$AL(V)$ - Menge Formeln über Variablen

$\mathfrak{I}: V \to \mathbb{B}$ - Variablenbelegung

$\cdot^{\mathfrak{I}}: AL(V) \to \mathbb{B}$

$\mathfrak{I} \models \varphi \in AL(V) \iff \varphi^{\mathfrak{I}} = 1$

$\mathfrak{I} \models \Phi \subseteq AL(V) \iff \forall \varphi \in \Phi : \mathfrak{I} \models \varphi$

$\forall \mathfrak{I} : \varphi^{\mathfrak{I}} = \psi^{\mathfrak{I}} \iff$ logisch äquivalent

AuPL

Logisches System:

- Objekte (können unendlich sein)
- Sprache („Logik")
- Modellrelation $A \models \varphi$
  Aussage φ trifft auf Objekt A zu.
- → keine Selbstbezüge! (sonst Widerspruch)

Syntax: Menge $L \subseteq \Sigma^*$ von Formeln (endl. Formeln
$AL(V)$ induktiv definiert
atome $0 \in AL(V), 1 \in AL(V), p \in AL(V) \ \forall p \in V$
Negation $\neg\varphi \in AL(V) \ \forall \varphi \in AL(V)$
Kon/Disjunktion $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi) \in AL(V) \ \forall \varphi, \psi \in AL(V)$
oft ohne Klammern $\wedge$ vor $\vee$ ~~Kon~~ $(\varphi \to \psi)$ für $(\neg\varphi \vee \psi)$
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

Konvention
$V = \{p_1, p_2, \dots\}$ $V_n = \{p_1, \dots p_n\}$
$AL = AL(V)$ $AL_n = AL(V_n)$

Semantik
Formeln $\varphi \in AL(V)$ sprechen über Belegungen der Variablen
$\mathfrak{J} : V \to \mathbb{B}$
Definition Funktion $\cdot^{\mathfrak{J}} : AL(V) \to \mathbb{B}$
$\varphi^{\mathfrak{J}} = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{J}$ erfüllt $\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{J} \models \varphi$
Für $\Phi \subseteq AL$ $\mathfrak{J} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{J} \models \varphi \ \forall \varphi \in \Phi$

rekursiv $0^{\mathfrak{J}} = 0, 1^{\mathfrak{J}} = 1$
$p^{\mathfrak{J}} := \mathfrak{J}(p)$ für $p \in V$
$(\neg\varphi)^{\mathfrak{J}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{J}}$ $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{J}} := \max\{\varphi^{\mathfrak{J}}, \psi^{\mathfrak{J}}\}$
$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{J}} := \varphi^{\mathfrak{J}} \cdot \psi^{\mathfrak{J}}$

Literal: p oder $\neg p$

Für l_{ij} Literale:

DNF $\bigvee_{i=1}^{n} (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik})$

KNF $\bigwedge_{i=1}^{n} (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik})$

Für jedes φ äquivalente KNF/DNF
und
über lang z.B. $p_1 \oplus p_2 \oplus \dots \oplus p_n$ je 2^{n-1} Terme

Koinzidenzlemma $\varphi^{\mathfrak{J}}$ nur von vorkommende Variablen ab, endlich, da φ endlich
⇒ Wahrheitstabelle

p_1	p_2	$\varphi^{\mathfrak{J}}$
0	0	
0	1	
	⋮	

$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow$
Logisch äquivalent $\Leftrightarrow \forall \mathfrak{J} : \varphi^{\mathfrak{J}} = \psi^{\mathfrak{J}}$

Erfüllbarkeit $\Phi \subseteq AL$ heißt erfüllbar $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{J} : \mathfrak{J} \models \varphi \ \forall \varphi \in \Phi$
Allgemeingültigkeit $\varphi \in AL$ heißt allgemeingültig $\Leftrightarrow \forall \mathfrak{J} : \mathfrak{J} \models \varphi$
Folgerungsbeziehung ψ folgt aus $\Phi \Leftrightarrow \psi \models \Phi \Leftrightarrow (\mathfrak{J} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{J} \models \psi)$
φ nicht erfüllbar $\Leftrightarrow \neg\varphi$ allgemeingültig

