

2015 年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学) 参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B。解析: 记点 (x, y) 经 A 变换后的坐标为 (x', y') , 则 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$, 即

$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y, \end{cases}$ 整理得, $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x', \\ y = \frac{1}{3}y', \end{cases}$ 再代入原曲线方程得, $\left(\frac{1}{2}x' - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y' - 2\right)^2 = 4$, 这是一个椭圆。故本题

选 B。

2. 【答案】B。解析: A, C, D 三项都是数列极限保不等式性的应用。对于 B 项, 由于改变收敛数列的有限项, 不会改变数列的极限, 所以很容易找到反例, 如 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 1, & n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$ 故本题选 B。

3. 【答案】B。解析: 向量内积具有交换律、分配律和结合律; 向量外积具有左、右分配律, 不具有交换律。 $(a+c) \cdot b = b \cdot (a+c) = b \cdot a + b \cdot c$, A 项正确; $(a+c) \times b = -b \times (a+c) = -[b \times a + b \times c]$, B 项错误; $(a \cdot b)^2 + (a \times b)^2 = (|a||b|\cos\langle a, b \rangle)^2 + (|a||b|\sin\langle a, b \rangle)^2 = |a|^2|b|^2 = a^2b^2$, C 项正确; D 项是二重外积公式。故本题选 B。

4. 【答案】D。解析: 样本是受审查客体的反映形象或其自身的一部分, 按一定方式从总体中抽取的若干个体, 用于提供总体的信息及由此对总体作统计推断。样本的平均值称样本均值, 在数理统计中, 常常用样本均值来估计总体均值。样本越大从总体中提取的信息就越多, 对总体的代表性就越好。这里取的两组数据都是随机的, 因此均值的大小关系不能确定。故本题选 D。

5. 【答案】C。解析:

$$\begin{array}{c|c|c} x^2-3x+4 & \begin{array}{c} 2x^4-7x^3+8x^2+7x-8 \\ 2x^4-6x^3+8x^2 \end{array} & 2x^2-x-3 \\ \hline & \begin{array}{c} -x^3 \quad +7x-8 \\ -x^3+3x^2-4x \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{c} -3x^2+11x-8 \\ -3x^2+9x-12 \end{array} & \\ \hline & 2x+4 & \end{array}$$

因此, 商为 $2x^2 - x - 3$, 余式为 $2x + 4$ 。故本题选 C。

6. 【答案】A。解析: 根据几何级数的敛散性, 易知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$ 。故本题选 A。

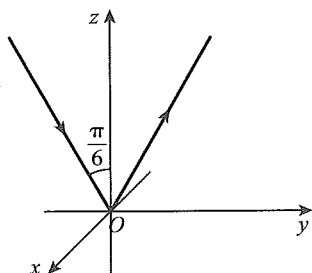
7. 【答案】D。解析: 《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中设定的九条基本事实分别为: ① 两点确定一条直线; ② 两点之间线段最短; ③ 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直; ④ 两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么两直线平行; ⑤ 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行; ⑥ 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等; ⑦ 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等; ⑧ 三边分别相等的两个三角形全等; ⑨ 两条直线被一组平行线所截, 所得的对应线段成比例。

8. 【答案】A。解析: 相交直线既是轴对称图形又是中心对称图形; 等腰三角形是轴对称图形; 平行四边形是中心对称图形; 正多边形是轴对称图形(边数为偶数时既是轴对称图形又是中心对称图形)。故本题选 A。

二、简答题

9.【参考答案】

以入射点为原点 O , 入射光线与反射光线所在平面为 yOz 平面, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则向量 $m = \left(0, \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是反射光线所在直线的一个方向向量。因此, 反射光线的方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\sqrt{3}} (y, z > 0)$ 。

易知, z 轴所在直线就是平面镜的法线, 而反射光线在 yOz 平面上的方程为 $z = \sqrt{3}y$, 所以反射光线绕平面镜的法线旋转一周所得旋转体的方程为 $z = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$, 即 $z^2 = 3x^2 + 3y^2 (z > 0)$ 。

10.【参考答案】

证明:(充分性) 若向量 $m = (a, a')^T, n = (b, b')^T$ 线性无关, 则向量组 m, n 可以构成二维向量空间的一个基, 于是对向量 $\alpha = (c, c')^T$, 存在唯一的一组实数 k_1, k_2 使得, $k_1 m + k_2 n = \alpha$, 从而线性方程组 $\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ 有唯一解。

