Kontrollskrivning 4

1. Matrisen B ges av

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Visa att matrisen B har ett egenvärde 1.

   (b) Vilken multiplicitet har egenvärdet 1?

   (c) Finn en bas till egenrummet associerat med egenvärdet 1.

2. Vi modellerar vädrets utveckling från dag till dag genom att låta varje dag befinna sig i något av följande tre tillstånd: soligt (tillstånd 1), molnigt (2) och regn (3). Sannolikheterna för att gå från ett tillstånd till ett annat antas ges av övergångsmatrisen:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/9 & 1/6 \\ 1/9 & 2/3 & 1/6 \\ 2/9 & 2/9 & 2/3 \end{bmatrix}$$

   Övergångsmatrisen har tre distinkta egenvärden. Det största egenvärdet är 1.

   Lotta som är 5 år, snart 6, tycker bäst om solsken. Speciellt önskar hon sig solsken på sin födelsedag.

   (a) Två dagar före sin födelsedag konstaterar Lotta att det regnar. Vilken initial sannolikhetsvektor svarar det mot? Vilka blir sannolikheterna för de olika vädertyperna på födelsedagen?

   (b) Tyvärr blev det regn på födelsedagen också. När hon nu haft sådan otur undrar Lotta vad chansen är att det blir solsken på hennes 7-årsdag. Beräkna en (mycket god) approximation för sannolikheten för att det blir sol på 7-årsdagen.

3. En matris $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, med respektive egenvärden $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$.

   (a) Finn den allmäna lösningen till differentialekvationen $\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t)$.

   (b) Skissa lösningarna $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}$ som trajektorior i xy-planet. Markera egenrummen till de två egenvärderna i grafen.

   (c) Har lösningarna en attraktor, en repellator, eller en sadelpunkt?

   (d) Om vi skulle byta tecken på egenvärdet λ_1, beskriver lösningarna en attraktor, en repellator, eller en sadelpunkt?

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Matrisen kan faktoriseras som $A = PCP^{-1}$, där $P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{v}) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A. Här har vi använt notationen att $\mathrm{Re}(\mathbf{v})$ och $\mathrm{Im}(\mathbf{v})$ betyder real- respektive imaginärdelen av $\mathbf{v}$. Vidare kan matrisen C skrivas

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm egenvärdena och motsvarande egenvektorer till A.

   (b) Bestäm a, b, r och ϕ?

5. Beräkna projektionen av $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\})$, när $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

6. Finn en ortogonal bas med samma linjära hölje som

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$