Kontrollskrivning 2

Notera att i denna kontrollskrivning har vi skrivit kolumnvektorer som transponerade radvektorer, exempelvis som $[1\ 2\ 3]^T$. Detta för att spara plats på sidan.

1. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. Beräkna inversen A^{-1} !

   Lösning:

   Radreducera [A I]$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$

   $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

   Alltså är $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

   Denna algoritm för att beräkna inversen introducerades av den tyske 1800-talsmatematikern C.G.J Jacobi.

2. Här ska vi studera om olika matriser är inverterbara. För de kvadratiska matriserna A,B,C,D, ange om de är inverterbara, ej inverterbara eller om det inte kan avgöras med 'teoremet om inverterbara matriser' utifrån den givna informationen. För att motivera om en matris är inverterbar eller ej måste ni referera till ett eller flera av påståenderna i Teorem 8, kapitel 2.3 (sid 145) i Lay's bok, 6:e upplagan, eller våra slides från föreläsning 5.

   (a) Är A som definieras av matrismultiplikationen inverterbar?

   $$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   (b) Är B inverterbar?

   $$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

   (c) Antag att man funnit två skilda lösningar till ekvationssystemet $C\mathbf{x} = [3, -4]^T$. Är C inverterbar?

(d) Ingen av raderna i D är en linjärkombination av de övriga raderna. Är D inverterbar?

Lösning:

a) Matrisens rader (respektive kolumner) är proportionella, alltså inte linjärt oberoende.Enligt teoremet om inverterbara matriser, sats e, är matrisen inte inverterbar.

b) Matrisen har två fria variabler, den är därför inte radekvivalent med identitetsmatrisen (kriterium b), den har inte n pivotkolumner (c), den homogena ekvationen har icke-triviala lösningar (d) osv. Matrisen är alltså inte inverterbar.

c) Två lösningar betyder att avbildningen från $\mathbf{x}$ till C$\mathbf{x}$ inte är ett till ett, alltså är matrisen inte inverterbar, enligt kriterium f.

d) Ingen av raderna är en linjärkombination av de övriga, de är därför linjärt oberoende. Det betyder att kolumnerna i A^T är linjärt oberoende, så A^T är inverterbar enligt kriterium e. Men enligt kriterium l är då A också inverterbar.

3. Om $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a) Beräkna A^3 !
b) Lös matrisekvationen $\mathrm{A}^2\mathrm{XB} = \mathrm{C}$, det vill säga beräkna matrisen X !

Lösning:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså är $A^3XB = XB = AC$ och därmed $X = ACB^{-1}$

B^{-1} får vi genom formeln $B^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$CB^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 0 & -7\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-16 & 12\\ 2 & -1\\ -12 & 9\end{bmatrix}$$

4. Matrisen $\text{A} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 6\end{bmatrix}$.

   (a) Faktorisera A i en undertriangulär matris L med ettor på diagonalen och bara nollor över diagonalen, samt en övertriangulär matris U, d.v.s alla element under diagonalen i U är noll. Alltså så att: A = LU.

   (b) Lös ekvationssystemet $\text{A}\mathbf{x} = [1\ 2\ 3]^T$ genom att först lösa $\text{L}\mathbf{y} = [1\ 2\ 3]^T$ och sedan $\text{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Lösning:

Radreducera A till trappstegsform, utan radbyten eller multiplikation av rader, använd bara operationen av typen rad i ersätts med rad i + en skalär k gånger rad j. Under arbetets gång kan vi antingen lagra mellanresultat för varje kolumn i en temporär matris L' och till sist dividera varje kolumn i L' med pivotelementet för att få ettor på diagonalen. Eller också kan vi spara faktorerna k för varje radoperation och skriva in dem med omvänt tecken direkt på rätt plats i L. Se Lay för motivering. U blir den radreducerade matris man får när A reducerats till trappstegsform.

Den första kolumnen i L' blir helt enkelt den första kolumnen i A:

$$L' = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & * & 0\\ -2 & * & *\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 3 & 4\\ -2 & 6 & 6\end{bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} \\ k=-2\\ k=+1\end{Bmatrix} \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 9 & 11\end{bmatrix}$$

Nu kan vi alltså antingen föra in den andra kolumnen i L':

$$L' = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ -2 & 9 & *\end{bmatrix}$$

Eller också kan vi skriva in k-faktorerna med ombytt tecken direkt i L:

$$L = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & * & 1\end{bmatrix}$$

$$A \sim \left\{ \begin{matrix} \\ \\ k=+3 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = U$$

Vi kan föra in den tredje kolumnen i L':

$$L' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

Alternativt för vi in k-faktorn med ombytt tecken i L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

L erhålls ur L' genom att dividera kolumnerna med pivotelementen, så att det blir ettor på diagonalen:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

När nu L och U är beräknade kan vi lösa ekvationssystemet A$\mathbf{x} = [1\ 2\ 3]^T$ genom att först lösa L$\mathbf{y} = [1\ 2\ 3]^T$ och sedan U$\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Först alltså $L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

som har lösningen

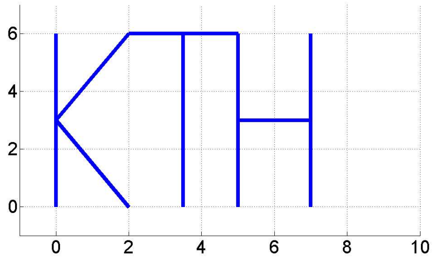
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

