2020年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+3x}{\tan x+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+3}{\dfrac{\tan x}{x}+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+3\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}+2\right)}=\dfrac{4}{3}$。故本题选A。

2.【答案】B。解析:利用向量内积的定义,$\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\times(-1)+2\times2+1\times2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=\dfrac{4}{9}$。故本题选B。

3.【答案】B。解析:因为函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$是初等函数,且在$(0,1]$上有定义,所以$f(x)$在$(0,1]$上连续、可导。此外,由于$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$在$(0,1]$上恒成立,所以$f(x)$在$(0,1]$上(严格)单调递减,因此,A,C,D三项说法正确。对于B项,取$\varepsilon_0=1$,令$x_n'=\dfrac{1}{n}$,$x_n''=\dfrac{1}{n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,且$|f(x_n')-f(x_n'')|=1\geqslant\varepsilon_0$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续。故本题选B。

4.【答案】B。解析:将$x=-3$代入曲面方程$x^2-4y^2+z^2=25$得,$\dfrac{-y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1$,这是一个双曲线。故本题选B。

5.【答案】D。解析:由题意,在每局比赛中,甲、乙获胜的概率都是$\dfrac{1}{2}$,且前三局比赛结果为甲胜两局负一局,所以若乙最终赢得比赛,则第四局与第五局都是乙获胜,其概率为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$,从而甲最终赢得比赛的概率为$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$。因此甲应得奖金$1000\times\dfrac{3}{4}=750$(元)。故本题选D。

6.【答案】C。解析:连接坐标原点O与点M。由于PM与球面相切于点M,所以$\triangle OPM$是直角三角形,于是$OP=\sqrt{OM^2+PM^2}$,又由球面方程知,球面半径为1,所以$OM=1$,再结合题中条件$PM=2\sqrt{2}$,$OP=|z|$,得$|z|=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$。故本题选C。

7.【答案】D。解析:数学测验卷的编制步骤一般为明确测验目的、制订命题原则、编拟双向细目表、精选试题。其中,双向细目表是测验卷考查目标或能力与内容之间的列联表,由考查能力或素养维度和内容维度构成,它能够帮助测验卷编制者决定考查哪些内容以及各类题型应占的比例。故本题选D。

8.【答案】C。解析:解二元一次方程组主要是利用消元法消去其中一个未知数,把二元一次方程组转化为一元一次方程,从而先求出一个未知数,然后再求出另一个未知数。故本题选C。

二、简答题

9.【参考答案】

$$原式=\begin{vmatrix}16&3&5&7\\16&5&7&1\\16&7&1&3\\16&1&3&5\end{vmatrix}=2^4\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&5&7&1\\1&7&1&3\\1&1&3&5\end{vmatrix}=2^4\begin{vmatrix}1&3&5&7\\0&2&2&-6\\0&4&-4&-4\\0&-2&-2&-2\end{vmatrix}=2^4\begin{vmatrix}1&3&5&7\\0&2&2&-6\\0&0&-8&8\\0&0&0&-8\end{vmatrix}=2^{11}。$$

10.【参考答案】

证明：令 $x = a + b - t$，则有 $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(t)\mathrm{d}(a+b-t) = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，即得 $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

11.【参考答案】

(1) 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同解，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{b}$，两式相减得，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) = \boldsymbol{0}$，即得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个非零解 $(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2)$。

因为矩阵 A 是 3×4 矩阵，且 $\mathrm{r}(A) = 3$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的解的个数为 $4 - \mathrm{r}(A) = 1$，又 $(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2)$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个非零解，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2)$，$k$ 为任意常数。

(2) 由(1)知，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2)$，结合 $\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解得，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + \boldsymbol{\eta}_1$，$k$ 为任意常数。

12.【参考答案】

进行单元教学设计的基本流程如下。

① 学情分析。在教学开始前，分析该阶段学生的身心特点、学习基础，以及学生学习该单元内容的认知起点、学习兴趣、学习障碍、学习难度等。

② 单元结构构建。单元结构构建首先要对教学内容进行整体分析，要关注数学内容的整体性，在理解内容的基础上，绘制出单元内容结构图，并根据内容及其重要性，对教学形式和课时进行合理的安排。

③ 单元教学目标制定。结合单元内容结构图，依据新课程教育教学理念、以及学生的认知特点，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三方面制定教学目标，注意将三维教学目标有机地联系在一起。

