AuPL

Logisches System:

- Objekte (können unendlich sein)
- Sprache (Logik?)
- Modellrelation $A \models \varphi$

  Aussage φ trifft auf Objekt A zu.

→ Keine Selbstbezüge! (sonst Widerspruch)

Syntax: Menge $L \subseteq \Sigma^*$ von Formeln (endl. Formeln)

$AL(V)$ induktiv definiert

atomar $0 \in AL(V)$, $1 \in AL(V)$, $p \in AL(V)$ $\forall p \in V$

Negation $\neg\varphi \in AL(V)$ $\forall \varphi \in AL(V)$

Kon/Disjunktion $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi) \in AL(V)$ $\forall \varphi, \psi \in AL(V)$

oft ohne Klammern $\wedge$ vor $\vee$ $(\varphi \to \psi)$ für $(\neg\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ für $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$

Konvention

$V = \{p_1, p_2, \ldots\}$ $V_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$

$AL = AL(V)$ $AL_n = AL(V_n)$

Semantik

Formeln $\varphi \in AL(V)$ sprechen über Belegungen der Variablen

$\mathfrak{J}: V \to \mathbb{B}$

Definition Funktion $\cdot^{\mathfrak{J}}: AL(V) \to \mathbb{B}$ rekursiv

$0^{\mathfrak{J}} = 0$, $1^{\mathfrak{J}} = 1$

$p^{\mathfrak{J}} := \mathfrak{J}(p)$ für $p \in V$

$(\neg\varphi)^{\mathfrak{J}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{J}}$ $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{J}} := \max\{\varphi^{\mathfrak{J}}, \psi^{\mathfrak{J}}\}$

$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{J}} = \varphi^{\mathfrak{J}} \cdot \psi^{\mathfrak{J}}$

$\varphi^{\mathfrak{J}} = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{J}$ erfüllt $\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{J} \models \varphi$

Für $\Phi \subseteq AL$ $\mathfrak{J} \models \Phi \Leftrightarrow \mathfrak{J} \models \varphi$ $\forall \varphi \in \Phi$

Literal: p oder $\neg p$

Für l_{ij} Literale:

DNF $\bigvee_{i=1}^{n} (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik})$

KNF $\bigwedge_{i=1}^{n} (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik})$

Für jedes φ äquivalente KNF und DNF

über lang z.B. $p_1 \oplus p_2 \oplus \ldots \oplus p_n$ je 2^{n-1} Terme

Koinzidenzlemma $\varphi^{\mathfrak{J}}$ nur von vorkommende Variablen ab, endlich, da φ endlich

⇒ Wahrheitstabelle

p_1	p_2	$\varphi^{\mathfrak{J}}$
0	0	
0	1	
	⋮	

$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow$

Logisch äquivalent $\Leftrightarrow \forall \mathfrak{J}: \varphi^{\mathfrak{J}} = \psi^{\mathfrak{J}}$

Erfüllbarkeit $\Phi \subseteq AL$ heißt erfüllbar $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{J}: \mathfrak{J} \models \varphi$ $\forall \varphi \in \Phi$

Allgemeingültigkeit $\varphi \in AL$ heißt allgemeingültig $\Leftrightarrow \forall \mathfrak{J}: \mathfrak{J} \models \varphi$

Folgerungsbeziehung ψ folgt aus $\Phi \Leftrightarrow \Phi \models \psi \Leftrightarrow (\mathfrak{J} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{J} \models \psi) \Leftrightarrow \underbrace{\{\Phi\} \cup \{\neg\psi\}}_{\text{unerfüllbar}}$

φ nicht erfüllbar $\Leftrightarrow \neg\varphi$ allgemeingültig

Vollständige Systeme von Junktoren

Funktion $f_\varphi: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow f_\varphi = f_\psi$ $2^{(2^n)}$ verschiedene Funktionen $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

$\mathbb{B}^0 = \{\square\}$ leere Tupel

B_n Menge n-stelliger boolscher Funktionen

$B_0 = \{f_0(\square) = 0, f_1(\square) = 1\}$

Kompaktheitssatz

$\Phi \subseteq AL$ erfüllbar $\Leftrightarrow \forall$ endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar

$\Phi \subseteq AL$ unerfüllbar $\Leftrightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi$ mit Φ_0 endlich und unerfüllbar

Sei $\Phi \subseteq AL$, $\psi \in AL$: $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$ Φ_0 endlich

Beweis $\Leftarrow$ $\mathfrak{J}_n$ von $V_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ gut $\Leftrightarrow \forall$ endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ $\exists \mathfrak{J}_{\Phi_0}$ mit $\mathfrak{J}_{\Phi_0} \models \Phi_0 \wedge 1 \leq i \leq n$. $\mathfrak{J}_{\Phi_0}(p_i) = \mathfrak{J}_n(p_i)$

Induktion es gibt Kette guter Beleg. (mit $\mathfrak{J}_m(p_k) = \mathfrak{J}_n(p_k)$ $\forall m, n > k$)

durch konstruktion Menge von Formelmengen

$\mathfrak{J}(p_i) := \mathfrak{J}_i(p_i)$ erfüllt ganz Φ

Kette exists, da $\mathfrak{J}_0$ gut nach Vorraussetzung

$\mathfrak{J}_{n+1}^{0}(p_{n+1}) = 0$ $\mathfrak{J}_{n+1}^{1}(p_{n+1}) = 1$

Gäbe es Φ^{0} unerfüllbar und Φ^{1} unerfüllbar

in keiner Fortsetzung

Widerspruch $\mathfrak{J}_n$ gut

⇒ ~~Induktion~~

Beispiele:

höchstens 2 Variablen auf 1 ⇒ $\Phi := \{\varphi_3, \varphi_4, \ldots\}$

$\varphi_n := \bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq n} \neg(p_i \wedge p_j \wedge p_k)$

Formelmenge für genau 2 Var auf 1 unmöglich

Lemma von König: Jeder unendliche, aber endlich verzweigte Baum hat einen unendlichen Pfad.

