$

Poznamenáme, že oproti zadaným dátovým vstupom, v tomto experimente je navýšená hmotnosť m a pozmenená orientácia oboch motorov. Cieľom je teda navštíviť vrcholy štvorca v symetrických časových rozostupoch $\Delta T = 25$.

Tento experiment modeluje optimálne riadenie s celkovou spotrebou približne 4210,72 jednotiek paliva. Optimálna trajektória letu je vyobrazená na *Obrázku 3*.



Obrázok 3 Vizualizácia trajektórie nadstavbového experimentu (EE-1)

Tento experiment implikuje viacero zaujímavých pozorovaní o danom modeli. Jedným je umné využívanie vplyvu tiaže na dron. Namiesto kopírovania strán pomyselného štvorca, ktoré sú indukované vstupnými ohraničeniami, model sa za účelom minimalizácie celkového spotrebovaného objemu paliva pohybuje v rámci kriviek a pri presunoch ku kontrolným bodom v nižších súradniciach v rámci osi y , využíva vplyv tiaže. Týmto pohybom po krivkách sa najskôr snaží o minimalizáciu silového momentu, ktorým bude dron disponovať pri približne kolmom presune nadol.

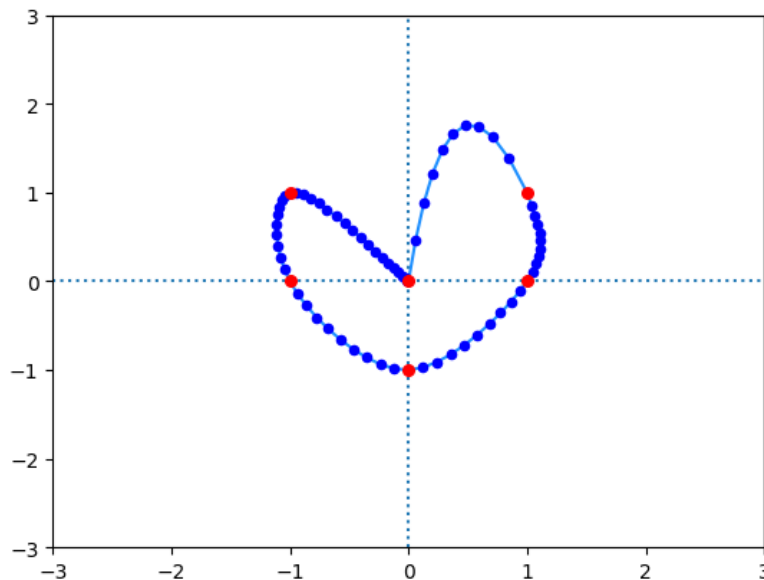
Druhým zaujímavým pozorovaním je následné správanie po dosiahnutí posledného kontrolného bodu v čase $t = 100$. Správanie modelu je z pozičného hľadiska náhodné, *a priori* nebolo možné predikovať súradnice kam zamieri. Model opätovne využil vplyv tiaže a zabezpečil, aby dron v poslednom časovom segmente dosiahol hranicu roviny, v ktorej má povolené operovať.

Veľmi zaujímavé využívanie vplyvu tiaže je možné pozorovať aj v druhom experimente, ktorý bol interne v rámci tímu nazývaný aj ako *srdiečkový* – cieľom bolo navrhnuť sadu dát s najnižším možným počtom pozičných ohraničení, aby trajektória pripomínala srdce.

Vstupné dáta jedného z viacerých experimentov boli dané ako:

$$\begin{aligned} T = 71 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 50^\circ \quad \theta_2 = 120^\circ \quad x_{max} = 5 \\ J = \{20, 30, 40, 50, 60, 70\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (EE-2)$$

Optimalizačný model pre zadané dáta modeloval riadenie s celkovou spotrebou 786,95 jednotiek paliva. Celková trajektória riadenia je vyobrazená nižšie na Obrázku 4.



Obrázok 4 Vizualizácia optimálnej trajektórie experimentu (EE-2)

I napriek pomerne trúfalému predpokladu kopírovať obrys srdca, optimalizačný model „splnil“ túto implicitnú úlohu nekompletne, avšak tento experiment priniesol opätovne zaujímavé pozorovanie správania modelu, ktoré sme načali už pri predchádzajúcom experimente.

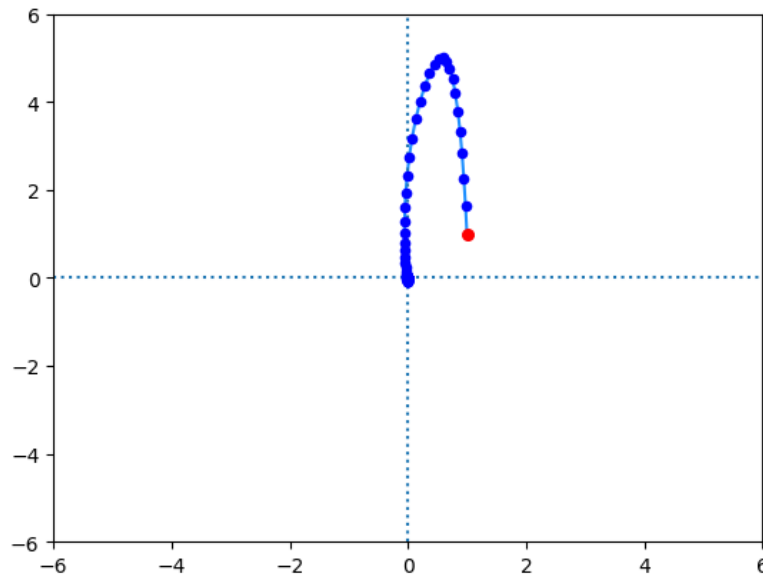
Zatiaľ čo pri prvých piatich pozičných podmienkach je riadenie relatívne hladké, kopírujúce do istej miery obrys srdca, pri poslednej pozičnej podmienke, resp. na trajektórii medzi predposlednou $x_{60} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a poslednou $x_{70} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je opäť možné pozorovať optimalizáciu riadenia v podobne využitia vplyvu tiaže. Namiesto, možno pre niekoho očakávanejšieho, prístupu symetrického kopírovania trajektórie medzi bodmi $x_{20} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $x_{30} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorá by následne vo výsledku znamenala srdcovú trajektóriu, model sa medzi danými bodmi rozhodol

využiť vplyv tiaže a do cieľového bodu „padnúť“, podobne ako v predchádzajúcich behoch modelu s inými dátami.

V neposlednom rade sme sa v experimentovaní s rôznymi dátami zamerali na správanie modelu v extrémnych prípadoch, kedy je vo vstupných dátach prítomné relatívne nízke množstvo pozičných podmienok vzhľadom na hodnotu parametra T . Jeden z viacerých experimentov, pre ktorý existovalo optimálne riešenie, bol daný dátami:

$$\begin{aligned} T = 100 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 45^\circ \quad \theta_2 = 135^\circ \quad x_{max} = 5 \\ J = \{99\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (EE-3)$$

Optimálna hodnota spotreby paliva je modelovaná na hodnotu 1315,89 jednotiek paliva a optimálna trajektória je vyobrazená na Obrázku 5.



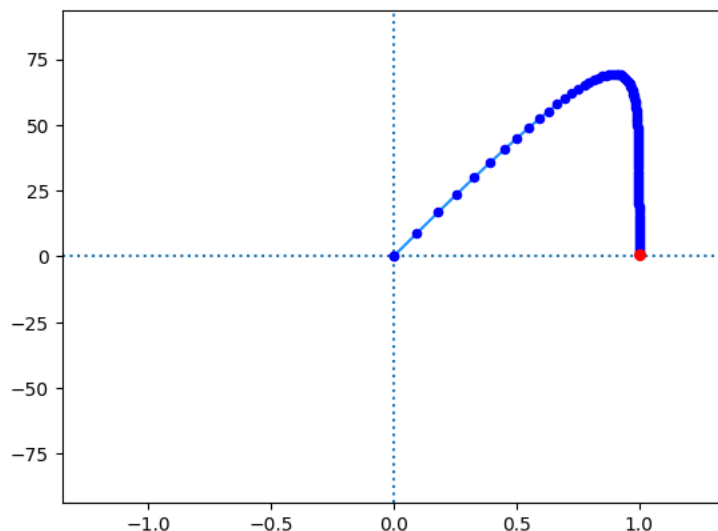
Obrázok 5 Vizualizácia optimálnej trajektórie experimentu (EE-3).