④ 教学过程设计。教学过程设计要兼顾"本课内容"的教学和"单元内容"的贯通，构建一条围绕核心内容展开教学活动的主线，教学过程设计要突出教学重点，突破教学难点，内容安排合理，体现出创新性和可操作性。

⑤ 教学反思与评价。在单元教学结束后，教师重点总结教学设计的特色和亮点，反思教学实施过程中出现的问题，进行自我评价。

13.【参考答案】

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

通过初中数学课程的学习，让学生体验从具体情境中抽象出数学符号的过程，理解有理数、实数、代数式、方程、不等式、函数；掌握必要的运算（包括估算）技能，能有效借助数学运算方法解决简单的实际问题。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 若 $OP = x_0$，则光线从点 A 到达点 P 的时间为 $T_1(x_0) = \dfrac{x_0}{c\sin\theta}$；光线从点 P 到达点 B 的时间为 $T_2(x_0) = \dfrac{l - x_0}{c'\sin\theta'}$，从而光线从点 A 到达点 B 所需的时间为 $T(x_0) = T_1(x_0) + T_2(x_0) = \dfrac{x_0}{c\sin\theta} + \dfrac{l - x_0}{c'\sin\theta'}$。

(2) 在水面上取一点 P'，设 $OP' = x(0 < x < l)$，则光线从点 A 到达点 P' 的时间为 $T_1(x) = \dfrac{x}{c\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c}$；光线从点 P' 到达点 B 的时间为 $T_2(x) = \dfrac{l - x}{c'\dfrac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}} = \dfrac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c'}$，从而光线沿 $A - P' - B$ 从 A 点到达 B 点所需的时间为 $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \dfrac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c'}$。

由于 $T(x_0)$ 为光线从点 A 到达点 B 时间的极小值，所以由费马定理知，$T'(x_0)=\dfrac{x_0}{c\sqrt{x_0^2+h_1^2}}-\dfrac{l-x_0}{c'\sqrt{(l-x_0)^2+h_2^2}}=0$。注意到，$\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+h_1^2}}=\sin\theta$，$\dfrac{l-x_0}{\sqrt{(l-x_0)^2+h_2^2}}=\sin\theta'$，所以 $T'(x_0)=\dfrac{\sin\theta}{c}-\dfrac{\sin\theta'}{c'}=0$，即有$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\dfrac{c}{c'}$。

四、论述题

15.【参考答案】

数据分析是指针对研究对象获取数据，运用数学方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象知识的素养。

① 培养学生的数据分析能力，能使其形成严谨的逻辑思维能力。在数据分析过程中，渗透分类思想、归纳思想、类比思想和统计思想等数学思想方法，能促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展。

② 培养学生的数据分析能力，能使其提升数学实际应用能力。数据分析涉及生活各个方面，学生在获取有价值信息并进行定量分析时，能增强基于数据表达现实问题的意识，形成通过数据认识事物的思维品质，积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验。

③ 培养学生的数据分析能力，使其掌握必要的知识技能，是时代发展的要求。数据分析是研究随机现象的重要数学技术，是大数据时代数学应用的主要方法，也是“互联网 +”相关领域的主要数学方法。从学生时代培养起来的数据分析能力对学生今后的学习和发展有着重要的意义。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 教师甲在讲授中位线定理内容时，没有遵循学生由易到难的认知顺序，缺乏自主探究过程，直接利用“数学软件 A”来验证结论不能激发学生的学习兴趣，违背了以学生为主体，教师为主导的教学原则，不利于培养学生的创新能力，作为学生学习的组织者、合作者、引导者，教师甲有很多不足之处。

教师乙借助一个比较困难的问题，引导学生通过“数学软件 A”发现结论，并思考如何证明发现的结论，进而引导学生通过将问题转化来逐步解决问题。教师乙的教学让学生经历探索数学问题的过程，这不仅能够培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力，也可以激发学生对数学学习的兴趣。

(2) 如图 1，已知 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 两边的中点。求证：DE 平行于 BC 且等于$\dfrac{BC}{2}$。

