2017年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。解析:(方法一)矩阵经过初等行变换可得$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&6&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&6&1\\0&0&11\end{pmatrix}$,

所以矩阵$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$的秩为3。

(方法二)由于$\begin{vmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&1&0\\3&0&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-6&1\\-1&2\end{vmatrix}=11\neq0$,所以矩阵$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$满秩,即秩为3。

2.【答案】A。解析:若$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称$\alpha(x)$和$\beta(x)$是当$x\to x_0$的等价无穷小量。$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,所以当$x\to x_0$时,与$x-x_0$是等价无穷小的为$\sin(x-x_0)$。

3.【答案】A。解析:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$的前$n$项和为$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$,但$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$均为交错级数,由莱布尼茨判别法可知二者均收敛。级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,由于$\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}<1$,根据正项级数的比式判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛。

4.【答案】C。解析:A项错误,A项中未强调此常数要大于两定点之间的距离,正确的说法是平面内到两个定点的距离之和等于常数(大于两定点间的距离)的动点轨迹是椭圆。B项错误,B项未强调定点不在定直线上,正确的说法是平面内到定点和定直线距离之比大于0且小于1的动点轨迹是椭圆。C项正确,这是椭圆的光学性质,即从椭圆的一个焦点发出的射线(光线),经椭圆反射后通过椭圆另一个焦点。D项错误,平面与圆柱面的截线有三种:①当平面与圆柱面的母线垂直时,截线是圆;②当平面与圆柱面的母线相交但不垂直时,截线是椭圆;③当平面与圆柱面的母线平行时,截线是一条直线或两条平行的直线。

5.【答案】D。解析:设P是一数域,一个系数在数域P中的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为数域P上的一个n元二次型。二次齐次多项式不包含一次项和常数项。所以由定义可知D项正确。

6.【答案】C。解析:由于随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,则随机变量$Y=2X$的均值为2μ,方差为$4\sigma^2$,即Y服从的分布是$N(2\mu,4\sigma^2)$。

7.【答案】B。解析:同一关系指两个概念间内涵不同、外延完全相同的关系。如“等边三角形、等角三角形”。

交叉关系,在概念a和概念b的关系上,如果有的a是b,有的a不是b,并且有的b是a,有的b不是a,那么a和b这两个概念之间就是交叉关系。题干中的“矩形”和“菱形”概念之间的关系是交叉关系,这是因为矩形和菱形两概念的交叉部分是正方形。

属种关系指一个概念的部分外延与另一个概念的全部外延重合的关系,其中,外延大的概念叫属概念,外延小的概念叫种概念。如“平行四边形”和“矩形”。

矛盾关系是在同一个属概念下的两个种概念的外延互相排斥，其相加之和等于该属概念的外延。如对实数这个属概念而言，有理数和无理数这两个概念之间的关系就是矛盾关系。

8.【答案】B。解析：线段是中心对称图形也是轴对称图形，对称中心为线段的中点，对称轴是其垂直平分线；正五边形是轴对称图形但不是中心对称图形；平行四边形是中心对称图形，对称中心为对角线的交点；椭圆是中心对称图形也是轴对称图形，对称中心为长轴与短轴的交点，对称轴是长轴或短轴所在的直线。

二、简答题

9.【参考答案】

(1)在空间直角坐标系中，

$y=x^2$ 绕 y 轴旋转，y 不变，将 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，将其代入 $y=x^2$，可得 $S_1: y=x^2+z^2$；

$y=x^2$ 绕 x 轴旋转，x 不变，将 $y(y\geqslant0)$ 换成 $\sqrt{y^2+z^2}$，将其代入 $y=x^2$，可得 $S_2: x^2=\sqrt{y^2+z^2}$。

(2)根据旋转体的体积公式，可得

$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^4 y\mathrm{d}y=\pi\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi。$$

10.【参考答案】

根据贝叶斯公式可知，所求概率

$$P=\frac{0.6\times0.85}{0.6\times0.85+0.4\times0.5}=\frac{0.51}{0.71}=\frac{51}{71}。$$