Apriórne očakávania, že model sa bude väčšinu časového rozmedzia snažiť udržať dron v pôvodnej polohe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sa do značnej miery vyplnil. Model naozaj, až do časového kroku $t \approx 60$, modeloval optimálnu trajektóriu vo forme zotrvania v pôvodnej pozícii. Následne, rovnako ako vo všetkých predchádzajúcich nastavbových experimentoch, naplno využil vplyv tiaže.

Namiesto zotrvania v pôvodnej polohe a následnom presune do súradnice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ po najkratšej možnej trajektórii, model optimalizoval trajektóriu presunom do hraničných súradníc v rámci osi y a následne, vplyvom tiaže a z hľadiska spotreby výhodnou cestou, „doplachtil“ do cieľovej destinácie. Tento experiment preukázal možno neintuitívnu skutočnosť a to, že z hľadiska spotreby paliva je nezriedka najkratšia možná trasa medzi dvoma pozičnými ohraničeniami nie nutne optimálna.

Obzvlášť zaujímavým pozorovaním v experimente (EE-3) je vplyv hraničnej hodnoty, v medziach ktorej sa dron smie pohybovať (parameter x_{max}). Postupným zvyšovaním hodnoty

daného parametra sa vo všeobecnosti tvar trajektórie a metodika dosiahnutia jediného kontrolného bodu nemení, avšak znižuje sa optimálna hodnota spotreby paliva. Na *Obrázku 6* je možné pozorovať trajektóriu letu experimentu (*EE-3*) avšak s pozmeneným parametrom $x_{max} = 75$. V tomto prípade je optimálna hodnota spotreby paliva rovná 1265 jednotiek paliva.



Obrázok 6 Optimálna trajektória letu pre rozšírený experiment (EE-3)

Je zrejmé, ako bolo vyššie naznačené, podobná trajektória letu – dron vo všeobecnosti naberie v ranej fáze letu vysokú výšku a následne, vo vhodnom momente s pričinením tiaže, dopadne na posledný kontrolný bod. Pozoruhodné je to, že dron sa snaží využiť tiaž čo najviac a tým znižuje spotrebu – zvyšovaním hodnoty parametra x_{max} dostáva model omnoho väčší priestor na prácu s tiažou a tým pádom aj väčší priestor na minimalizáciu spotreby.

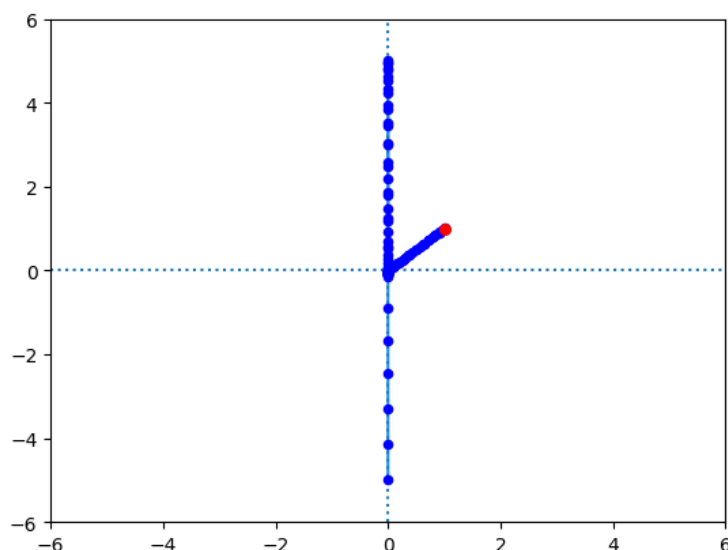
Posledným zaujímavým pozorovaním je návrh experimentu, ktorý, podobne ako tie predchádzajúce, plánuje relatívne nízke množstvo pozičných podmienok vzhľadom na hodnotu parametra T , avšak tentoraz podmienkou je splniť požadovanú pozíciu na začiatku časového rozmedzia. Inými slovami, na značnú väčšinu časového rozmedzia nemáme nijaké podmienky, kde sa má dron nachádzať.

Experiment zodpovedajúci tejto konštelácii je daný týmito vstupnými dátami:

$$T = 100 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 45^\circ \quad \theta_2 = 135^\circ \quad x_{max} = 5$$

$$J = \{13\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (EE-4)$$

Pri tomto modelovacom experimente bolo optimalizované množstvo využitého paliva na objem 1207,93 jednotiek. Modelovaná optimálna trajektória je vyobrazená na *Obrázku 7*.



Obrázok 7 Vizualizácia optimálnej trajektórie experimentu (EE-4)

Pri tomto experimente je možné pozorovať príklad, kedy najkratšia trajektória medzi dvoma kontrolnými bodmi, resp. medzi počiatočnou a nasledujúcou požadovanou pozíciou, je naozaj aj tou optimálnou z hľadiska spotreby. Je možné pozorovať priamočiary presun z počiatočnej pozície $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ do jediného kontrolného bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ po najkratšej trajektórii. Od momentu $t = 13$ model nepracoval s nijakými ďalšími pozičnými podmienkami – z bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sa následne navrátil do počiatočnej pozície $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z ktorej pokračoval do hraničného bodu $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, z ktorého následne voľne padol do druhej hraničnej pozície $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Opätovne je možné pozorovať prácu modelu s tiažou a taktiež sa jedná o príklad, kedy najkratšia trajektória medzi dvoma kontrolnými bodmi je, za daných podmienok, aj tá najvýhodnejšia z hľadiska spotreby paliva.

Ako posledný poznatok, ktorý je do značnej miery prepojený s touto kapitolou a taktiež vytvára dôležité implikácie pre nasledujúce analýzy je istá nezávislosť výsledkov modelu od hodnôt parametru Δt . Opakovanými experimentami s rovnakou selekciou vstupných dát bolo pre určité rozumné intervaly hodnôt parametru Δt preukázaná nezávislosť optimálnej hodnoty spotreby od hodnoty parametru Δt .

Modelovania optimálneho riadenia s ohraničením maximálnej hnacej sily motorov

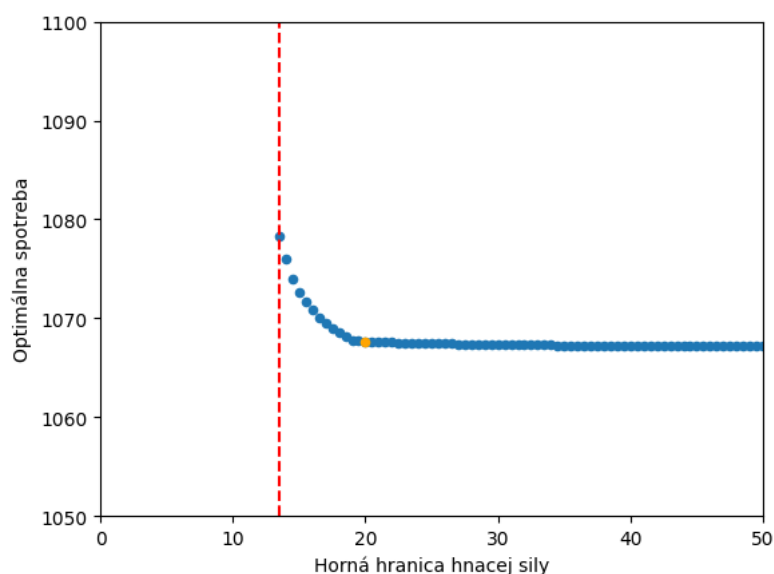
Jedna z viacerých nastavbových modifikácií k pôvodnej úlohe spočívala v implementácii horného ohraničenia možnej generovanej hnacej sily oboch, resp. všetkých štyroch v \mathbb{R}^3 , motorov. Z implementačného hľadiska sa nejednalo o nijak obzvlášť zložitú úlohu – jednalo sa iba o definíciu doplnkových ohraničení pre všetky zložky premennej matice hnacích síl. Formálne tieto ohraničenia možno formulovať ako:

$$(\forall i \in \{0,1,2, \dots, T-1\}) (u_i \leq u_{max}),$$

kde u_{max} je pevne daná konštanta – predom definovaná horná hranica hnacej sily.

V tejto podkapitole je cieľom nahliadnuť na vplyv tohto ohraničenia na optimálnu hodnotu spotreby v rôznych experimentoch. Pre účely analýz sme využili vyššie definované experimenty – menovite (E-1) a (EE-1) – (EE-4). Pre úplnosť uvádzame, že prerušovanou, červenou vertikálnou čiarou je vyznačená hranica prípustnosti optimalizačnej úlohy. Oranžovou farbou ja zas vyznačený bod, od ktorého je možné považovať všetky nasledujúce hodnoty za, s uspokojivou presnosťou, nemenné.

