Reguläre Matrix $\Leftrightarrow$ symmetrisch $\wedge$ quadratisch

Aussageform : mit Variablen $E_1(x)$

Relation auf M $R \subseteq M \times M$

reflexiv: $\forall x \in X: xRx$

sym.: $\forall x,y \in X: xRy \Rightarrow yRx$

antisym: $\forall x,y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

transitiv: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Ordnungsrelation: partiell/total

$g \in X$ größtes wenn $\forall x \in X$ $g \geq x$

obere Schranke $\in Y$ $x \leq Y$

Supremum: min

wenn in X Maximum

Äquivalenzrelation

$\tilde{a} = \{x \in X: a \sim x\} \neq \emptyset$, disjunkt, vollständig; $X/_\sim := \{\tilde{a}: a \in X\}$

$1 \equiv 4 \pmod 3$

Abbildung $f: A \to B$, $a \mapsto f(a)$

surjektive $f(A) = B$

injektiv $\forall f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Beweisprinzipien Kontrapos., Widerspruch, Induktion

Behauptung, Anfang, Vorraussetzung (für ein gelte) Induktionsschritt

$a = q \cdot b + r$ $3 \bmod 4 = -1 \bmod 4$

$(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$

kleine Satz von Fermat $a^p \equiv a \pmod p$

Beweis Induktion

RSA Beweis $M \cdot M^{(p-1)(q-1)k}$

Fall $M \equiv 0 \pmod p$, $M \not\equiv 0$ analog q

$|M| = n$ z.z. $|Abb(M,K)| \cong K^n$

Gruppe $G \neq \emptyset$, $*: G \times G \to G$

Assoziativ, neutrales, inverses

abelsch zusätzlich kommutativ

$n, a^\#, a * x = b$ eindeutig $(g * h)^\# = h^\# * g^\#$

$a^{\#\#} = a$, G endlich $\Rightarrow g^k = n$

Untergruppe $U \neq \emptyset$, $a * b^\# \in U$ $n = n * n \Rightarrow n = n'$

Erzeugnis $\langle M \rangle$ $U_1 \cap U_2 = U$

$\subseteq \langle M \rangle$ muss wegen U_1, U_2 min.

$\supseteq \langle M \rangle$ dies ist eine Gruppe

Gruppenhomomorphismus (Isomorph)

$f(g_1 \diamond g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ $f(n_G) = n_H$, $f(g)^\# = f(g^\#)$

$\ker(f) = \{g \in G: f(g) = n\}$

Ring $(R,+)$ abelsch Gruppe, Ring mit Eins $(\cdot)$, kommutativer Ring

$\cdot: R \times R \to R$ Assoziativ

Distributivgesetz Multiplikationstafeln

$0 \cdot r = 0 = (0+0) \cdot r$, $(-r) \cdot s = -(rs)$

$f(r \cdot s) = f(r) \cdot f(s)$

Körper kom. Ring mit Eins und mult. Invers

$(K,+)$, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen

keine rechten oder linken Nullteiler

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ / $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ Körper, wenn n Prim

Automorphismus $K \to K$

Körperhomo. immer injektiv Beweis nur 0 auf 0 $1_L = f(x) \cdot f(x^{-1}) = 0_L$ Widerspruch

$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_L$ Annahme $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow x = y$

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ | $a \leq b$ $0_K \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Vollständigkeitsaxiom jede nichtleere Teilmenge die obere Schranke hat, hat Supremum

erfüllende Körper heißt Körper d. reellen Zahlen

Körper komplexer Zahlen $Re(z)$, $Im(z)$, $\bar{z} = x - yi$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ Dreiecks$\leq$

Fundamentalsatz Algebra jedes Polynom hat Nullstelle in $\mathbb{C}$ (zerfällt) in Linearfaktoren

K-Körper $+: V \times V \to V$

Vektorräume V-Menge $\cdot: K \times V \to V$

$(V,+)$ abelsche Gruppe $\forall v \in V$ $1 \cdot v = v$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta v)$; $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$

$\alpha \cdot (v + w) = \alpha v + \alpha w$, Nullvektor 0_V, Skalare

$K = \mathbb{R}$ reeller, $= \mathbb{C}$ ~~imag.~~ komplexer Vektorraum

$\mathbb{R}^n$ Standardvektorraum, Raum K^n der n-Tupel

der $p \times n$ Matrizen, Funktionsräume

Untervektorraum $U \neq \emptyset$, $\lambda a + \mu b \in U$

$\sum_{j=1} \alpha_j a_j$ Linearkombination von $a_1, \ldots, a_n$

$\langle M \rangle := \{v \in V: \exists \sum_{j=1} \alpha_j m_j\}$ Lineare Hülle

M linear abhängig, wenn nicht triviale Linearkombination von 0_V

Basis :: B linear unabhängig, $\langle B \rangle = V$

jeder V hat eine, jede unabhängige M lässt sich zu einer erweitern

alle Basen V_s haben $\dim(V)$ Elemente

Beweis, Annahme $|B'| > B$, b_j' Linearkombiniere b_j &

$[\vec{v}]_B$ Koordinatenvektor bezüglich B (eindeutig)

Faktorraum/Quotienten-Zerlegung in Äqui.klassen

$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in U$ $\hat{v} := \{w \in V: w \sim v\}$

$V/U := V_\sim = \{\hat{v}: v \in V\}$ $\hat{v} + \hat{w} = \widehat{v+w}$ $\alpha \hat{v} = \widehat{\alpha v}$

$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

(Entscheidend für Beweis Verknüpf. wohldef.

Beweis: Erweiterung Basis, Linkomb. von v, $\dim \tilde{b}_1 .. \tilde{b}_n = 0$

Norm

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

Definitheit $\|v\| \geq 0$ $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

Homogenität $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

Dreiecksungl. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{\|a - b\|: a \in A, b \in B\} = \operatorname{dist}(B,A)$

p-Normen $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\|\cdot\|_2$ euklid. $\|\cdot\|_\infty$ max.

$\det(A) \neq 0$

Skalarprodukt $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(\cdot|\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ Definitheit $(x|x) \geq 0$

Symmetrie $(x|y) = (y|x)$ Linearität $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$

induziert Norm $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ und Linearität

$|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ Beweis über $(v|w)^2 \leq (v|v) \cdot (w|w)$ (Cauchy-Schwarz-Ung.)