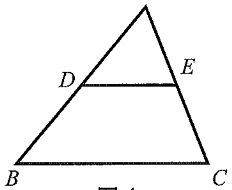

图 1

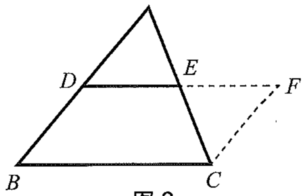

图 2

证明示意图：如图 2，过点 C 作 AB 的平行线交 DE 的延长线于 F 点。

证明过程：因为 $CF\parallel AD$，所以 $\angle A=\angle ACF$，进而由$\begin{cases}\angle AED=\angle CEF,\\ AE=CE,\\ \angle A=\angle ACF,\end{cases}$ 可得 $\triangle ADE\cong\triangle CFE(\mathrm{ASA})$，$AD=CF$。又因为 D 是 AB 的中点，所以 $AD=BD=CF$，于是有 $BD\underline{\parallel}CF$，因此四边形 $BCFD$ 是平行四边形，进而可得$DF\parallel BC$ 且 $DF=BC$，$DE=\dfrac{DF}{2}=\dfrac{BC}{2}$，即证得三角形中位线定理成立。

(3) 信息技术在数学的教学和学习中起到重要的辅助作用。

① 利用信息技术展示知识的形成过程，将抽象的知识形象化。在三角形中位线定理的教学过程中，教师

可以利用软件呈现图形及图形的变化,让学生更直观地理解三角形中位线定理的内涵。

② 利用信息技术探究、解决数学问题。本案例中,通过“数学软件 A”开展探究活动,测量并发现结论,进而添加辅助线证明结论。

③ 利用信息技术可以把数学学习由课内延伸到课外,开阔知识视野,培养自主探究知识的能力,增强学生数学学习的兴趣。

六、教学设计题

17.【**参考答案**】

(1) 教学重点:理解分式基本性质,掌握分式的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的整式,分式的值不变的算理,学会灵活运用分式的基本性质。

(2) 导入环节

回顾分式的概念、分式有意义的条件 —— 分式的分母不能为 0,以及约分的过程。

我们知道分数的分母不能为 0,而分式的分母也不为 0,那分式的性质是不是可以类比分数的性质呢? 大家可以对 $\frac{5}{10}$,$\frac{4a}{6a}$ 进行约分吗? 引出课题。

探索环节

创设一列火车匀速行驶的情境,t h 行驶 s km,$2t$ h 行驶 $2s$ km,$3t$ h 行驶 $3s$ km,…,nt h 行驶 ns km。教师提问:火车行驶的速度可以如何表示?

预设学生表示的方式多样 $\frac{s}{t},\frac{2s}{2t},\frac{3s}{3t},\cdots,\frac{ns}{nt}$。

教师通过提问在行驶过程中变化及不变的量,引导学生想到时间、路程在变,行驶的速度不变。

从而根据“速度不变”得出 $\frac{s}{t}=\frac{2s}{2t}=\frac{3s}{3t}=\cdots=\frac{ns}{nt}$。

组织学生观察等式,思考分式的分子和分母是如何变化的。

学生容易发现分式的分子和分母同时扩大或缩小了相同的倍数。

结合学生的回答,教师规范总结分式的基本性质:分式的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的整式,分式的值不变,并用字母表示 $\frac{A\times B}{C\times B}=\frac{A}{C}(B\neq 0)$,$\frac{A\div B}{C\div B}=\frac{A}{C}(B\neq 0)$。

教师提问:应用分式的基本性质时需要注意什么?

学生独立思考并积极回答,教师适当给予评价,最后师生总结归纳。

课件演示:

① 分子、分母应同时做乘、除法中的同一种变换;

② 所乘(或除以)的必须是同一整式;

③ 所乘(或除以)的整式不等于零。

课件展示例题:根据分式的基本性质化简下列式子。

$\frac{8a^2}{12a}=$ ________;$\frac{a^2c}{ac}=$ ________;$\frac{3x^2+3xy}{6x^2}=$ ________。

引导学生掌握分式约分的方法,即根据分式的基本性质,把一个分式的分子与分母的公因式约去,分式的值不变。

(3) 填空:$\frac{x^3}{xy}=\frac{(\quad)}{y}(x\neq 0)$。

解答:$\frac{x^3}{xy}$ 的分母 xy 除以 x 才能得到 y,而且 $x\neq 0$,为了保证分式的值不变,根据分式的基本性质,分子也应该除以 x,即 $\frac{x^3}{xy}=\frac{x^3\div x}{xy\div x}=\frac{x^2}{y}$,括号中填 x^2。