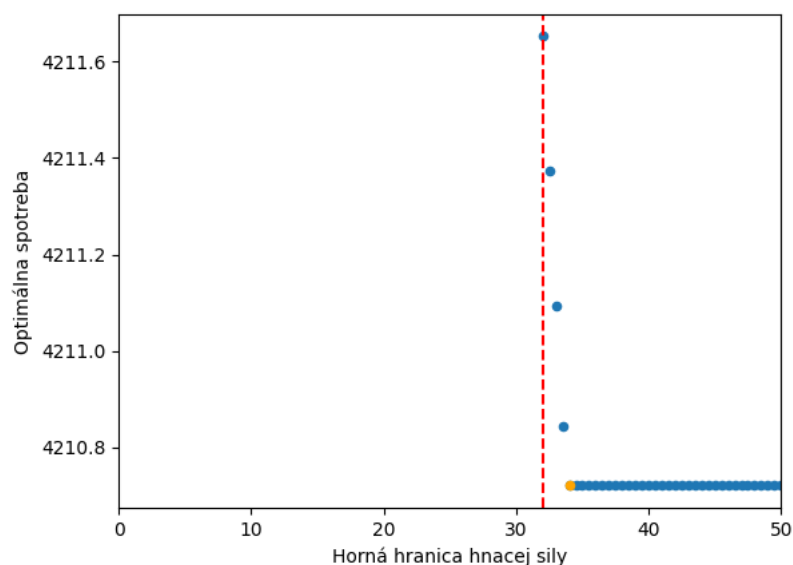
Závislosť optimálnej hodnoty spotreby paliva od horného ohraničenia hnacej sily pre oba motory, pre experiment (E-1) je vyobrazená na Obrázku 8.



Obrázok 8 Závislosť optimálnej spotreby paliva od ohraničenia hnacej sily (E-1)

Možno si povšimnúť, že optimálna hodnota spotreby klesá s rastúcim horným ohraničením hnacej sily. Pre hodnoty ohraničenia od 0 až 13 je úloha optimalizácie neprípustná. Najmenšou prípustnou hodnotou horného ohraničenia u_{max} je 13,5. Hodnota spotreby pre dostatočne veľké hodnoty u_{max} konverguje k hodnote 1067,03 jednotiek, čo je optimálna hodnota spotreby pre úlohu bez ohraničenia u_{max} . Pri hodnote $u_{max} = 20$ hodnota optimálnej spotreby dokonvergovala k horeuvedenej hodnote spotreby a nijako signifikantne sa už nemenila.

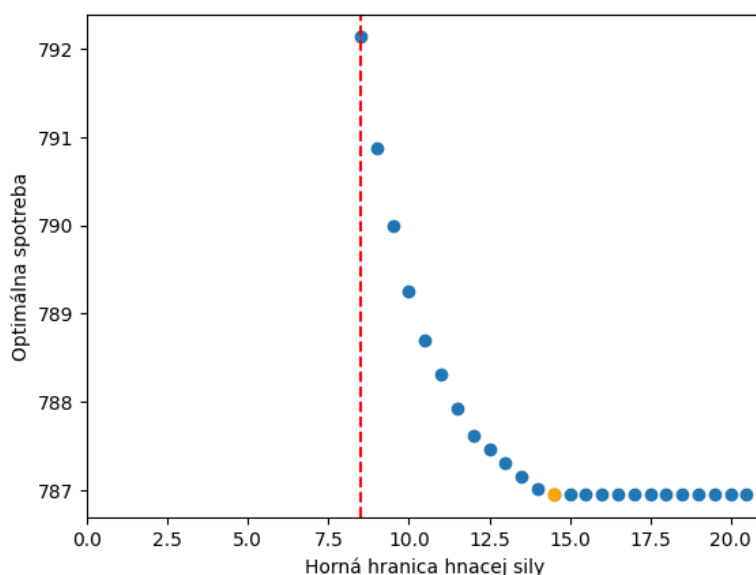
Vizualizácia závislosti optimálnej spotreby paliva od hornej hranice u_{max} pre experiment (EE-1) je vyobrazená na Obrázku 9.



Obrázok 9 Závislosť optimálnej spotreby paliva od ohraničenia hnacej sily (EE-1)

V tomto prípade je možné si opäť povšimnúť konvergenciu k určitej hodnote, rovnako ako v prípade (E-1). Markantným rozdielom je však hranica prípustnosti. V tomto prípade pozorujeme prvé prípustné riešenie až pri hodnote $u_{max} = 32$. Ďalším signifikantným pozorovaním je strmšia konvergencia ku konečnej hodnote – zatiaľ čo v Obrázku 8 pozorujeme celkom 14 rôznych hodnôt u_{max} pokiaľ hodnota optimálnej spotreby dokonverguje ku konečnej hodnote, v (EE-1) sú to iba 4 hodnoty. Záverom iba spomenieme, že optimálna hodnota spotreby konverguje k hodnote 4210,7 jednotiek – presnú konvergenciu pozorujeme od hodnoty $u_{max} = 34$.

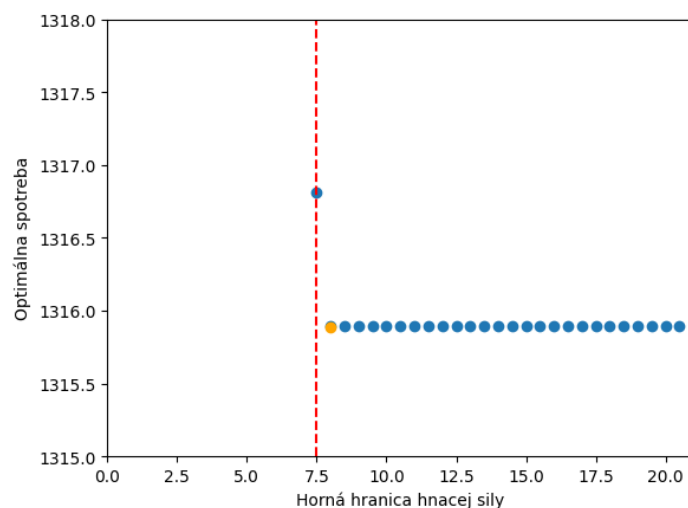
Vizualizácia obdobnej závislosti pre experiment (EE-2) je na Obrázku 10.



Obrázok 10 Závislosť optimálnej spotreby paliva od ohraničenia hnacej sily (EE-2)

V Obrázku 10 je na rozdiel od všetkých predchádzajúcich vizualizácií možné pozorovať pomerne dlhú a pozvoľnú konvergenciu k finálnej hodnote – celkovo až 13 rôznych hodnôt optimálnej spotreby. Ku optimálnej hodnote spotreby (786,95) funkcia dokonverguje od hodnoty $u_{max} = 14,5$. Prvé prípustné riešenie pozorujeme v hodnote $u_{max} = 8$.

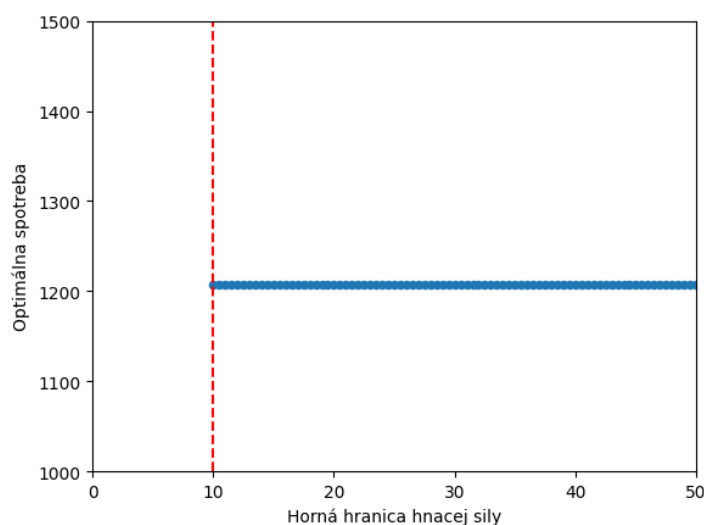
Závislosť optimálnej spotreby paliva od hornej hranice hnacej sily pre experiment (EE-3) je na Obrázku 11.