11.【参考答案】

设 $y=x+\zeta$ 与该图形相交，并将其面积分别分为 S_1 和 S_2。易知 S_2-S_1 是关于 ζ 的连续函数，记 $F_\zeta=S_2(\zeta)-S_1(\zeta)$，可知 $F_{\max}=S$(S 为封闭曲线面积)，$F_{\min}=-S$。由连续函数介值定理知，必存在实数 ξ，使 $F_\zeta(\xi)=0$，即 $S_2(\xi)=S_1(\xi)$，即直线 $y=x+\xi$ 平分该图形的面积。

12.【参考答案】

平行四边形的定义：两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形。它的定义方式是属概念加种差定义法，其中属概念是四边形，种差是两组对边分别平行。

实数的定义：有理数和无理数统称为实数。它的定义方式是揭示外延定义法。

13.【参考答案】

义务教育阶段的数学选学内容弥补了必修课程在内容上的有限性和知识广度与深度上的局限性等不足。选学内容一方面对必修课程的内容进行拓展或深化，促进学生对知识的理解掌握；另一方面，又能发展学生的技能，有助于提高学生对所学知识的应用能力。

以韦达定理为例，九年级上册数学课本中，在学习一元二次方程的求根公式后，介绍了一元二次方程的根与系数的关系，即韦达定理。这是一节选学内容，供学有余力的学生学习。韦达定理是对一元二次方程根的判别式、求根公式等知识的拓展和深化，应用起来更加灵活多变。它与一元二次方程根的判别式的关系是密不可分的，根的判别式是判定方程是否有实根的充要条件，而韦达定理说明了根与系数的关系，无论方程有无实数根，利用韦达定理可以快速求出两方程根的关系，因此韦达定理应用广泛，在初等数学、解析几何、平面几何、方程论中均有体现。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)因为 $V_3=\{t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2|t_1,t_2\in\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}_1\in V_1,\boldsymbol{\eta}_2\in V_2\}$，由题意可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&4\\0&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&2\\0&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\dim(V_3)=2$。

(2)由题(1)可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 V_3 的一组基，所以对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，可得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{8}{3}),$$

对 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，则可得 V_3 的一组标准正交基

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}),\boldsymbol{\gamma}_2=(\frac{2\sqrt{93}}{93},-\frac{5\sqrt{93}}{93},\frac{8\sqrt{93}}{93})。$$

四、论述题

15.【参考答案】

(1)在导入部分，通过数学史毕达哥拉斯在朋友家做客时发现地板中三角形的三边关系进行导入，让学生感受数学文化；在新课讲授阶段，通过运用赵爽弦图对勾股定理进行证明，由求边的关系转化到求面积关系，渗透转化的思想方法。在用面积证明勾股定理的过程中，通过移、补、凑、合而面积不变，向学生展示割补原理并渗透数形结合思想；在巩固提高阶段，通过运用勾股定理解决生活中的实际问题，培养学生的应用意识；在小结作业阶段，让学生寻找有关勾股定理的资料，并对相关问题进行探究，进一步培养学生的探索精神。

(2)①数学文化有利于激发学生的学习兴趣

数学文化给学生带来的不仅仅是数学命题、数学方法、数学问题和数学语言等，还包括数学思想、数学意识、数学精神等。在教学中可以适当地对学生进行数学文化教育，如通过数学家的故事，数学问题的发现等内容的介绍来激发学生的学习兴趣。

②数学文化教育有利于培养学生的创新意识和探索精神

新一轮数学改革的理念中，强调培养学生的创新意识和探索精神。培养学生的数学思维能力，也是当代数学教育改革的核心问题之一。在数学文化中数学历史事件、历史过程、历史故事都能够激发学生的创新意识，培养学生的探索精神。

③数学文化教育有利于发展学生的数学应用意识

数学文化的意义不仅在于知识本身和它的内涵，还在于它的应用价值。数学源于生活，其理论的核心部分都是在人类社会的生产、生活实践之中发展起来的。因此，教学中应当有意识地结合学生已有的知识结构，加强数学与实际生活的联系，将数学知识生活化，让学生感受到生活的各个领域都要用到数学，从而更深切地感受数学文化的价值。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)本次课为拓展课，针对的学生是兴趣班的学生。评析分为以下几点。

