

## 一. 单项选择题：（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 在空间直角坐标系下，直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-11}{4} = \frac{z+1}{1}$  与平面  $3x-2y-z+15=0$  的位置关系是（ ）。  
A. 相交且垂直      B. 相交不垂直      C. 平行      D. 直线在平面上
2. 使得函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  一致连续的  $x$  取值范围是（ ）。  
A.  $(0, 1)$   
B.  $(0, 1]$   
C.  $[-1, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$   
D.  $(-\infty, +\infty)$
3. 方程  $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$  的整数解的个数是（ ）。  
A. 0      B. 1      C. 2      D. 3
4. 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的自变量的改变量为  $\Delta x$ ，相应的函数改变量为  $\Delta y$ ， $o(\Delta x)$  表示  $\Delta x$  的高阶无穷小。若函数  $y = f(x)$  在  $\Delta x$  可微，则下列表述不正确的是（ ）。  
A.  $\Delta y = f'(x_0)dx$   
B.  $dy = f'(x_0)dx$   
C.  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$   
D.  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$
5. 抛掷两粒正方体骰子（每个面上的点数分别为1, 2, ..., 6），假定每个面朝上的可能性相同，观察向上的点数，则点数之和等于5的概率为（ ）。  
A.  $\frac{15}{36}$   
B.  $\frac{1}{9}$   
C.  $\frac{1}{12}$   
D.  $\frac{1}{18}$
6. 对于  $m \times n$  矩阵  $A$ ，存在  $n \times s$  矩阵  $B (B \neq 0)$ ，使得  $AB = 0$  成立的充要条件是矩阵  $A$  的秩  $\text{rank}(A)$  满足（ ）。  
A.  $\text{rank}(A) < n$   
B.  $\text{rank}(A) \leq n$   
C.  $\text{rank}(A) > n$   
D.  $\text{rank}(A) \geq n$
7. 一个五边形与其经过位似变换后的对应图形之间不满足下列关系的是（ ）。  
A. 对应线段成比例      B. 对应点连线共点  
C. 对应角不相等      D. 面积的比等于对应线段的比的平方
8. 试题“设  $T = \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ ，求当  $x = 2 + \sqrt{3}$  时， $T$  的值。”主要考查学生的（ ）。  
A. 空间观念      B. 运算能力      C. 数据分析观念      D. 应用意识

## 二. 简答题：（本大题共5小题，每小题7分，共35分）

9. （论述题）已知平面上一椭圆，长半轴长为  $a$ ，短半轴长为  $b$ ， $a > b > 0$ ，求该椭圆绕着长轴旋转一周所得到的旋转体的体积。（7分）

10. (论述题)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设顾客在某银行窗口等待服务的时间 $X(\text{min})$ 的概率密度为  
对银行服务质量的评价值,若顾客等待时间不超过5 (min),则评价值为 $Y = 1$ ;否则,评价值为 $Y = -1$ ,即

$$Y = \begin{cases} -1, & X > 5 \\ 1, & X \leq 5 \end{cases}$$

(1) 求 $X$ 的分布函数;(4分)(2) 求 $Y$ 的分布律。(3分)

11. (论述题)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \text{①}$$

已知方程组

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{②}$$

有唯一解当且仅当行列式不等于零。请回答下列问题:

(1) 行列式②的几何意义是什么?(3分)

(2) 上述结论的几何意义是什么?(4分)

12. (论述题) 某教师在引领学生探究“圆周角定理”时,首先进行画图、测量等探究活动,获得对圆周角和圆心角大小关系的猜想;进一步寻找证明猜想的思路并进行严格的证明;最后,教师又通过几何软件对两类角的大小关系进行验证。从推理的角度,请谈谈你对教师这样处理的看法。(7分)

13. (论述题) 数学课堂教学过程中,为了鼓励学生独立思考,深入理解问题,教师常常在呈现任务后,不是立刻讲解,而是留给学生足够的思考时间,这种教学方式可称之为“课堂留白”。请你谈谈课堂留白的必要性及其意义。(7分)