Funktion $f_\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow f_\varphi = f_\psi$ 2^{2^n} verschiedene Funktionen $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

Kompaktheitssatz

$\Phi \subseteq AL$ erfüllbar $\Leftrightarrow \forall$ endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar

$\Phi \subseteq AL$ unerfüllbar $\Leftrightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi$ mit Φ_0 endlich und unerfüllbar

Sei $\Phi \subseteq AL, \psi \in AL$: $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$ Φ_0 endlich

Beispiele:

höchstens 2 Variablen auf 1 ⇒ $\Phi := \{\varphi_3, \varphi_4, \dots\}$
$\varphi_n := \bigwedge_{1 \le i < j < k \le n} \neg(p_i \wedge p_j \wedge p_k)$

Formelmenge für genau 2 Var auf 1 unmöglich

Beweis $\Leftarrow$ $\mathfrak{J}_n$ von $V_n = \{p_1, \dots p_n\}$ gut $\Leftrightarrow \forall$ endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ $\exists \mathfrak{J}_{\Phi_0}$ mit $\mathfrak{J}_{\Phi_0} \models \Phi_0 \wedge 1 \le i \le n.$ $\mathfrak{J}_{\Phi_0}(p_i) = \mathfrak{J}_n(p_i)$
Induktion es gibt Kette guter beleg. (mit $\mathfrak{J}_m(p_k) = \mathfrak{J}_n(p_k) \ \forall m, n > k$)
durch konstruktion Menge von Formelmengen
$\mathfrak{J}(p_i) := \mathfrak{J}_i(p_i)$ erfüllt ganz Φ

$\Rightarrow$ ~~Induktion~~

Lemma von König: Jeder unendliche, aber endlich verzweigte Baum hat einen unendlichen Pfad.
Beweis über Kompaktheitssatz ?

Beweiskalkül: Resolution   Ziel endlicher nachprüfbarer Beweis Φ unerfüllbar

Klausel: Disjunktion von Literalen als Menge

endliche Klauselmengen $\hat{=}$ Formeln in KNF

Resolventen: C Resolvent von $C_1, C_2 \Leftrightarrow \exists p \in V$ mit $p \in C_1$, $\neg p \in C_2 \wedge C = (C_1 \setminus \{p\}) \vee (C_2 \setminus \{\neg p\})$

$Res(K) := K \vee \{C \mid C$ Resolvente zweier Klauseln $C_1, C_2 \in K\}$

$Res(K)$ erfüllbar $\Leftrightarrow K$ erfüllbar

$Res^0(K) := K$
$Res^{n+1}(K) := Res(Res^n(K))$
$Res^*(K) := \bigvee_{n \geq 0} Res^n(K)$

K unerfüllbar $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(K)$ Beweis: $\Leftarrow$ Induktion
$\Rightarrow$ Induktion $K_0 = \{C \setminus \{p_{n+1}\} \mid C \in K, \neg p_{n+1} \notin C\}$
$K_1 = \{C \setminus \{\neg p_{n+1}\} \mid C \in K, p_{n+1} \notin C\}$
K unerfüllbar $\Rightarrow K_0, K_1$ unerfüllbar mit p_{n+1} bzw. $\neg p_{n+1}$ nachträglich einfügen

Beweis im Resolutionskalkül Binärbaum $\Box$ root
"Zertifikat für die Unerfüllbarkeit"
terminierender exponentieller Resolutionsalgorithmus

Hornklauseln: max 1 positives Literal
positive Hornklausel 1 positives Literal
negative Hornklausel 0 positive Literale

Einheitsres. nur wenn eine Klausel nur aus einem Literal besteht. Für Hornklauseln vollständig

effizienter Horn-Erfüllbarkeitstest: bestimmt minimale Belegung H_0 ohne negative Klauseln ~~H_0 negati~~
$X \subseteq V_n$ Variablen, die wahr sein müssen $C = \{\neg q_1, \dots \neg q_r, q\} \in H$
$C(X) := \begin{cases} \{q\}, & \text{wenn } i = 1 \dots r\ q_i \in X \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$

