IX1303 VT24, KS4 Lösningar

1 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Egenvärden, λ : $(B - I\lambda)\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \det(B - I\lambda) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bryt ut $(1-\lambda)$ från 1:a och 2:a raden

$$(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Utveckla determinanten kring rad 1

$$(1-\lambda)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 0 \cdot |\ldots| + 0 \cdot |\ldots| + 0 \cdot |\ldots| = 0$$

Utveckla determinanten kring kolum 1.

$$(1-\lambda)^2 \cdot 1 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 0 |\ldots| + 0 \cdot |\ldots| \right) = 0$$

$$(1-\lambda)^2 (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

a) Egenvärden: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ är ett av egenvärdena!

b) Dubbelrot ; $\lambda = 1$, från $(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)(1-\lambda)$,

betyder att $\lambda = 1$ har multipliciteten 2.

c) Egenrummet till B är mängden vektorer, $\bar{x}$, så att $B\bar{x} = \lambda\bar{x}$

$(B - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$

$$\lambda = \lambda_1 = 1 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 5 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

fria variabler

$x_1 = t$

$x_2 = s$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t \\ -t/2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Svar</u>: Nollrummet till B spänns upp av $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

2. Sannolikheten till sol dag k: x_k

Sannolikheten till molnigt dag k: y_k

Sannolikheten till regn dag k: z_k

Tillståndsvektor: $\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$

Övergångsmatris: $$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/9 & 1/6 \\ 1/9 & 2/3 & 1/6 \\ 2/9 & 2/9 & 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Dynamisk ekvation: $\bar{x}_{k+1} = P\bar{x}_k$

Lotta's födelsedag: $k=0$

$\Rightarrow$ två dagar tidigare: $k=-2$

Regnar på dag $k=-2$: $\bar{x}_{k-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Vi vet att det inte är soligt: $x_{k-2}=0$
- Vi vet att det inte är molnigt: $y_{k-2}=0$
- Vi vet att det <u>är</u> regn : $z_{k-2}=1$

Vad är $\bar{x}_k$ på Lotta's födelsedag, $k=0$?

$$\bar{x}_0 = P\bar{x}_{-1}$$

$$\bar{x}_{-1} = P\bar{x}_{-2} \Longrightarrow \bar{x}_{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/9 & 1/6 \\ 1/9 & 2/3 & 1/6 \\ 2/9 & 2/9 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_0 = P\bar{x}_{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \\ 56 \end{bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 28 \end{bmatrix}$$

<u>Svar</u>: Initialvillkor: $\bar{x}_{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sannolikheter: $\bar{x}_0 = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 28 \end{bmatrix}$

b) Regnar på Lotta's 6:års dag $\Rightarrow$ Nytt begynnelsevillkor $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sannolikheter för Lotta's 7:års dag:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 år efter} \\ \text{6:års dagen}}}{\bar{x}_{365}} = A^{365} \bar{x}_0$$

Vi kan inte räkna A^{365} ... det skulle ta väldigt lång tid.

Men, om vi kan hitta egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ och egenvektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ så är den allmäna lösningen:

$$\bar{x}_{365} = c_1 \lambda_1^{365} \bar{v}_1 + c_2 \lambda_2^{365} \bar{v}_2 + c_3 \lambda_3^{365} \bar{v}_3 \qquad (1)$$

där c_1, c_2, c_3 bestäms av begynnelse villkoret.

Men, exponenten 365 är väldigt stor, så

$$(\text{"ett tal"})^{365} \gg (\text{"ett lite mindre tal"})^{365} \qquad (*)$$

Exempel: Jämför $\lambda_1 = 0{,}11$ & $\lambda_1 = 0{,}1$ (inte egenvärden, men exempel som illustrerar olikheten $(*)$)

$$(\lambda_1)^{365} = 0.11^{365}$$
$$= 1.1^{365} \cdot 0.1^{365}$$
$$= 1.1^{365} \cdot (\lambda_2)^{365} \approx \underline{\underline{1.28 \cdot 10^{15}}} \; (\lambda_2)^{365}$$

... egenvärdet.

Så vi behöver bara ta med termen med största egenvärdet.