Obrázok 11 Závislosť optimálnej spotreby paliva od ohraničenia hnacej sily (EE-3)

Opačný extrém rýchlosti konverencie pozorujeme pri experimente (EE-3), kde k dosiahnutiu optimálnej hodnoty od hranice prípustnosti stačili iba dve hodnoty parametra u_{max} . Hranicu prípustnosti je možné pozorovať v hodnote $u_{max} = 7,5$ a už od hodnoty $u_{max} = 8$ je hodnota optimálnej spotreby rovná celkovému optimu. Najlepšia hodnota spotreby paliva v tomto experimente je rovná 1315,89 jednotiek.

Poslednú analýzu závislosti optimálnej hodnoty spotreby od hornej hranice hnacej sily uvádzame pre experiment (EE-4). Uvedená vizualizácia závislosti je na Obrázku 12.



Obrázok 12 Závislosť optimálnej spotreby paliva od ohraničenia hnacej sily (EE-4)

Suverénne najkratšiu konvergenciu je možné pozorovať práve pri experimente (EE-4), kde prakticky hranica konvergence aj prípustnosti je v spoločnom bode $u_{max} = 10$, kde hodnota optimálnej spotreby je rovná 1207,93 jednotiek paliva.

Z predošlých vizualizácií si je možné všimnúť, že spotreba s rastúcim horným limitom hnacej sily klesá, pri určitej hodnote prestane klesať a ustáli sa na optimálnej hodnote. Pri príliš malých limitoch parametra u_{max} je riešenie optimalizačnej úlohy neprípustné. Samotná hranica prípustnosti je variabilná pre konkrétne vstupné parametre experimentov.

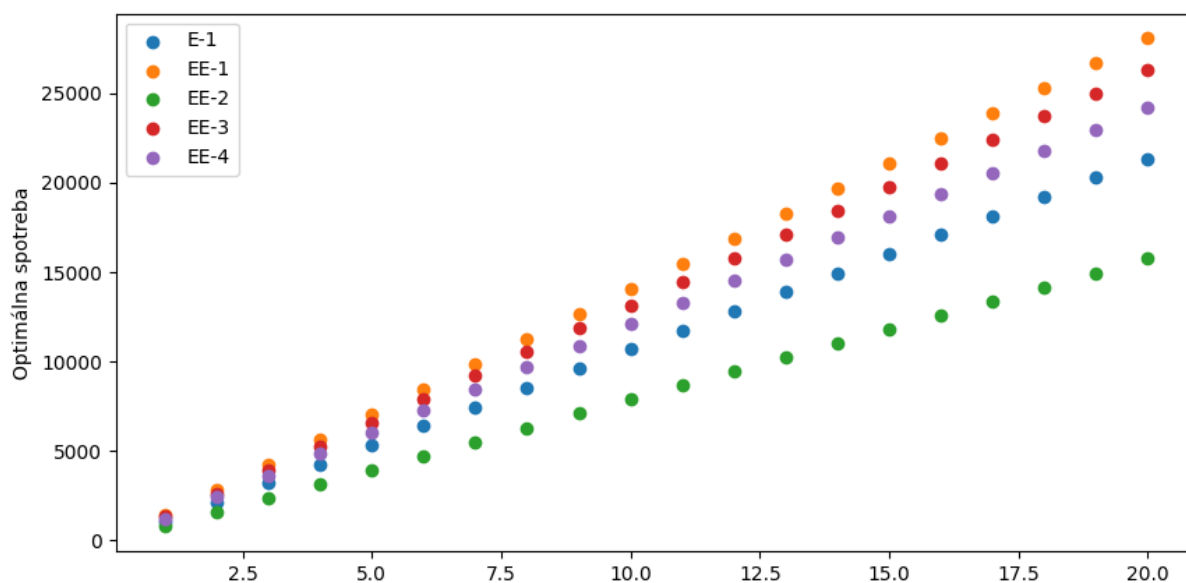
Pri nižších limitoch je spotreba relatívne vysoká. Postupným zvyšovaním horného limitu u_{max} dochádza ku konvergencii k nižšej optimálnej hodnote. Dĺžka tejto konvergence je rovnako variabilná a závisí od konkrétneho experimentu. Pre (EE-4) nebolo možné pozorovať nijakú zvláštnu konvergenciu, zatiaľ čo pre napr. (EE-2) bolo možné pozorovať priebeh ponášajúci sa na tvar hyperboly.

Od istej hodnoty parametra u_{max} sa už hodnota spotreby nijako signifikantne nemení a je rovná hodnote optimálnej spotreby, ktorú je možné získať behom optimalizačného algoritmu bez horného ohraničenia hnacej sily. Limity hnacej sily už nijako neobmedzujú výkon motorov a teda už generujú rovnaký výkon, tak ako optimálne riešenie požaduje. Teda spotreba je vtedy najnižšia možná, pretože motory sa už nemusia obmedzovať na žiadny limit a požadované ohraničenia splnia rýchlejšie.

Analýza vplyvu variabilnej hodnoty hmotnosti a odporu prostredia na výsledky modelu

Preskúmame závislosť výslednej optimálnej spotreby paliva od hmotnosti dronu. Toto skúmanie bolo vykonávané opakovaným riešením problému lineárneho programovania so vstupnými dátami experimentov (*E-1*) a (*EE-1*) – (*EE-4*) a rôznymi hodnotami vstupnej hmotnosti m v každom opakovaní pokusu, pričom tieto hodnoty boli pri každom z vyššie uvedených scenárov (*E-1*) a (*EE-1*) – (*EE-4*) vypočítané pre hodnoty m z množiny $\{1, 2, \dots, 20\}$.

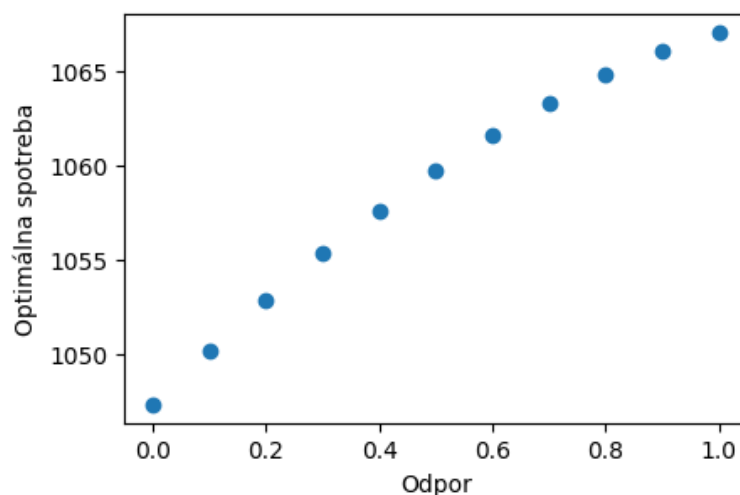
Vizualizácia výsledku pozorovania je na *Obrázku 13*. Vodorovná os predstavuje hodnoty parametra m a na zvislej osi sú výsledné množstvá spotrebovaného paliva pri optimálnej trajektórii, pričom body sú farebne odlíšené podľa vstupných dát (*E-1*) a (*EE-1*) – (*EE-4*).



Obrázok 13 Závislosť optimálnej spotreby paliva od hmotnosti

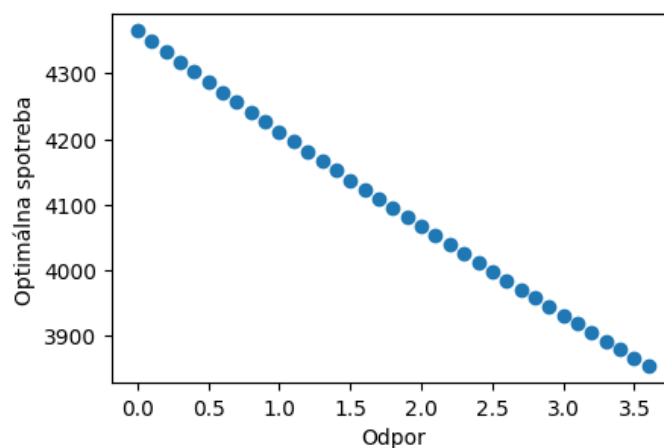
Z daného grafu je možné vyvodíť, že hodnota optimálnej spotreby paliva je lineárne závislá od hmotnosti dronu, pričom rýchlosť rastu hodnoty spotrebovaného paliva so stúpajúcou hmotnosťou je ovplyvnená vstupnými dátami. Najrýchlejší rast pozorujeme pri experimente (*EE-1*), naopak najpomalší rast pri experimente (*EE-2*).

