2018年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。解析：本题考查空间解析几何中平面的法向量的相关知识。平面的法向量是垂直于平面的非零向量。在直角坐标系中，平面$Ax+By+Cz+D=0$(A，B，C不同时为零)的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$。本题中，向量$\boldsymbol{a}=(2,3,1)$为平面$2x+3y+z=3$的法向量，故垂直于平面$2x+3y+z=3$。故本题选C。

2.【答案】C。解析：本题考查函数极限的四则运算以及等价无穷小量替换。

(方法一)当$x\to0$时，$\tan3x\sim3x$。所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x}\cdot1=3$。

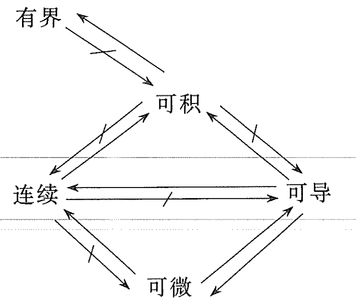
(方法二)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x\cos3x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos3x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}=3\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}=3$。故本题选C。

3.【答案】D。解析：本题考查黎曼可积的条件。

若函数$f(x)$在$[a,b]$上(黎曼)可积，则$f(x)$在$[a,b]$上必有界(可积的必要条件)，故本题选D。

下面说明其他三个选项。可积的充分条件有以下3个：①函数在闭区间上连续；②函数在闭区间上有界且只有有限个间断点；③函数在闭区间上单调。由此可排除B项和C项。又因为在一元函数中，可微一定连续，且连续一定可积，但反之不成立，故排除A项。

一元函数在闭区间上连续、可导、可微、可积、有界的关系图如下：



4.【答案】B。解析：本题考查定积分的几何意义或定积分的计算。

(方法一) 定积分$\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$表示被积函数$y=b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$与$x$轴所围成的图形的面积，即椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在$x$轴上方部分的面积。而椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积为$\pi ab$。所以$\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi ab}{2}$。

(方法二)本题也可用第二换元积分法计算。令$x=a\sin t$，由于$-a\leqslant x\leqslant a$，所以$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，且$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，所以$\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos2t+1}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{ab}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos2t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t\right)=\dfrac{\pi ab}{2}$。故本题选B。

5.【答案】A。解析：(方法一)一个向量组中，若一个向量可由其余向量线性表出，则这几个向量必线性相关；若任意一个向量都不能被其余向量线性表出，则这几个向量必线性无关。结合选项可知，只有选项A可以由向量$\boldsymbol{\alpha}$和向量$\boldsymbol{\beta}$线性表出，即$(3,2,1)=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$。故本题选A。

(方法二)向量组$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性相关$\Leftrightarrow$矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})$的秩小于向量的个数$\Leftrightarrow|A|=0$；向量组$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$线性无关$\Leftrightarrow$矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})$满秩$\Leftrightarrow|A|\neq0$。结合选项知，$\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq0$，$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq$

$0,\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&2\\1&0&2\end{vmatrix}=1\neq0$，进而可知，选项A中的向量与向量$\boldsymbol{\alpha}$和向量$\boldsymbol{\beta}$线性相关，BCD三项中的向量均与向量$\boldsymbol{\alpha}$和向量$\boldsymbol{\beta}$线性无关。故本题选A。

6.**【答案】**B。**解析：**本题考查线性空间的维数、线性空间的基。由题意知，线性空间V中的每一个元素都是$\cos x$和$\sin x$的线性组合。而$\cos x$和$\sin x$是线性无关的，这是因为如果存在实数m,n，使得$m\cos x+n\sin x=0$对任意$x\in\mathbf{R}$都成立，则$m=n=0$。因此$\cos x$和$\sin x$是线性空间V的一组基，所以V的维数是2。故本题选B。