$H_0(X) := X \vee V_{C \in H_0} C(X)$ mit $X_0 := \emptyset$ $\mathcal{I}_X$ Inter mit $\mathcal{I}_X(q) = 1$ $q \in X$ ~~sonst~~
$X_{n+1} = H_0(X_n)$
X_∞ Ergebnis   danach Test ob neg. Klauseln erfüllt
terminiert in n Schritten, da nur n Variablen; $\mathcal{I}_{X_\infty} \models H_0$

Sequenzkalkül für AL

AL-Sequenz: Paar (Γ, Δ) $\Gamma, \Delta \subseteq AL$ geschrieben $\Gamma \vdash \Delta$ oder $\gamma_1, \dots \gamma_k \vdash \delta_1, \dots \delta_l$

$\Gamma \vdash \Delta$ allgemeingültig $\Leftrightarrow \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_k \models \delta_1 \vee \dots \vee \delta_l$

Sequenzregel   (Name der Regel) $\dfrac{\text{Prämisse}}{\text{Konklusion}}$ $\leftarrow$ 0-2 Sequenzen / $\leftarrow$ eine Sequenz   Regel korrekt $\Leftrightarrow$ (Prämisse allg. $\Rightarrow$ Konkl. allgemeingültig)

erweitertes Sequenzkalkül SK^+

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$ keine systhematische Beweissuche mehr da φ frei wählbar

ableitbare Regeln können durch lokale syntaktische Änderungen übersetzt werden

(Ax) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$ (0-Ax) $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$

$(\neg L)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$ $(\neg R)$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

$(\vee L)$ $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$ $(\vee R)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\wedge L)$ $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $(\wedge R)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$

Sequenz ableitbar $\Leftrightarrow$ in endlich vielen Schritten aus leeren Prämissen

systemathische Beweissuche: Beweisbaum
alle Blätter leere Prämisse $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ allgemeingültig
$\exists$ Blatt keine weitere Regel $\Rightarrow$ Gegenbeispiel für $\Gamma \vdash \Delta$ allg.

Prädikatenlogik erster Stufe redet über Strukturen (Aussagenlogik über Belegungen)

S Signaturen (Symbolmengen)

- Konstantensymbole $c, d, \dots$
- Relationssymbole $P, Q, \dots$ je mit einer Stelligkeit $r \geq 1$
- Funktionssymbole $f, g, \dots$ je mit einer Stelligkeit $r \geq 1$

ohne ~~Funktions~~ Relations. $\Rightarrow$ funktionale Signatur
ohne Funktions. $\Rightarrow$ relationale Signatur

S-Struktur $\mathcal{A} = (A, c^{\mathcal{A}}, \dots, R^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots)$

- Trägermenge A (Universum)
- $\forall c \in S \quad c^{\mathcal{A}} \in A$ Konstanten
- $\forall R \in S$ r stellig $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ Relationen
- $\forall f \in S$ r stellig $f^{\mathcal{A}} : A^r \to A$ Funktionen

Beispiel Wortstrukturen $S_\Sigma = \{<\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}$

Wortkodierung durch S_Σ Struktur $w = a_1 \dots a_l \in \Sigma^*$

$$\mathcal{W}_w = (\{1, \dots, l\}, <^{\mathcal{W}}, (P_a^{\mathcal{W}})_{a \in \Sigma})$$

$$<^{\mathcal{W}} = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

$$P_a^{\mathcal{W}} := \{i \mid 1 \leq i \leq l \text{ und } a_i = a\}$$

Variablenmenge $V = \{x_1, \dots\}$ $V_n = \{x_1, \dots, x_n\}$

S-Terme
$T(S)$ kleinste Menge mit

formal Zeichenkette über Alphabet $S_F \cup V$

ein Term v ~~für jede~~ $\forall v \in V$
c $\forall c \in S$
$f t_1 \dots t_r$ $\forall f \in S$ $t_1, \dots, t_r \in T(S)$

$var : T(S) \to P(V)$
$var(v) := \{v\}$ $\forall v \in V$
$var(c) := \emptyset$ $\forall c \in S$
$var(f t_1 \dots t_r) := var(t_1) \cup \dots \cup var(t_r)$

$T_n(S) \subseteq T(S)$ Terme nur mit Variablen aus V_n

nur von $S_F \subseteq S$ abhängig (Funktions- Konstantensymbole)

~~$T_0(S)$~~ ~~nur von~~ $T_0(S) = \emptyset \Leftrightarrow S$ keine Konstanten s.

