2016年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。解析：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)=e\cdot1=e$。

2.【答案】D。解析：三阶行列式中若7个元素为零，则它至少有一行(或一列)的元素全是零，所以它的值为0。

3.【答案】A。解析：直线L的标准方程为$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$，其方向向量为$\boldsymbol{m}=(3,-1,2)$，平面$\Pi$的法向量为$\boldsymbol{n}=(2,8,1)$，$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且点$(2,-1,3)$不在平面$\Pi$上，所以直线$L$与平面$\Pi$平行。

4.【答案】A。解析：根据函数在某点处连续的定义可知A项为正确选项。

5.【答案】B。解析：设特征向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$所对应的特征值为$\lambda$，则$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，又因为$\begin{pmatrix}5&6&-3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，所以$\lambda=2$。

6.【答案】B。解析：由题意得离散型随机变量期望为$E=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kp_k$，故方差$D(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-E)^2p_k$。

7.【答案】C。解析：第三次数学危机为数学罗素悖论的产生。第三次数学危机引发了关于数学逻辑基础可靠性的问题，导致无矛盾的集合论公理系统的产生。在这场危机中集合论得到较快的发展，数学基础的进步更快，数理逻辑也更加成熟。到现在，从整体来看，第三次数学危机还没有解决到令人满意的程度。

8.【答案】B。解析：区分度是指一道题能多大程度上把不同水平的人区分开来，也即题目的鉴别力；信度指测验结果的一致性、稳定性及可靠性；效度是指所测量到的结果反映所想要考查内容的程度。平均分除以该题分值为该题目的难度，所以正确选项为B。

二、简答题

9.【参考答案】

已知$\boldsymbol{TX}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，所以$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，所以$x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$y'=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$，即$x=2x'-1$，$y=3y'-2$，代入$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$，化简得$x'^2+y'^2=1$，所以所得二次曲线$L_1$的方程为$x^2+y^2=1$。

10.【参考答案】

由题意知，系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&2&2&3\\2&3&1&2\end{pmatrix}$，经过初等行变换得到$\begin{pmatrix}1&0&-4&-5\\0&1&3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x_1=4x_3+5x_4\\x_2=-3x_3-4x_4\end{cases}$，所以$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$。所以通解为$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中$k_1,k_2$为常数。

11.【参考答案】

(1)根据变异系数=标准差÷均值，所以$V_{汽车}=\frac{6}{24}\times100\%=25\%$，$V_{电动}=\frac{2}{34}\times100\%\approx5.9\%$，$V_{汽车}>V_{电动}$，所以选

择电动车,因为变异系数表示离散程度,变异系数越小,分布越集中。

(2)由题意知,X,Y 分别满足:$X\sim N(24,36)$,$Y\sim N(34,4)$,

$P(X\leqslant 38)=P\left(\frac{X-24}{6}\leqslant\frac{38-24}{6}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)$,

$P(Y\leqslant 38)=P\left(\frac{Y-34}{2}\leqslant\frac{38-34}{2}\right)=\Phi(2)$,

又 $\Phi\left(\frac{7}{3}\right)>\Phi(2)$,所以当送货有 38 分钟可用时,选择开汽车。

$P(X\leqslant 34)=P\left(\frac{X-24}{6}\leqslant\frac{34-24}{6}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)$,

$P(Y\leqslant 34)=P\left(\frac{Y-34}{2}\leqslant\frac{34-34}{2}\right)=\Phi(0)$,

又 $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)>\Phi(0)$,所以当送货有 34 分钟可用时,选择开汽车。

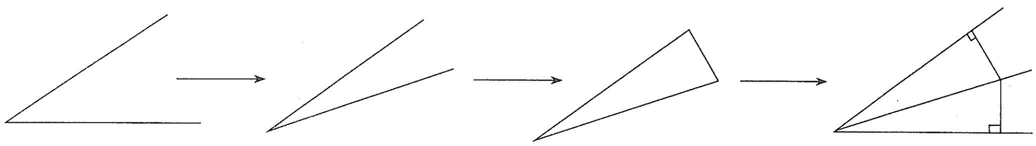
12.【参考答案】

不等式(组)是刻画不等关系的数学模型,它有广泛的应用,课程的教学目标主要是使学生学习不等式的基础知识以及一类最简单的不等式(组)——一元一次不等式(组),并运用它们解决一些数学问题和实际问题,在学习不等式的性质和一元一次不等式(组)的解法时,与不等式的性质和方程(组)的解法进行类比,有益于对知识的理解和掌握。解方程是逐步将方程化为 $x=a$ 的形式,类似地,解不等式是逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式,两者都运用了化归的思想。

