2017年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析:由数列极限的定义,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$,则有$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数$N$,当$n>N$时,有$|a_n-a|<\varepsilon$。所以对于$\forall r\in(0,a)$,若令$\varepsilon=a-r>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$|a_n-a|<a-r$,即$-(a-r)<a_n-a<a-r$,可得$a_n>r$。

2.【答案】C。解析:设任意点$F_1(x,y)$,易得F_1关于$y=-x$的对称点为$F_2(-y,-x)$。因此,设该题所求矩阵为$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,可列式$\begin{pmatrix} -y \\ -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$,得$\begin{cases}-y=a_{11}x+a_{12}y,\\ -x=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=0,a_{12}=-1,\\ a_{21}=-1,a_{22}=0,\end{cases}$即所求矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$。

3.【答案】D。解析:先求l_1和l_2的方向向量,$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,所以$l_1$的方向向量是$(-4,6,8)$;$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,$l_2$的方向向量是$(2,-3,-4)$。两个方向向量成比例,所以两条直线平行。

4.【答案】B。解析:假设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,故$F(x)$处处可导,则$F(x)$连续。又由于$F(a)=0$,$F(b)=0$,由罗尔定理知,存在$\xi\in[a,b]$使得$F'(\xi)=f(\xi)=0$。

5.【答案】B。解析:因$A\subset B$,且$P(B)\leqslant1$,故$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)\leqslant P(A|B)$。

6.【答案】D。解析:矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式,令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$,可得$\lambda=1$或3。将$\lambda=3$代入$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=0$,得到$x_1=x_2$,选项中没有对应的特征向量。同理代入$\lambda=1$,得到$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=0$,即$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=0$。可知$x_2=0$,取$x_1$为自由变量1,则对应的特征向量为$(1,0)^{\mathrm{T}}$。

7.【答案】A。解析:明朝末年,《原本》传入中国。1606年,由我国数学家徐光启执笔,意大利传教士利玛窦口译,合作翻译了《原本》的前六卷,并于1607年在北京印刷出版。这是我国最早的汉译本,在翻译时,徐光启在“原本”前加上了“几何”一词,“几何原本”一词由此而来。

8.【答案】B。解析:角是轴对称图形,等边三角形是轴对称图形,矩形既是轴对称图形又是中心对称图形,双曲线既是轴对称图形又是中心对称图形,所以共有2个符合题意。

二、简答题

9.【参考答案】

(1)令$F(x,y,z)=2x^2+y^2-z$,对抛物面方程分别求x,y,z的偏导数。

$$F_x(x,y,z)=4x,F_y(x,y,z)=2y,F_z(x,y,z)=-1。$$

代入点$M(1,1,3)$,得到该点处的法向量为$(4,2,-1)$,利用点法式方程,则切平面方程为$4(x-1)+2(y-1)-(z-3)=0$。

(2)由(1)知,切平面方程为$4(x-1)+2(y-1)-(z-3)=0$,则切平面的法向量为$(4,2,-1)$,平面$3x+ky-4z=0$的法向量为$(3,k,-4)$。由两平面垂直,得到$4\times3+2\times k+(-1)\times(-4)=0$,解得$k=-8$。

10.【参考答案】

(1)根据题意，设存在一组不全为零的实数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即 $\begin{cases}2k_1+k_2+tk_3=0,\\k_1+k_2+2k_3=0,\\-2k_1+2k_3=0,\end{cases}$ 则系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix}2&1&t\\1&1&2\\-2&0&2\end{vmatrix}=2t-2=0$，即 $t=1$。

(2)通过初等行变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&2\\-2&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$。

11.【参考答案】

(1)设“A=选取 3 杯饮料都是甲品牌”，一次试验成功的概率为 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_6^3}=\dfrac{1}{20}$。独立进行 5 次试验，服从二项分布 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{20}\right)$。$P\{X=3\}=\mathrm{C}_5^3\left(\dfrac{1}{20}\right)^3\left(\dfrac{19}{20}\right)^{5-3}=\dfrac{361}{320\ 000}$。

(2)该品尝者具备区分能力。理由：由(1)可知此随机试验成功的概率大概为千分之一，是小概率事件，基本可以排除偶然性，故此人具备区分两种品牌饮料的能力。

12.【参考答案】

《义务教育数学课程标准(2011 年版)》中行为动词“了解”的含义是从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征；根据对象的特征，从具体情境中辨认或者举例说明对象。“了解等腰三角形”含义则是由任意一个等腰三角形都能知道其至少有两边相等且为三角形的腰，其至少有两个角相等且为三角形的底角；由一个三角形其中两条边相等或其中两个角相等则可知该三角形为等腰三角形。

