Kontrollskrivning 3

1. Låt $\mathrm{P}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

   Ange polynomet $\mathrm{P}(x)$ som polynom brukar skrivas och fastställ nollställena, alltså lösningsmängden för ekvationen $\mathrm{P}(x) = 0$.

   Lösning:
   Här verkar det lovande att börja med radreducering. Subtrahera rad 1 från rad 2, subtrahera 2 x rad 1 från raderna 3 och 4.

   $$\mathrm{P}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

   Sedan kan vi utveckla efter rad 2 eller kolumn 1, eller bara börja med att flytta ut faktorn (1-x^2) ur determinanten:

   $$\mathrm{P}(x) = (1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$ och sedan subtrahera rad 2 från raderna 3 och 4, varefter vi subtraherar rad 3 från rad 4 och får en diagonal matris:

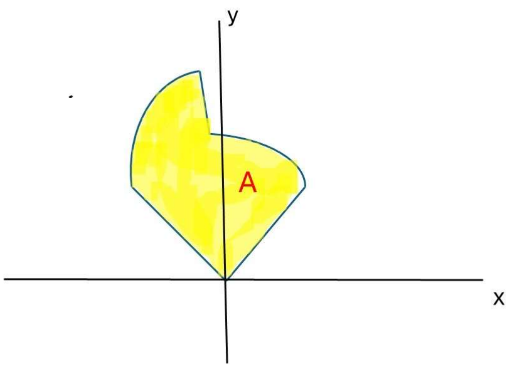
   $$\mathrm{P}(x) = (1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}$$
   .

   Determinanten för en triagonal matris är produkten av diagonalelementen, så:

   $\mathrm{P}(x) = -3(x^2-1)x^2-4)$ och lösningarna till $\mathrm{P}(x) = 0$ är $x = \pm 1$ och $x = \pm 2$.

   $\mathrm{P}(x) = -3x^4 + 15x^2 - 12.$

2. Föremålet i figuren har arean A. Vi önskar göra en sammansatt avbildning som först skjuvar objektet genom $\mathbf{x} \to S\mathbf{x}$, där $S = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sedan ska det sträckas ut en faktor 2 i x-led med hjälp av matrisen L_x. Därefter ska objektet roteras vinkeln ϕ i positiv led runt origo medelst matrisen R. Slutligen ska objektet sträckas ut en faktor 3 i y-led med hjälp av matrisen L_y.



(a) Ange matriserna L_x, R och L_y.

(b) Ange en matris för hela den sammansatta avbildningen, uttryckt i S, L_x, R och L_y, Du behöver inte genomföra matrismultiplikationerna.

(c) Vilken blir arean för den resulterande bilden av objektet?

Lösning:
För att finna matriserna noterar vi hur basvektorerna transformeras, eftersom bilderna av basvektorerna är kolumner i transformationsmatrisen, Vi finner då att:

$$L_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det L_x = 2$$

$$R = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad \det R = cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$$

$$L_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \det L_y = 3$$

$\det S = 1$

Matrisen för den sammansatta avbildningen kan skrivas $L_y R L_x S$ och arean för den nya figuren blir
$A' = (det L_y)(det R)(det L_x)(det S)A = 6A$

3. A= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Finn en bas för matrisens nollrum, Nul A.
   (b) Finn en bas för matrisens kolumnrum, Col A.
   (c) Finn en bas för matrisens radrum, Row A.

   Lösning:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$.

   De två första kolumnerna är pivotkolumner, x_3 och x_4 är fria variabler. Lösningsmängden för det homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ blir alltså:

   $\mathrm{x} = \mathrm{x}_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{x}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och dessa två vektorer bildar en bas för nollrummet.

   b) Som bas för kolumnrummet väljer vi de båda pivotkolumnerna i A:

   $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

   Obs att det är pivotkolumnerna i A som spänner upp Col A, inte pivotkolumnerna i någon av de reducerade matriserna.

   c) Som bas för radrummet kan väljas de rader i den reducerade trappstegsmatrisen som har pivotelement, alltså
   [1 0 3 0] och [0 1 0 2].

4. Finn en bas för lösningsrummet till differensekvationen:

$$6\ y_{k+2} - y_{k+1} - y_k = 0. \tag{1}$$

   Det behöver visas att basvektorerna verkligen är lösningar, att de är tillräckligt många för att spänna upp lösningsrummet och att de är linjärt oberoende.