13.【参考答案】

(1)了解定理的内容,能够解决什么问题。

例如,在导入环节,可以设计成将 $\angle AOB$ 对折,再折出一个直角三角形(使第一条折痕为斜边),然后展开,观察两次折叠形成的三条折痕。重复操作以上步骤(改变第二次折叠的位置)并观察结果。



(2)理解定理的含义,认识定理的条件和结论,如在公式推导过程中对条件引起注意,通过对结论从结构、功能、性质、使用步骤等角度分析以加深印象和理解。

例如,在定理新授环节和学生一起研究、明确命题中的已知和求证;再根据题意,画出图形,并用数学符号表示已知和求证。

(3)定理的证明或推导过程:学生与老师一起研究证明方法,如不需证明,学生根据老师提供的材料体会定理规定的合理性。

例如,在定理讲授证明环节,经过分析,找出由已知运用学过的知识推出求证的途径,写出证明过程,并得到结论。

(4)熟悉定理的使用,循序渐进地应用定理,将定理纳入已有的知识体系。

例如,可以通过定理深化、应用环节,与已有知识相联系解决课本上的例题,并联系生活实际问题与学生一起探讨研究。

(5)引申和拓展定理的运用。

例如,布置作业,让学生思考角平分线定理的逆命题并证明。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)由题可知,函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导。根据拉格朗日中值定理可知,$\exists\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$。因为 $f(1)=f(0)+3$,即 $f(1)-f(0)=3$。进而可得 $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=3$。

(2)证明：设 $G(x)=xf(x)$，有 $f(1)=0$，所以 $G(0)=0\cdot f(0)=0$，$G(1)=1\cdot f(1)=0$，所以 $G(0)=G(1)$，又有函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以 $G(x)=xf(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以根据罗尔定理，存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $G'(\eta)=\eta f'(\eta)+f(\eta)=0$，所以方程 $xf'(x)+f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 至少有一个实根。

四、论述题

15.【参考答案】

(1)严格递增：定义域中任意 x_1,x_2，若 $x_1>x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在定义域上严格单调递增。函数单调性的概念是研究具体函数单调性的依据，在研究函数的值域、定义域、最大值、最小值等性质中有重要应用(内部)；在解不等式、证明不等式、数列的性质等数学的其他内容的研究中也有重要的应用(外部)。

(2)定义法：定义域中任意 x_1,x_2，若 $x_1>x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$（或 $f(x_1)<f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增(或递减)。定义法判断函数单调性比较适用于对定义域内任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$，容易得出 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系的函数。在解决问题时，定义法是最直接的方法，这种方法思路比较清晰，但是对一些不太容易判断出 $f(x_1)-f(x_2)$ 正负的情况，用定义法解析比较麻烦。

导数法：一般先确定函数的定义域，求出原函数的导数 $f'(x)$，若导数 $f'(x)>0$，则函数在定义域内单调递增，反之则单调递减。导数法适用于函数在其定义域内可导且能判断导函数与零的大小关系的情形，针对定义法解决不了的题型，或者用定义法解题相对比较繁琐，用导数法解题可能会比较简单。导数法提供了一种重要的解题思想。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)第一位教师的教学方法是典型的讲授法，从一开始便将分类的思想贯穿其中，教师直接给出几个有理数加法算式并引导学生利用以前学过的有理数的分类标准进行迁移，对有理数加法算式进行分类，能够使得学生快速地接受新知识，解决实际问题。

第二位教师在教学之初并没有强调分类的重要性，但是该教师能够以学生为主体，让学生列举一些有理数的加法的算式，充分调动了学生的主观能动性。再通过小组讨论，学生交流等过程，调动学生的学习积极性，给予了充分的时间与空间，对有理数加法进行讨论计算，有助于学生发散性思维的培养。

(2)举例 1：关于 x 的方程 $ax^2-(a+2)x+2=0$ 只有一解(相同解算一解)，则 a 的值为________。

本题的解题过程中，需要学生展开分类讨论，不仅要考虑一元二次方程两根相同的情况，还应考虑到在二次项系数为零且一次项系数不为 0 时的一元一次方程也同样满足题意。

举例 2：解一元二次不等式 $x^2-9>0$。

解：$\because x^2-9=(x+3)(x-3)$，

$\therefore (x+3)(x-3)>0$；

由有理数的乘法法则“两数相乘，同号得正”，不等式的解共有两种情况分别是 $\begin{cases}x+3>0,\\x-3>0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+3<0,\\x-3<0,\end{cases}$ 再对两个不等式组分别求解。

