# 2022 年下半年中小学教师资格考试
# 数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

**一、单项选择题**

1.【答案】D。解析:令$f(x)=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)=0$,解得$x_1=-1,x_2=1,x_3=2$,所以函数$f(x)$共有 3 个零点。故本题选 D。

2.【答案】C。解析:$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$。故本题选 C。

3.【答案】B。解析:齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数矩阵的行列式等于零,即$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=-3\lambda-2=0$,所以$\lambda=-\frac{2}{3}$。故本题选 B。

4.【答案】D。解析:由已知可得,$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(3,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(1,-1,2)$,因此$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=3\times1+1\times(-1)+0\times2=2$。故本题选 D。

5.【答案】B。解析:$z$轴的一个方向向量为$\boldsymbol{s}=(0,0,1)$,平面$3x-6y-4=0$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(3,-6,0)$,由于$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0\times3+0\times(-6)+1\times0=0$,所以$z$轴与平面的法向量垂直,又因为$z$轴上的一点$(0,0,1)$不在平面$3x-6y-4=0$上,所以它们的位置关系是平行。故本题选 B。

6.【答案】A。解析:从编号为 1,2,3,4,5,6 的六个球中拿出三个球,共有$C_6^3=20$种情况,拿出的球编号为 1,2,3 只有 1 种情况,因此所求概率为$\frac{1}{20}$。故本题选 A。

7.【答案】A。解析:吴文俊是首届国家最高科技奖的得主,他的研究工作涉及数学的诸多领域,其主要成就表现在拓扑学和数学机械化两个领域,“文华逾九章,拓扑公式彪史册;俊杰胜十书,机器证明誉寰球”是对吴文俊先生毕生成就的高度概括。故本题选 A。

8.【答案】C。解析:《义务教育数学课程标准(2022 年版)》给出 9 条几何基本事实:① 两点确定一条直线;② 两点之间线段最短;③ 同一个平面内,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直;④ 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行;⑤ 两条直线被第三条直线所截,如果同位角相等,那么这两条直线平行;⑥ 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等;⑦ 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等;⑧ 三边分别相等的两个三角形全等;⑨ 两条直线被一组平行线所截,所得的对应线段成比例。这 9 条基本事实不需要证明,而且是义务教育阶段图形的几何性质和定理证明的出发点。故本题选 C。

**二、简答题**

9.【参考答案】

因为$f(x)$在$x=1$处可导,所以$f(x)$在$x=1$处一定连续,从而有$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b$。又由$f(x)$在$x=1$处可导可知,$f(x)$在$x=1$处的左导数和右导数存在且相等,分别计算$f(x)$在$x=1$处的左导数和右导数,得

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(ax+b)-1}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2,$$

所以$a=2$。结合$a+b=1$,得$b=-1$。

10.【参考答案】

记“第一次取到的是合格品”为事件$A$,“第二次取到的是合格品”为事件$B$,则$AB$表示“第一次取到的是合格品,第二次也取到合格品”。在第一次取到合格品的条件下,第二次仍然取到合格品的概率是$P(B|A)=$

$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$。

11.【参考答案】

联立方程$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5,\\x^2+y^2=4z,\end{cases}$得$z^2+4z=5,z=1$或$z=-5$,又因为$z\geqslant 0$,所以$z=1$。因此两个曲面的交线为$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=1,\end{cases}$即为平面$z=1$上的圆。该曲线在$Oxy$平面上的投影方程为$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=0。\end{cases}$

12.【参考答案】

有理数的运算律包括:

加法交换律:$a+b=b+a$;

加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法交换律:$a\times b=b\times a$;

乘法结合律:$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$;

乘法对加法的分配律:$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。

13.【参考答案】

(1) 在数学探究活动中积累数学活动经验

数学探究活动以解决数学问题为中心,注重学生独立活动的开展,有利于提高学生自主学习的能力。例如,在学习多边形的内角和时,教师可以从三角形的内角和出发,让学生探究四边形的内角和、五边形的内角和……,直到学生能够发现规律,总结得出多边形的内角和公式。

(2) 在数学课外活动中积累数学活动经验

数学课外活动能够启发和建立学生对数学学习的兴趣,拓宽和加深学生对所学数学知识的理解,培养学生的合作精神。例如:在学习有序数对后,教师带学生一起到操场,让五位学生快速分散地坐到看台上,再将剩余学生按四人一组进行分组,要求学生根据课上学习的有序数对,快速定位看台上的同学,看哪个小组定位得最快最准。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) $|\boldsymbol{A}|=(-1)\begin{vmatrix}1&3&-1\\-1&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&3&0\\0&-7&4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}3&0\\-7&4\end{vmatrix}=-12$。

(2)(方法一) 记$\boldsymbol{b}=(10,2,4)^{\mathrm{T}}$,将线性方程组对应的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$化为最简阶梯形矩阵:

$$\begin{bmatrix}3&2&1&10\\-1&0&1&2\\1&3&-1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\-1&0&1&2\\3&2&1&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&3&0&6\\0&-7&4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix},$$

因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$,所以该线性方程组有唯一解,其解为$\boldsymbol{x}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$。