Auswertung $t^{\mathcal{J}} \in A$
rekursiv induktiv
$c^{\mathcal{J}} := c^{\mathcal{A}}$
$v^{\mathcal{J}} := \beta(v)$
$(f t_1 \dots t_r)^{\mathcal{J}} := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{J}}, \dots, t_r^{\mathcal{J}})$

hängt nicht von $v \notin var(t)$ ab

Termstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$

- Trägermenge $T(S)$
- $c^{\mathcal{T}} = c \quad \forall c \in S$
- $f^{\mathcal{T}} : T(S)^r \to T(S),\ (t_1, \dots, t_r) \mapsto f t_1 \dots t_r$ $\forall f \in S$ r stellig

Falls S min 1 Konstantensymbol $\mathcal{T}_0(S)$ mit Trägermenge $T_0(S)$

S-Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$

Belegung $\beta : V \to A$
Interpretation $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$

Schreibweisen
$var(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \Leftrightarrow t(x_1, \dots, x_n)$
$t[a_1, \dots, a_n] = t^{\mathcal{J}}$ $\mathcal{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ $\beta(x_i) = a_i$

$$\beta[x \mapsto a] = \begin{cases} a & \text{falls } v = x \\ \beta(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

entsprechend $\mathcal{J}[x \mapsto a]$

Logik erster Stufe FO(S)

Syntax FO(S) Menge Formeln erster Stufe induktiv:

- $t_1 = t_2$ $\forall t_1, t_2 \in T(S)$
- $R t_1 \dots t_r$ $\forall$ r stellig $R \in S$ $t_1, \dots, t_r \in T(S)$
- $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi)$ $\forall \varphi, \psi \in FO(S)$
- $\exists x \varphi, \forall x \varphi$ für $\forall x \in V$ $\varphi \in FO(S)$

$FO^{\neq}(S)$ ~~ist~~ gleichheitsfreies FO

FO Vereinigung aller FO(S)
$(\varphi \rightarrow \psi) = (\neg\varphi \vee \psi)$

Semantik

$\mathcal{J} \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{J}} = t_2^{\mathcal{J}}$
$\mathcal{J} \models R t_1 \dots t_r \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{J}}, \dots, t_r^{\mathcal{J}}) \in R^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{J} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\, \mathcal{J} \models \varphi$
$\mathcal{J} \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{J} \models \varphi \vee \mathcal{J} \models \psi$
$\mathcal{J} \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{J} \models \varphi \wedge \mathcal{J} \models \psi$

$\mathcal{J} \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \exists a \in A \ \mathcal{J}[x \mapsto a] \models \varphi$
$\mathcal{J} \models \forall x \varphi \Leftrightarrow \forall a \in A \ \mathcal{J}[x \mapsto a] \models \varphi$

Semant. Grundbegriffe
Äquivalenz von Formeln
Implikation
Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit
Erfüllbarkeitsäquivalenz
elementare Äquivalenz v. Strukturen

Negationsnormalform (alle $\neg$ vor atomaren Formeln)

Pränexnormalform (alle Quantoren am Anfang)

$\forall \varphi \in FO$ äquivalente Normalformen beide

Negationsnormalform := alle $\neg$ vor atomaren Formeln

Pränexnormalform := Quantoren vor Restformel ohne Quantoren
$Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \dots Q_n x_{i_n} \varphi_x$ ohne Quantoren

