Kontrollskrivning 1

1. Vad är projektionen av vektorn $\mathbf{v} = [2, -1, 1]$ på normalen till planet $3x - y + 2z = 4$?

   Lösning: Den allmänna ekvationen för ett plan är $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, där $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ är planets normalvektor, $\mathbf{r} = [x, y, z]$, och $\mathbf{r}_0$ är en känd punkt i planet. Ekvationen för planet kan därmed skrivas som $n_1x + n_2y + n_3z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$. Om vi nu jämför med den givna ekvationen för planet ser vi att $n_1 = 3$, $n_2 = -1$, och $n_3 = 2$. Därmed kan vi skriva normalvektorn som $\mathbf{n} = [3, -1, 2]$.

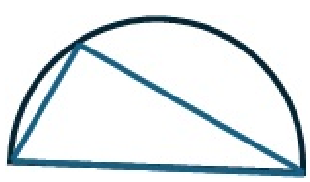
   Geometriskt vet vi att längden hos en projektionen ges av längden på den projicerade vektorn gånger cosinus av vinkeln, α mellan den projicerade vektorn och normalvektorn, $|\mathbf{v}| \cos \alpha$. Notera att skalärprodukt kan skrivas $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{v}||\mathbf{n}| \cos \alpha$. Därmed får vi projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{n}$ från

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}| \cos \alpha &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\
&= \frac{[2, -1, 1] \cdot [3, -1, 2]}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\
&= \frac{9}{\sqrt{14}}
\end{aligned}
$$

   För att skapa den projicerade vektorn måste vi multiplicera med enhetvektorn i riktningen för $\mathbf{n}$. Här kallar vi denna enhethetsvektor $\hat{n} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}| = \mathbf{n}/\sqrt{14}$.

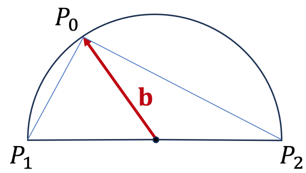
   SVAR: Projektionen är $\frac{9}{14}[3, -1, 2]$.

2. En triangel är inskriven i en halvcirkel som i figuren.



   Visa med hjälp av reglerna för vektoraddition och skalärprodukt att triangelns toppvinkel är rät. Ledning: användbara regler för skalärprodukten kan bl.a vara att $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ samt att kvadraten på beloppet (längden) för en vektor $\mathbf{w}$ är $|\mathbf{w}|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$.

   Lösning: Här inför en punkterna P_0,P_1 och P_2, samt vektorn $\mathbf{b}$, enligt figuren nedan. Om vinkeln vid punkten P_0 är rät (90 grader) så måste skalärprodukten $\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_2P_0}$ vara noll.



Att alla tre punkterna ligger på cirkeln är viktigt. Detta kan uttryckas genom att notera att, $\overrightarrow{P_1P_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} + \mathbf{b}$ och $\overrightarrow{P_2P_0} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} + \mathbf{b}$, samt att $|\mathbf{b}| = r$ och $|\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}| = r$, där r är cirkelns radie.

Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_2P_0} &= \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}\right) \cdot \left(\mathbf{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}\right) \\
&= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \\
&= |\mathbf{b}|^2 - |\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}|^2 \\
&= r^2 - r^2 = 0
\end{aligned}$$

Alltså är toppvinkeln råt, v.s.b. Detta resultat kallas ofta för Thales' sats. Thales levde på 500-talet f.Kr. Att tillskriva honom denna sats är osäkert, men på den tiden använde man rent geometriska bevis, inte vektormetoder.

3. Finn skärningspunkten mellan ett plan $2x - y - z = 3$ och linjen

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{2} \tag{1}$$

genom att ställa upp ett ekvationssystem på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lösning: Vi har tre ekvationer, en för planet, $2x - y - z = 3$ och två för linjen $(x-1)/2 = (y+1)/3$ och $(y+1)/3 = -z/2$. Dessa kan skrivas som ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ (x-1)/2 = (y+1)/3 \\ (y+1)/3 = -z/2 \end{cases}$$

Om vi multiplicerar andra och tredje ekvationen med 6 och ändrar ordningen på termerna får vi

$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ 3x - 2y = 5 \\ 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem kan skrivas på vektorform

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

eller som matrisekvation

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Detta är på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lösningen till ekvationssystemet fås genom att förenkla den utökade matrisen, $[A\ \mathbf{b}]$, med hjälp av radoperationer.

$$[A\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Multiplicera rad 1 med 3, och rad 2 med 2:

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 9 \\ 6 & -4 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ta bort rad 1 från rad 2 (dvs, byt ”rad 2” mot ”rad 2 - rad 1”)

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Lägg till två gånger rad 2 från rad 3 (dvs byt ”rad 3” mot ”rad 3 + 2*rad 2”)

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dela rad 1 med 3, rad 2 med -1 och rad 3 med 9

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lägg till tre gånger rad 3 till rad 1, och lägg till rad 3 till rad 1

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lägg till rad 2 till rad 1

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dela rad 1 med 2

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen fås alltså genom att skriva om den utökade matrisen som ett ekvationssystem

$$[A\ \mathbf{b}] \sim \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ \qquad\quad x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = k \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + hx_4 = 1 \end{cases}$$

Bestäm kraven på parametrarna h och k så att
a) ekvationssystemet saknar lösning;
b) ekvationssystemet har en entydig lösning;
c) ekvationssystemet har ett oändligt antal lösningar.