(方法二) 由(1)知,$|\boldsymbol{A}|=-12\neq 0$,故可知方程组有唯一解,由克拉默法则可知方程组的解为$\boldsymbol{x}=\left(\frac{D_1}{|\boldsymbol{A}|},\frac{D_2}{|\boldsymbol{A}|},\frac{D_3}{|\boldsymbol{A}|}\right)^{\mathrm{T}}$,其中$D_1=\begin{vmatrix}10&2&1\\2&0&1\\4&3&-1\end{vmatrix}=-12,D_2=\begin{vmatrix}3&10&1\\-1&2&1\\1&4&-1\end{vmatrix}=-24,D_3=\begin{vmatrix}3&2&10\\-1&0&2\\1&3&4\end{vmatrix}=-36$,代入可得方程组的解为$\boldsymbol{x}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$。

**四、论述题**

15.【参考答案】

"图形的性质"强调通过实验探究、直观发现、推理论证来研究图形,在用几何直观理解几何基本事实的基础上,从基本事实出发推导图形的几何性质和定理,理解和掌握尺规作图的基本原理和方法。学生在这样的学习过程中能够发展空间观念和推理能力。例如,在等腰三角形的学习中,需要理解等腰三角形的概念,通过活动和实验探索发现等腰三角形的性质,并利用基本事实"三边分别相等的两个三角形全等"来证明等腰三角形的性质定理。

"图形的变化"强调从运动变化的观点来研究图形,理解图形在轴对称、旋转和平移时的变化规律和变化中的不变量。学生在这样的学习过程中能够发展几何直观和空间观念。例如,在轴对称的学习中,通过实例理解轴对称的概念,探索轴对称的基本性质"成轴对称的两个图形中对应点的连线被对称轴垂直平分",其中的变化规律就是两个图形关于一条直线对称,变化中的不变量是轴对称的基本性质。

从图形的变化角度认识图形,有助于学生直观理解图形的性质,建立几何直观。例如,可以从轴对称的角度探索等腰三角形的性质。

**五、案例分析题**

16.【参考答案】

教师甲的优点:鼓励学生动手探究平行四边形周长和边长之间的关系,既加强了对平行四边形知识的应用,又能够使学生在对比中发现菱形和平行四边形之间的联系和区别,用学过的平行四边形类比没学过的菱形的概念,引起学生丰富的联想,激发学生的思维活动。

教师乙的优点:用生活中常见的实物图片进行导入,让学生进行观察、归纳,能够吸引学生的学习兴趣,感受数学与实际生活的联系,增加学生的几何直观,使教学更加生动形象。

教师丙的优点:通过让学生动手操作来引出菱形的概念,既能增加学生的数学活动经验,又能提高学生的动手操作能力,充分体现了学生的主体地位和教师的主导作用。

教师丁的优点:教学从学生已有的知识经验出发,遵循学生的认知规律,能够加强新旧知识之间的联系,培养学生发现问题、提出问题的能力和类比的数学思想。

**六、教学设计题**

17.【参考答案】

(1) 将实际问题抽象成数学模型,以抛物线的顶点为原点,抛物线的对称轴为 $y$ 轴建立如下图所示的直角坐标系。

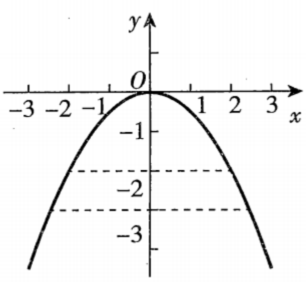
设这条抛物线表示的二次函数为 $y = ax^2$,

由抛物线经过点 $(-2, -2)$,可得 $-2 = a\times(-2)^2$,$a = -\frac{1}{2}$,

这条抛物线表示的二次函数为 $y = -\frac{1}{2}x^2$,

当水面下降 1 m 时,水面的纵坐标为 $-3$,有 $-3 = -\frac{1}{2}x^2$,解得 $x = \pm\sqrt{6}$,

这时的水面宽度为 $2\sqrt{6}$ m,所以水面宽度增加$(2\sqrt{6} - 4)$m。



(2)【引导性问题】

问题一:你能否将这个实际问题抽象成一个数学模型来解决?

设计意图:通过问题引导学生思考,建立实际问题与数学知识的联系,理解二次函数模型是解决该问题的重要方法,初步培养学生的模型观念。

问题二:我们知道二次函数的图像是抛物线,如何建立适当的坐标系,从而求出该抛物线表示的二次函数?

设计意图:让学生动手操作建立适当的坐标系求解问题,体会解题方法的多样性和建立模型解决问题的简捷性,加深对所学知识的理解,提升运用二次函数模型解决实际问题的能力。

【解题小结】

小结:解决实际问题的一般步骤是什么?需要注意哪些问题?

教师带领学生回顾本节课解决实际问题的思路和步骤,师生共同总结:根据实际问题,选取相应的数学模型,建立适当的坐标系,根据题意列出解析式求解,然后由解的实际意义得出问题的答案,解决问题。要注意验证所得出的解是否符合实际意义。

设计意图:通过对本节课解决问题的思路和方法进行回顾,能够加深学生对所学知识的理解,师生总结解决问题的一般步骤,既能够将获得知识的方法内化,又能够让学生积累总结经验,培养归纳总结能力,帮助学生养成良好的数学学习习惯。