Pozrime sa na ďalšiu skúmanú závislosť, a to vplyv odporu prostredia na optimálnu spotrebu paliva. Táto analýza bola realizovaná riešením optimalizačného problému s vyššie uvedenými vstupnými dátami a variabilnými hodnotami odporu α a hodnoty optimálnych riešení boli zaznamenané v nižšie uvedených grafoch. Parameter α bol vyberaný z intervalu, na ktorom nadobúda daný problém optimálne riešenie, pričom za hornou hranicou tohto intervalu sa stáva problém neprípustným.



Obrázok 14 Závislosť optimálnej spotreby paliva od parametra α – parametra simulujúceho odpor prostredia (E-I).

Na Obrázku 14 sa nachádza vizualizácia skúmanej závislosti pre vstupné dáta experimentu (E-I). Z grafu je možné usúdiť, že s rastúcim odporom rastie aj množstvo spotrebovaného paliva, avšak závislosť nie je úplne lineárna. Rýchlosť rastu spotreby paliva klesá so stúpajúcim odporom. Za pozornosť stojí aj to, že interval prípustnosti, teda interval hodnoty parametra α , pre ktorý má optimalizačná úloha riešenie, je obzvlášť malý. Už pre hodnoty vyššie ako 1 sú optimalizačné úlohy neprípustné. Percentuálny rozdiel medzi optimálnymi hodnotami spotreby v hraničných prípustných hodnotách α je nepatrný, približne 1 %.

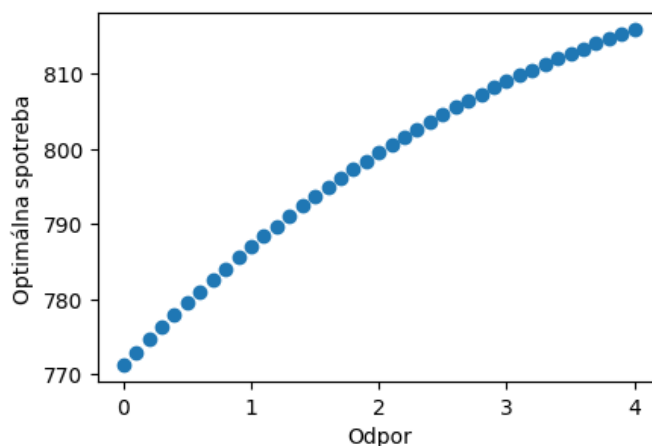


Obrázok 15 Závislosť optimálnej spotreby paliva od parametra α – parametra simulujúceho odpor prostredia (EE-I).

Na Obrázku 15 je graf závislosti spotreby paliva od odporu pre experiment (EE-I). Z danej vizualizácie vyplýva zaujímavý a prekvapivý vzťah sledovaných veličín, kde s rastúcim odporom klesá optimálna spotreba. V experimente (EE-I) je rozdiel medzi optimálnymi hodnotami v hraničných prípustných hodnotách α približne 10 %.

Tento vzťah je obzvlášť neintuitívny, berúc do úvahy jednak apriórne očakávanie, že vyšší odpor prostredia implikuje nutnosť generovania vyššieho výkonu k pohybu a taktiež aj výsledky analýzy vizualizované v Obrázku 14.

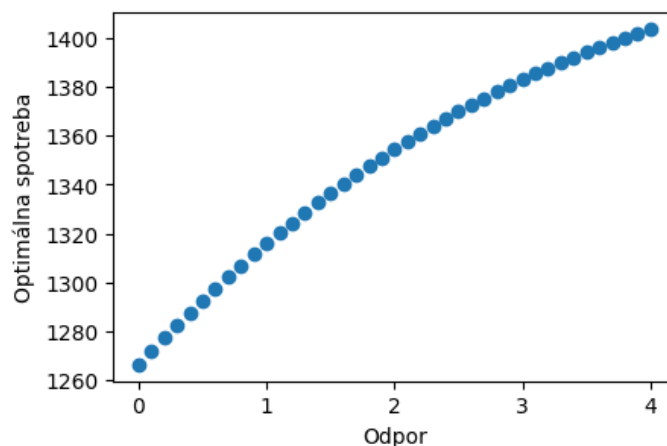
Závislosť je takmer perfektne lineárna a taktiež interval prípustnosti parametra α je väčší, až po hodnotu $\alpha = 3,6$.



Obrázok 16 Závislosť optimálnej spotreby paliva od parametra α – parametra simulujúceho odpor prostredia (EE-2).

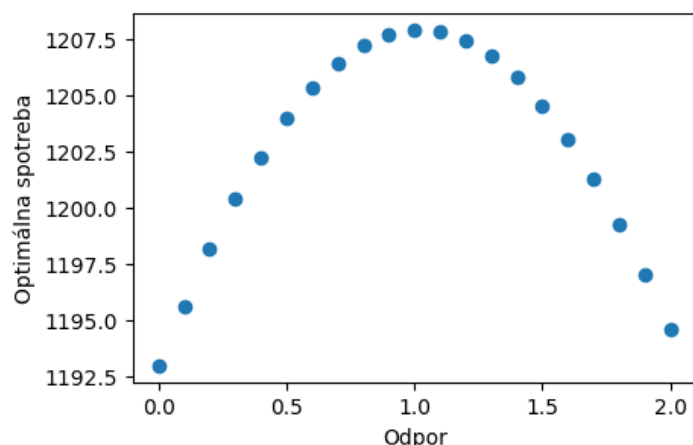
Obrázok 16 zobrazuje vplyv odporu na optimálnu spotrebu v experimente (EE-2). Tvar grafu nápadne pripomína vizualizáciu na Obrázku 14, ale na väčšom prípustnom intervale. V tomto prípade je prípustný interval najvyšší spomedzi všetkých, doteraz analyzovaných, experimentov s hornou hraničnou prípustnou hodnotou $\alpha = 4$.

V tomto prípade je rozdiel medzi optimálnou hodnotou spotreby pri $\alpha = 0$ a $\alpha = 4$ približne 42 jednotiek objemu paliva, čo od hodnoty optimálnej spotreby pre $\alpha = 0$ predstavuje nárast o približne 5,4 %.



Obrázok 17 Závislosť optimálnej spotreby paliva od parametra α – parametra simulujúceho odpor prostredia (EE-3).

Obrázok 17 vizualizuje skúmanú závislosť pre dáta (EE-3). Priebeh funkčných hodnôt grafu je veľmi podobný s vizualizáciami pre experimente (EE-2) (Obrázok 16) a (E-1) (Obrázok 14). Veľkosť intervalu prípustnosti parametra α je rovnako veľká, ako v prípade experimentu (EE-2). V tomto experimente je možné pozorovať nárast spotreby o necelých 11 % z optimálnej hodnoty v $\alpha = 0$ do $\alpha = 4,0$.



Obrázok 18 Závislosť optimálnej spotreby paliva od parametra α – parametra simulujúceho odpor prostredia (EE-4).

Posledným analyzovaným experimentom je (EE-4), ktorého závislosť optimálnej spotreby paliva od odporu prostredia je zobrazená na Obrázku 18. Tento graf má tvar podobný konkávnej parabole s maximom približne v hodnote parametra $\alpha = 1$. Minimálna spotreba je dosiahnutá v $\alpha = 0$.

V tomto prípade sa stretávame s dozaista najzaujímavejšou závislosťou optimálnej spotreby paliva od odporu prostredia. Zatiaľ čo pri všetkých experimentoch (E-1) a (EE-1) až (EE-3) je možné pozorovať rýdzo monotónny priebeh závislosti, experiment (EE-4) je výnimkou. Interval prípustnosti je druhý najnižší s hraničnou hodnotou $\alpha = 2$. Percentuálny rozdiel medzi najnižšou a najvyššou hodnotou optimálnej spotreby je v tomto prípade nepatrný, rovný približne 1,2 %.

Z tejto analýzy je možné vyvodiť záver, že vplyv odporu prostredia na spotrebované palivo v optimálnej trajektórii je výrazným spôsobom určený vstupnými dátami, keďže graf danej závislosti je *rastúci* v prípadoch (E-1), (EE-2) a (EE-3), *klesajúci* v prípade (EE-1) a v prípade (EE-4) pripomína *konkávnu parabolu*. Zaujímavé je tiež pozorovanie, že v experimente (E-1) sa optimalizačný problém stáva *nepřípustným* už pre $\alpha > 1$, a naopak, v experimentoch (EE-2) a (EE-3) je hranica *nepřípustnosti* približne $\alpha > 4$.