7.**【答案】**C。**解析：**本题考查《义务教育数学课程标准(2011年版)》中课程目标行为动词的相关知识。在课程标准中有两类行为动词，一类是描述结果目标的行为动词，包括“了解(知道)、理解、掌握、运用”等术语。另一类是描述过程目标的行为动词，包括“经历、体验、探索”等术语。每一组术语中按照从前到后的顺序要求递增，即行为动词按要求的高低排序为了解(知道)<理解<掌握<运用，经历<体验<探索。故本题选C。

8.**【答案】**A。**解析：**本题考查命题的相关知识。命题P的逆命题和命题P的否命题互为逆否命题，而互为逆否命题的两个命题同真同假。故本题选A。

二、简答题

9.**【参考答案】**

本题考查过曲线外一点求曲线的切线方程。

(方法一)设切点为(x_0,x_0^2+1)，因为$y'=2x$，则过切点(x_0,x_0^2+1)的切线斜率$k=2x_0$，切线方程为$y=2x_0(x-x_0)+x_0^2+1=2x_0x-x_0^2+1$。

若切线过点$(a,0)$，则有$2x_0a-x_0^2+1=0$，解此关于x_0的一元二次方程，得$x_0=a\pm\sqrt{a^2+1}$。

所以$k=2x_0=2(a\pm\sqrt{a^2+1})$。

所以所求的切线方程为$y=2(a+\sqrt{a^2+1})(x-a)$或$y=2(a-\sqrt{a^2+1})(x-a)$。

(方法二)设切点为(x_0,y_0)，则由切点在抛物线上得$y_0=x_0^2+1$。

因为$y'=2x$，故切线斜率$k=2x_0$，所以过点$(a,0)$的切线方程可设为$y=2x_0(x-a)$。

由切点在切线上得$y_0=2x_0(x_0-a)$。

联立方程$\begin{cases}y_0=x_0^2+1,\\y_0=2x_0(x_0-a),\end{cases}$化简可得$x_0=a\pm\sqrt{a^2+1}$，故$k=2(a\pm\sqrt{a^2+1})$。

所以所求的切线方程为$y=2(a+\sqrt{a^2+1})(x-a)$或$y=2(a-\sqrt{a^2+1})(x-a)$。

10.**【参考答案】**

本题考查在矩阵作用下的坐标变换。

由已知得，$\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+5y\\x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}2x+5y=x',\\x+3y=y',\end{cases}$解此关于$x,y$的二元一次方程组得$\begin{cases}x=3x'-5y',\\y=-x'+2y'。\end{cases}$

因为$x^2-y^2=1$，所以有$(3x'-5y')^2-(-x'+2y')^2=1$，整理得$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$满足的方程为$8x'^2-26x'y'+21y'^2=1$。

11.**【参考答案】**

本题考查微分中值定理。

当$x_1=x_2$时结论显然成立。不妨设$x_1<x_2$，则函数$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上连续，在区间(x_1,x_2)上可导，由拉格朗日中值定理可得，存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$。即有$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|$。

因为$f'(x)$有界，故存在$M>0$，对任意$x\in[0,1]$都有$|f'(x)|\leqslant M$，所以$|f'(\xi)|\leqslant M$。

故$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$。

12.【参考答案】

《义务教育数学课程标准(2011年版)》中指出,评价的主要目的是全面了解学生数学学习的过程和结果,激励学生的学习和改进教师的教学。

日常数学教学中通过对学生学习的评价,教师可以更好地关注学生的学习过程。教师不仅能够关注到学生对知识技能掌握的程度,还可以关注到学生的思维过程。教师可以根据学生在学习过程中的表现判断学生是否会用数学的眼光观察世界,是否会用数学的思维思考世界,是否会用数学的语言表达世界。

日常数学教学中对学生学习过程中的表现、所取得的成绩以及所反映出的情感、态度、策略等方面的发展做出的评价,其目的是激励学生学习,帮助学生有效调控自己的学习过程,使学生获得成就感,增强自信心,培养合作精神。