(必要性) 若线性方程组 $\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ 有唯一解, 则线性方程组对应系数矩阵的秩与线性方程组未知数的个数相等, 于是有 $r\{m, n\} = 2$ (矩阵的秩等于矩阵列向量组的秩), 从而 $m = (a, a')^T, n = (b, b')^T$ 线性无关。

11.【参考答案】

题目要求的是领飞飞机是喷绿色烟雾的概率, 注意到乙队仅有 3 架喷红色烟雾的飞机, 所以领飞飞机一定出自甲队, 下面分两步进行计算。

第一步, 确定领飞飞机出自甲队还是乙队。

因为混合编队中有甲、乙两队飞机各三架, 所以领飞飞机出自甲队的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

第二步, 计算从甲队 3 架飞机中选出的领飞飞机是喷绿色烟雾的概率。

因为先从甲队六架飞机中选出三架飞机, 再从三架飞机中选出一架飞机作为领飞飞机, 与直接从甲队六架飞机中选出一架飞机作为领飞飞机是等价的, 所以从甲队 3 架飞机中选出的领飞飞机是喷绿色烟雾的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

综上, 根据分步乘法计数原理, 领飞飞机是喷绿色烟雾的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 。

12.【参考答案】

数学课程标准、单元目标和具体数学知识点三者的结合。确定教学内容时, 要注意以下三点:

一是数学知识的主要特征。一个数学知识点内容是极为庞杂的, 我们应该选择该数学知识点最本质的东西作为教学的重点。

二是学生的需要。确定知识点的教学内容也不是由教材一个要素决定的,还涉及学生认知发展阶段性的问题。因此不可能是教材有什么我们就教什么、学什么,我们只能选择教材内容与学生认知发展相一致的内容作为教学内容。

三是编者的意图。编者的意图主要是通过例题以及课后的练习题来体现的。数学例题以及课后练习题的重要性在数学课程中要远远高于其他学科,因为数学例题以及练习题是数学课程内容建设一个不可或缺的组成部分。在其他课程中,练习题最多只是课程内容的重现,有的只属于教学领域,作为一种教学手段,对课程本身并没有很大影响。但数学课不是这样,数学课“教什么”在相当程度上是由练习题或明或暗指示给教师的。

13.【参考答案】

数学是以现实世界的空间形式和数量关系作为研究对象的,所以数学的抽象性表现在以下几个方面:

(1) 表现在对空间形式和数量关系这一特性的抽象,如运算律、空间几何的一些证明。

(2) 表现为思考事物的纯粹的量,广泛使用抽象符号,不仅数学概念是抽象的,而且数学方法也是抽象的,并且大量使用抽象的符号。如空间几何图形的位置关系的定义,数量间的加减乘除方法的归类。

(3) 它在抽象过程中抛开较多的事物的具体的特性,因而具有十分抽象的形式。数学的抽象是逐级抽象的,下一次的抽象是以前一次的抽象材料为其具体背景,如数形结合得出函数的单调性和奇偶性性质。

(4) 高度的抽象必然有高度的概括,表现为高度的概括性,并将具体过程符号化,当然,抽象必须要以具体为基础。

(5) 数学语言具有高度的抽象性,因此数学阅读需要较强的逻辑思维能力。学会有关的数学术语和符号,正确依据数学原理分析逻辑关系,才能达到对书本的本真理解。同时数学有它的精确性,每个数学概念、符号、术语都有其精确的含义,没有含糊不清或易产生歧义的词汇,结论错对分明,因此数学阅读要求认真细致,同时必须勤思多想。

三、解答题

14.【参考答案】

拉格朗日中值定理:如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可导,则 $\exists \xi \in (a, b)$,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明:构造辅助函数

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right],$$

则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可导,且 $g(a) = g(b) = 0$ 。

因此,由罗尔定理知, $\exists \xi \in (a, b)$,使得

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

拉格朗日中值定理在微积分学中是一个重要的理论基础,是应用数学研究函数在区间上整体形态的有力工具。拉格朗日中值定理在中学数学中应用非常广泛,如利用导数来研究函数的某些性质、证明不等式和方程根的存在性、描绘函数的图像、求极值、最值等等。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 数学的严谨性,是指数学具有很强的逻辑性和较高的精确性,即逻辑的严格性和结论的确定性。量力性是指学生的可接受性。

“严谨性与量力性相结合”说明教学中的数学知识的逻辑严谨性与学生的可接受性之间相适应的关系。理论知识的严谨程度要适合学生的一般知识结构与智力发展水平,随着学生知识结构的不断完善,心理发展水平的提高,逐渐增强理论的严谨程度;反过来,又要通过恰当的理论严谨性逐渐提升学生的接受能力。