$T = (V, E, \lambda)$ Beweis über Kompaktheitssatz ?

$V := \{p_u : u \in V\}$ $\Phi = \{\varphi_u : u \in V\} \cup \{p_\lambda\}$

$\varphi_u = p_u \to \bigvee \{p_v : v \in E[u]\}$

$\forall$ endlichen Teilmengen werden von 1en auf Pfad zu tiefstem Knoten erfüllt.

Beweiskalkül: Resolution

Ziel endlicher nachprüfbarer Beweis Φ unerfüllbar

Klausel: Disjunktion von Literalen als Menge

endliche Klauselmengen $\cong$ Formeln in KNF

Resolventen: C Resolvent von $C_1, C_2 \Leftrightarrow \exists p \in V$ mit $p \in C_1$, $\neg p \in C_2 \land C = (C_1 \setminus \{p\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg p\})$

$Res(K) ::= K \cup \{C \mid C$ Resolvente zweier Klauseln $C_1, C_2 \in K\}$

$Res(K)$ erfüllbar $\Leftrightarrow K$ erfüllbar

$Res^0(K) := K$
$Res^{n+1}(K) := Res(Res^n(K))$
$Res^*(K) := \bigcup_{n \geq 0} Res^n(K)$

K unerfüllbar $\underset{\text{Korrektheit}}{\Leftarrow}\underset{\text{Vollständigkeit}}{\Rightarrow} \Box \in Res^*(K)$

Beweis: $\Leftarrow$ Induktion

$\Rightarrow$ Induktion $K_0 = \{C \setminus \{p_{n+1}\} \mid C \in K \land \neg p_{n+1} \notin C\} \equiv K \cup \{\neg p_{n+1}\}$

$K_1 = \{C \setminus \{\neg p_{n+1}\} \mid C \in K \land p_{n+1} \notin C\} \equiv K \cup \{p_{n+1}\}$

K unerfüllbar $\Rightarrow K_0, K_1$ unerfüllbar mit p_{n+1} bzw. $\neg p_{n+1}$ nachträglich hinzufügen

sonst mit $\mathfrak{I}(p_{n+1}) = 0$ $\mathfrak{I}$ erfüllt K

$\Rightarrow (\Box \in Res^*(K_1) \Rightarrow \Box \in Res^*(K) \lor \{\neg p_{n+1}\} \in Res^*(K)$

da auch $\{p_{n+1}\} \in Res^*(K) \Rightarrow \Box \in Res^*(K)$

Beweis im Resolutionskalkül Binärbaum $\Box$ root

"Zertifikat für die Unerfüllbarkeit"

terminierender exponentieller Resolutionsalgorithmus

$\{\neg q_1, \dots \neg q_r, q\} \equiv (q_1 \land \dots \land q_r) \to q$

Hornklauseln: max 1 positives Literal

positive Hornklausel genau 1 positives Literal und kein anderes?

negative Hornklausel 0 positive Literale

Einheitsres. nur wenn eine Klausel nur aus einem Literal besteht. Für Hornklauseln vollständig

effizienter Horn-Erfüllbarkeitstest: bestimmt minimale Belegung

H_0 ohne negative Klauseln

~~H_0 negati~~

$X \subseteq V_n$ Variablen, die wahr sein müssen $\quad C = \{\neg q_1, \dots \neg q_r, q\} \in H$

$C(X) := \begin{cases} \{q\}, & \text{wenn } i = 1 \dots r \; q_i \in X \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$

$H_0(X) ::= X \cup \bigcup_{C \in H_0} C(X)$ $\quad$ mit $X_0 := \emptyset$ $\quad X_{n+1} = H_0(X_n)$ $\quad X_\infty$ Ergebnis

$\mathfrak{I}_X$ Inter mit $\mathfrak{I}_X(q) = 1$ $q \in X$ ~~sonst~~

danach Test ob neg. Klauseln erfüllt

terminiert in n Schritten, da nur n Variablen; $\mathfrak{I}_{X_\infty} \models H_0$

Sequenzkalkül für AL

AL-Sequenz: Paar (Γ, Δ) $\Gamma, \Delta \subseteq AL$ geschrieben $\Gamma \vdash \Delta$ oder $\gamma_1, \dots \gamma_k \vdash \delta_1, \dots \delta_l$

$\Gamma \vdash \Delta$ allgemeingültig $\Leftrightarrow \gamma_1 \land \dots \land \gamma_k \models \delta_1 \lor \dots \lor \delta_l$

Sequenzregel (Name der Regel) $\dfrac{\text{Prämisse} \leftarrow \text{0-2 Sequenzen}}{\text{Konklusion} \leftarrow \text{eine Sequenz}}$

Regel korrekt $\Leftrightarrow$ (Prämisse allg. $\Rightarrow$ Konkl. allgemeingültig)

$(Ax)\ \dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$ $\qquad (0\text{-}Ax)\ \dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$