$0 \leq (v - \alpha w | v - \alpha w)$, $w = 0$, $w \neq 0$ $\alpha := \frac{(v|w)}{(w|w)}$

$v \perp w \Leftrightarrow (v|w) = 0 \Leftrightarrow v, w$ orthogonal, senkrecht

Orthogonalbasis $\forall b_1, b_2 \in B: b_1 \neq b_2 \Rightarrow b_1 \perp b_2$

Orthonormalbasis zusätzlich $\forall b \in B$ $\|b\| = 1$

Existenz und Ergänzbarkeit wie normale Basis

Geometrie im $\mathbb{R}^n$ Aufpunkt und Richtungsvektoren

genau eine Gerade durch zwei Punkte $\{x + \lambda(y - x): \lambda \in \mathbb{R}\}$

affiner Raum :: verschobener Untervektorraum

Hyperebene :: affiner Raum mit $\dim = n - 1$

Normaleinheitsvektor von H bis auf $\pm$ eindeutig

Hesse-Normalform $x_0 \in H$, v Normal $H = \{x \in \mathbb{R}^n: (x|v) = d\}$ $d := (x_0|v)$

$\operatorname{dist}(x,H) = (x|v) - d$

$\operatorname{dist}(0,H) = d$

$\mathbb{R}^3$ Kreuzprodukt $x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$ $(x \times y) \perp x$, $(x \times y) \perp y$

Orthonormalbasis $\vec{v} = \begin{pmatrix} (v|e_1) \\ (v|e_2) \\ \vdots \\ (v|e_n) \end{pmatrix}$ weil $(v|e_k) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \middle| e_k\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ik} = \alpha_i$

Lineare Abbildung

$\Phi: V \to W$ mit $\Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b)$

$V \cong W$ heißt isomorph

$L(V,W) := \{\Phi: V \to W: \Phi \text{ linear}\}$

auch Abbildung linear abhängiger Vektoren sind linear abhängig, $\Phi(0) = 0$

$\ker(\Phi) := \{v \in V: \Phi(v) = 0_W\}$

$\ker(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow$ bijektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(\Phi) = \dim(V)$

$\operatorname{Rang}(\Phi) := \dim(\Phi(V))$ wenn endlich

$\operatorname{Rang}(\Phi) + \dim(\ker(\Phi)) = \dim(V)$

$\forall v, w \in V$ $\exists \Phi: \Phi(v) = w$

Für $b_1 .. b_n$, $v_1 .. v_n$ genau eine Φ mit $\Phi(b_i) = v_i$

$\tilde{\Phi}: V/_{\ker(\Phi)} \to W$ $\hat{v} \mapsto \Phi(v)$ Isomorph

$r: V \to V/_{\ker(\Phi)}$ kanonische Abbildung

$\Phi = \tilde{\Phi} \circ r$

Matrizen $AB := \left(\sum_{l=1}^p \alpha_{jl} \beta_{lk}\right)_{j=1..q, k=1..n}$

$A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda (AB)$

$A \cdot (B + C) = AB + AC$ und $(A + D)C = AC + DC$

$(K^{n \times n}, +, \cdot)$ Ring mit Eins

Einheitsmatrix $I = (\delta_{jk})_{j,k=1..n}$

$A^T = (\alpha_{kj})_{k=1..n, j=1..p}$ $A^{TT} = A$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$(A + B)^T = A^T + B^T$ $(AB)^T = B^T A^T$

Abbildungsmatrix $\Phi(x) = \sum_{j=1}^p (A\vec{x})_j c_j$

C Basis von W

$M_C^B(\Phi) := A$ Φ_A Spalten Bilder Basen

mit festen Basen 1:1 $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(\Phi) = \dim(\text{Spalten})$

$M_D^B(\Psi \circ \Phi) = M_D^C(\Psi) \cdot M_C^B(\Phi)$

$M_C^B(\Psi + \Phi) = M_C^B(\Psi) + M_C^B(\Phi)$

$M_C^B(\lambda \Phi) = \lambda M_C^B(\Phi)$

Invers A^{-1}, wenn $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $A^{-1T} = A^{T-1} = A^{-T}$ $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ $\det \neq 0$

$GL(n,K) := \{A \in K^{n \times n}: A \text{ inv.}\}$ mit $\cdot$ Gruppe

Lineare Gleichungssysteme

$Ax = b$ $A \in K^{p \times n}$ $b \in K^p$ $x \in K^n$ gesucht

homogen :: $b = 0$, sonst inhomogen

$\{x \in K^n: Ax = b\} = \{x_s + y: y \in \ker(A)\}$ (x_s eine Lösung)

min. 1 Lösung $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b)$

eindeutig: $x = A^{-1}b$; $\ker(A) = \{0\}$; $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A|b) = n$

Invers berechnen erweiterte Koeffizientenmatrix

$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{Gauß}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$

Gauß-Algorithmus: Vertauschen, Multiplizieren, miteinander addieren (Rang, L bleibt erhalten)

bei Nullzeile parametrisieren

Basiswechsel $M_{C'}^{B'}(\Phi) = M_{C'}^{C}(id) \cdot M_C^B(\Phi) \cdot M_B^{B'}(id)$

ähnliche Matrizen $B = S^{-1}AS$ Abbildungsmatrizen bezüglich anderer Basen

Äquivalenzrelation

orthogonal Matrix :: Spalten Orthonormalbasis

$\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^T$ orthogonal. $A^TA = (v_i|v_j)_{ij}$

z.B. Basiswechsel zwischen Orthonormalen Basen $O(n,\mathbb{R})$ Gruppe a.M.

Determinante $A_{jk} \in K^{n-1 \times n-1}$ j-te Zeile k-te Spalte gestrichen

$\det((\alpha)) = \alpha$ $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \alpha_{1k} \det(A_{1k})$

$\det(A) = \det(A^T)$

vertauschen zwei Zeilen $\cdot(-1)$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Linear in jeder Zeile $\left|\lambda a_j + \mu b\right| = \lambda \det(A) + \mu \left|\vec{b}\right|$

Zeilen Addition det gleich. ähnliche Matrizen gleiche Det.