Enligt Lay, sid 340, är största egenvärdet till en stochastisk matris 1.

Låt $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 < 1 \,, \lambda_3 < 1 \Rightarrow$

$$\bar{x}_{365} = c_1 \cdot 1^{365} \cdot \bar{v}_1 + c_2 \underbrace{\lambda_2^{365}}_{\text{jättelitet!}} \bar{v}_2 + c_3 \underbrace{\lambda_3^{365}}_{\text{jättelitet!}} \bar{v}_3$$

$$\bar{x}_{365} \approx c_1 \bar{v}_1 \,, \qquad P\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 \Rightarrow (P - 1 \cdot I)\bar{v}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{18}}_{\text{Ta bort genom att multiplicera med 18}} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 2 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \bar{v}_1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2 + 3 \cdot R1 \\ R3 - 2 \cdot R1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & -12 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R2/4 \\ R3 + R2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2 \cdot R1 + 3R2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{pivot} & & \text{fri} \end{array}$$

$$\Rightarrow z_k = t \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/4\, t \\ 3/4\, t \\ t \end{bmatrix} = \frac{t}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Sannolikheterna för 7:års dagen

$$\bar{X}_{365} \approx c_1 \bar{v}_1 = c_1 \frac{t}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Men summan av sannolikheterna måste vara 1.

$$c_1 \frac{t}{4} \cdot 3 + c_1 \frac{t}{4} \cdot 3 + c_1 \frac{t}{4} 4 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 \frac{t}{4} = 1/10$$

$$\Rightarrow \bar{X}_{365} \approx \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Svar: Sannolikheten för sol är: 30%

Sannolikheten för mulnigt är: 30%

Sannolikheten för regn är: 40%

③ Allmäna lösningen är en linjärkombination av egenfunktionerna: $e^{\lambda_i t} \bar{v}_i$

Här är λ_i egenvärden och $\bar{v}_i$ egenvektorer.

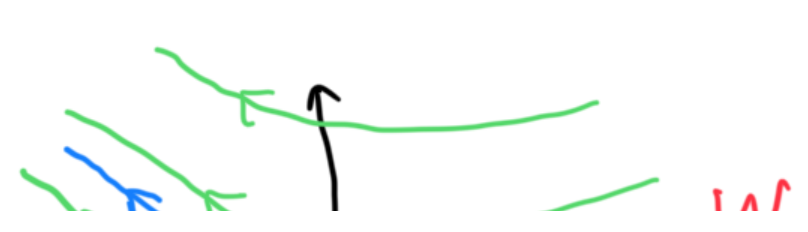
a) Svar: $\bar{z}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

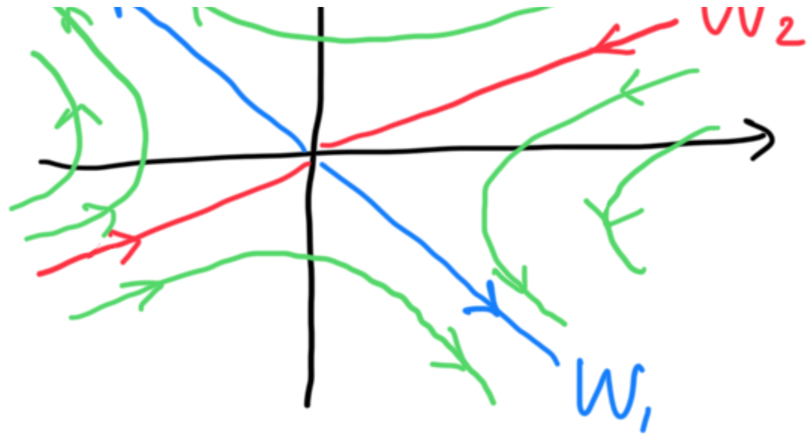
b) Egenrummet till $\lambda_1 = 2$ spänns upp av: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow W_1 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Egenrummet till $\lambda_2 = -1$ spänns upp av $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow W_2 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$





c) <u>Svar:</u> Sadelpunkt, en egenfunktion minskar med tiden och en ökar med tiden.

d) Om λ_1 byte tecken till $\lambda_1 = -2$ så kommer båda egenfunktionerna minska med tiden