13.【参考答案】

(1)对于学生基础知识和基本技能达成情况的评价，必须要准确把握课程内容中的要求。学生在学习有理数这一章的时候应该理解有理数的有关概念及其分类，能用数轴上的点表示有理数，会比较有理数的大小，会求有理数的相反数与绝对值，理解有理数运算的意义和有理数运算律，掌握有理数的加、减、乘、除、乘方及简单的混合运算并解决一些简单的实际问题。所以在设计题型的时候，涵盖的知识点应包括以上知识点，达到全面性要求，以便宏观了解学生对本章知识的掌握程度。

(2)在设计试题时，应该关注并且体现学生对数感、符号意识、运算能力、推理能力以及应用意识和创新意识等的考查。测试中应该包含有理数的计算、运算规律的使用以及常见的证明题、应用题等题目，可对学生能力进行全方位考查。

(3)根据评价的目的合理设计试题的类型，有效地发挥各种类型题目的功能。题型练习多样化，要有选择、填空、判断、解答、证明等常规性试题。同时可设置寻找数字规律、运算规律等探索性试题，还可以联系生活实际，将有理数的运算融入日常生活中，设置实际应用题等。

(4)在书面测验中，积极探索可以考查学生学习过程的试题，了解学生的学习过程。试题的设计要有难度也要有区分度，照顾到不同学习层次的学生，以便了解全体学生对本章知识掌握的程度，指导今后的教学工作。测验学习结果的同时更要测验到学生学习过程中对知识的掌握，由不会到会的过程。

三、解答题

14.【参考答案】

(1)证明:由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,其中 $x_0\in[a,b]$。

由 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|<M|x-x_0|$,其中 $M=\max\limits_{t\in(x-\delta,x+\delta)} f(t)$。当 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M}$ 时,则有 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$。

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

(2)由可导定义知,$\forall x\in(a,b)$,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\Delta x)=f(x),\text{其中 } 0\leqslant\theta\leqslant 1;$$

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a^+} f(a+\theta_1(x-a))=f(a),\text{其中 } 0\leqslant\theta_1\leqslant 1;$$

$$F'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{\int_b^x f(t)\mathrm{d}t}{x-b}=\lim_{x\to b^-} f(b+\theta_2(x-b))=f(b),\text{其中 } 0\leqslant\theta_2\leqslant 1。$$

故 $F(x)$ 可导且 $F'(x)=f(x)$。

四、论述题

15.【参考答案】

(1)合情推理是从已有的事实出发,凭借经验和直觉,通过归纳和类比等推断某些结果;演绎推理是从已有的事实(包括定义、公理、定理等)和确定的规则(包括运算的定义、法则、顺序等)出发,按照逻辑推理的法则证明和计算。

(2)合情推理:在初中学习角平分线的性质时,我们通过将一个角平分对折,通过观察折线上的点到角两边的距离或进行测量,猜想得到角平分线上的点到角两边的距离相等,得到一般规律。

演绎推理:角平分线的性质这一课,我们通过两个三角形全等,得到对应两边相等,从而证明角平分线上的点到角两边距离相等,使得定理更加严谨。

教师在教学过程中,应该设计适当的学习活动,引导学生通过观察、尝试、估算、归纳、类比、画图等活动发现一些规律,猜测某些结论,发展合情推理能力;通过实例使学生逐步意识到,结论的正确性需要演绎推理的确认。在初中学习过程中,应把证明作为探索活动的自然延续和必要发展,使学生知道合情推理与演绎推理是相辅相成的两种推理形式。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1)教师甲设计的典型例题具有开放性,能够诱发学生思考,解题过程中归纳概括得到猜想和规律,并加以验证,培养学生的创新意识;具有探索性,在思考的过程中,学生不仅能主动地获取知识,而且能不断丰富数学活动经验,学会探索,学会学习,促进学生数学知识和方法的掌握、巩固和提高。

教师乙设计的典型例题具有层次性,递进式的呈现,满足学生多样化的学习需求。设计的例题由易到难,循序渐进,一步步引导学生将问题深化,发展思维能力。

(2)①两条;