Lösning2: Radreducera den utökade systemmatrisen till trappstegsform.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & k \\ -2 & 4 & 5 & h & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & k+3 \\ 0 & 4 & 9 & h+4 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & 5 & h+4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & h-4 & -\frac{5}{3}k \end{bmatrix}$$

Om $h \neq 4$ är det klart att systemmatrisen har fyra pivotelement, kolumnerna i koefficientmatrisen är då linjärt oberoende och spänner upp hela R^4, det finns entydig lösning för alla högerled.

Om $h = 4$ och $k \neq 0$ uppstår en rad av typen [0 0 0 0 b], eller 0=b, samtidigt som $b \neq 0$. Ekvationssystemet är därmed inkonsistent och lösning saknas.

Om $h = 4$ och $k = 0$ kommer den sista raden blir bara innehålla nollor. Därmed blir x_4 en fri variabel, så att där finns oändligt många lösningar.

Därmed står det klart att systemet har
a) ingen lösning om $h = 4$ och $k \neq 0$
b) unik lösning om $h \neq 4$
c) oändligt många lösningar om $h = 4$ och $k = 0$

5. Punkterna P_0 och P_1 ligger på linjerna $\mathbf{r} = [2,0,0] + t_0[1,1,0]$ respektive $\mathbf{r} = [0,0,1] + t_1[0,1,1]$, där $\mathbf{r} = [x,y,z]$ är ortsvektorn. Vektorn $\overrightarrow{P_0P_1}$ är den kortaste möjliga vektorn mellan de två linjerna. Givet att $P_0 = [1/3, -5/3, 0]$ vad är P_1?

Lösning: Den vektor som förbinder de närmaste punkterna på de två linjerna är vinkelrät mot bägge linjerna. Riktningen för de två olika linjerna ges av deras respektive riktningsvektorer:

För att hitta en vektor $\mathbf{d}$ som är vinkelrät mot bägge kan vi använda en kryssprodukt

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\mathbf{i} + (0-1)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denna vektor ger oss en riktning mellan P_0 och P_1, men inte ett avstånd.

En vektor som går mellan de två linjer kan vi skapa som en vektor från punkten där $t_0 = 0$ på första linjen, till punkten där $t_1 = 0$ på den andra linjen. Låt oss kalla denna vektor $\mathbf{v}$. Därmed är

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Genom att ta vektorprojektionen av denna vektor, $\mathbf{v}$, på riktningsvektorn, $\mathbf{d}$, får vi en vektor $\mathbf{w}$ som går mellan de två linjenrna i den riktning som motsvarar den kortaste distansen.

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Genom att addera detta till vår urspurngliga punkt får vi:

$$P_1 = P_0 + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Kontroll: Denna punkt ligger på linjen för $t_1 = -4/3$

6. Xavier, Yngve och Zara ska göra godis men gör var för sig lite olika: Xavier gör 2 kg röda godisar, 6 kg blåa och 2 kg gröna om dagen. Yngve producerar 4 kg röda 1 kg blåa och 5 kg gröna och Zara tillverkar 3 kg röda, 5 kg blåa och 2 kg gröna om dagen. Om de tillsammans vill producera 16 kg röda, 18 kg blåa och 16 kg gröna hur många dagar ska var och en av dem arbeta?

   Lös problemet genom att ställa upp det som en vektorekvation, skriv om det som en utökad systemmatris och lös systemet.

   Lösning: Inför följande notation: x är antalet dagar som Xavier gör godis, y är antalet dagar som Yngve gör godis, och z är antalet dagar som Zara gör godis. Totala mångden röda godisar är därmed $2x + 4y + 3z$, antalet blåa godisar är $6x + 1y + 5z$ och antalet gröna godisar är $2x + 5y + 2z$. Om vi matchar dessa uttryck med de antal som vi ska producera får vi ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 16 \\ 6x + 1y + 5z = 18 \\ 2x + 5y + 2z = 16 \end{cases} \tag{2}$$

Skriv om som en utökad matris och rad reducera

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 16 \\ 6 & 1 & 5 & 18 \\ 2 & 5 & 2 & 16 \end{bmatrix}_{R2 \to R2 - 3*R1\,,\ R3 \to R3 - R1} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & -11 & -4 & -30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{R2 \leftrightarrow R3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -4 & -30 \end{bmatrix}_{R3 \to R3 + 11*R2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{bmatrix}_{R3 \to -R3/15}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{R2 \to R2 + R3\,,\ R1 \to R1 - 3*R3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{R1 \to R1 - 4*R2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{R1 \to R1/2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} 1x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 1y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + 1z = 2 \end{cases}$$

Därmed blir lösningen att Xavier måste arbeta 1 dag, medan Yngve och Zara var och en måste arbeta i 2 dagar.