$(\neg L)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$ $\qquad (\neg R)\ \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

$(\lor L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \lor \psi \vdash \Delta}$ $\qquad (\lor R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \lor \psi}$

$(\land L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \land \psi \vdash \Delta}$ $\qquad (\land R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \land \psi}$

Erweitertes Sequenzkalkül SK^+

(modus ponens) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

keine systhematische Beweissuche mehr φ frei wählbar

ableitbare Regeln können durch lokale syntaktische Änderungen übersetzt werden

(Kontr) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

$\emptyset \vdash \varphi$ allgemeingültig $\Leftrightarrow \varphi$ allgemeingültig

Sequenz ableitbar $\Leftrightarrow$ in endlich vielen Schritten aus leeren Prämissen

systemathische Beweissuche: Beweisbaum

alle Blätter leere Prämisse $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ allgemeingültig

$\exists$ Blatt keine weitere Regel $\Rightarrow$ Gegenbeispiel für $\Gamma \vdash \Delta$ allg.

Prädikatenlogik erster Stufe redet über Strukturen (Aussagenlogik über Belegungen)

S Signaturen (Symbolmengen)

- Konstantensymbole $c, d, \dots$
- Relationssymbole $P, Q, \dots$ je mit einer Stelligkeit $r \geq 1$ ohne ~~Funktions~~ Relations. $\Rightarrow$ funktionale Signatur
- Funktionssymbole $f, g, \dots$ je mit einer Stelligkeit $r \geq 1$ ohne Funktions. $\Rightarrow$ relationale Signatur

S-Struktur $\mathcal{A} = (A, c^A, \dots, R^A, \dots, f^A, \dots)$

- Trägermenge A (Universum)
- $\forall c \in S \quad c^A \in A$ Konstanten
- $\forall R \in S$ r stellig $R^A \subseteq A^r$ Relationen
- $\forall f \in S$ r stellig $f^A : A^r \to A$ Funktionen

Beispiel Wortstrukturen $S_\Sigma = \{<\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}$

Wortkodierung durch S_Σ Struktur $w = a_1 \dots a_\ell \in \Sigma^+$

$$W_w = (\{1, \dots, \ell\}, <^W, (P_a^W)_{a \in \Sigma})$$

$$<^W = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

$$P_a^W := \{i \mid 1 \leq i \leq \ell \text{ und } a_i = a\}$$

Variablenmenge $V = \{x_1, \dots\}$ $V_n = \{x_1, \dots, x_n\}$

S-Terme

$T(S)$ kleinste Menge mit — formal Zeichenkette über Alphabet $S_F \cup V$

ein Term v ~~für jede~~ $\forall v \in V$

c $\quad \forall c \in S$

$f t_1 \dots t_r$ $\quad \forall f \in S \quad t_1, \dots, t_r \in T(S)$

$var: T(S) \to P(V)$

$var(v) := \{v\} \quad \forall v \in V$

$var(c) := \emptyset \quad \forall c \in S$

$var(f t_1 \dots t_r) := var(t_1) \cup \dots \cup var(t_r)$

$T_n(S) \subseteq T(S)$ Terme nur mit Variablen aus V_n

nur von $S_F \subseteq S$ abhängig (Funktions- Konstantensymbole)

~~$T_0(S)$~~ $T_0(S) = \emptyset \iff S$ keine Konstanten.

Auswertung $t^\mathfrak{I} \in A$

rekursiv / induktiv:

$c^\mathfrak{I} := c^A$

$v^\mathfrak{I} := \beta(v)$

$(f t_1 \dots t_r)^\mathfrak{I} := f^A(t_1^\mathfrak{I}, \dots, t_r^\mathfrak{I})$

hängt nicht von $v \notin var(t)$ ab

Termstruktur $\mathcal{T} = \mathcal{T}(S)$

- Trägermenge $T(S)$
- $c^\mathcal{T} = c \quad \forall c \in S$
- $f^\mathcal{T}: T(S)^r \to T(S),\ (t_1, \dots, t_r) \mapsto f t_1 \dots t_r$ $\forall f \in S$ r stellig

Falls S min 1 Konstantensymbol $\mathcal{T}_0(S)$ mit Trägermenge $T_0(S)$

S-Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$

Belegung $\beta: V \to A$

Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Schreibweisen

$var(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \iff t(x_1, \dots, x_n)$

$t[a_1, \dots, a_n] = t^\mathfrak{I} \quad \mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta) \ \beta(x_i) = a_i$

$$\beta[x \mapsto a] = \begin{cases} a & \text{falls } v = x \\ \beta(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

entsprechend $\mathfrak{I}[x \mapsto a]$

Logik erster Stufe FO(S)

Syntax FO(S) Menge Formeln erster Stufe induktiv:

- $t_1 = t_2 \quad \forall t_1, t_2 \in T(S)$
- $R t_1 \dots t_r \quad \forall$ r stellig $R \in S$ $t_1, \dots, t_r \in T(S)$
- $\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in FO(S)$
- $\exists x \varphi, \forall x \varphi$ für $\forall x \in V$ $\varphi \in FO(S)$

$FO^{\neq}(S)$ gleichheitsfreies FO

FO Vereinigung aller FO(S)

$(\varphi \to \psi) = (\neg\varphi \vee \psi)$ bzw.