②当 F 在 BC 边上时,DF 与 CE 相交,$CF=DE$;当 F 在 AB 边上时,$DF\perp CE$。

(3)问题 1:如图 1,在正方形的边上是否存在点 H,使 $\triangle CEH$ 为等腰三角形,若存在,则能找到几个点 H;若不存在,请说明理由。

问题 2:如图 2,若点 E,F 为正方形 AD,AB 两条边上的中点,求证 $BM=BC$。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)一、复习回顾

1.回顾一元二次方程与一元一次方程有什么区别？它们有什么共同点？

列出一些方程，与学生一起将方程分类

(1)$x^2+5x-6=0$；(2)$2x+5=1$；(3)$x+y+3=0$；

(4)$(3-x)^2+x^2=9$；(5)$(y+2)(y-1)=7$；(6)$4x+1=3x+2$。

要求：(1)引导学生观察回顾方程的特点；(2)通过对比复习一元一次方程定义和一元二次方程定义；(3)强调定义中体现的3个特征：①整式；②一元；③二次。

2.要求学生用最熟悉的方法解下列方程

(1)$x^2-121=0$；(2)$x^2+3x=0$；(3)$(x+2)^2=4$；

(4)$x^2-3x+2=0$；(5)$2x^2+7x=4$；(6)$x^2+2x-4=0$。

思考：(1)方程具备什么特点做起来最熟悉？(2)以上方程你选取了哪些方法？

二、习题教学

例题1：方程$(m+2)x^{|m|}+3mx+1=0$是关于x的一元一次方程，m的值为(　　)；若是关于x的一元二次方程，m的值为(　　)。

师生活动：教师出示问题，学生独立思考、回答。为了帮助学生有逻辑的思考，可追问以下问题。

追问1：一元一次方程的一般式是什么？m需要满足什么条件？

追问2：一元二次方程的一般式是什么？由此你能给出m需要满足的条件吗？

追问3：我们还学过哪种整式方程？写出一般式，比较你所学过的各种整式的方程，说明它们的未知数个数与次数。

【设计意图】学生要会辨析几种整式方程的概念，分析出符合定义的未知数的次数。通过此题引导学生进一步理解一元二次方程的概念及一般式，回顾已学的其他整式的方程，加强知识的前后联系，帮助学生建立有关方程的知识体系。

例题2：解方程$x^2-2x+1=25$。你能给出哪些解法？你认为哪种解法最适合此方程？

师生活动：教师出示问题，学生独立思考、解答、展示。教师反馈并提出以下问题。

追问1：一元二次方程有哪些解法？他们在什么情况下最适用？

追问2：这几种解法之间有何联系？在基本思想上有何共同点？

【设计意图】本题主要复习一元二次方程的解法，通过比较不同的解法，体会如何根据方程特点选择解法。方程左边可以写成完全平方式，所以可用配方法；也可将方程整理成一般式，用公式法；还可以用因式分解法。让学生深入思考这几种解法之间的联系，体会配方法的重要意义以及“降次”的基本思想。

(2)问题：解方程$x^2-120x+3456=0$。

追问1：有的同学说可以通过十字相乘法分解，大家可以试试？你发现了什么？

学生回答：3456数字太大，十字相乘法分解时，不能一次分解到位，尝试多次才成功；部分同学到时间结束还没能分解出正确的结果。

追问2：数字太大，需要试验多次，降低了我们的速度，还有其他的方法吗？

学生回答：我们换其他的方法(有些同学选择用公式法，有些同学选择用配方法)，在一种方法不能顺利地解决问题时，就应该使用其他方法尝试一下。

追问3：我们试验了十字相乘法、公式法、配方法，哪种方法最简单呢？

学生回答：针对这个题目，用配方法最简单，十字相乘法在数字太大时分解太困难，公式法对于这个题目计算量也太大，配方法是最为简单、直观的。

追问 4:配方法是不是适用于所有的一元二次方程呢?

学生回答:我们之前讲过,解一元二次方程,首先要判断该方程是否有解,对于有解的一元二次方程全部都能用公式法进行求解。而公式法所用的公式,是由配方法经过推导得到的,故配方法也适用于全部有解的一元二次方程。

追问 5:哪些情况下用配方法最为简单呢?

学生回答:形如 $x^2+2ax+b=0$(a,b 为整数),这类的一元二次方程配方时最为简单,选择解法时可优先选择配方法。