同时,通过对学生学习的评价,教师可以了解教学过程中存在的问题和改进的方向,及时修正和调整教学目标、内容和计划。

13.【参考答案】

完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的几何解释

(1)如图1,大正方形的边长为$a+b$,所以面积为$(a+b)^2$;大正方形的面积也可以表示成一个边长为a的正方形,两个长为a、宽为b的长方形和一个边长为b的正方形的面积之和,即$a^2+2ab+b^2$。所以$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

(2)如图2,大正方形的边长为$a+b$,所以面积为$(a+b)^2$;大正方形的面积也可以表示成四个全等的直角边分别为a,b的直角三角形和一个边长为$\sqrt{a^2+b^2}$的小正方形的面积之和,即$4\times\frac{1}{2}ab+a^2+b^2=a^2+2ab+b^2$。所以$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

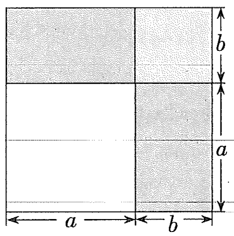


图1

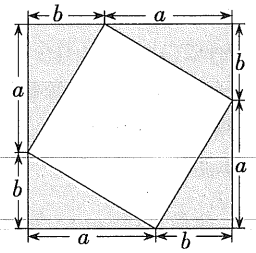


图2

几何解释对学生数学学习的作用

(1)有助于学生直观地理解数学问题。几何解释把复杂、抽象的数学问题变得简明、形象,可以帮助学生直观地理解数学问题,了解数学问题的几何背景或几何意义。

(2)有助于加深学生对定理、公式等数学知识的理解。在定理、公式的学习上,几何解释可以很好地帮助学生理解其本质含义,通过追本溯源,加深学生对定理、公式的记忆和把握。

(3)有助于激发学生的数学学习兴趣。运用几何解释来解决数学问题,可以将直观上枯燥、复杂的数学问题转化为形象、有趣的图形问题。这样可以避免学生对于数学学习的厌烦感,激发学生学习数学的兴趣,从而使学生不再惧怕数学,增强其学好数学的信心。

(4)有助于探索解决问题的思路,预测结果。几何解释可以配合教师运用启发式教学,帮助学生探索拓展解决问题的思路,引导学生多方向思考解决问题的途径,预测数学问题的结果。

(5)有助于培养数形结合的数学思想。教师在教学过程中通过几何解释渗透数形结合思想,帮助学生在数学学习的过程中逐步形成数形结合思想。

三、解答题

14.【参考答案】

本题考查连续型随机变量的分布函数、密度函数以及期望和方差的求解。

由题意知，随机变量ξ的概率分布函数$F(x)=P\{\xi\leqslant x\}=P\{\xi<x\}=P\{\xi\in(-\infty,x)\}=\begin{cases}0,x<0,\\x,0\leqslant x\leqslant 1,\\1,x>1。\end{cases}$所以其密度函数$f(x)=F'(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,\\0,其他。\end{cases}$

则$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\Big|_0^1=\frac{1}{12}$。

相关知识拓展

设随机变量X服从区间$[a,b]$上的均匀分布，则X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a\leqslant x\leqslant b,\\0,其他,\end{cases}$且$EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$。本题中，随机变量$\xi$服从区间$[0,1]$上的均匀分布，所以根据上述公式可以快速求得$E\xi=\frac{1}{2}$，$D\xi=\frac{1}{12}$。这可以作为考生检验计算结果的依据。

四、论述题

15.**【参考答案】**

(1)信息技术在数学教学中的作用

①信息技术可以为师生提供丰富的信息资源。教师将信息技术与数学教学相结合，利用丰富的数学教学资源，拓展知识视野，改变传统的学科教学内容，使教材“活”起来。学生通过信息技术进行辅助学习，把数学学习由课内延伸到课外，在开阔知识视野、丰富课余知识的同时，也培养了自主探究知识的能力。