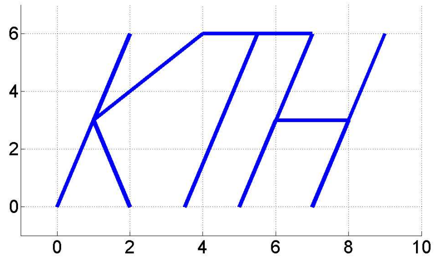
Därefter löser vi $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, som har lösningen $\mathbf{x} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ -8 \end{bmatrix}$.

5. Nedan har vi två bilder med texten KTH. Den högra bilden kan vi skapa genom en linjär avbildning av den vänsta.

   (a) Bestäm matrisen som avbildar raka bokstäver på bokstäver med lutning enligt figuren.





(b) Använd homogena koordinater för att skapa matrisen för en sammansatt avbildning som motsvarar att man först gör den avbildning som beskrevs i (a) och sedan förflyttar bilden tio enheter åt höger och fem enheter nedåt.

Lösning:

Matrisen som beskriver avbildningen erhålls enklast genom att se efter hur basvektorerna avbildas, Vi använder ett koordinatsystem med x för den horisontella axeln, y för den vertikala. $A = [T(e_x)\ T(e_y)]$. Enhetsvektorn i x-led avbildas uppenbarligen på sig själv:

$$L = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Men enhetsvektorn i y-led vrids och får en x-komponent $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Alltså blir den avbildande matrisen för skjuvningen:

$$A = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}$$

En translation i R^2 kan inte realiseras med en 2x2 matris, För att hantera den införs homogena koordinater (x,y,1), så att translationen kan hanteras med en 3x3 matris.

$\mathrm{A}_H = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 10\\0 & 1 & -5\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ avbildar (x,y,1) på det önskade sättet.

6. Här kommer vi att studera matrisen

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\4 & 4 & 8\\1 & 6 & -3\end{bmatrix} \tag{3}$$

(a) Är kolumnerna i A linjärt oberoende?

(b) Vad är lösningsmängden till A$\mathbf{x} = \mathbf{b}$ när $\mathbf{b} = [1\ 4\ 1]^T$.

(c) Ligger $\mathbf{b} = [-3\ \ 4\ \ -9]^T$ i Col(A)?

Lösning:

(a) Kolumnerna i A är oberoende om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har lösningen $[0,0,0]^T$. Gausselimination ger:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}_{R2\to R2-4*R1, R3\to R3-R1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}_{R3\to R3+3/8R2} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-8} & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom matrisen endast har två pivotelement men ekvationssystemet har tre variabler så kan man redan nu se att det kommer att finnas en lösning som inte endast är $[0,0,0]^T$ och vara nöjd med det. Fortsatt gauseliminering ger en exakt lösning:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R2\to R2*-1/8, R1\to R1+3/8R2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

där vi väljer x_3 som fri variabel t

$$\begin{aligned} x_1 &= -3t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

vilket har en lösning som är nollskilld för alla $t \neq 0$, kolonnerna i A är alltså linjärt beroende. Kontroll: för t=1 $-3 * [1,4,1]^T + 1[3,4,6]^T + 1[0,8,-3]^T = [0,0,0]$

(b) Den utökade system matrisen blir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right]_{R2\to R2-4*R1, R3\to R3-R1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]_{R3\to R3+3/8R3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{R1\to -3R2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 + 3x_3 = 1 \\ -8x_2 + 8x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

återigen kan vi välja x_3 som fri variabel t

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \end{aligned} \implies \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som beskriver lösningmängden.

Kontroll:

t=0 $1 * [1,4,1]^T + 0[3,4,6]^T + 0[0,8,-3]^T = [1,4,1]$

t=1 $-2 * [1,4,1]^T + 1[3,4,6]^T + 1[0,8,-3]^T = [1,4,1]$

(c) För att $[-3,4,-9]^T$ ska ligga i kolonnnrummet måste det finnas ett $\mathbf{x}$ så att A$\mathbf{x}$=$[-3,4,-9]^T$

Den utökade system matrisen blir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 & -9 \end{array}\right]_{R2 \to R2-4*R1, R3 \to R3-R1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array}\right]_{R3 \to R3+3/8R3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{R1 \to -3R2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies \begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= -3 \\ -8x_2 + 8x_3 &= 16 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

För tredje gången kan vi välja x_3 som fri variabel t

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 - 3(-2+t) = 3 - 3t \\ x_2 &= -2 + t \\ x_3 &= t \end{aligned} \implies \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eftersom det finns många lösningar till detta system så ingår $[-3, 4-9]$ i kolonnrummet.

Kontroll: för t=0 $3 * [1,4,1]^T - 2[3,4,6]^T + 0[0,8,-3]^T = [-3,4,-9]$