Teilformel $tf(\varphi) :=$ Menge Teilformeln
atomares φ $tf(\varphi) := \{\varphi\}$
$tf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup tf(\varphi)$
$tf(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup tf(\varphi) \cup tf(\psi)$
$tf(\exists x \varphi) = \{\exists x \varphi\} \cup tf(\varphi)$
$tf(\forall x \varphi) = \{\forall x \varphi\} \cup tf(\varphi)$
$tf(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup tf(\varphi) \cup tf(\psi)$

Quantorenrang $qr(\varphi) = 0$ φ atomar $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$ $qr(\varphi \vee \psi) = qr(\varphi \wedge \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\}$ $qr(\exists x \varphi) = qr(\forall x \varphi) = qr(\varphi) + 1$

relationale Datenbanken
y ist Variabl von Hauptstadt x : $\varphi(x,y) := \exists z (Hxz \wedge Vzy)$

relationale Algebra - Operationen auf Relationen $R \subseteq A^k$ (für festes $k \hat{=}$ Anzahl freier Variablen)
$Rx_{i_1} \ldots x_{i_r}$ liefert Relation $R \hat{=} \{(a_1, \ldots a_k) \in A^k \mid (a_{i_1} \ldots a_{i_r}) \in R^A\}$
$\vee, \wedge \hat{=} \cup, \cap$
$\neg \hat{=} A^k \setminus R$
$\exists \hat{=}$ Projektion $\pi_i(R) := \{(a_1, \ldots a_k) \mid (a_1, \ldots a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots a_k) \in R \;\exists a_i' \in A\}$

Spielsemantik

Spiel ~~mit~~ zu $\varphi(x_1, \ldots x_k) \in FO(S)$ in NNF
Interpretation $\mathfrak{I} = (A, \beta)$
Spieler: Verifizierer V will zeigen $\mathfrak{I} \models \varphi$
Falsifizierer F $\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Start: $(\varphi, \beta(\bar{x}))$ $(\varphi, -)$?
Ende: γ atomar oder negiert atomar
Gewinnt: $A, \bar{a} \models \gamma$ → V; $A, \bar{a} \not\models \varphi$ → F

Spielpositionen $(\gamma, \bar{a})$, γ Teilformel von φ, $\bar{a} \in A^k$
$(\gamma_1 \wedge \gamma_2, \bar{a})$: F wählt $i \in \{1,2\}$ zieht nach $\{\gamma_i, \bar{a}\}$
$\quad \vee \qquad\qquad$ V
$(\forall \gamma, \bar{a})$: F wählt $b \in A$ zieht nach $(\gamma, \bar{a}[x \mapsto b])$
$\quad \exists \qquad\qquad$ V

Kongruenzrelation $\sim \in S$ zweistelligen Relationssymbol

$$\varphi_\sim := \forall x \forall y \forall z \, (\underbrace{(x \sim x)}_{\text{reflexiv}} \wedge \underbrace{(x \sim y \rightarrow y \sim x)}_{\text{symmetrisch}} \wedge \underbrace{((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)}_{\text{transitiv}})$$

$$\varphi_\sim^R := \forall x_1 \ldots \forall x_r \forall y_1 \ldots \forall y_r \, ((Rx_1 \ldots x_r \wedge \bigwedge_i x_i \sim y_i) \rightarrow Ry_1 \ldots y_r)$$

$$\varphi_\sim^f := \forall \qquad ((\bigwedge_i x_i \sim y_i) \rightarrow fx_1 \ldots x_r \sim fy_1 \ldots y_r)$$

A wird ~~durch~~ $\sim$ durch Kongruenzrelation interpretiert $\Leftrightarrow A \models \{\varphi_\sim\} \cup \{\varphi_\sim^R \mid R \in S\} \cup \{\varphi_\sim^f \mid f \in S\}$