②利用信息技术可以优化数学课堂教学效果，提高教师的课堂教学效率。在数学教学的过程中运用信息技术，不仅可以使学生难懂、教师难教的数学知识变得简单化、形象化，还可以方便教师更好地突破知识的重难点，帮助学生对知识的优化和巩固。教师利用信息技术，通过多媒体课件向学生展示板书内容，可以节省教师在课堂上书写的时间，从而提升数学课堂的教学效率。

③利用信息技术展示知识的形成过程，可以将抽象的知识直观化。利用现代信息技术图、文、声、像、影并茂的特点创设逼真的教学环境，可以把教学中只靠挂图或黑板作图难讲解清楚的知识，通过形象生动的画面、声像同步的情境将知识的形成过程充分体现出来。如在空间与图形的教学中，借助多媒体课件，可以使学生在直观地观察中形成几何概念的表象，使其形成清晰的概念，从而培养学生的观察能力和思维能力。

④利用信息技术可以激发学生数学学习的兴趣，使其深入浅出地理解掌握数学知识。通过信息技术将一些数学背景、数学史等相关知识在数学课堂上展示出来，一方面，配合教师数学课堂导入法中的趣味导入法，激发学生学习数学的兴趣；另一方面，方便教师将相关知识分解和拓展，从而加深学生对于数学知识的理解和进一步掌握。例如，教师在教学“勾股定理”时，可以通过课件形象化地引入毕达哥拉斯发现“勾股定理”的背景以及“赵爽弦图”的内容，既丰富了学生对于数学史的了解，加深其对定理的认识，又使学生感受数学学习的趣味性。

(2)信息技术与其他教学手段的关系

①教师在教学时应将信息技术和其他教学手段相结合，取长补短，根据不同的教学特点、不同的内容合理地选用教学手段。传统的教学手段，如教科书，板书，图形模具等，在长期的教学实践中发挥着重要的作用。随着科学技术的发展，信息技术应运而生，成为现代教学中必不可少的工具。信息技术给数学教学提供了大量信息和多种手段，对数学学科教学内容、教学方法和学习方法等产生了深远的影响。

②教师在教学时应充分发挥信息技术的辅助作用，而非主体作用。信息技术的真正价值在于实现原有教学手段难以达到，甚至达不到的效果。但信息技术并不能完全替代原有的教学手段。传统的教学手段依然是现代课堂教学中必备的工具和手段。教师应将信息技术与教学模具进行结合，让学生动手参与其中，使学生获得全面的学习和发展。因此，教师要从实际出发，适时、适量、适度和适龄地利用信息技术，让信息技术真正为课堂服务的同时发挥其与常规教学手段的各自优势，相互促进、相辅相成。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)该教师教学设计的优点：

①利用生活实例作为情境，可以调动学生的探究欲望，能够激发学生学习的兴趣，并使学生体会数学与生活的密切联系；

②板书一元一次方程和二元一次方程组两种解法，强调两种解法的内在联系，通过对比，有利于转化思想的形成，有利于新的知识结构与方法的建构；

③教师引导学生复习二元一次方程组的知识，再学习代入消元法解二元一次方程组，建立了新旧知识之间的联系，为新知识的学习做好了铺垫。

(2)该教师教学设计的不足：

①复习导入环节只复习了二元一次方程组的相关概念，应该加入一元一次方程的相关知识；

②教学的引导性不强，学生的主体地位没有完全突显出来，对于两种解法的内在联系和代入消元法的步骤应该引导学生发现和总结；

③教学过程不完整，缺少必要的巩固练习，没有总结并板书代入消元法的具体步骤，没有给学生布置作业。

(3)代入消元法的基本步骤：①选取一个系数较简单的二元一次方程变形，用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数；②将变形后的方程代入另一个方程中，消去一个未知数，得到一个一元一次方程(在代入时，要注意不能代入原方程，只能代入另一个没有变形的方程中，以达到消元的目的)；③解这个一元一次方程，求出未知数的值；④将求得的未知数的值代入前面变形后的方程中，求出另一个未知数的值；⑤用大括号联立两个未知数的值，就是方程组的解；⑥最后检验求得的结果是否正确(代入原方程组中进行检验，方程是否满足左边=右边)。