分类的过程就是对事物共性的抽象过程，在教学活动中，要使学生逐步体会为什么要分类，如何分类，如何确定分类的标准，在分类过程中如何认识对象的性质，如何区别不同对象的不同性质。分类讨论是一种思想方法，需要渗透到学生的意识中，才能有效指导实践，渗透的过程不是一蹴而就的，而是需要在教学过程中，多次反复地思考和长时间的积累才能将这种思维方式不断融入知识学习的各个阶段。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)数学课程标准中关于“数学思考”的其中一条是在参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力，清晰地表达自己的想法。而本节课所涉及的“数学思考的方法”是学生在参与四边形、五边形、六边形的内角和的探究过程中，猜想多边形的内角和是 $(n-2)\times180°$，然后通过添加辅助线(对角线)等方法证明此结论，并让学生说出自己的探究过程，最后用数学语言表示出多边形的内角和定理：n 边形的

内角和等于$(n-2)\times180°$。

(2)第一种

如何利用三角形的内角和求出四边形的内角和，进而发现：只需连接一条对角线，即可将一个四边形分割为两个三角形。学生说出证明过程，教师板书。

追问1：这里连接对角线起到什么作用？

预设：将四边形分割成两个三角形，进而将四边形的内角和问题转化为两个三角形所有内角的和的问题。

追问2：类似地，你能知道五边形、六边形的内角和是多少度吗？

问题：你能从四边形、五边形、六边形的内角和的研究过程中获得启发，猜想出多边形的内角和与边数的关系吗？

学生自主探究得到猜想：多边形内角和为$(n-2)\times180°$。

第二种

提问：前面我们通过从一个顶点出发作对角线，将多边形分割成几个三角形，进而探究出n边形的内角和，那么，是否还有其他分割多边形的方法呢？

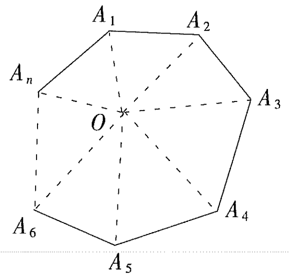
学生活动：学生自主探究，小组讨论交流。学生可能会在n边形内任取一点O，连接$OA_1,OA_2,OA_3,\cdots\cdots,OA_n$，则$n$边形被分成了$n$个三角形，从而猜想出多边形的内角和是$n\times180°-360°$，即$(n-2)\times180°$。

(3)方法一：先让学生回忆多边形的对角线的求法：从n边形的一个顶点出发，可以作$(n-3)$条对角线。它们将n边形分成$(n-2)$个三角形，这$(n-2)$个三角形的内角和就是n边形的内角和，由于一个三角形的内角和是$180°$，所以n边形的内角和等于$(n-2)\times180°$。

方法二：前面我们通过从一个顶点出发作对角线，将多边形分割成几个三角形，进而探究出n边形的内角和，那么，是否还有其他分割多边形的方法呢？

学生活动：学生自主探究，小组讨论交流，并让小组代表板演并讲解思路。学生可能有以下几种方法：

如图，在n边形内任取一点O，连接$OA_1,OA_2,OA_3,\cdots\cdots,OA_n$，则$n$边形被分成了$n$个三角形，这$n$个三角形的内角和为$n\times180°$，以$O$为公共顶点的$n$个角的和是$360°$，所以$n$边形的内角和是$n\times180°-360°$，即$(n-2)\times180°$。



(4)问题一设计意图：采用简单的四边形进行引导，利于学生迅速掌握知识，学生利用辅助线多角度地把多边形的内角和灵活地转化成三角形的内角和，体会转化的数学思想，并为下面五边形、六边形以及n边形的内角和做铺垫。

问题二设计意图：引导学生动手操作、动脑思考、小组讨论，从四边形到五边形再到六边形，以知识迁移的方式进一步体会将多边形分割成几个三角形的化归过程。也进一步明确了边数、对角线条数、三角形个数对多边形内角和的影响，为从具体的多边形抽象到一般的n边形的内角和的研究奠定基础。