~~Für je~~ $\forall \Phi \subseteq FO$ erfüllbarkeitsäquivalente $\Phi' \subseteq FO^{\neq}$ A von Φ mit $\sim^{A'} = \{(a,a) \mid a \in A\}$ zu Model von Φ' erweitern

andersrum durch Äquivalenzklassenmodell $A/\sim$ Modell von Φ

Substitution von Termen für Variablen: $\mathfrak{I} \models \varphi(t/x) \Leftrightarrow \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi$
$(t_1 = t_2)(t/x)$ und $(Rt_1 \ldots t_r)(t/x)$ überall x durch t ersetzen
$(\neg\varphi)(t/x) := \neg(\varphi(t/x))$ genauso $\wedge, \vee$
$(\exists y \gamma)(t/x) = \exists z \hat{\gamma}(t/x)$
$(z \notin \mathrm{var}(t) \cup \{x\} \cup \mathrm{var}(\gamma))$ und $\hat{\gamma} = \gamma(z/y)$

Skolemfunktionen - ersetzen $\exists$ durch neue c oder f $\quad \exists x Px \Rightarrow Pc$; $\forall y \exists x Exy \Rightarrow \forall y Efyy$ (liefert Gewinnstrategie Verifizierer)

Skolemnormalform $\varphi' = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi$ ← quantorenfrei
zu jeder φ äquivalente φ' mit $\varphi' \models \varphi$ und Model von φ kann zu einem von φ' erweitert werden

Gleichheitsfreie Skolemnormalform

min 1 Konstantensymbol sonst eins hinzufügen
Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ - erweitert $T_0(S)$ um ~~Relationen~~ Relationssymbole ~~, diese einziger Frei~~

diese einziger Freiheitsgrad $\alpha = Rt_1 \ldots t_r$ $\hat{=}$ atomaren Formeln AL - Variable p_α $\quad \beta: \{p_\alpha \mid \alpha$ ist atomare Formel$\} \rightarrow \{0,1\}$
in 1:1 Beziehung zu Herbrand Struktur

Satz von Herbrand für $\Phi \subseteq FO_0^{\neq}(S)$:
Φ erfüllbar $\Leftrightarrow \exists \mathcal{H} \; \mathcal{H} \models \Phi$

0 - ohne freie Variablen

Reduktion von FO- auf AL-Erfüllbarkeit

$\forall \Phi \cdot \exists [\Phi]^{AL}$: Φ erfüllbar $\Leftrightarrow [\Phi]^{AL}$ erfüllbar $\wedge$ Φ rekursiv aufzählbar $\Rightarrow [\Phi]^{AL}$ rekursiv aufzählbar

Allgemeingültigkeit ist semi-entscheidbar Val $\subseteq$ FO allgemeingültige erststufige Formeln rekursiv aufzählbar

Kompaktheitssatz für FO

$\Phi \subseteq FO$ unerfüllbar $\Rightarrow \exists$ endliche unerfüllbare Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$

da für jedes $\Gamma_0 \subseteq [\Phi]^{AL}$ (richtig konstruiert) endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Gamma_0 \subseteq [\Phi_0]^{AL}$

Konstruktion $[\Phi]^{AL}$

äquivalent: $\Phi \models \psi \Rightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi \quad \Phi_0 \models \psi$

$\Phi \subseteq FO_0(S)$ keine freien Variablen (Sätze)

$\Phi \subseteq FO_0^{\neq}(S)$ gleichheitsfrei

$\Phi \subseteq FO_0^{\forall}(S)$ universelle Sätze

min ein Konstantensymbol

Satz von Herbrand

Bsp. Konsequenz: Nichtstandardmodell der Arithmetik

$\exists N^*$ elementar äquivalent zu $N = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

Beweis $\varphi_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k} < c$ ← neues Konstantensymbol

$Th(N)$ sei alles was über N aussagbar

$Th(N) \cup \{\varphi_k \mid k \geq 1\}$ erfüllbar $\Rightarrow$ c quasi unendlich
da alle Teilmengen erfüllbar

Literale und Klauseln für gleichheitsfreie, universell quantifizierte Sätze

Literal: atomare Formel $\lambda = R\, t_1 \dots t_n$, $\bar{\lambda}$ ...
$\bar{\lambda} := \neg \lambda$

Klausel: $C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k\}$ endlich aufgefasst Disjunktion $\bigvee C$ $\Rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n \bigvee C$ (Assoziation)