显然,这一原则是根据数学本身的特点及学生心理发展的特点提出的。但是,在学习过程中,学生的心理发展是逐步形成的,不同的年龄阶段,其感知、记忆、想象、思维、能力等心理因素都有不同的发展水平。这种心理发展的渐变性决定了在教学中不可能对数学理论的研究达到完全严密的程度,而应该在不同的教学阶段,依据不同的教学目的和内容而提出不同的严谨性要求,即数学教学的严谨性是相对的。

(2) 在证明“ $\sqrt{2}$ 是无理数”的教学过程,应设法安排使学生逐步适应的过程与机会,逐步提高证明的严谨程度,要求做到推理有据,证明要步步有根据、处处有逻辑。在推理有据的同时并不排斥直观和猜想,强调思维的严谨性,允许猜想、辩证地处理好推理的有据和猜想的关系。

由于学生对无理数不熟悉,在实际教学过程中我们采用反证法,先假设是有理数。教学中可以由教师给出证明步骤,让学生只填每一步的理由,鼓励学生发扬“跳一跳够得到”的精神,逐步过渡到学生自己给出严格证明,最后要求达到立论有据,论证简明。“如果 x 是有理数,那么 x 可以写成最简分数 $\frac{p}{q}$ (p, q 是整数且互质)的形式,于是 $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$,从而 $p^2 = 2q^2$ 。由于 $2q^2$ 是偶数,所以 p 也是偶数,不妨设 $p = 2a$,则 $2a^2 = q^2$,而 $2a^2$ 是偶数,所以 q 应是偶数,这样 p, q 都是偶数,它们有公约数2,这与 p, q 互质矛盾。因此, $\sqrt{2}$ 不是有理数,是无理数。”

在教学过程中,不能消极适应学生,降低理论要求,必须在符合内容科学性的前提下,结合学生实际组织教学。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 在课堂导入环节运用了复习导入法,帮助学生复习已经学习过的知识,建立新旧知识之间的联系,回顾一次函数的研究内容和研究方法,巩固已经学过的知识,为介绍反比例函数做铺垫,帮助学生快速进入课堂。

在旧知的铺垫后,提出问题,反比例函数图像的形状,让学生带着问题去思考,用数形结合的思想,引导学生用列表描点的方式进行绘图,更加直观地了解反比例函数,在这个过程中增强了学生的动手操作能力,但是在引导学生运用列表法的时候选出的点不够有代表性, x 轴不可能都是整数,可以随机地选取一部分分数,为下边讲解函数图像是一条光滑的曲线做准备。

教师在教学过程中用计算机演示图像的生成过程,将信息技术运用到数学学科教学中来,可以很直观地将函数图像的动态画面展示给学生,从而充分地激发学生的学习兴趣,调动学生的积极性,引导学生自主思考,培养学生不断创新的能力和数形结合的意识。

在图像生成后,教师组织学生观察讨论曲线特点,根据选取图像中若干特殊点,总结在第一象限以及第三象限的变化情况,对于函数的取值范围进行观察,由于 x, y 都不能为0,所以函数图像与 x 轴、 y 轴不能有交点。

(2) 在计算机图像生成过程后,教师进行提问:

大家观察图像的生成过程,想一想为什么反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像是两条平滑的曲线呢?它的取值范围是什么?留给學生一定的讨论交流时间,教师巡视并引导。

反比例函数图像是光滑的曲线,这是区别一次函数图像最大的特点,可从以下三个方面进行引导:

① 确定反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的 x 的取值范围是 $x \neq 0$,可以看出 x 的取值是非常多的,因此 y 的值也是非常多的,在函数图像上对应的点也是无限多的,而我们之前的列表描点,只是图像上的点的很小一部分,但是当我们的描点越来越多时,就会发现图像越发达地接近平滑曲线。

② 反比例函数的图像可通过描点法给出,折线是由若干直线组合而成,而直线必须对应一个一次函数,显然反比例函数不能对应到一次函数上,所以它不是折线,而是曲线。

③ 引导学生运用类比转化的思想,与“多边形的边无限增多之后就变成了光滑的圆,圆就是正多边形边数无限大时的情况”的道理是一样的,运用极限思想理解反比例函数图像是一条光滑的曲线。

(3) 用计算机演示图像的生成过程后,教师提问:

大家可以看到反比例函数图像是由两个分支构成的,这两个分支又分别位于两个象限,这两个图像在这两个分支上分别有什么变化呢?

预设: y 的值伴随 x 的值增大而减小。

追问:怎么证明这个变化呢?