### 三. 解答题: (本大题共1小题, 共10分)

14. (论述题)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 12x_4 = -14 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + ax_4 = -8 \end{cases}$$

已知非齐次线性方程组

(1)  $a$ 为何值时,其对应齐次线性方程组解空间的维数为2?(5分)(2) 对于(1)中确定的 $a$ 值,求该非齐次线性方程组的通解。(5分)

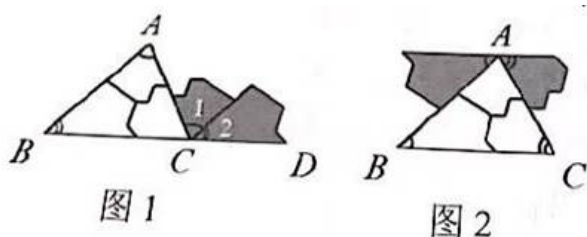
### 四. 论述题: (本大题共1小题, 共15分)

15. (论述题) 数学运算能力是中学数学教学需要培养的基本能力。学生的数学运算能力具体表现为哪些方面?请以整式运算为例予以说明。(15分)

### 五. 案例分析题: (本大题共1小题, 共20分)

16. (分析题) 下面是初中“三角形的内角和定理”的教学案例片段。

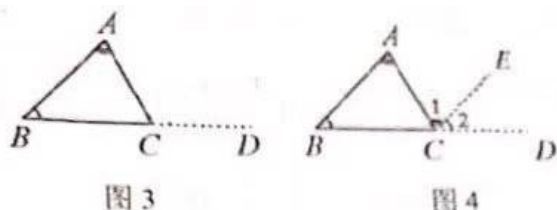
教师请学生回忆小学学过的三角形内角和是多少度?并让学生用提前准备好的三角形纸片进行剪拼并演示。下面是部分学生演示的图形(如图1、图2):



在图1中，三角形的三个内角拼在一起后，B、C、D在一条直线上，看似构成一个平角，教师质疑，看上去是平角就是平角了吗？学生的回答是“不一定”。接着，教师利用图1启发学生思考：

①既然不能判定B、C、D是否一定在同一直线上（即组成平角），可以换个角度，先构造一个平角，引导学生结合图1思考如何作辅助线——构造平角。学生想到了作BC的延长线BD，如图3所示。

②图1中， $\angle 1$ 与 $\angle A$ 是什么关系？启发学生在 $\angle ACD$ 内作 $\angle 1 = \angle A$ ，或过点C作 $CE \parallel AB$ ，如图4所示。



③现在只要证明什么？（证明 $\angle 2 = \angle B$ ）

问题：

- （1）该教师让学生回忆并用拼图的方法感知三角形的内角和，请简述其教学意图。（6分）
- （2）利用图2设计问题串，使得这些问题能够引导学生发现三角形的内角和定理的证法。（8分）
- （3）请再给出其他2种三角形纸片的拼法，并画图表示。（6分）

#### 六. 教学设计题：（本大题共1小题，共30分）

17.（论述题）“平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ”是初中乘法公式的内容之一。

某教师教学时，将引导学生归纳猜想平方差公式作为教学过程的环节之一，设计思路如下：

假定 $b = 1$ 。问题简化为 $a^2 - 1 = ?$

当 $a = 2$ ， $2^2 - 1 = 3 = (2 + 1)(2 - 1)$ ①

当 $a = 3$ ， $3^2 - 1 = 8 = (3 + 1)(3 - 1)$ ②

当 $a = 4$ ， $4^2 - 1 = 15 = (4 + 1)(4 - 1)$ ③

观察上面式子：

猜测： $a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$ 。

取 $b = 2, 3, 4, \dots$ ，仿照上面，猜测等式左右两边的数之间的关系，进而猜想一般规律：

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 。（证明过程略）

- （1）简述该教师在该环节的教学设计意图；（6分）
- （2）简述平方差公式在初中数学中的地位；（6分）
- （3）请给出平方差公式的教学目标，并设计教学流程；（12分）
- （4）请通过图示给出平方差公式的几何背景。（6分）