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Veränderung Volumen)

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ $\operatorname{Rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Eigenwerte, Eigenschaft Abbildung

$\lambda \in K: \exists v \in V$ $v \neq 0$ $\Phi(v) = \lambda v$ bzw. $Ax = \lambda x$

$\exists x \in K^n \setminus \{0\}$ $Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ A, B ähnlich $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

Eigenvektoren/raum Eigenwerte bilden Diagonale

Bilden Eigenvektoren eine Basis, diagonalisierbar

$\det(A - \lambda I)$ charakteristisches Polynom (Grad n)

$E(\Phi, \lambda) = \ker(A - \lambda I)$ Eigenvektoren $:= \ker(A - \lambda I) \setminus \{0\}$

Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte linear unabhängig

Seien $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow$ min 1 kompl. Eigenwert

Symmetrisch :: $A = A^T \Rightarrow$ Eigenwerte reell, diagonalisierbar

Orthonormalbasis aus Eigenvektoren

definit nur für sym. Matrizen $\wedge$ Standardskalarprodukt

positiv definit $(x|Ax) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Leftrightarrow \forall$ Eigenwerte > 0

$\forall$ Unterminoren > 0

p. semidefinit $(x|Ax) \geq 0$

n. definit $(x|Ax) < 0 \Leftrightarrow \forall$ Eigenwerte $< 0 \Leftrightarrow \forall m$ $(-1)^{m+1} \det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^m < 0$

n. semid. $(x|Ax) \leq 0$

indefinit $\exists x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: (x|Ax) > 0 \wedge (y|Ay) < 0$

Universelle Algebra Spezifikation Datentyp

LIST $\equiv$ Signatur $\Sigma = (S, F, ar)$

Sorts elem, list Sortensymbole, Stelligkeits(arity)funktion

funcs empty: $\to$ list Funktionssymbole

Konstante cons: elem $\times$ list $\to$ list

head: list $\to$ elem $ar: F \to S^* \times S$ $ar(f) = (\varepsilon, s)$ Konstante

tail: list $\to$ list $ar(f) = (s_1, \ldots s_n, s)$

axioms head(cons(a,l)) = a kurz $f: s_1 \times \ldots s_n \to s$

tail(cons(a,l)) = l kürzer $f: \vec{s} \to s$

tail(empty) = empty Wenn nur 1 Sorte $(\vec{s}, s)$ durch Stelligkeit $n := \operatorname{length}(\vec{s})$ eindeutig

auch Formeln

Algebra von Signatur

$\forall s \in S$ Trägermenge A_s kurz $f^A: A_{\vec{s}} \to A_s$

wobei $ar(f): s_1 \times \ldots s_n \to s$

Funktion $f^A: A_{s_1} \times \ldots A_{s_n} \to A_s$ für $\forall f \in F$ $S \in \Sigma_{sort}$

Σ-Homomorphismus von Σ-Algebra A zu B (für Sorten)

Familie von Funktionen $(h_s: A_s \to B_s)_{s \in S}$

mit $\forall f \in F$ $h_s(f^A(x_1, \ldots x_n)) = f^B(h_{s_1}(x_1), \ldots h_{s_n}(x_n))$

unter Komposition mit $(h' \circ h) = h'_s \circ h_s$ $s \in S$ abgeschlossen

Isomorphismus, wenn alle h_s Bijektionen

Beweis durch Existenz $h^{-1}: B \to A$ mit $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = id$

Unteralgebren genau dann wenn Inklusion(s homo.)

$\forall s \in S$ $B_s \subseteq A_s$ $\iota: B \to A$ mit $\iota_s(b) = b$ für $\forall b \in B$

$\forall f \in F$ $f^A(b_1, \ldots b_n) = f^B(b_1, \ldots b_n)$

Satz Sei $h: A \to B$ genau eine Unteralgebra C, sodass surjek.

$e: A \to C$ mit $h = \iota \circ e$

Beweis $C = h(A)$

Konkurenzrelation

Familie von $(R_s)_{s \in S}$ Äquivalenzrelationen

mit Operationen verträglich: $x_1 R_{s_1} y_1, \ldots x_n R_{s_n} y_n$

Faktoralgebra $\Rightarrow f^A(x_1, \ldots x_n) R_s f^B(y_1, \ldots y_n)$

$Q = A/_R$ $\forall s \in S$ $A_s/_{R_s}$ $f^Q(\hat{a}_1, \ldots \hat{a}_n) = \widehat{f(a_1, \ldots a_n)}$

wohldefiniert weil R Äquivalenzrelation

Quotientenhomo. $q: A \to Q$: $q_s(a) = \hat{a}$ $\forall a_s \in A_s$

(surjektiv) z.B. $\{(x,y) \in A_s \times A_s: h_s(x) = h_s(y)\}$

$T(\Sigma)$ freie Termalgebra über Σ (syntaktischer Natur)

$t_1 \in T(\Sigma)_{s_1}, \ldots t_n \in T(\Sigma)_{s_n} \Rightarrow f(t_1, \ldots t_n) \in T(\Sigma)_s$

Interpretationsfunktion $h_A: T(\Sigma) \to A$, die syntaktische Objekte (Terme) in Struktur (A) Semantik interpretiert

$f^{T(\Sigma)}$ gegeben durch $f^{T(\Sigma)}(t_1, \ldots t_n) = f(t_1, \ldots t_n)$

$T_\Sigma(A) := h: T(\Sigma) \to A$ (Bild kleinste Unteralgebra)

termerzeugte Algebra, wenn $T_\Sigma(A) = A$

darauf Terminduktion

Prädikat $P(x)$ gilt für alle $x \in A$, wenn unter Operationen abgeschlossen

$a_1 \in P_{s_1}, \ldots a_n \in P_{s_n} \Rightarrow f^A(a_1, \ldots a_n) \in P_s$

$\Downarrow$

$\forall x \in A_s: P_s(x)$ z.B. Beweis nur 1 Homo. $A \to B$, wenn A termerzeugt, da für: $P_s = \{a \in A_s: h(a) = h'(a)\}$

daher $h = h'$ nur ein Homo.

Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ~~jede~~ immer Infimum, wenn unten beschränkt

nach oben/unten beschränkt, wenn obere/untere Schranke

beschränkt, wenn nach oben und unten beschränkt

Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$|x| := \begin{cases} x, \text{ falls } x \geq 0 \\ -x, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$

$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| = |-x| \quad \pm x \leq |x|$

$|xy| = |x| \cdot |y|$

$|x+y| \leq |x| + |y| \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$

Intervalle in $\mathbb{R}$

(/) offenes

halboffenes

[/] abgeschlossenes

z.B. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

Potenz $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n\text{-mal}}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x^0 = 1$

$x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{x})^n$

Konvention $x^{n^m} = x^{(n^m)}$

$x^p x^q = x^{(p+q)}$

$x^p y^p = (xy)^p$

$(x^p)^q = x^{pq}$

Wurzel $\sqrt[n]{a} :=$ Lösung von $x^n = a$, $x \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$

Fakultät $n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$0! = 1$

Anzahl Reihenfolge von n unterschiedlichen Dingen

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ „n über k"

Anzahl Möglichkeiten k unterscheidbare Dinge aus n auszuwählen

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (Binomialformel)

Folge in nichtleerer Menge X

$a: \mathbb{N} \to X \quad a_n := a(n)$ Schreibweisen:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (a_n)_{n \geq 0} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad (a_n)$

konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

dann $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a \ (n \to \infty)$

sonst divergent

Bsp $(\frac{1}{n})_n \to 0 \ (n \to \infty)$

$((-1)^n)$ divergent

$\left(\frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 + 2}\right) \to 1 \ (n \to \infty)$

in $\mathbb{K}$ gilt:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n| = |a|$

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

zusätzl. $b_n \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (\alpha a_n) = \alpha a \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = ab$

In $\mathbb{R}$ $\quad a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$ (nicht für <)

Sandwich Theorem

$a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n \to \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \to \infty} c_n = a$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = a$

Nullfolge, wenn $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

beschränkt, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=0}^{\infty} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Jede konvergente Folge $\Rightarrow$ beschränkt

weitere Regeln ~~in $\mathbb{R}$~~

in $\mathbb{R}$: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

in $\mathbb{C}$ $q \in \mathbb{C}$ $|q| < 1$ $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$

für $q \in [-1, 1]$ $\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 1, \text{ falls } q = 1 \\ 0, \text{ falls } -1 < q < 1 \end{cases}$

$c \in \mathbb{R}_+ \ \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Folge divergiert bestimmt gegen $\infty, -\infty$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, falls $\forall c \geq 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ a_n \geq c$

analog $-\infty$ $a_n \leq c$

Monotonie

monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

monoton, falls monoton fallend oder wachsend

Konvergenzkriterium

Monotonie-Kriterium

wenn a_n nach oben beschränkt und monoton wachsend

$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ analog fallend

in $\mathbb{K}$ Cauchy-Folge, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad n, m \geq n_0$

konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Folge d.h. in $\mathbb{K}$

Cauchy-Folge $\wedge$ Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow$ konvergent

Häufungswert (a_n) in $\mathbb{K}$

$a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \ \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ unendlich viele Elemente

$\Leftrightarrow$ eine Teilfolge konvergiert gegen a

konvergent $\Rightarrow$ Grenzwert einziger Häufungswert

Teilfolge Sei $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton steigend, ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

konvergiert a_n gegen a, konvergiert jede Teilfolge gegen a

Asymptomatik Man schreibt $a_n \in O(b_n)$

$F_+ := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

Landau Symbole $(b_n) \in F_+$

$O(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}\}$

$o(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\}$

$o(b_n) \subseteq O(b_n)$

$a_n \in O(b_n) \Leftrightarrow \underline{\exists}\, c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c\, b_n \ \forall n > n_0$

$a_n \in o(b_n) \Leftrightarrow \underline{\forall}\, c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c\, b_n \ \forall n > n_0$

$a_n, b_n, c_n, d_n \in F_+ \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ auch alle für klein o

$a_n, b_n \in O(c_n) \Rightarrow \alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$

$a_n \in O(b_n) \wedge c_n \in O(d_n) \Rightarrow a_n c_n \in O(b_n d_n)$

$a_n \in O(b_n) \wedge b_n \in O(c_n) \Rightarrow a_n \in O(c_n)$ (Transitiv)

$a_n \in O(b_n) \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$

$O(1)$ beschränkt

$\subseteq O(\log_a(n))$ logarithmisch $a > 1$

$\subseteq O(n)$ linear

$\subseteq O(n \log_a(n))$ „n log n" $a > 1$

$\subseteq O(n^2)$ quadratisch

$\subseteq O(n^3)$ kubisch

$\subseteq O(n^k)$ polynomiell $k \in \mathbb{N}^*$

$\subseteq O(a^n)$ exponentiell $a > 1$

BRUNNEN

Mathe Objekte

nicht/ partiell/total geordnet
Schranken
inf, sup

auf Menge M
$\downarrow R \subseteq M \times M$

$f: \begin{cases} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{cases}$

Basics: Aussage, Aussageform, Menge, Relation, Abbildung
$\neg$ $\forall$ $\exists$, $\forall, E$

Ordnungs- Äquivalenz-
reflexiv
antisymmetrisch symmetrisch
transitiv

Teiler, modulare Arithmetik, Euklidischer Algorithmus, Satz von Fermat   RSA

Gruppe $G \neq \emptyset$ Assoziativität
$*: G \times G \to G$ neutrales und inverse Elemente

$\longrightarrow$ $n, a^{\#}$ und $a * \overset{\text{gesucht}}{x} = b$ Eindeutig
$a^{\#\#} = a$, G endlich $\Rightarrow \exists k\; g^k = n$

abelsch: zusätzlich kommutativ

Untergruppe U: $U \neq \emptyset$, $a * b^{\#} \in U$ Schnitt von Untergruppen ist Untergruppe

$\langle M \rangle$:= kleinste Untergruppe, die M enthält   Beweis, dass $\langle M \rangle$ $\subseteq \langle M \rangle$ muss wegen Ug2 mindestens
Erzeugnis
$\supseteq$ dies ist eine Gruppe M enthält

