Report Project 1

Carl-Anton Grandelius, cagra@kth.se & Suhaib Abdi Muhummed, muhummed@kth.se

Course code: IX1500_HT2024
Date: 2024-09-10

1 Summary (Sammanfattning med Resultat)

Vi har analyserat olika rörelser som en partikel utför i ett xy-plan. Partikeln kan antingen utföra en uppåtgående rörelse U (där både x- och y-koordinaterna ökar med 1) eller en nedåtgående rörelse L (där x-koordinaten ökar med 1 och y-koordinaten minskar med 1).

Se deluppgift d) nedan för hur vi löser denna typ av uppgift grundligt med "papper och penna". Deluppgifter a) till c) är mer kortfattade.

a) Antalet vägar från (0, 3) till (7, 2). Vi har totalt 7 rörelser där 3 är U och 4 är L. Antalet möjliga vägar beräknades till 35 genom binomialkoefficienten $\binom{7}{3}$. De möjliga sekvenserna av U- och L-rörelser är följande:

LLLLUUU	LLLULUU	LLLUULU	LLLUULU
LLULLUU	LLULULU	LLULUUL	LLUULLU
LLUULUL	LLUUULL	LULLLUU	LULLULU
LULLUUL	LULULLU	LULULUL	LULUULL
LUULLLU	LUULLUL	LUULULL	LUUULLL
ULLLLUU	ULLLULU	ULLLUUL	ULLULLU
ULLULUL	ULLUULL	ULULLLU	ULULLUL
ULULULL	ULUULLL	UULLLLU	UULLLUL
UULLULL	UULULLL	UUULLLL	

b) Antalet vägar från (0, 3) till (7, 2) som vidrör eller korsar x-axeln. Det finns totalt 7 sådana vägar, där punkter på x-axeln kan vara vid $(3, 0)$ eller $(5, 0)$. För fall 1/2 då linjen vidrör x-axeln (punkten $(3, 0)$) har vi följande vägar:

LLLUUUL	LLLUULU
LLLULUU	LLLLUUU

För fall 2/2 då linjen vidrör x-axeln (punkten $(5, 0)$) har vi följande vägar:

ULLLLUU
LULLLUU
LLULLUU

Notera att snittet mellan dessa subtraheras för att få summan 7.

c) Antalet vägar från (0, 3) till (7, 2) som aldrig vidrör x-axeln. För att beräkna detta subtraherades b) från det totala antalet vägar, vilket gav 28 vägar som aldrig vidrör x-axeln. Dessa vägar är:

LLULULU	LLULUUL	LLUULLU	LLUULUL
LLUUULL	LULLULU	LULLUUL	LULULLU
LULULUL	LULUULL	LUULLLU	LUULLUL
LUULULL	LUUULLL	ULLLULU	ULLLUUL
ULLULLU	ULLULUL	ULLUULL	ULULLLU
ULULLUL	ULULULL	ULUULLL	UULLLLU
UULLLUL	UULLULL	UULULLL	UUULLLL

d) Antalet vägar från (7, 6) till (20, 5) som aldrig vidrör eller korsar x-axeln: Det totala antalet möjliga vägar beräknades till 1716 via $\binom{13}{7}$. Genom att identifiera de vägar som korsar x-axeln vid specifika punkter räknades 13 fall, vilket resulterade i 1703 vägar som aldrig vidrör eller korsar x-axeln.

Antalet förflyttningar måste vara 13 eftersom förändringen i X-led är 13:

$$(x_0, y_0) \text{ till } (x_1, y_1)$$

$$(7, 6) \text{ till } (20, 5)$$

$$x_1 - x_0 = 13$$

Förändringen i y-axeln är samtidigt:

$$y_1 - y_0 = -1$$

Därför måste vi ha en mer L (som sänker partikeln i y) än U (som höjer partikeln i y):

$$7L, 6U$$

Det totala antalet vägar från start- till slutpunkten ges av:

$$\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!(13-7)!}$$

$$\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!6!}$$

$$\binom{13}{7} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$\binom{13}{7} = \frac{13 \times 11 \times 9 \times 8}{6}$$

$$\binom{13}{7} = \frac{10296}{6} = 1716$$

X-axeln kan bara nås vid två punkter med de givna L- och U-rörelserna, förutsatt att vi i slutändan vill nå vårt slutmål. Detta syns tydligt om man markerar punkterna i ett koordinatsystem. Punkter på X-axeln som kan nås är:

$$(13, 0) \text{ (fall 1)}$$
$$(15, 0) \text{ (fall 2)}$$

I fall 1 måste vi inleda med 6 L-rörelser:

$$(7, 6) + 6 \times (1, -1) = (13, 0)$$

Därefter måste de resterande 6 U-rörelserna och 1 L-rörelse utföras.