Semantik

$\mathfrak{I} \models t_1 = t_2 \iff t_1^\mathfrak{I} = t_2^\mathfrak{I}$

$\mathfrak{I} \models R t_1 \dots t_r \iff (t_1^\mathfrak{I}, \dots, t_r^\mathfrak{I}) \in R^A$

$\mathfrak{I} \models \neg\varphi \iff \neg\, \mathfrak{I} \models \varphi$

$\mathfrak{I} \models \varphi \vee \psi \iff \mathfrak{I} \models \varphi \vee \mathfrak{I} \models \psi$

$\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi \iff \mathfrak{I} \models \varphi \wedge \mathfrak{I} \models \psi$

$\mathfrak{I} \models \exists x \varphi \iff \exists a \in A \ \ \mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$

$\mathfrak{I} \models \forall x \varphi \iff \forall a \in A \ \ \mathfrak{I}[x \mapsto a] \models \varphi$

Semant. Grundbegriffe
- Äquivalenz von Formeln
- Implikation
- Erfüllbarkeit, Allgemeing.
- Erfüllbarkeitsäquivalenz
- elementare Äquivalenz Strukturen

Negationsnormalform (alle $\neg$ vor atomaren Formeln)

Pränexnormalform (alle Quantoren am Anfang)

$\forall \varphi \in FO$ äquivalente Normalformen

Negationsnormalform := alle $\neg$ vor atomaren Formeln

Pränexnormalform := Quantoren vor Restformel ohne Quantoren

$Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \dots Q_n x_{i_n} \varphi_\times$ ohne Quantoren

Teilformel $tf(\varphi) :=$ Menge Teilformeln

atomares φ $tf(\varphi) := \{\varphi\}$ $\qquad tf(\exists x\varphi) = \{\exists x \varphi\} \cup tf(\varphi)$

$tf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup tf(\varphi)$ $\qquad tf(\forall x\varphi) = \{\forall x \varphi\} \cup tf(\varphi)$

$tf(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup tf(\varphi) \cup tf(\psi)$ $\qquad tf(\varphi \vee \psi) = \{\varphi \vee \psi\} \cup tf(\varphi) \cup tf(\psi)$

Quantorenrang $qr(\varphi) = 0$ φ atomar $\quad qr(\neg\varphi) = qr(\varphi) \quad qr(\varphi \vee \psi) = qr(\varphi \wedge \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\} \quad qr(\exists x \varphi) = qr(\forall x \varphi) = qr(\varphi) + 1$

relationale Datenbanken

y ist Vorwahl von Hauptstadt x : $\varphi(x,y) := \exists z (Hxz \wedge Vzy)$

relationale Algebra - Operationen auf Relationen $R \subseteq A^k$ (für festes $k \hat{=}$ Anzahl freier Variablen)

$Rx_{i_1} \dots x_{i_r}$ liefert Relation $R \hat{=} \{(a_1, \dots a_k) \in A^k \mid (a_{i_1}, \dots a_{i_r}) \in R^A\}$

$\vee, \wedge \hat{=} \cup, \cap$

$\neg \hat{=} A^k \setminus R$

$\exists \hat{=}$ Projektion $\pi_i(R) := \{(a_1, \dots a_k) \mid (a_1, \dots a_{i-1}, a_i', a_{i+1} \dots a_k) \in R \; \exists a_i' \in A\}$

Spielsemantik

Spiel ~~mit~~ zu $\varphi(x_1, \dots x_k) \in FO(S)$ in NNF

Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Spieler: Verifizierer V will zeigen $\mathfrak{I} \models \varphi$

Falsifizierer F $\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Start: $(\varphi, \beta(\bar{x}))$ $(\varphi, -)$?

Ende: ψ atomar oder negiert atomar

Gewinner: $\mathcal{A}, \bar{a} \models \psi$ → V; $\mathcal{A}, \bar{a} \not\models \varphi$ → F

Spielpositionen $(\psi, \bar{a})$, ψ Teilformel von φ, $\bar{a} \in A^k$

$(\psi_1 \wedge \psi_2, \bar{a})$: F wählt $i \in \{1,2\}$ zieht nach $(\psi_i, \bar{a})$

$\quad \vee \qquad\qquad\quad$ V

$(\forall \psi, \bar{a})$: F wählt $b \in A$ zieht nach $(\psi, \bar{a}[x \mapsto b])$

$\quad \exists \qquad\qquad$ V

Kongruenzrelation

$\sim \in S$ zweistelliges Relationssymbol

$$\varphi_\sim := \forall x \forall y \forall z \big(\underbrace{(x \sim x)}_{\text{reflexiv}} \wedge \underbrace{(x \sim y \to y \sim x)}_{\text{symmetrisch}} \wedge \underbrace{((x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z)}_{\text{transitiv}} \big)$$

$$\varphi_\sim^R := \forall x_1 \dots \forall x_r \forall y_1 \dots \forall y_r \big((Rx_1 \dots x_r \wedge \bigwedge_i x_i \sim y_i) \to Ry_1 \dots y_r \big)$$

$$\varphi_\sim^f := \forall \qquad \big((\bigwedge_i x_i \sim y_i) \to fx_1 \dots x_r \sim fy_1 \dots y_r \big)$$

$\mathcal{A}$ wird ~~durch~~ $\sim$ durch Kongruenzrelation interpretiert $\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \{\varphi_\sim\} \cup \{\varphi_\sim^R \mid R \in S\} \cup \{\varphi_\sim^f \mid f \in S\}$