Gruppenhomorphismus $f(g_1 \diamond g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ $\forall g_1, g_2, G$

Isomorpismus bijektiv

$\text{kern}(f) := \{ g \in G : f(g) = n \}$ immer Untergruppe

Ring $(R, +)$ abelsch Gruppe
$\cdot: R \times R \to R$ Assoziativität
Distributivgesetze

Ring mit Eins
kommutativer Ring

Ringhomomorphismus

Körper K $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\})$ abelsche Gruppen (weder linke, noch rechte Nullteiler)   z.B. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ mit n prim
$(K, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins

Körperhomomorphismus   immer injektiv (Beweis über kern, keine Nullteiler)
Isomorphismus/Automorphismus

angeordneter Körper, wenn total geordnet $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ $a > 0 \Rightarrow -a < 0$
$a \leq b \wedge 0_k \leq c \Rightarrow ac \leq bc$ $a^2 \geq 0$

Körper der reelen Zahlen, wenn Vollständigkeitsaxiom
(jede nichtleere Teilmenge mit oberer Schrank hat auch Suprenum

Körper der komplexen Zahlen $\text{Re}(z), \text{Im}(z), \bar{z} = x - yi, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ mit $\bar{z}$ erweitern
keine totale Ordnung
$z \cdot \bar{z} = |z|^2$, Dreiecksungleichung, ...

Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom hat Nullstelle in $\mathbb{C}$, jedes Polynom zerfällt in Linearfaktoren

Lineare Algebra

Vektorräume V-Menge K-Körper

$+ : V \times V \to V$ (Vektoraddition)
$\cdot : K \times V \to V$ (Skalar-Multiplikation)

$(V,+)$ abelsche Gruppe
$\forall v \in V \; 1 \cdot v = v$
$\forall v \in V \forall \alpha,\beta \in K \; (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
$(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$
$\alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \beta w$

0_V Nullvektor : neutrale Element von V
Skalare : Elemente in K
$K = \mathbb{R}$ reeler Vektorraum
$K = \mathbb{C}$ komplexer Vektorraum
$\mathbb{R}^n$ Standardvektorraum
Raum K^n der n-Tupel
Raum der $p \times n$ Matrizen (erst Zeile, dann Spalte)
Funktionsräume

Unterrektorraum (UVR1) $U \neq \emptyset$
(UVR2) $\forall a,b \in U \, \forall \lambda,\mu \in K : \lambda a + \mu b \in U$

$\alpha \cdot v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ oder $v = 0_V$
$(-\alpha) v = -(\alpha v)$

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$ Linearkombination von $a_1 \dots a_n$

$\langle M \rangle$ Lineare Hülle $:= \{ v \in V : v$ Linearkombination von $M \}$ kleinster Unterraum $\supseteq M$

M linearabhängig, wenn nicht triviale Linearkombination des Nullvektors
sonst linear unabhängig

Basis von V (B1) B linear unabhängig
(B2) $\langle B \rangle = V$
Jeder Vektorraum hat eine, jede linear unabhängige $M \subseteq V$ lässt sich auf Basis erweitern

alle Basen eines Vektorraums V haben $\dim(V)$ Elemente (Dimension von V)
$\dim(K^n) = n$ $\dim(K^{p \times n}) = pn$
$\dim(\text{Funktionsraum}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}})$ unendlichdimensional

bezüglich einer Basis hat jeder Vektor eindeutige Koordinaten $\vec{v}$ Koordinatenvektor

Faktorraum Zerlegung von V in Äquivalenzklassen
$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in U$ U ein Unterrektorraum von V
$\tilde{v} = \{ w \in V : w \sim v \}$
$V/U := V/_\sim = \{ \tilde{v} : v \in V \}$ $\tilde{v}, \tilde{w} \in V/_U$ $\tilde{v} + \tilde{w} = \widetilde{v+w}$ $\alpha \cdot \tilde{v} = \widetilde{\alpha v}$

$w \in \tilde{v} \Leftrightarrow v + U := \{ v + u : u \in U \}$

auch Quotientenraum
„V (faktorisiert) nach U“
$\dim(V/_U) = \dim(V) - \dim(U)$

Normierte Räume
(N1) $\|v\| \geq 0$ $(\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0)$ Definitheit
(N2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ Homogenität
Norm $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ (N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

$\text{dist}(A,B) := \inf \{ \|a-b\| : a \in A, b \in B \} = \text{dist}(B,A)$

p-Normen
$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$\| \cdot \|_2$ euklidische Norm
$\| \cdot \|_\infty$ maximums Norm

Skalarprodukt
(SP1) $(x|x) \geq 0$ $((x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ Definitheit
(SP2) $(x|y) = (y|x)$ Symmetrie
$(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ (SP3) $(\alpha x + \beta y | z) = \alpha (x|z) + \beta (y|z)$ Linearität

induziert Norm $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$
$|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
Beweis über $(v|w)^2 \leq (v|v) \cdot (w|w)$ und Linearität

$v \perp w \Leftrightarrow (v|w) = 0$ Orthogonalbasis, wenn B paarweise orthogonal
Orthonormalbasis, wenn zusätzlich $\|b\| = 1$

Existenz und Ergänzbarkeit wie normale Basen

für Orthonormalbasis $\vec{v} = \begin{pmatrix} (v|e_1) \\ (v|e_2) \\ \vdots \\ (v|e_n) \end{pmatrix}$

Geometrie in $\mathbb{R}^n$ Gerade und Ebene durch Aufpunkt und Richtungsvektor(en) genau eine Gerade durch zwei Punkte $\{ x + \lambda (y-x) : \lambda \in \mathbb{R} \}$

affiner Raum := verschobener Unterrektorraum

Hyperebene := affiner Raum mit $\dim = n-1$ Normaleinheitsvektor von H bis auf Vorzeichen eindeutig

Hesse-Normalform : v Normaleinheitsv. $x_0 \in H$ $H = \{ x \in \mathbb{R}^n : (x|v) = d \}$ $d = (x_0|v)$
$\text{dist}(x_0, H) = (x|v) - d$ $\text{dist}(0,H) = d$