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!(7-1)!}$$
$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{6!} = 7$$

Dessa kombinationer är:

LLLLLLLUUUUUU
LLLLLLULUUUUU
LLLLLLUULUUUU
LLLLLLUUULUUU
LLLLLLUUUULUU
LLLLLLUUUUULU
LLLLLLUUUUUUL

I fall 2 måste vi avsluta med 5 U-rörelser:

$$(15, 0) + 5 \times (1, 1) = (20, 5)$$

Dessförinnan måste 7 L-rörelser och 1 U-rörelse utföras.

$$\binom{8}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!}$$
$$\binom{8}{1} = \frac{8!}{7!} = 8$$

Dessa kombinationer är

ULLLLLLLUUUUU
LULLLLLLUUUUU
LLULLLLLUUUUU
LLLULLLLUUUUU
LLLLULLLUUUUU
LLLLLULLUUUUU
LLLLLLULUUUUU
LLLLLLLUUUUUU

Båda fallen där linjen vidrör X-axeln ger:

$$8 + 7 = 15 \text{ fall, där fall } 1 \cap \text{fall } 2 = 3$$

Det slutgiltiga antalet fall där X-axeln vidrörs är därmed:

$$15 - 2 = 13$$

Samtliga fall där X-axeln vidrörs:

LLLLLLLUUUUUU	LLLLLLULUUUUU
LLLLLLUULUUUU	LLLLLLUUULUUU
LLLLLLUUUULUU	LLLLLLUUUUULU
LLLLLLUUUUUUL	ULLLLLLLUUUUU
LULLLLLLUUUUU	LLULLLLLUUUUU
LLLULLLLUUUUU	LLLLULLLUUUUU
LLLLLULLUUUUU	

2 Formulas and Equations

1. Binomialkoefficienten som används för att beräkna hur många sätt man kan välja k objekt från n objekt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Den användes för att räkna antalet möjliga kombinationer av U och L-rörelser.

2. Antalet förflyttningar som krävs bestämdes med hjälp av enkel subtraktion av x- samt y-koordinater.

3. För att få fram de vägar som aldrig vidrör eller korsar x-axeln subtraherades de fall där x-axeln korsas från det totala antalet vägar.

Se deluppgift d) ovan för hur man löser uppgiften med ”papper och penna”. Den är beskriven mest grundligt av alla deluppgifter.

3 Discussion

I denna inlämning har vi fått lära oss hur man kan använda binomialkoefficienter, kombinatorik och sätta ut punkter i koordinatsystem för att beräkna antal vägar och rörelser i ett xy-plan. Vi tog reda på antalet rörelsevägar som en partikel kan ta mellan olika punkter, samt hur vi kan sätta ett villkor som att x-axeln måste, eller inte får vidröras.

Vid en utvärdering av våra lösningar kan vi säga att vi fick rätt svar genom att titta på kombinationer, försöka förstå problemet genom att själva titta på koordinatsystem och till slut använda binomialkoefficienten. En alternativ metod hade kunnat vara att använda någonting som kallas Catalans tal, för att räkna om resultatet t.ex. när x-axeln ska undvikas.

4 Code

Här nedan följer den fullständiga koden (1,5 sidor). Den finns också tillgänglig på Github: https://github.com/F7pvqc/Diskret-matte-398475

```
from itertools import permutations

# a) Antal vägar från (0, 3) till (7, 2)

vagar = set(permutations(['U'] * 3 + ['L'] * 4)) # 3 U och 4 L rörelser
print("a) Antalet vägar från (0, 3) till (7, 2): ", len(vagar))
for vag in vagar:
    print(''.join(vag))

# b) Antal vägar från (0, 3) till (7, 2) som vidrör x-axeln
def vagar_som_vidror_x_axeln():
    vagar = set(permutations(['U'] * 3 + ['L'] * 4)) # 3 U och 4 L rörelser
    vagar_som_vidror = set()

    for vag in vagar:
        x, y = 0, 3
        for steg in vag:
            if steg == 'L':
                y -= 1
            else:
                y += 1
            if y == 0:  # Ej framme, men vi vidrör x-axeln
                vagar_som_vidror.add(vag)
                break
    return vagar_som_vidror

vagar = set(permutations(['U'] * 3 + ['L'] * 4)) # 3 U och 4 L rörelser
print("b) Antal vägar som vidrör x-axeln: ", len(vagar))
for vag in vagar:
    print(''.join(vag))


# c) Antal vägar från (0, 3) till (7, 2) som EJ vidrör x-axeln
vagar = set(permutations(['U'] * 3 + ['L'] * 4))
vagar = vagar - vagar_som_vidror_x_axeln()
print("Antal vägar från (0, 3) till (7, 2) som EJ vidrör x-axeln: ", len(vagar))
for vag in vagar:
    print(''.join(vag))

# d) Antal vägar från (7, 6) till (20, 5) som EJ vidrör x-axeln
def vagar_ej_vidror_x_axeln_7_6_till_20_5():
```

```python
    vagar = set(permutations(['U'] * 6 + ['L'] * 7))

    icke_vagar_som_vidror = set()
    vagar_som_vidror = set()
    for vag in vagar:
        x, y = 7, 6  # Startpunkt (7, 6)
        korsat_x_axeln = False
        for steg in vag:
            if steg == 'L':
                y -= 1
            else:
                y += 1
            if y == 0:  # Om vägen når x-axeln
                korsat_x_axeln = True
                break
        if not korsat_x_axeln:
            icke_vagar_som_vidror.add(vag)
        else:
            vagar_som_vidror.add(vag)

    print("Antal vägar från (7, 6) till (20, 5) som EJ vidrör x-axeln: ",
    len(icke_vagar_som_vidror),
    ". De som vidrör x-axeln: ", len(vagar_som_vidror))
    i = 0
    for vag in icke_vagar_som_vidror:
        if (i < 20):
            print(''.join(vag))
            i = i + 1

vagar_ej_vidror_x_axeln_7_6_till_20_5()
```