Obzvlášť zaujímavé je aj pozorovanie akéhosi „praktického“ vplyvu odporu prostredia na hodnotu optimálnej spotreby paliva. Zatiaľ, čo pri experimentoch (E-1) alebo (EE-4) pozorujeme takmer nepatrný nárast, resp. pokles pri zvýšení odporu prostredia, napr. v experimente (EE-3) pozorujeme až 11 % nárast spotreby. Aj v tomto prípade sa tento vplyv odporu prostredia značne odvíja od vstupných dát a plánovanej trajektórie. Toto pozorovanie implikuje ďalšiu možnú modifikáciu úlohy a to, že vzhľadom na prostredie je možné optimalizovať nastavenie dronu za účelom minimalizácie paliva.

Záverom je vhodné taktiež podotknúť, že zatiaľ čo pri analýze vplyvu hmotnosti je možné pozorovať lineárny vplyv vo všetkých pozorovaných experimentoch, pri analýzach vplyvu odporu prostredia nie je možné vysloviť jednotnú generalizáciu vzťahu pre všetky experimenty.

Všeobecne je možné očakávať približne konkávny rast spotreby so zvyšujúcim sa odporom prostredia, výnimku tvoria experimenty, kedy v porovnaní s ostatnými sa dron v nemalej miere nachádza vo *voľnom páde* – čiže vtedy, keď do požadovaných kontrolných bodov padá, využíva tiaž.

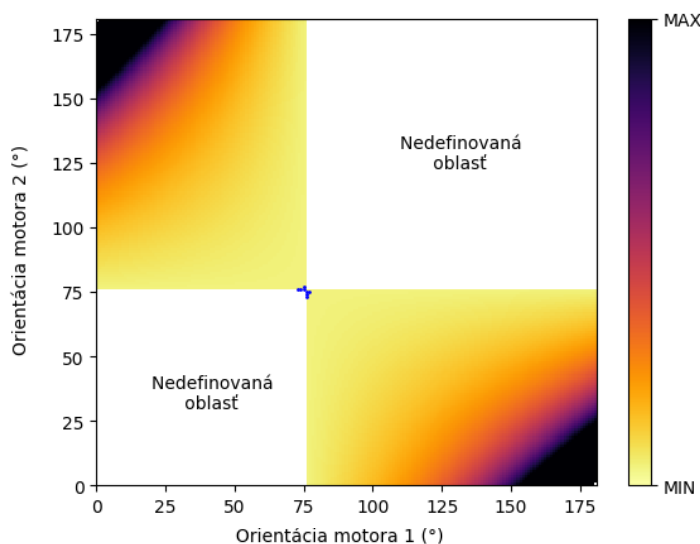
Analýza vplyvu orientácie dvoch motorov na optimálnu hodnotu spotreby paliva

Nazrime bližšie na to, akým spôsobom vplyva orientácia dvoch motorov vozidla na optimálnu hodnotu celkovej spotreby. Na účely tohto pozorovania využime vstupné dáta veľmi zjednodušeného a výpočtovo nenáročného experimentu:

$$T = 10 \quad \Delta t = 0,1 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad x_{max} = 5$$

$$J = \{9\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ak by sme uvažovali, že parametre m, α sú pevne dané a nemenné – predpokladajme, že podmienky prostredia nie je možné ovplyvniť, rovnako aj váhu vozidla, ale je možné meniť počiatočné nastavenia dronu (*orientácie jeho motorov*), tak potom takýmto spôsobom by bolo možné plne optimalizovať riadenie aj spotrebu s ohraňovaniami kontrolných bodov, ktoré v istom čase dron musí navštíviť.



Obrázok 19 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (vzorový experiment).

Závislosť optimálnej hodnoty spotreby paliva od orientácie dvoch motorov, čiže od hodnôt vstupných parametrov simulácie θ_1 a θ_2 , pre horeuvedený experiment je vyobrazená na Obrázku 19.

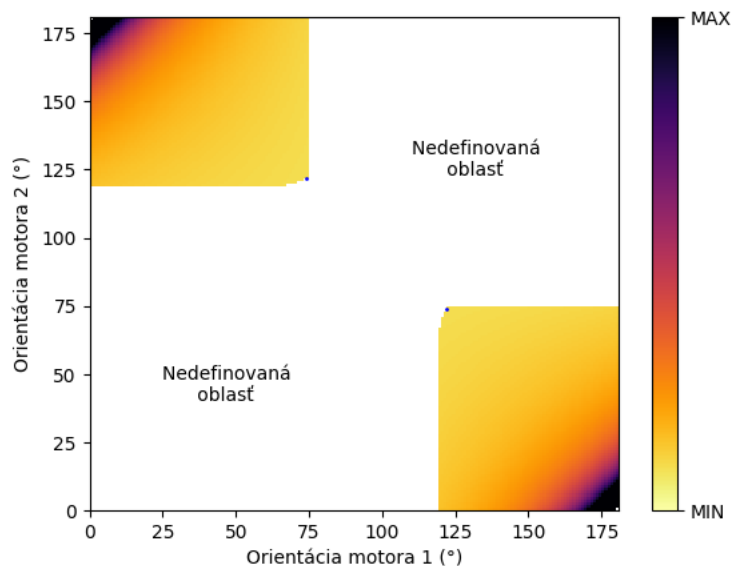
Z vizualizácie na Obrázku 19 je možné pozorovať viacero zaujímavých skutočností. Spomedzi 181^2 možných celočíselných dvojíc orientácie motorov dronu, nadpolovičná väčšina ($\approx 51,29\%$) nastavení nie je vyhovujúca – optimalizačný algoritmus nedokáže nájsť vyhovujúce riešenie. Táto oblasť v grafe na Obrázku 19 je pomenovaná ako „Nedefinovaná oblasť“.

Spomedzi možných nastavení existuje práve 8 bodov, v ktorých je optimálna hodnota spotreby, vzhľadom na orientáciu motorov, navzájom rovná s presnosťou 3 desatinných miest. Na Obrázku 19 sú vyobrazené modrými bodmi na strete dvoch definovaných oblastí.

Je nutné podotknúť, že cieľom tejto podkapitoly nie je generalizovať prístup k odhadu počtu možných vyhovujúcich nastavení orientácie motorov. Uvedené podiely vyhovujúcich a nevyhovujúcich nastavení pre dvojmotorové vozidlá zodpovedajú iba danému konkrétnemu

príkladu. Cieľom je poukázať na možné rozšírenie optimalizačného problému aj na hľadanie optimálneho nastavenia vozidla pomocou nastavenia orientácie motorov. Rozšírme tento prístup a analýzu na všetky približené experimenty v tomto reporte.

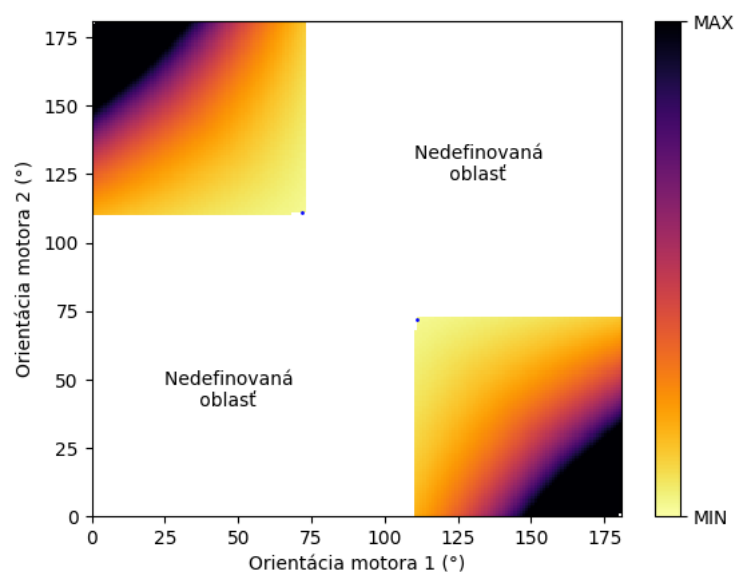
Bližšie nazrieme na závislosť optimálnej hodnoty spotreby paliva pre všetky možné celočíselné dvojice parametrov θ_1, θ_2 pre prvý zadáný experiment (*E-1*). Na *Obrázku 20* je vyobrazená obdobná vizualizácia ako pre experiment v úvode podkapitoly.



Obrázok 20 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (E-1).