数学思想：化未知为已知的转化思想；把二元变成一元的消元思想。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)教师在导入新课时先提出问题：同学们想一下如何画一个平行四边形？

生：利用平行四边形的定义，两组对边分别平行来画。(大部分学生的作图方法)

师：很好！那么还有没有其他方法呢？

师：大家想一下，我们之前学过平行四边形对角线的什么性质？

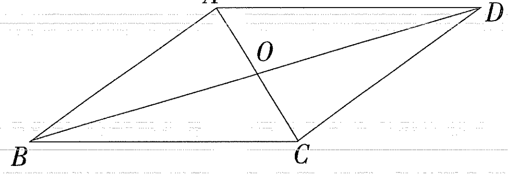
教师启发学生回忆，直到学生答出：平行四边形的对角线互相平分。

教师总结学生作法，结合对角线的性质继续反问学生：利用平行四边形对角线互相平分的性质所作的四边形是不是平行四边形？

【设计意图】通过上述问题引入定理，一方面帮助学生回顾旧知，让学生感受到新旧知识之间的联系；另一方面考虑到大部分学生都会采用利用定义中的平行关系来作图，据此教师在肯定学生的作法的同时顺势提出利用对角线的性质作图的设想，让学生自主探究以培养其分析问题和解决问题的能力。

(2)教学片段

教师将“对角线互相平分的四边形是平行四边形”的判定定理转化为直观问题的形式：在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，且$OA=OC$，$OB=OD$，请说一说四边形$ABCD$是什么四边形？(多媒体展示问题)



教师预留时间供学生自主探究、合作交流。

教师结合旧知，启发学生思考：

①平行四边形的定义是什么？（两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形）

②课件问题中，如何根据已知条件得出平行四边形的证明条件？

预设：学生回顾旧知之后，讲出通过证明两三角形全等来得出证明条件。

教师继续带领学生回忆两三角形全等的判定条件和性质。之后教师继续设问，引导学生探究证明过程。

教师提问：图中有哪些三角形全等？能得出哪些用来证明四边形是平行四边形的条件？

学生合作学习，交流自己的思路。最后，教师找同学到黑板上板书证明过程。

证明：$\because OA=OC, OD=OB, \angle AOD=\angle COB$，

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$，

$\therefore \angle DAO=\angle BCO$，

$\therefore AD \parallel BC$。

又$OA=OC, OB=OD, \angle AOB=\angle COD$，

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$，

$\therefore \angle BAO=\angle DCO$。

$\therefore AB \parallel CD$。

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形。

教师小结学生板书的证明方法，同时带领学生回顾问题并继续追问：四边形$ABCD$中$OA=OC, OB=OD$能说明什么？

预设：学生说出四边形$ABCD$的对角线互相平分，进而验证定理的正确性，即对角线互相平分的四边形是平行四边形。

【设计意图】本环节教师将要证明的定理内容转化为问题的形式，进而引导学生复习旧知，自主探究定理证明的思路，最终应用三角形全等的知识，验证所要学习的内容。这一过程培养了学生数形结合和转化的思想，帮助学生建立了新旧知识之间的联系并使其学会利用旧知验证新知，提升了学生分析问题和解决问题的能力。教师鼓励学生交流思路并找学生板书的过程，既培养了学生之间合作交流的学习习惯，又在学生板书的过程中掌握其逻辑语言表达的水平。

(3)变式题如下：

如图，平行四边形$ABCD$，点E，F是AC上的两点。再给出一个条件________，即可证明四边形$BFDE$是平行四边形。

根据上述内容，在横线处填写你认为对的条件，并利用你给出的条件结合今天学习的判定定理，证明四边形$BFDE$是平行四边形。你能找到几个使四边形$BFDE$是平行四边形的条件？