$\mathbb{R}^3$ Kreuzprodukt $x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$ $(x \times y) \perp x$
$(x \times y) \perp y$

Lineare Abbildung $\Phi: V \to W$

$\Phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \Phi(a) + \beta \Phi(b)$

$L(V,W) := \{\Phi : V \to W : \Phi \text{ linear}\}$

$\ker(\Phi) := \{v \in V : \Phi(v) = 0_W\}$ ist auch ein Untervektorraum

$\ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi$ injektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv $\Leftrightarrow \dim(V) = \text{Rang}(\Phi)$

$\Phi(V)$ Bildraum von Φ (auch Untervektorraum)

$\text{Rang}(\Phi) := \dim(\Phi(V))$ wenn nicht unendlich

Für V endlichdimensional $\text{Rang}(\Phi) + \dim(\ker(\Phi)) = \dim(V)$

$V \cong W$ heißt isomorph

$|M| = n$ $\text{Abb}(M,K) \cong K^n$ (Vektorraum ~~der~~ der Abbildungen)

auch die Abbildungen linear abhängiger Vektoren sind l. abhängig
unabhängig $\to$ unabhängig, wenn injektiv

für jeden Basisvektor $b \in B$ und beliebigen $v \in V$ gibt es eine lineare Abbildung $\Phi(b) = v$

$\tilde{\Phi} : V/_{\ker(\Phi)} \to \Phi(V)$ Isomorphismus ~~...~~ $\Rightarrow \Phi = \tilde{\Phi} \circ \nu$

$\nu : V \to V/_{\ker(\Phi)}$ kanonische Abbildung

$\vec{v}$ bleibt bei Basiswechsel erhalten

Matrizen

Matrixprodukt $A \in K^{q \times p}$ $B \in K^{p \times n}$

$AB := \left(\sum_{l=1}^{p} \alpha_{jl} \beta_{lk}\right)_{j=1..q\ k=1..n}$

$A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(AB)$
$A \cdot (B + C) = AB + AC$ und $(A+D)C = AC + DC$

$(K^{n \times n}, +, \cdot)$ Ring mit Eins
für $n \geq 2$ nicht kommutativ

Einheitsmatrix $I = (\delta_{jk})_{j,k=1..n}$

$A^T := (\alpha_{kj})_{k=1..n\ j=1..p}$ für $A = (\alpha_{jk})_{j=1..p\ k=1..n}$ transponierte Matrix

$(A+B)^T = A^T + B^T$
$A^{T^T} = A$
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Abbildungsmatrix $\Phi(x) = \sum_{j=1}^{p} (A\vec{x})_j c_j$ (C Basis von W)

Spalten sind Koordinaten der Bilder der Basisvektoren
wegen Basen mehrere Matrizen für eine Abbildung
mit festen Basen 1:1

$M_B^B(id) = I$

$M_C^B(\Phi) = A$ Φ_A

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\Phi) = \dim$ der Spalten ~~Addition~~
$\ker(A) = \ker(\Phi) = \{x \in K^n : Ax = 0\}$

$M_D^B(\Psi \circ \Phi) = M_D^C(\Psi) \cdot M_C^B(\Phi)$
$M_C^B(\Phi + \Psi) = M_C^B(\Phi) + M_C^B(\Psi)$
$M_C^B(\lambda \Phi) = \lambda M_C^B(\Phi)$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$
$A^{-1^T} = A^{T^{-1}} =: A^{-T}$

Inverse A^{-1}, wenn $AA^{-1} = I \wedge A^{-1}A = I$ (eindeutig, wenn vorhanden)

$GL(n,K)$ Gruppe invertierbarer Matrizen (mit Multiplikation)

A invertierbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$

Lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ $A \in K^{p \times n}$ $b \in K^p$
$x \in K^n$ gesucht

für Nullmatrix alles Lösbar
$Ax = 0$ $L = \ker(A)$

$b = 0 \Rightarrow$ homogen
inhomogen $\Rightarrow b \neq 0$

$\{x \in K^n : Ax = b\} = \{\underset{\text{eine Lösung}}{x_s} + y : y \in \ker(A)\}$

Lösbar ~~...~~ $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$
eindeutig Lösbar $x = A^{-1}b$; $\ker(A) = \{0\}$; $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = n$
unlösbar

inverse berechnen:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$

erweiterte Koeffizientenmatrix $A|b$ (Spalte wird drangehängt)

Gauß-Algorithmus: Vertauschen, Multiplizieren, miteinander addieren von Zeilen
Rang und Lösungsmenge bleibt erhalten

bei Nullzeile parametrisieren

Basiswechsel $M_{C'}^{B'}(\Phi) = M_{C'}^{C}(id_W) \cdot M_C^B(\Phi) \cdot M_B^{B'}(id_V)$
Basiswechselmatrix

ähnliche Matrizen, wenn $B = S^{-1}AS$

Abbildungsmatrizen bezüglich anderer Basen sind ähnlich

Äquivalenzrelation

Basiswechsel zwischen Orthonormalbasen hat orthogonale Matrix

orthogonale Matrix: Spalten bilden Orthonormalbasis $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^T$ orthogonal

$O(n,\mathbb{R})$ Gruppe orthogonaler $\mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen mit Multiplikation

Determinante $A_{jk} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ A, aber j-te Zeile und k-te Spalte gestrichen $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\det((\alpha)) = \alpha$ $\det(A) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \alpha_{1k} \det(A_{1k})$

$\det(A) = \det(A^T)$

vertausch man zwei Zeilen $\cdot(-1)$

Linear in jeder Zeile $\begin{vmatrix} \lambda a_j + \mu b \end{vmatrix} = \lambda \det(A) + \mu \begin{vmatrix} b \end{vmatrix}$ (alle Spalten) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Zeilen Addition ändert Determinante nicht

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

$\mathrm{Rang}(A) < n \iff \det(A) = 0$

Eigenwerte $\lambda \in K : \exists v \in V\ v \neq 0\ \Phi(v) = \lambda v$ bzw. ~~oder~~ $Ax = \lambda x$ Eigenschaft der Abbildung, daher ähnliche Matrizen gleiche Eigenwerte