~~Für je~~ $\forall \Phi \subseteq FO$ erfüllbarkeitsäquivalente $\Phi' \subseteq FO^{\neq}$ $\quad \mathcal{A}$ von Φ mit $\sim^{\mathcal{A}'} = \{(a,a) \mid a \in A\}$ zu Model von Φ' erweitern

andersrum durch Äquivalenzklassenmodell $\mathcal{A}/\sim$ Modell von Φ

Substitution von Termen für Variablen: $\mathfrak{I} \models \varphi(t/x) \Leftrightarrow \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi$

$(t_1 = t_2)(t/x)$ und $(Rt_1 \dots t_r)(t/x)$ überall x durch t ersetzen

$(\neg\varphi)(t/x) := \neg(\varphi(t/x))$ genauso $\wedge, \vee$

$(\exists y \psi)(t/x) := \exists z \hat{\psi}(t/x)$

$(z \notin var(t) \cup \{x\} \cup var(\psi)$ und $\hat{\psi} = \psi(z/y))$

Skolemfunktionen - ersetzen $\exists$ durch neue c oder f $\quad \exists x Px \Rightarrow Pc$; $\forall y \exists x Exy \Rightarrow \forall y Efyy$ (kodiert Gewinnstrategie Verifizierer)

Skolemnormalform $\varphi' = \forall x_1 \dots \forall x_n \xi$ ← quantorenfrei $\quad$ zu jeder φ äquivalente φ' mit $\varphi' \models \varphi$ und Model von φ kann zu einem von φ' erweitert werden

Gleichheitsfreie Skolemnormalform

min 1 Konstantensymbol sonst eins hinzufügen $\quad$ Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ - erweitert $T_0(S)$ um ~~Relations~~ Relationssymbole ~~, diese einziger Frei~~

diese einziger Freiheitsgrad $\alpha = Rt_1 \dots t_r$ $\hat{=}$ atomaren Formeln AL-Variable p_α $\quad \beta: \{p_\alpha \mid \alpha$ ist atomare Formel$\} \to \{0,1\}$ in 1:1 Beziehung zu Herbrand Struktur

Satz von Herbrand für $\Phi \subseteq FO_0^{\neq}(S)$:

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow \exists \mathcal{H} \; \mathcal{H} \models \Phi$

BRUNNEN

$_0$ - ohne freie Variablen

Reduktion von FO- auf AL-Erfüllbarkeit

$\forall \Phi . \exists [\Phi]^{AL}$: Φ erfüllbar $\Leftrightarrow [\Phi]^{AL}$ erfüllbar $\wedge$ Φ rekursiv aufzählbar $\Rightarrow [\Phi]^{AL}$ rekursiv aufzählbar

Allgemeingültigkeit ist semi-entscheidbar $Val \subseteq FO$ allgemeingültige erststufige Formeln rekursiv aufzählbar

Kompaktheitssatz für FO

$\Phi \subseteq FO$ unerfüllbar $\Rightarrow \exists$ endliche unerfüllbare Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$

da für jedes $\Upsilon_0 \subseteq [\Phi]^{AL}$ (richtig konstruiert) endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Upsilon_0 \subseteq [\Phi_0]^{AL}$

Konstruktion $[\Phi]^{AL}$

äquivalent $\Phi \models \psi \Rightarrow \exists \Phi_0 \subseteq \Phi \;\; \Phi_0 \models \psi$

$\Phi \subseteq FO_0(S)$ keine freien Variablen (Sätze)

$\Phi \subseteq FO_0^{\neq}(S)$ gleichheitsfrei

$\Phi \subseteq FO_0^{\forall}(S)$ universelle Sätze

min ein Konstantensymbol

Satz von Herbrand

Bsp. Konsequenz: Nichtstandardmodell der Arithmetik

$\exists N^*$ elementar äquivalent zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

Beweis $\varphi_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k} < c$ ← neues Konstantensymbol

$Th(\mathcal{N})$ sei alles was über $\mathcal{N}$ aussagbar

$Th(\mathcal{N}) \cup \{\varphi_k \mid k \geq 1\}$ erfüllbar $\Rightarrow$ c quasi unendlich

da alle Teilmengen erfüllbar

Literale und Klauseln für gleichheitsfreie, universell quantifizierte Sätze

Literal: atomare Formel $\lambda = R t_1 \dots t_n$, ~~$\bar{\lambda}$~~ $\bar{\lambda} := \neg \lambda$

Klausel: $C = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ endlich aufgefasst Disjunktion $\bigvee C$ $\Rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n \bigvee C$ (Assoziation)

Klauselmenge: K Menge Klauseln Kendlich $\Leftrightarrow$ aufgefasst konjunktive Normalform $\bigwedge_{C \in K} \bigvee C$

in Skolem Normalform

$\forall \varphi \; \exists K \equiv \varphi \Rightarrow K$ Klauselnormalform $\Rightarrow \{ \forall \bar{x} \bigvee C \mid C \in K\}$

bzw endlich $\bigwedge_{C \in K} \forall \bar{x} \bigvee C$

Refutationskalkül - für ~~Unerfüllbarkeitsbeweise~~ universell pränexen Gleichheitsfreien Satzmengen korrekt $\wedge$ vollständig

Grundinstanz $C(t_1/x_1, \dots t_n/x_n) := \{\lambda(t_1/x_1, \dots t_n/x_n) : \lambda \in C\}$

