

csm\_6\_2\_lagrange.v

6.2.2 部分群の性質  
R (∼)の定義 equiv\_rel\_R

6.2.3 剰余類の性質の形式化  
coset\_equiv\_class :  $Hx = \{y \in G \mid x \sim y\}$

rcosets\_equiv\_part :  
 $H \setminus G = G / \sim$ .  
 $H \setminus G$  は、 $G$ の $\sim$ についての商と等しい。

partition\_rcosets : partition  $(H \setminus G)$   $G$ .  
 $H \setminus G$  は、 $G$ の分割(重ならない部分集合の集合)である。

補題  
• rcosetsP :  $(\exists x, x \in G \wedge A = Hx) \iff A \in H \setminus G$   
• card\_rcoset :  $\forall x, |Ax| = |A|$

myCard\_rcoset :  $A \in H \setminus G \rightarrow |A| = |H|$

6.2.4 ラグランジュの定理  
myLagrange :  $|G| = |H| \text{ (G:H)}$

補題  
• card\_partition : partition P  $D \rightarrow |D| = \sum_{A \in P} |A|$   
• sum\_nat\_const :  $\sum_{i \in A} c = |A| \cdot c$

指数の遷移則：  $|G : K| = |G : H| \cdot |H : K|$  ※

$\mathcal{G}$  は  $G/H$  の元の代表元の集合である。 $\mathcal{H}$  は  $H/K$  の元の代表元の集合である。

剰余群はもとの群の元の分割であるという性質から、元の代表元と元は一対一で対応する。  
すなわち、以下の関数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\phi$  は全単射である。また、

$$|\mathcal{G} \times \mathcal{H}| = |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{H}|$$

は、単なる直積  $\times$  の性質として成り立つから、式※が成り立つ。

$$\alpha : \mathcal{G} \rightarrow G/H$$

$$\alpha(g) = gH$$

$$\beta : \mathcal{H} \rightarrow H/K$$

$$\beta(h) = hK$$

$$\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow G/K$$

$$\phi(g, h) = ghK$$