Eigenvektor(raum) $\exists x \in K^n \setminus \{0\}$ $Ax - \lambda x = 0$, $(A - \lambda I)x = 0$ $x \neq 0 \iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff A - \lambda I$ nicht invertierbar $\iff \det(A - \lambda I) = 0$

- Bilden die Eigenvektoren eine Basis, bilden die dazugehörigen Eigenwerte eine Abbildung in der Basis
  - dann A diagonalisierbar

$\det(A - \lambda I)$ heiß charackteristisches Polynom von A (Grad n) A, B ähnlich $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

$E(\Phi, \lambda) = \ker(A - \lambda I)$ Eigenraum zu Eigenwert Eigenvektoren $:= \ker(A - \lambda I) \setminus \{0\}$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

Sei $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$ $\Rightarrow$ A hat min 1 komplexen Eigenwert (wegen Polynom)

symmetrisch $:= A = A^T$ $\Rightarrow$ Alle Eigenwerte reel; Ortonormalbasis aus Eigenvektoren; ~~invertierbar~~ diagonalisierbar

definit nur für symmetrische Matrizen und Standardskalarprodukt

positiv definit, falls $(x|Ax) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \iff$ Alle Eigenwerte > 0, alle Unterminoren > 0 $(m \in \{0,1,\dots,n\}\ \det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{m} > 0)$

positiv semidefinit, falls $(x|Ax) \geq 0$

negativ definit, falls $(x|Ax) < 0 \iff$; alle Eigenwerte $< 0 \iff$ Unterminoren abwechselnd $-, +, -$ $(-1)^{m+1} \det(\alpha_{jk})_{j,k=1}^{m} < 0$

negativ semidefinit, falls $(x|Ax) \leq 0$

indefinit, falls $\exists x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (x|Ax) > 0, (y|Ay) < 0$

universelle Algebra

Spezifikation (beschreibt Datenstruktur)

LIST $\equiv$

sorts elem, list

funcs
empty: $\to$ list
cons: elem $\times$ list $\to$ list
head: list $\to$ elem
tail: list $\to$ list

axioms
head(cons(a, l)) = a (müssen keine Gleichungen sein)
tail(cons(a, l)) = l
tail(empty) = empty

Signatur

$\Sigma = (S, F, ar)$

Sortensymbole / Funktionssymbole / Stelligkeits (arity) funtion

$ar: F \to S^* \times S$
daher $ar(f) = (s_1 \dots s_n, s)$
kurz: $f: s_1 \times \dots s_n \to s$
kürzer: $f: \vec{s} \to s$

Falls $ar(f) = (\varepsilon, s)$
heiß f Konstante der Sorte s

Wenn S aus nur einer Sorte
$(\vec{s}, s)$ durch $n := length(\vec{s})$ eindeutig
Stelligkeit

Algebra (von Signatur)

Trägermenge A_s für $\forall s \in S$

Funktion $f^A: A_{s_1} \times \dots A_{s_n} \to A_s$ für $\forall f \in F$ wobei $ar(f) = (s_1, \dots s_n, s)$
kurz $f^A: A_{\vec{s}} \to A_s$

Σ Homomorphismus von Σ Algebra A zu Σ Algebra B

Familie von Funktionen $(h_s: A_s \to B_s)_{s \in S}$ (eine für jede Sorte)

mit $\forall f \in F$ $h_s(f^A(x_1, \dots x_n)) = f^B(h_{s_1}(x_1), \dots h_{s_n}(x_n))$

unter Komposition mit $(h' \circ h)_s = h'_s \circ h_s$ abgeschlossen

Isomorphismus, wenn alle h_s Bijektionen

Beweis durch Existenz $h^{-1}: B \to A$ mit $h^{-1} \circ h = id$ $h \circ h^{-1} = id$

Unteralgebren

$\forall s \in S$ $B_s \subseteq A_s$

$\forall f \in F$ $f^A(b_1, \dots b_n) = f^B(b_1, \dots b_n)$

genau dann, wenn Inklusion(shomomorphismen)
$\iota: B \to A$ mit $\iota_s(b) = b$ für $\forall b \in B$

Satz Sei $h: A \to B$, genau eine Unteralgebra C, sodass surjektiv $e: A \to C$ mit $h = \iota \circ e$

Kongruenzrelation := Äquivalenzrelation und Operationen verträglich, daher $x_1 R_{s_1} y_1, \dots x_n R_{s_n} y_n$
Familie von $(R_s)_{s \in S}$ Relationen
$\Rightarrow f^A(x_1, \dots x_n) R_s f^B(y_1, \dots y_n)$

Faktoralgebra $Q = A/_R$ $\forall_{s \in S}$ $A_s/_{R_s}$ $f^Q(\hat{a}_1, \dots \hat{a}_n) = \widetilde{f(a_1, \dots a_n)}$ wohldefiniert wegen Kongruenzrelation

Quotientenhomomorphismus $q: A \to Q$ mit $q_s(a) = \tilde{a}$ für alle $a_s \in A_s$ (surjektiv)

z.B. $\{(x, y) \in A_s \times A_s \mid h_s(x) = h_s(y)\}$

universelle Algebra - Terme

$T(\Sigma)$ freie Termalgebra über Σ (syntaktischer Natur)

Interpretations ~~hom~~funktion

$h : T(\Sigma) \to A$ der Semantik interpretiert

~~eindeutig der Synta~~ ~~mit~~ korrekter Semantik

Ist $t_1 \in T(\Sigma)_{s_1}, \dots t_n \in T(\Sigma)_{s_n} \Rightarrow f(t_1, \dots t_n) \in T(\Sigma)_s$

$f^{T(\Sigma)}$ gegeben durch $f^{T(\Sigma)}(t_1 \dots t_n) = f(t_1 \dots t_n)$

$T_\Sigma(A)$ kleinste Unteralgebra von A = Bild von $h : T(\Sigma) \to A$

Termerzeugte Algebra, wenn $T_\Sigma(A) = A$

darauf gilt Terminduktion

Prädikat $P(x)$ gilt für alle $x \in A_s$, wenn unter Operationen abgeschlossen

$a_1 \in P_{s_1}, \dots a_n \in P_{s_n} \Rightarrow f^A(a_1 \dots a_n) \in P_s$

$\Downarrow$

$\forall x \in A_s : P_s(x)$

z.B. Beweis Homomorphismus $A \to B$, wenn A termerzeugt

dafür $P_s = \{ a \in A_s : h(a) = h'(a) \}$

Analysis Teil 1

$\mathbb{R}$ kleinster angeordneter Körper, der $\mathbb{Z}$ enthält und Vollständigkeitsaxiom