Klauselmenge: K Menge Klauseln K endlich $\Leftrightarrow$ aufgefasst konjunktive Normalform $\bigwedge_{C \in K} \bigvee C$

$\Rightarrow \{\forall \bar{x} \bigvee C \mid C \in K\}$

bzw endlich $\bigwedge_{C \in K} \forall \bar{x} \bigvee C$

in Skolem Normalform
$\forall \varphi \; \exists K \equiv \varphi \Rightarrow K$ Klauselnormalform

Grundinstanz $C\,[t_1/x_1, \dots t_n/x_n]$ ← freie Variable; $t_i \in T_0(S)$

$GI(K) :=$ Menge Grundinstanzen

K erfüllbar $\Leftrightarrow GI(K)$ erfüllbar

GI-Resolutionsschritt $\exists \lambda$ $\lambda \in C_1, \bar{\lambda} \in C_2 \Rightarrow C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \vee (C_2 \setminus \{\bar{\lambda}\})$ Resolvente von C_1, C_2

Unifikation (Res. Schritte einsparen)

$\lambda_1^{\sigma} = \lambda_2^{\sigma} \Rightarrow \sigma$ unifiziert λ_1 und λ_2

für Tupel $\sigma = (t_1, \dots t_n)$ $\lambda^{\sigma} := \lambda(t_1/x_1, \dots t_n/x_n)$

$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \bar{\lambda} \in C_2^{\sigma} \Rightarrow C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \vee (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\bar{\lambda}\})$

BRUNNEN

Sequenzkalkül für FO ohne Gleichheitsregeln $SK^{\neq}$

AL-Regeln

Quantoren-Regeln

$(\forall L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \vdash \Delta}$ $\qquad (\forall R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi(x)}$

c-neue Konstante
t-beliebiger Therm

zuerst

$(\exists L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \vdash \Delta}$ $\qquad (\exists L)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \varphi(x)}$

Gleichheitsregeln

$(=)\ \dfrac{\Gamma, t=t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

$(Sub\text{-}L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t=t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$ $\qquad (Sub\text{-}R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t=t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$

Erweiterung SK^{+}

Schnittregeln

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

(kontr) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

Korrektheit und Vollständigkeit

$\Phi \models \gamma \iff \Phi \vdash \gamma$

äquivalent Φ unerfüllbar $\iff \Phi \vdash \emptyset$

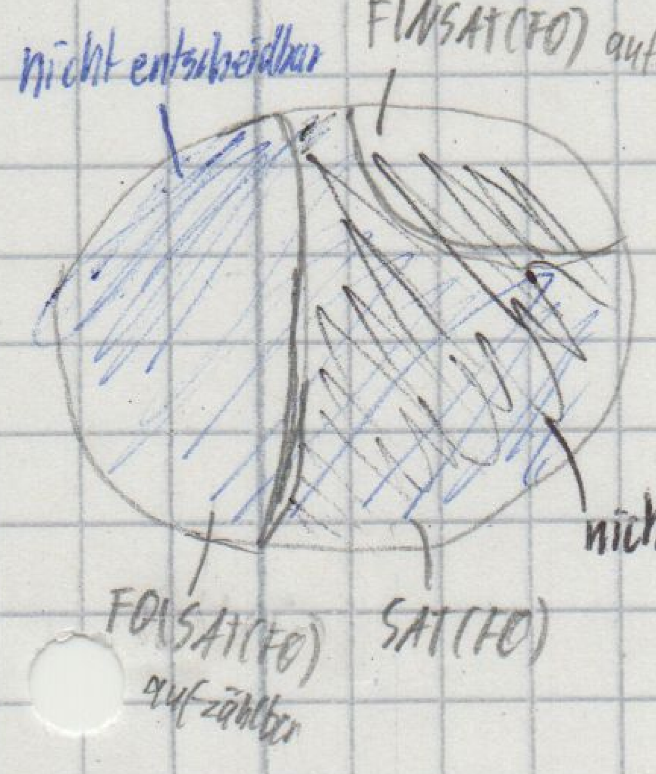
Beweisskizze $F\vdash$
Φ konsistent $\Rightarrow \Phi$ erfüllbar
erweitere zu $\hat{\Phi} \supseteq \Phi$ mit Elementaren Termen einzeln drin, bei oder eine der Terme
konstruiere Herbrand-Modell