↑ freie Variable, $t_i \in T_0(S)$

$GI(K) :=$ Menge Grundinstanzen

K erfüllbar $\Leftrightarrow GI(K)$ erfüllbar

GI-Resolutionsschritt $\exists \lambda$ $\lambda \in C_1, \bar{\lambda} \in C_2 \Rightarrow C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{\lambda}\})$ Resolvente von C_1, C_2

Unifikation (Res. Schritte einsparen)

$\lambda_1^{\sigma} = \lambda_2^{\sigma} \Rightarrow \sigma$ unifiziert λ_1 und λ_2

für Tupel $\sigma = (t_1, \dots t_n)$ $\lambda^{\sigma} := \lambda(t_1/x_1, \dots t_n/x_n)$

$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \bar{\lambda} \in C_2^{\sigma} \Rightarrow C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\bar{\lambda}\})$

Sequenzkalkül für FO ohne Gleichheitsregeln $SK^{\neq}$

AL-Regeln

Quantoren-Regeln

$(\forall L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x) \vdash \Delta}$ $\qquad (\forall R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi(x)}$

c - neue Konstante
t - beliebiger Therm

Zuerst

$(\exists L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x) \vdash \Delta}$ $\qquad (\exists R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \varphi(x)}$

Gleichheitsregeln

$(=)\ \dfrac{\Gamma, t=t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

$(\text{Sub-}L)\ \dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t=t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$ $\qquad (\text{Sub-}R)\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t=t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$

Erweiterung SK^{+}

Schnittregeln

$(\text{modus ponens})\ \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$

$(\text{kontr})\ \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Korrektheit und Vollständigkeit

$\Phi \vdash \varphi$ wenn $\exists \Gamma_0 \subseteq \Phi$ mit $\Gamma_0 \vdash \varphi$

$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash \varphi$

äquivalent Φ unerfüllbar $\iff \Phi \vdash \emptyset$

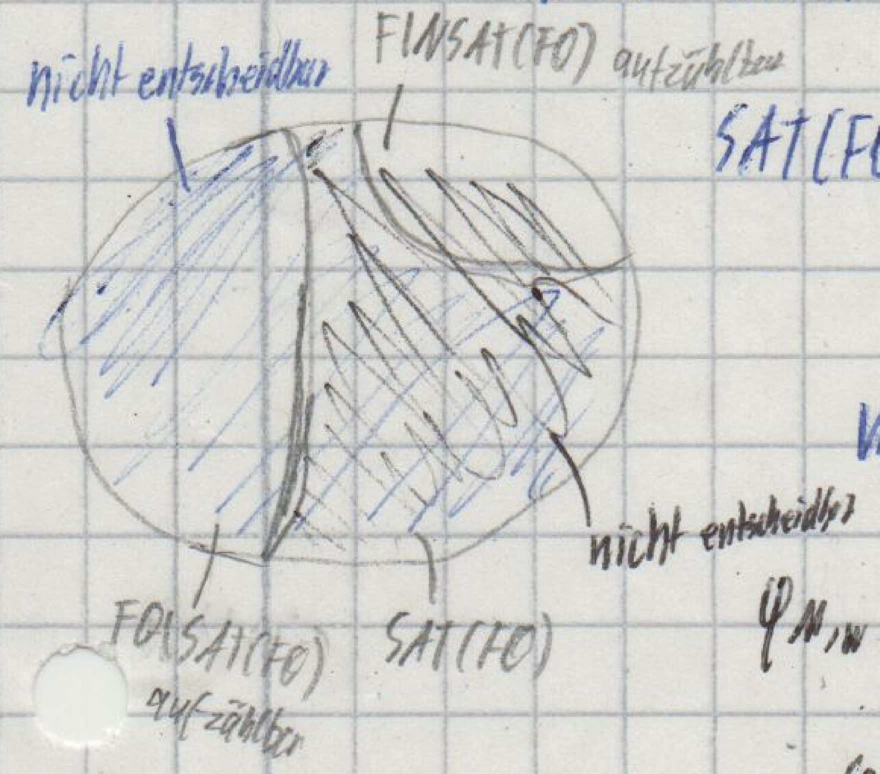
Beweisskizze $FO^{\neq}$
Φ konsistent $\Rightarrow$ erfüllbar
erweitere zu $\hat{\Phi} \supseteq \Phi$ mit Elementaren Termen einzeln drin, bei oder eine der Terme
konstruiere Herbrand-Modell

Φ konsistent $\iff$ nicht $\Phi \vdash \emptyset \iff \Phi$ erfüllbar

SAT - Menge erfüllbar ~~entscheidbar~~
VAL - Menge allgemeingültig

FINSAT : mit endlichen Modellen erfüllbar
FINVAL : allgemeingültig

SAT (FO) co-aufzählbar sonst Widerspruch Satz von Church und Turing
Beweis $\neg$SAT(FO) aufzählbar, $\varphi \notin SAT(FO) \iff (\neg\varphi) \in VAL(FO)$



SAT(FO) unerfüllbar : Reduktion des Halteproblems
Konstruktion $\varphi_{M,w}$ sodass: (Eingabe, Turing Maschine)

$w \xrightarrow{M} \emptyset \iff \varphi_{M,w} \in SAT(FO)$

$M = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$ $\quad w = a_1 \dots a_n$

Universum : ganze Zahlen
Signatur $:= (0, R_a\ \forall a \in \Sigma \cup \{\square\}, Z_q\ \forall q \in Q, K, \text{succ}, \text{pred})$

je als erstes Zeitpunkt

Const; 2-stellig Bandinhalt; 1-stellig Zustand; 2-stellig Kopfposition; +1; -1

$\varphi_{M,w} = \varphi_0 \wedge \varphi_{start} \wedge \varphi_\infty \wedge \varphi_\delta$