Jede nichtleere Teilmenge, die eine obere Schranke besitzt, hat ein Supremum

$\equiv$ jede nach unten beschränkte ein Infimum

Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$

nach oben/unten beschränkt, wenn obere/untere Schranke

beschränkt, wenn nach oben und unten beschränkt

Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| \geq 0 \quad |x| = |-x|$

$\pm x \leq |x| \quad |xy| = |x| \cdot |y|$

$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad ||x| - |y|| \leq |x-y|$

Intervalle (in $\mathbb{R}$)

( ) offenes Intervall

halboffen

[ ] abgeschlossenes

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$

$\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$

Satz $q = \frac{m}{n} = \frac{p}{r}$

$(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[r]{x})^p$

Potenz

$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\text{-mal}}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad x \neq 0$

$x^0 = 1$

$x^q = x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{x})^n$

Konvention $x^{n^m} = x^{(n^m)}$

$x^p x^q = x^{(p+q)}$

$x^p y^p = (xy)^p$

$(x^p)^q = x^{pq}$

Wurzel

$\sqrt[n]{a}$ ist die Lösung von $x^n = a$ $\quad x \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$

Fakultät $n \in \mathbb{N}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

$0! = 1$

Anzahl Reihenfolge von n unterscheidbaren Dingen

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ „n über k"

Anzahl Möglichkeiten k unterscheidbare Dinge aus n auszuwählen

Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (Binomialformel

Folge in X

nichtleere Menge

$a : \mathbb{N} \to X$

$a_n := a(n)$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad (a_n)_{n \geq 0}$

$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (a_n)

Konvergent, wenn

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

dann $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \to a \; (n \to \infty)$

sonst divergent

Bsp $\left(\frac{1}{n}\right)_n \to 0 \; (n \to \infty)$

$((-1)^n)$ divergent

$\left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+2}\right) \to 1 \; (n \to \infty)$

(Grenzwert ist eindeutig

Nullfolge, wenn $a_n \to 0 \; (n \to \infty)$

beschränkt, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup_{n=0}^{\infty} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

analog inf

Jede konvergente Folge $\Rightarrow$ beschränkt

in $\mathbb{K}$:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n| = |a|$

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (\alpha a_n) = \alpha a \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = ab$

zusätzlich $b_n \neq 0$ $b \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

In $\mathbb{R}$ $\quad$ Nur für $\leq$!!! nicht $<$

$a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Sandwich Theorem

$a_n \leq b_n \leq c_n$

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \lim_{n \to \infty} c_n = a$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = a$

Konvergenz

Strategien: abschätzen, ergänzen

~~Konvergenzkriterien~~

weitere Regeln

in $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

für $q \in (-1,1]$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1, \text{ falls } q=1 \\ 0, \text{ falls } -1<q<1 \end{cases}$

(in $\mathbb{C}$ $q \in \mathbb{C}$ $|q|<1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$)

$c \in \mathbb{R}_+$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Folge divergiert ~~nach~~ bestimmt nach $\infty, -\infty$:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls $\forall C \geq 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \geq C$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls $\forall C \geq 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \leq C$

Monotonie

monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

monoton, wenn monoton fallend oder wachsend

Konvergenzkriterium (Monotonie-Kriterium)

wenn a_n nach oben beschränkt und monoton wachsend

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

analog fallend

in $\mathbb{K}$ Cauchy-Folge, wenn

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ |a_n - a_m| < \varepsilon\ \ n,m \geq n_0$

konvergente Folge $\overset{\text{in } \mathbb{K}}{\Rightarrow}$ Cauchy-Folge

in $\mathbb{K}$ Cauchy-Folge $\Rightarrow$ Konvergenz (Vollständigkeitsaxiom nötig)

Häufungswert (a_n) in $\mathbb{K}$

$a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert, wenn

$\forall \varepsilon>0\ \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$ unendlich viele Elemente hat $\Leftrightarrow$ eine Teilfolge konvergiert gegen a

ist a_n konvergent, ist der Grenzwert der einzige Häufungswert

Teilfolge Sei $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton steigend, ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Konvergiert a_n gegen a, konvergiert auch jede Teilfolge gegen a

Asymptomatik

$F_+ := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{R} : a_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

Landau Symbole $(b_n) \in F_+$

$O(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}\}$

$o(b_n) := \{(a_n) \in F_+ : \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\}$

Man schreibt $a_n \in O(b_n)$

$o(b_n) \subseteq O(b_n)$

$a_n \in O(b_n) \Leftrightarrow \exists C>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ a_n \leq C b_n\ \ \forall n > n_0$

$a_n \in o(b_n) \Leftrightarrow \forall C>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ a_n \leq C b_n\ \ \forall n > n_0$

Asymptomatik $a_n, b_n, c_n, d_n \in F_+ \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$

$a_n, b_n \in O(c_n) \Rightarrow \alpha a_n + \beta b_n \in O(c_n)$

$a_n \in O(b_n) \wedge c_n \in O(d_n) \Rightarrow a_n c_n \in O(b_n d_n)$

$a_n \in O(b_n), b_n \in O(c_n) \Rightarrow a_n \in O(c_n)$ (Trasitivität)

$a_n \in O(b_n) \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} \in O(\frac{1}{a_n})$

	$O(1)$	beschränkt	
$\subseteq$	$O(\log_a(n))$	logarithmisch	$a>1$
$\subseteq$	$O(n)$	linear	
$\subseteq$	$O(n \log_a(n))$	„n log n"	$a>1$
$\subseteq$	$O(n^2)$	quadratisch	
$\subseteq$	$O(n^3)$	kubisch	
$\subseteq$	$O(n^k)$	polynomiell	$k \in \mathbb{N}^*$
$\subseteq$	$O(a^n)$	exponentiell	$a>1$