<u>Svar:</u> Attraktor

(4) Egenvarden, λ, och egenvektoren, $\bar{v}$, uppfyller:

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$$

Icketriviala lösningar finns om

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Beräkna determinaten:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)\cdot 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = 1 \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}$$

$$\lambda_1 = 1 + i$$
$$\lambda_2 = 1 - i$$

Egenvektorer: $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right]$$

– För $\lambda = \lambda_1 = 1+i$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-(1+i) & -1 & 0 \\ 1 & 1-(1+i) & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \; R1 \cdot i$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \; R2 - R1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Enligt: Om λ_1 och λ_2 är komplexkonjugat, d.v.s. $\lambda_1 = \lambda_2^*$, så är $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ komplexkonjugat

$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Svar: $\lambda_1 = 1+i, \; \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

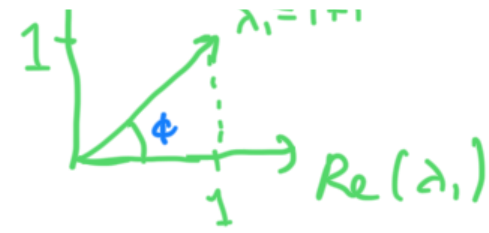
$\lambda_2 = 1-i, \; \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

b) Enligt Lay teorem 9 (sid 309), samt exempel (sid 308).

Svar
$$\begin{cases} a = Re(\lambda_1) = 1 \\ b = Im(\lambda_1) = i \\ r = |\lambda_1| = \sqrt{Re(\lambda_1)^2 + Im(\lambda_1)^2} = \sqrt{2} \\ \phi = \underset{\text{vinkeln}}{\arg}(\lambda_1) = \arg(1+i) = \pi/4 \end{cases}$$

$Im(\lambda_1)$

i komplexa planet



$\arg(1+i) = \phi = 45° = \pi/4$ rad

(5) $W = \text{Span}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\})$

Är $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ ortogonala?

$$\bar{v}_1 \circ \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = 1+2-1 = 2 \Rightarrow \text{Nej!}$$

Ortogonal bas, $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \circ \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \circ \bar{u}_1}\bar{u}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_2 \circ \bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = 2 \\ \bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = 3 \end{array} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\5\end{bmatrix}$$

$$\text{Proj}_W(\bar{x}) = \frac{\bar{x} \circ \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \circ \bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{x} \circ \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \circ \bar{u}_2}\bar{u}_2$$

$$\bar{x} \circ \bar{u}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = 2$$

$$\bar{x} \circ \bar{u}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} \circ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\5\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$\bar{u}_1 \circ \bar{u}_1 = 3$$

$$\bar{u}_2 \circ \bar{u}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\5\end{bmatrix} \circ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{9}(1+16+25) = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

$$\text{Proj}_W(\bar{x}) = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} + \frac{-1/3}{14/3} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-4\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{14 \cdot 3}\begin{bmatrix}28-1\\-28+4\\-28-5\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{42}\begin{bmatrix}27\\-24\\-33\end{bmatrix}$$

⑥

$$\bar{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Linjära höljet, $W = \text{Span}(\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\})$

Ortogonalbas till W: $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$

Enligt Gram-Schmidt:

$$\bar{u}_1 = \bar{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \bar{b} - \frac{\bar{b}\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 = \begin{cases} \bar{b}\cdot\bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} = 3 \\ \bar{u}_1\cdot\bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} = 6 \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_3 = \bar{c} - \frac{\bar{c}\cdot\bar{u}_1}{\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1}\bar{u}_1 - \frac{\bar{c}\cdot\bar{u}_2}{\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2}\bar{u}_2$$

$$\begin{cases} \bar{c}\cdot\bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} = 2 \\ \bar{c}\cdot\bar{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix} = 3 \\ \bar{u}_2\cdot\bar{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix} = 18/4 = 9/2 \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{3}{9/2}\cdot\frac{1}{2}}_{3/9}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}18-6-6\\18-12-0\\18+6-6\\18+0-24\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix}6\\6\\18\\-6\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\3\\-1\end{bmatrix}$$

Svar: En ortogonalbas är: $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\3\\-1\end{bmatrix}\right\}$