$\forall x\, (\text{pred succ } x = x = \text{succ pred } x)$

$\varphi_0 :=$ pred, succ Gegenfunktion $\wedge$ zu einem Zeitpunkt nur eine Kopfposition und Ort nur ein ~~Inhalt~~ Bandinhalt

Zustand $\bigwedge_{q \neq q'} \forall t\, \neg(Z_q t \wedge Z_{q'} t)$

$\bigwedge_{a \neq a'} \forall t \forall y\, \neg(R_a t y \wedge R_{a'} t y)$

$\forall t \forall y \forall y'\, ((K t y \wedge K t y') \rightarrow y = y')$

$\varphi_{start} := K00 \wedge Z_{q_0} 0 \wedge$ Wert zu $t=0$ auf Band und Rest leer

$\varphi_\infty := \forall t\, \neg(Z_{q^+} t \wedge Z_{q^-} t)$ // kein Endzustand erreicht

$\varphi_\delta := \forall t \forall t'\, (t' = \text{succ } t \rightarrow \psi(t, t'))$

ψ Konjunktion von für $q \in Q$, $b \in \Sigma \cup \{\square\}$: $\delta(q, b) = (b', m, q')$ (Kopfbewegung)

$\forall y\, ((Z_q t \wedge K t y \wedge R_b t y) \rightarrow (Z_{q'} t' \wedge K t'\, \text{succ } y / \text{pred } y / y \wedge R_{b'} t' y))$

Bedingung für Übergang erfüllt

$\forall y \forall y'\, ((K t y \wedge \neg y' = y) \rightarrow \bigwedge_a (R_a t y' \leftrightarrow R_a t' y'))$ // keine anderen Änderungen

Satz von Tarski
Arithmetik nicht entscheidbar
$\forall \varphi \in FO_0 (S_{Ar})$
$\mathcal{N} \models \varphi$ nicht entscheidbar
nicht mal aufzählbar oder rekursiv aufzählbares Axiomsystem

Satz von Trakhtenbrot : $FINSAT^{(FO)}$ rekursiv aufzählbar, FINVAL(FO) co-aufzählbar

Beweis : alle endlichen Modelle durchprobieren
Reduktion Konstruktion $\varphi^{fin}_{M,w}$

$w \xrightarrow{M} \text{stop} \iff \varphi^{fin}_{M,w}$ hat endliches Modell

φ_{STOP}
φ^{fin}_δ zusätzlich $t' \neq 0 \wedge \neg Z_{q^+} t \wedge \neg Z_{q^-} t \dots \rightarrow \dots$

$AL(V)$ - Menge Formeln über Variablen rekursiv definiert

$J: V \to B$ - Variablenbelegung

$\cdot^J: AL(V) \to B$ rekursiv definiert

$J \models \varphi \in AL(V) \Leftrightarrow \varphi^J = 1$

$J \models \Phi \subseteq AL(V) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi: J \models \varphi$

$\forall J: \varphi^J = \psi^J \Leftrightarrow$ logisch äquivalent $\varphi \equiv \psi$

$\psi \models \varphi \Leftrightarrow \psi^J \Rightarrow \varphi^J \; \forall J$

$\models \varphi \Leftrightarrow \forall J \; J \models \varphi$

$A \models \varphi(t/x) \Rightarrow A \models \varphi[t^A]$

var
gr
frei

Dualität $\wedge, \vee$

$(\exists x \, \varphi(x))^J = \max\{\varphi^{J[x \mapsto a]} : a \in A\}$

$(\varphi \vee \psi)^J = \max\{\varphi^J, \psi^J\}$

$(\neg \varphi)^J = 1 - \varphi^J$

φ injektiv $\wedge \neg \varphi$ surjektiv nur unendliche Modelle

Φ konsistent $\Leftrightarrow$ nicht $\Phi_0 \vdash \emptyset$ ableitbar

Gleichheitsfrei

Negationsnormalform - nur atomares negiert

pränexe Normalform - Quantorenpräfix quantorenfreier Kern

Skolemnormalform - " nur $\forall$ Quantoren

universell - NNF nur $\forall$ Quantoren

universell-pränex - NNF + Skolem

Nichtstandardmodell für alle unendlichen Modelle

Semantische Regelbeweis

Die Regel ist korrekt. Angenommen die Prämissen seien allgemeingültig.
Wir zeigen, dass dann auch die Konklusion $\vdash$ allgemeingültig ist.

Sei $\mathfrak{J}$ ein Modell von

Im Fall $\mathfrak{J} \models$ sind wir fertig.

Also nehmen wir $\mathfrak{J} \models \neg$ an

...

Es folgt $\mathfrak{J} \models$ linker teil Prämisse. Durch die Allgemeingültigkeit der ... (rechten/linken) Prämisse
erhalten wir $\mathfrak{J} \models$ und sind fertig

Kompaktheit

Nehmen wir an, dass es eine Formelmenge Φ gibt, sodass
(Wir erweitern die Signatur um ...)

Sei $\varphi_n = \ldots$

Sei $\Phi_\infty = \Phi \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Φ_∞ ist unerfüllbar: Einerseits ...
Andererseits ... (Pfad hätte bestimmte Länge n)

Also ist nach dem Kompaktheitssatz schon eine endliche Teilmenge Φ' unerfüllbar

Dabei gilt $\Phi' \subseteq \Phi_N = \Phi \cup \{\varphi_n \mid n < N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$

Jedes Φ_N hat aber ein Modell, ...
und damit auch jedes Φ'

Also haben wir einen Widerspruch und schließen, dass es Φ nicht geben kann.