以第一象限的分支为例,引导学生对第一象限的点进行列表描点,留给学生一定的交流讨论时间。

学生进行回答,教师给以评价并进行归纳,组织学生通过选取第一象限连续多个点进行比较,进而发现反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 在第一象限的分支 y 的值伴随 x 的值增大而减小。在这个过程中,锻炼学生从数学模型中抽象出数学结论的能力,增强了学生的动手操作能力,提高了合作交流意识。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学目标:

知识与技能目标:了解平行四边形的概念,理解平行四边形的性质定理,掌握平行四边形性质的内容并学会灵活运用。

过程与方法目标:经历对平行四边形性质的探索过程,增强学生合作意识,培养学生的发散思维,分析问题和解决问题的能力。

情感态度与价值观目标:在合作探究中体会解决问题的快乐,锻炼克服困难的意志,养成独立思考、交流的习惯,提升对数学的好奇心和求知欲。

(2) 发现探究平行四边形性质的流程。

第一种:

① 回顾旧知,巩固基础。

教师提问:大家还记得平行四边形的定义吗?

预设:有两组对边分别平行的四边形是平行四边形。

② 设置疑问,引出新课。

追问 1:那就是说,平行四边形都有两组对边分别平行,对吗?

预设:(学生十分肯定地回答)。

追问 2:平行四边形除了这个性质,还有其他性质吗?

追问 3:大家可以想一想,平行四边形的组成元素是什么呢?有什么特点呢?

留给学生一定的思考空间。

③ 合作交流,得出猜想。

小组交流讨论,教师巡视指导。

学生回答,教师予以评价并进行归纳,得出猜想:平行四边形的对边相等,对角相等。

第二种:

① 多媒体导入新课,设置疑问。

教师通过多媒体方式呈现问题“小明同学用量角器量出平行四边形的一个内角是 77° ,就说知道了其余三个内角的度数;用直尺量出了一组邻边的长分别为 40 cm 和 45 cm,就说知道了这个平行四边形的周长。你知道小明同学是怎么计算的吗?”

留给学生一定的思考时间。

② 动手操作,测量平行四边形的边和角。

教师引导学生可以自己在纸上画出一个平行四边形,直尺和量角器量出边长和角度,进行记录。

教师提问:大家通过记录自己画的平行四边形的边长和角的度数,能够发现什么?

预设:对边的长相等,对角的度数也相等。

③ 交流讨论,得出猜想。

教师提问:是不是所有的平行四边形都是这样呢?

学生合作交流,教师巡视指导。

教师要求小组内成员交换各自画的平行四边形,重新进行测量。

在学生测量并讨论结束后,请各个小组代表汇报本组的发现,教师适时予以引导,得出猜想:平行四边形的对边、对角相等。

(3) 平行四边形性质证明的教学过程如下:

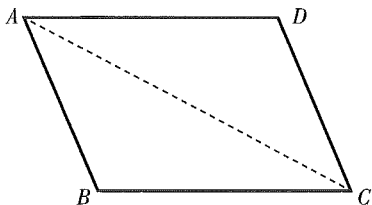
① 提出猜想,引出证明。

教师提问:在之前的教学过程中,我们得到平行四边形性质的猜想,即平行四边形的对边、对角相等,但是如何用文字和符号语言将其证明出来呢?

教师引导学生可以用之前学过的知识来证明,留给学生一定的时间思考,教师巡视指导。

② 引导学生作图,整理证明思路。

教师引导学生画辅助线,连接四边形的一条对角线,教师板书。



追问 1:根据平行四边形中有两组对边平行,大家能联想到平行线的一些性质吗?

预设:两直线平行,内错角相等,同位角相等,同旁内角互补。

追问 2:现在根据画出的辅助线,将一个平行四边形分割成两个三角形,又加上平行四边形的性质,现在大家可以用学过的什么知识来证明平行四边形对边相等,对角相等的性质呢?

留给学生一定的思考时间。

③ 学生回答,教师规范解答过程。

学生在交流讨论后得出结论,可以用三角形全等的方式来进行证明。

教师归纳:要证平行四边形对边相等,对角相等的性质,可以转化成证明两个三角形全等,问题就解决了,这就是数学的转化思想,将一个问题化繁为简,化难为易,化未知为已知。

教师让学生自己写证明过程,教师予以评价并规范证明过程如下:

在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB \parallel CD$

$\therefore \angle BAC = \angle DCA, \angle BCA = \angle DAC, AC = CA$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$

$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle BAD = \angle DCB, \angle ABC = \angle CDA$

所以得证平行四边形的对边相等,对角相等。