   Lösning:

Gör ansatsen att $\{y_k\} = \{r^k\}$ för något r.
Insatt i ekvationen ger detta: $r^k(6r^2 - r - 1) = 0.$.
För icke-triviala lösningar krävs att $6r^2 - r - 1 = 0$.
$r^2 - \frac{1}{6}r - \frac{1}{6} = 0$.

$r^2 - \frac{1}{6}r + \frac{1}{144} = \frac{1}{6} + \frac{1}{144} = \frac{25}{144}$

$(r + \frac{1}{12})^2 = \frac{25}{144}$

$(r + \frac{1}{12}) = \pm\frac{5}{12}$

Rötterna blir alltså $r = -\frac{1}{3}$ och $r = \frac{1}{2}$. Det ger oss för differensekvationen lösningarna: $\{y_k\} = \{(\frac{-1}{3})^k\}$ och $\{y_k\} = \{(\frac{1}{2})^k\}$ (och linkärkombinationer av dem). Vi vet att lösningsrummet ska ha dimensionen 2 och vi har funnit två lösningar, så antalet är rätt. Lösningarna är också linjärt oberoende, eftersom de inte är proportionella mot varandra. Alltså kan $\{\{(\frac{1}{2})^k\}, \{(\frac{-1}{3})^k\}\}$ användas som bas för lösningsrummet.

5. Är polynomen $\{1 - t, 1 + t, 1 - t^2\}$ en bas för $\mathbb{P}_2$ (det linjärarummet av polynom av grad högst 2)?

Lösning:

Antingen kan vi arbeta direkt med polynomen och ställa upp ekvationen för linjärt beroende:
$c_1(1 - t) + c_2(1 + t) + c_3(1 - t^2) = 0$. Vi finner då ganska lätt att den enda lösningen är $c_1 =_2= c_3 = 0$, så polynomen är linjärt oberoende.

Eller också kan vi arbeta med koordinatvektorerna i standardbasen för polynom: $\{1, t, t^2\}$. Koordinatvektorerna för de tre polynomen blir då:
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. För att se att de är linjärt oberoende kan vi t.ex. beräkna determinanten

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$=-1$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=-2, skild från noll,

alltså är kolumnvektorerna linjärt oberoende.

6. För två olika baser $\mathcal{A} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}\}$ och $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ i ett vektorrum gäller:

$$\begin{aligned}\mathbf{a_1} &= 2\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + 2\mathbf{b_3}\\ \mathbf{a_2} &= \mathbf{b_1} + \mathbf{b_3}\\ \mathbf{a_3} &= \mathbf{b_1} + 2\mathbf{b_2}\end{aligned}$$

Vilka är koordinaterna i basen $\mathcal{A}$ för $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ och vad blir koordianterna med avseende på basen $\mathcal{B}$ för $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}_{\mathcal{A}}$?

Lösning:

Antingen kommer vi ihåg det teorem för koordinatbyte som säger att

$[x]_{\mathcal{B}} = P\,[x]_{\mathcal{A}}$
där $P = [[\mathbf{ax_1}]_{\mathcal{B}} \ [\mathbf{a_2}]_{\mathcal{B}} \ [\mathbf{a_3}]_{\mathcal{B}}]$, alltså där kolumnvektorerna i P är basvektorerna i $\mathcal{A}$ uttryckta i $\mathcal{B}$-koordinater.

Då är det lätt att se att P$=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}$ i det givna fallet.
Det blir då lättast att besvara den andra frågan först, eftersom

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}11\\10\\7\end{bmatrix}$$

För att svara på den första frågan, där koordinatvektorn är given i $\mathcal{B}$-koordinater, måste vi lösa ett ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&1&0\end{bmatrix}[x]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Det gör vi som vanligt med radreducering i den utökade systemmatrisen:

$$\begin{bmatrix}2&1&1&2\\1&0&2&3\\2&1&0&4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&7\\0&1&0&-10\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Alltså blir $\left[x\right]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$
Man kan förstås också beräkna inversen

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ och sedan:

$\left[x\right]_{\mathcal{A}} = P^{-1}\left[x\right]_{\mathcal{B}}$
Eller, om man inte kommer ihåg koordinatbytesteoremet riktigt, får man utgå från vektorformuleringen, Att $\mathcal{A}$-koordinaterna är

$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}$ betyder att vektorn kan skrivas

$2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3 = 2(2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3) + 3(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3) + 4(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) = 11\mathbf{b}_1 + 10\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3$, så att $\mathcal{B}$-koordinaterna åter blir

$\left[x\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$ osv. För att gå åt andra hållet måste vi åter lösa ett ekvationssystem.