Definitionen

AL

$AL(V)$ - Menge Formeln über Variablen

Interpretation $\mathfrak{I}: V \to \mathbb{B}$ Variablenbelegung

$\cdot^{\mathfrak{I}}: AL(V) \to \mathbb{B}$

FO

$FO^{(\neq)}_{(n)}(S)$ - Formeln zu Signatur S (nur mit Variablen bis n)

FO

$\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ Struktur/Modell $\mathcal{A} = (A, c^{\mathcal{A}} \in A$ (Menge, Universum)

$f^{\mathcal{A}}: A^n \to A$

$R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$

$\cdot^{\mathfrak{I}}: FO(S) \to \mathbb{B}$

c^{A}

$\beta(v)$

$f^{A}(t_1^{\mathfrak{I}}, \ldots)$

$\beta: V \to A$

$\mathfrak{I} = (A, \beta)$ $\beta(x_i) = a$

$\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 1 \Leftrightarrow A \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ ($\not\models$, $= 0$)

$\Leftrightarrow A \models \varphi(t/x)$

$\Leftrightarrow \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi$

$\mathfrak{I} \models \Phi \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi\ \mathfrak{I} \models \varphi$

$\mathfrak{I} \models \emptyset$ immer wahr

$\Psi \models \varphi \Leftrightarrow \forall \mathfrak{I}\ \mathfrak{I} \models \Psi \Rightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$

$\Leftrightarrow \{\Psi, \neg\varphi\}$ unerfüllbar

für endliche

$\Gamma \vdash \Delta$ allgemeingültig $\Leftrightarrow \bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

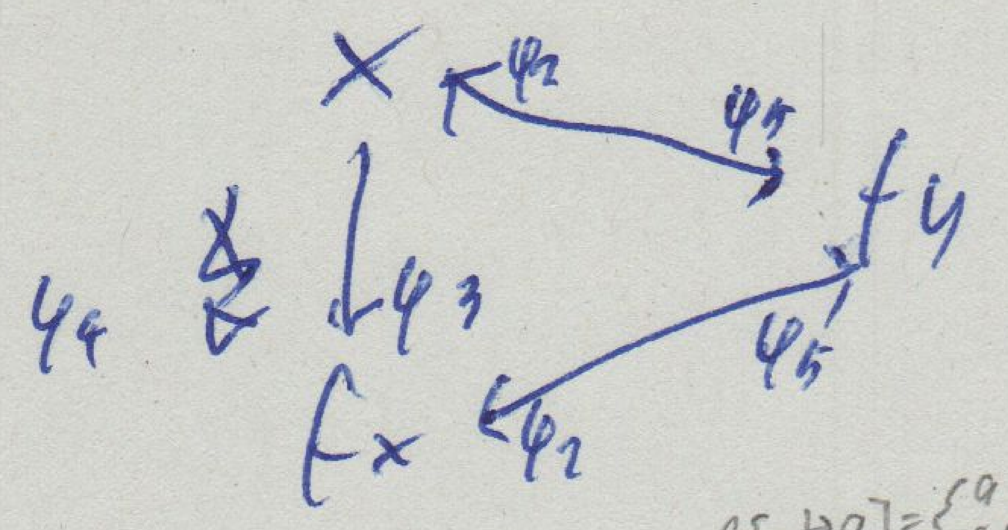
Beweisbaum endlich – $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists \Phi_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \models \varphi$

$\Gamma \vdash \Delta$ aus Φ ableitbar $\Leftrightarrow \Phi_0, \Gamma \vdash \Delta$

Vollständigkeitssatz

Φ konsistent $\Leftrightarrow$ für kein Φ_0 $\Phi \vdash \emptyset$ ableitbar

$\Leftrightarrow \Phi$ erfüllbar



FO

Def.

$\beta[x \mapsto a] = \begin{cases} a & \text{falls } v = x \\ \beta(v) & \text{sonst} \end{cases}$

~~Syntaktisch~~
Was eigenes

$$\mathfrak{J}[x \mapsto t^{\mathfrak{J}}] \models \varphi \iff \boxed{\mathfrak{A} \models \varphi(t/x)} \iff \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n] \iff (\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$$

induktiv
Quantoren (Semantik)
$Q a \in A$ $\mathfrak{J}[x \mapsto a] \models \varphi$

rek. ersetzt
induktiv
Quantorenvariablen werden konsequent umbenannt

$\beta(x_i) = a_i$
Definiert

Vollständigkeitssatz

Φ konsistent $\iff$ erfüllbar

$\Phi \vdash \varphi \iff \Phi \models \varphi$

Kompaktheitssatz

Φ erfüllbar $\iff \forall \Phi_0$ erfüllbar

unerfüllbar $\iff \exists \Phi_0$ unerfüllbar

Satz von Church Turing

Halteproblem $\leq$ SAT(FO) unentscheidbar ~~unerfüllbar~~ ~~(co-aufzählbar)~~

Satz von Trakhtenbrot

FINSAT(FO) rekursiv aufzählbar
unentscheidbar

Satz von Tarski

$Th(\mathbb{N}) = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$

nicht mal aufzählbar
nicht mal Axiomsystem