Φ konsistent $\iff$ nicht $\Phi \vdash \emptyset \iff \Phi$ erfüllbar

SAT - Menge erfüllbar ~~entscheidbar~~
VAL - Menge allgemeingültig

FINSAT : mit endlichen Model(en) erfüllbar
FINVAL : allgemeingültig

SAT (FO) co-aufzählbar
Beweis $\neg$SAT(FO) aufzählbar, $\varphi \notin SAT(FO) \iff (\neg\varphi) \in VAL(FO)$



SAT(FO) unerfüllbar: Reduktion des Halteproblems
Konstruktion $\varphi_{M,w}$ sodass: M Turing Maschine, w Eingabe

$w \xrightarrow{M} \varphi \iff \varphi_{M,w} \in SAT(FO)$

$M = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$ $\quad w = a_1 \dots a_n$

Universum: ganze Zahlen — je als erstes Zeitpunkt
Signatur $:= (0, R_a\ \forall a \in \Sigma \cup \{\square\}, Z_q\ \forall q \in Q, K, succ, pred)$
Const; 2stellig Bandinhalt; 1stellig Zustand; 2-stellig Kopfposition; +1; -1

$\varphi_{M,w} = \varphi_0 \wedge \varphi_{start} \wedge \varphi_{\infty} \wedge \varphi_\delta$

$\forall x\,(pred\,succ\,x = x = succ\,pred\,x)$
$\varphi_0 :=$ pred, succ Gegenfunktion $\wedge$ zu einem Zeitpunkt nur eine Kopfposition
und Ort nur ein Bandinhalt

Zustand $\bigwedge_{q \neq q'} \forall t\, \neg(Z_q t \wedge Z_{q'} t)$
$\bigwedge_{a \neq a'} \forall t \forall y\, \neg(R_a t y \wedge R_{a'} t y)$
$\forall t \forall y \forall y'\, ((K t y \wedge K t y') \rightarrow y = y')$

$\varphi_{start} := K00 \wedge Z_{q_0} 0 \wedge$ Wert zu $t=0$ auf Band und Rest leer

$\varphi_{\infty} := \forall t\, \neg(Z_{q^+} t \wedge Z_{q^-} t)$ // kein Endzustand erreicht

$\varphi_\delta := \forall t \forall t'\, (t' = succ\, t \rightarrow \psi(t, t'))$

ψ Konjunktion von für $q \in Q$, $b \in \Sigma \cup \{\square\}$: $\delta(q, b) = (b', m, q')$ — Kopfbewegung

$\forall y\, ((Z_q t \wedge K t y \wedge R_b t y) \rightarrow (Z_{q'} t' \wedge K t' \,succ\,y \wedge R_{b'} t' y))$
Bedingung für Übergang erfüllt
pred y
y

$\forall y \forall y'\, ((K t y \wedge \neg y' = y) \rightarrow \bigwedge_a (R_a t y' \leftrightarrow R_a t' y'))$ // keine anderen Änderungen

Satz von Tarski
Arithmetik nicht entscheidbar
$\forall \varphi \in FO_0(S_{Ar})$
$N \models \varphi$
nicht entscheidbar

Satz von Trakhtenbrot: $FINSAT^{(FO)}$ rekursiv aufzählbar, FINVAL(FO) co-aufzählbar
Beweis: alle endlichen Modelle durchprobieren
Reduktion Konstruktion $\varphi^{fin}_{M,w}$

φ_{stop}
φ^{fin}_δ zusätzlich $t' \neq 0 \wedge \neg Z_{q^+} t \wedge \neg Z_{q^-} t \dots \rightarrow \dots$

$w \xrightarrow{M} stop \iff \varphi^{fin}_{M,w}$ hat endliches Modell