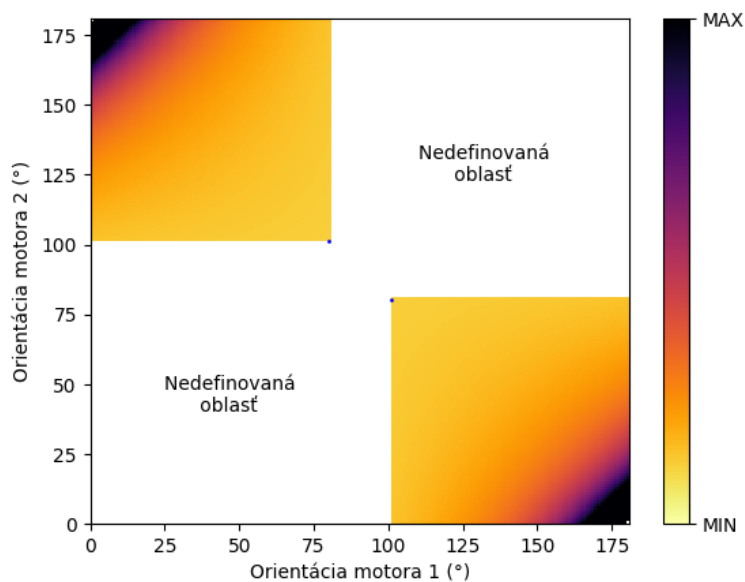
Je zjavné, že v porovnaní s *Obrázkom 19* je prípustná množina vyhovujúcich dvojíc uhlov, vyjadrujúcich orientáciu motorov, značne menšia, ako pre vzorový prípad vyššie. V prípade (*E-1*) predstavuje prípustná množina dvojíc uhlov iba 28,3 %. V grafe na *Obrázku 20* je rovnako vyznačená dvojica bodov, v ktorých nadobúda spotreba paliva optimálnu hodnotu vzhľadom na parametre θ_1, θ_2 (podobne ako vo vizualizácii *Obrázok 19* s presnosťou na 3 desatinné miesta). Za spomenutie stojí tá skutočnosť, že optimálna hodnota pre zadané parametre $(\theta_1, \theta_2) = (50^\circ, 120^\circ)$, ktoré boli udané vo vstupnom súbore zadania projektu, je vyššia, ako vo vyznačených bodoch. Tým pádom existuje iné nastavenie orientácie motorov, pri ktorom dokáže dron navštíviť všetky zadané body s nižšou spotrebou. Je vhodné podotknúť, že rozdiel medzi spomenutými optimálnymi hodnotami spotreby je približne 12,8 %.

Vizualizácia závislosti optimálnej spotreby od orientácie motorov pre experiment (*EE-1*) je vizualizovaná na *Obrázku 21*. V tomto experimente prípustná množina uhlov orientácie motorov predstavuje približne 31,5 %



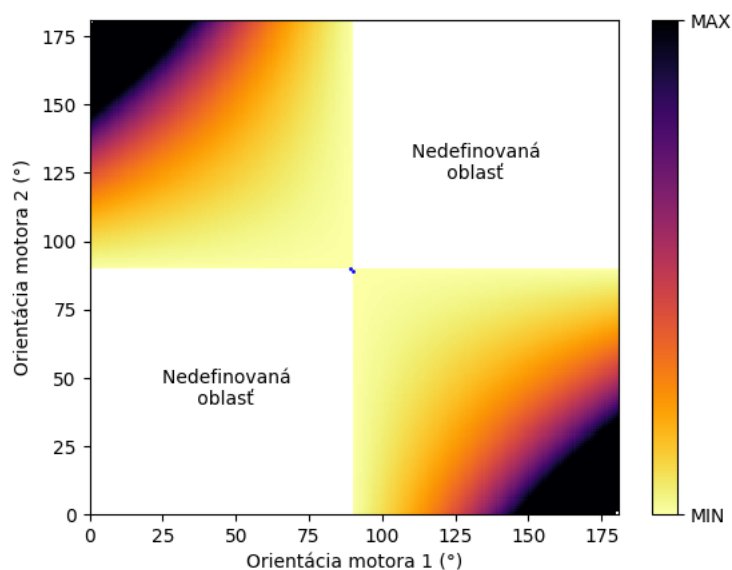
Obrázok 21 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (EE-1).

Pre experiment (*EE-2*) predstavuje obdobnú vizualizáciu *Obrázok 22* nižšie. V experimente (*EE-2*) približne 39,5 % predstavuje prípustné hodnoty, v ktorých optimalizačný algoritmus dokáže nájsť riešenie úlohy.



Obrázok 22 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (EE-2).

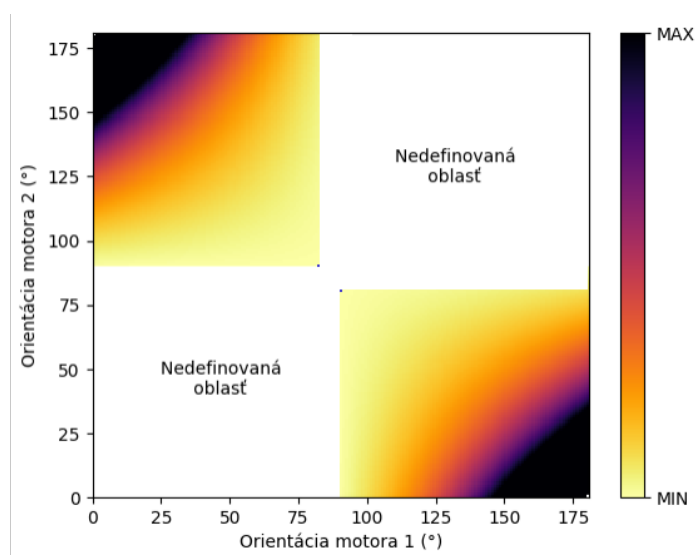
Vizualizácia závislosti pre vstupné dáta reprezentujúce experiment (EE-3) je vyobrazená na Obrázku 23. V tomto prípade množina prípustných dvojíc tvorí približne polovicu z celkovej množiny možných celočíselných dvojíc parametrov.



Obrázok 23 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (EE-3).

V tomto prípade za spomenutie stojí to, že najlepšia možná dvojica parametrov (θ_1, θ_2) je $(90^\circ, 89^\circ)$, resp. $(89^\circ, 90^\circ)$, teda takmer presný stred grafu.

Ako posledné, uvádzame závislosť pre experiment (EE-4) (Obrázok 24), v ktorej je možné pozorovať, že prípustná množina parametrov tvorí 44,05 % z celkovej množiny možných dvojíc parametrov.



Obrázok 24 Závislosť optimálnej spotreby paliva od orientácie dvoch motorov (EE-4).

Zhrňajúc získané dáta ohľadom závislosti optimálnej spotreby je možné vyvodiť viacero, nie však nutne kauzálnych, dôsledkov o optimalizačnej úlohe a samotnom optimalizačnom algoritme.

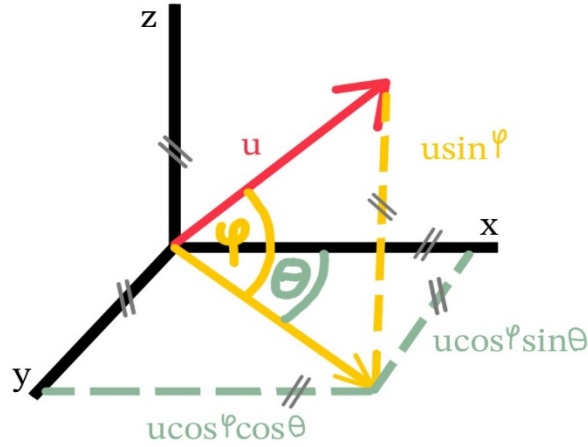
V prvom rade, vo väčšine pozorovaných experimentov (*EE-1*) – (*EE-4*) a (*E-1*) pozorujeme dve, navzájom symetrické, dvojice (θ_1, θ_2) , v ktorých sa s presnosťou troch desatinných miest nadobúda „najlepšia“ optimálna hodnota spotreby paliva. Výnimku tvorí vzorový prvý experiment, kde sa s danou presnosťou nadobúda najlepšia hodnota spotreby až v 8 rôznych dvojiciach. Zrejme je jasné, že vo všetkých prípadoch sú výsledky pre parametre (θ_1, θ_2) a (θ_2, θ_1) rovnaké – pozorujeme akúsi formu symetrie, čo koniec-koncov je ľahko pozorovateľné vo všetkých vizualizáciách (*Obrázok 19* – *Obrázok 24*).