①该备课组所拟定的目标，目标主体正确，行为动词恰当。

②就知识与技能目标而言，进一步理解参数含义，符合拓展课的需求以及兴趣班的学情，而探索两个函数图像的关系体现了本堂课的具体过程。就过程与方法目标而言，有过程却无明显的方法体现，在这一点上目标拟定有所不足。

③三维目标还包括情感态度与价值观目标，尤其是兴趣班学生的拓展课，一定要体现出学生正确积极的情感态度和价值观，而该备课组所拟定的目标在这一点上没有具体呈现。

(2)甲教师先出示问题，之后给出了平行直线中，一次函数解析式中 k 值相等的结论。这样做的设计思路是为了让学生直接对问题的结论有一个深刻的印象，产生一定的认知，再举出一些具体的实例，让学生有的放矢地体会参数 k 的含义，并对结论进行了巩固。但是这样的设计思路也有一些不足，没有考虑到学生的自主性，对学生发现问题的能力培养上是有所欠缺的，启发性有些不足。

乙教师在授课中并没有直接地给出参数 k 的含义，而是在学生动手实践、自主探索与合作交流的基础上得到本节课的知识内容。先将学生分组，进一步合作画图归纳总结出答案，使课程内容不仅包括数学的结果，还包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法，体现了学生是学习的主体，有利于学生对于知识的学习和掌握。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)设计意图:

a.解决这道题目的问题一首先需要学生利用三角形的中位线定理得到四边形 $EFGH$ 的对边平行且相等(或两组对边分别平行)的结论,其次利用平行四边形的判定定理,判定四边形是平行四边形。因此,在练习过程中可以加深学生对三角形中位线定理和平行四边形判定定理的理解。又因为需要同时利用两个定理进行求解,所以可以提高学生对两者的综合应用能力,顺利达成教学目标①和②。

b.问题一可以一题多解,可以锻炼学生的发散思维,还能够加深学生对平行四边形判定定理的应用。此外问题二是一道开放性的题目,由学生自己设定条件自主解答,因此可以达成教学目标③。

c.问题二的解决又需要学生从对角线的角度出发,对平行四边形及特殊的平行四边形的性质和判定有深刻的认识,通过本问题的练习,兼顾到了教学目标①和②。

(2)问题:连接 HF,EG 交于一点 O,取 OE,OG,OH,OF 的中点分别为 P,M,N,Q,连接 PN,PQ,MN,MQ,证明四边形 $PQMN$ 是平行四边形。改变题干中什么条件四边形 $PQMN$ 会是矩形、菱形、正方形,并说明理由。

(3)教师呈现图片和问题,学生独立进行思考、作答。如果学生作答顺利,将课堂放手交还给学生,如果学生遇到了一定的难度,可以组织学生小组讨论,共同探讨或者教师通过问题进行启发引导,降低题目的难度,对于问题一可以提出问题。

追问一:平行四边形的判定定理有哪些?

追问二:从题干和图形中,我们可以得到哪些边角相等,哪些边平行?

对于问题二可以提出问题。

追问:平行四边形在什么样的情况下可以转变成菱形、矩形、正方形?

学生进行充分思考,多数学生得出结果之后,指定学生进行回答。要求说明结果和做题的思路。教师及时给予积极有效的反馈点评,针对学生的回答进行总结。最后通过多媒体或黑板直观地呈现答案。

小结提纲1:解决有关平行四边形类的题目时,往往先利用其他四边形或三角形的相关几何知识得到相关信息,进而求解。因此需要我们从整体上把握几何图形的性质和判定定理,以及其中的内在联系。

小结提纲2:平行四边形的判定通常可以从边、角以及边角之间的位置、数量关系来进行判定,特殊的平行四边形如菱形、矩形、正方形具有平行四边形性质的所有性质,可以分别找出与平行四边形之间的联系与区别。

小结提纲3:证明一个四边形是平行四边形,要找这个四边形对边或对角线存在的关系。证明一个四边形是矩形、菱形、正方形,可以先从这个图形是平行四边形出发,在平行四边形的基础之上,添加适当的边、角、对角线的条件,通过证明得到矩形、菱形、正方形。