Za spomenutie stojí to, že vo všetkých uvedených experimentoch sa v okrajových hodnotách, kde jednak $(\theta_1 \rightarrow 0^\circ, \theta_2 \rightarrow 0^\circ)$, resp. $(\theta_1 \rightarrow 180^\circ, \theta_2 \rightarrow 180^\circ)$, spravidla nadobúdajú najhoršie výsledky optimalizácie, zatiaľ čo na opačných okrajoch definovaných obdĺžnikov v \mathbb{R}^2 sa nadobúdajú najlepšie, zrejme aj optimálne, hodnoty. V tomto prípade možno povedať, že najlepšia dvojica parametrov (θ_1, θ_2) je vždy najbližšie možné k stredu, resp. k bodu $(90^\circ, 90^\circ)$.

Záverom je zjavné, že obrovský vplyv na výsledok optimalizácie má aj orientácia motorov a preukazuje sa, že zaujímavým rozšírením pôvodnej úlohy môže byť aj hľadanie najlepšej orientácie motorov pre konkrétne situácie.

Rozšírenie optimalizačného algoritmu pre \mathbb{R}^3 so 4 motormi

V prvom rade je nutné si dodefinovať tretiu zložku sily, pre lepšiu ilustráciu a odvolávanie nám pomôže ilustrácia na Obrázku 25:



Obrázok 25 Orientačný diagram vzťahov pôsobiacich vektorov síl a orientácií vektorov v \mathbb{R}^3

Z Obrázku 25 je možné vyvodiť vzťah pre silu – pomocou jedného motora, $f_k \in \mathbb{R}^3$:

$$f_k = \begin{bmatrix} f_k^{(1)} \\ f_k^{(2)} \\ f_k^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ u \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ u \sin(\varphi) - mg \end{bmatrix}$$

A teda pre 4 motory platí tento vzťah:

$$f_k = \begin{bmatrix} f_k^{(1)} \\ f_k^{(2)} \\ f_k^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 u_i \cos(\varphi_i) \sin(\theta_i) \\ \sum_{i=1}^4 u_i \cos(\varphi_i) \cos(\theta_i) \\ \sum_{i=1}^4 (u_i \sin(\varphi_i)) - mg \end{bmatrix}$$

Ostatné rekurzívne vzťahy sú len doplnené o tretiu zložku:

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} v_{k+1}^{(1)} \\ v_{k+1}^{(2)} \\ v_{k+1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(1)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(1)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(2)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(2)} \\ e^{-\alpha \Delta t} v_k^{(3)} + \frac{\Delta t}{m} f_k^{(3)} \end{bmatrix}$$

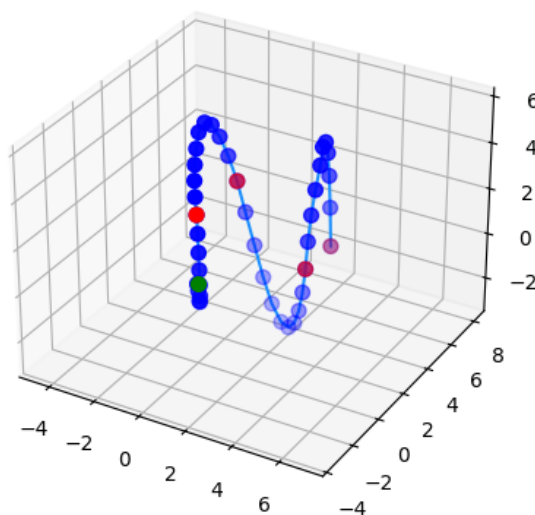
$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \\ x_{k+1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} + \Delta t v_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} + \Delta t v_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} + \Delta t v_k^{(3)} \end{bmatrix}$$

Teraz, majúť sformulovanú úlohu riadenia dronu so štyrmi motormi, je možné riešiť úlohy v \mathbb{R}^3 . Funkcionalitu optimalizačného algoritmu demonštrujeme na niekoľkých vzorových experimentoch.

Prvým experimentom je optimalizácia trajektórie, ktorá je podobná špirále. Zvolili sme intuitívne priamočiare natočenie motorov – „sever, juh, východ, západ“, teda každých 90° . Keďže sa chceme priblížiť čo najviac k reálnym dronom, zvolili sme takéto natočenie a zadali sme maximálny výkon (*parameter* u_{max}). Kompletné vstupné dáta pre tento experiment sú teda:

$$\begin{aligned} T = 41 \quad \Delta t = 0,25 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 0^\circ \quad \theta_2 = 90^\circ \quad \theta_3 = 180^\circ \quad \theta_4 = 270^\circ \quad \varphi_i = 65^\circ \\ x_{max} = 6 \quad u_{max} = 4,5 \\ J = \{10,20,30,40\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3D-1)$$

Optimálna hodnota spotreby paliva je modelovaná na hodnotu 405,92 jednotiek paliva. Optimalizovaná trajektória je na *Obrázku 26*.

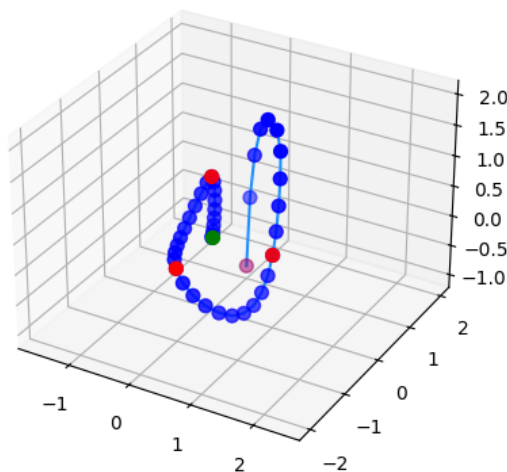


Obrázok 26 Vizualizácia optimálnej trajektórie letu v \mathbb{R}^3 pre experiment (3D-1)

Zaujímavou obmenou a alternatívou k reálnym, v praxi používaným dronom je optimalizácia vozidla s 3 motormi. Experiment zohľadňujúci obdobnú situáciu je definovaný ako:

$$\begin{aligned} T = 41 \quad \Delta t = 0,25 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \theta_1 = 0^\circ \quad \theta_2 = 120^\circ \quad \theta_3 = 240^\circ \quad \varphi_i = 65^\circ \\ x_{max} = 6 \quad u_{max} = 4,5 \\ J = \{10,20,30,40\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3D-2)$$

Optimálna hodnota spotreby paliva je modelovaná na hodnotu 408,5 jednotiek paliva. Výsledná trajektória je na *Obrázku 27*.



Obrázok 27 Vizualizácia optimálnej trajektórie letu v \mathbb{R}^3 pre experiment (3D-2)

Z *Obrázku 27* je teda zjavné, že dronu sa podarilo ísť do každého smeru, takže postačujú aj 3 motory pre to, aby dron bol plne funkčný a prakticky využiteľný.

Posledným experimentom sme kontrolovali správnosť vzt'ahov. Cieľom bolo demonštrovať, že sa dron nedokáže pohybovať do konkrétneho smeru, majú všetky motory sú natočené na opačnú stranu. Demonštrujúci experiment je daný ako:

$$T = 41 \quad \Delta t = 0,25 \quad m = 1 \quad \alpha = 1 \quad \varphi_1 = 0^\circ \quad \varphi_2 = 0^\circ \quad \varphi_3 = 90^\circ \quad \varphi_4 = 90^\circ \quad \theta_i = 0^\circ$$

$$x_{max} = 6$$

$$J = \{40\} \quad x_j = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

V experimente tomto sme mali všetky motory orientované v smeroch na x^+ , resp. z^+ (*doprava, resp. nahor*). Táto úloha je neprípustná – *správne*. Tým pádom sa naše očakávanie potvrdilo.

Alternatívne, v prípade ponechania rovnakej množiny J a zmenou $x_j = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, úloha by bola riešiteľná.

Zhrňajúc všetky získané poznatky, konkrétne z implementácií optimalizácie pre scenáre v \mathbb{R}^2 aj \mathbb{R}^3 , iba poznamenáme, že implementácia pre \mathbb{R}^2 je len špecifickým prípadom optimalizácie v \mathbb{R}^3 . Rozdielom je, že v \mathbb{R}^2 parametre $\varphi_i = 0$ a vplyv gravitácie, teda členov $-mg$, je len v jednej zložke vektorov premenných. Vďaka tomuto zovšeobecneniu bola tým pádom implementácia priamočiara a výsledný model je obzvlášť univerzálny a ľahko použiteľný pre rôzne scenáre optimalizácie.