$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$ (nicht von Reihenfolge abhängig)

absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konv. $\Rightarrow$ konv.

$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ verallgemein. Dreiecksungl.

Cauchy-Produkt wenn absolut konvergent
$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Grenzwertsätze $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha$ konv. β konv.

Konvergenzkriterien $\Rightarrow a_n$ Nullfolge

Monotoniek. $a_n \geq 0$ s_k oben beschränkt $\Rightarrow$ konv.

Cauchy-K. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k > l \geq n_0$

Leibniz-K. $\left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ konv.

monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konv.

Majoranten $|a_n| \leq b_n\ \forall n \geq n_0$: b konv $\Rightarrow a$ absolut konv.

Minoranten $a_n \geq b_n \geq 0$ ": b divergent $\Rightarrow a$ divergent

Wurzelkriterium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ exist < 1 absolut konv

Quotientenkrit. $a_n \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ " > 1 div.

$\sum q^n = \frac{1}{1-q}$ $|q| < 1$

$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 1$

$\sum \frac{1}{n}$ divergent, da $s_{2^k} = \sum_{n=0}^{2^k} \frac{1}{n} \geq s_k + k \cdot \frac{1}{2k}$

$\sum \frac{1}{n!} = e$ $\quad \sum (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$ konv. $\alpha \leq 1$ diver.

$\sum \frac{z^n}{n!} = e^z$ da $e^1 = e$, $E(z) \cdot E(w) = E(z+w)$ | $x \in [0,1]$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(x+1)$ Beweis über Taylor?

Ableitung

$f: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ diff'bar

$\Leftrightarrow f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ exist.

$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)$

$\lim_{x\to x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0 \Leftrightarrow$ beste lineare Näherung

$\Rightarrow$ stetig in x_0 Beweis $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Ableitungsregeln:

Linearität $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

Produktregel $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Quotientenregel $g(x_0) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Kettenregel $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Beweis Hilfsfunktion $\tilde{f}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{sonst} \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ $y = g(x)$

$\Rightarrow \tilde{f}(y_0) = f'(y_0) \wedge \tilde{f}(y) = f(y)$

Umkehrfunktion $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ $f'(x_0) \neq 0$

Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $x \in (-r, r)$

$e^{x\,\prime} = e^x$
$\ln(x)' = 1/x$
$\sin' = \cos$
$\cos' = -\sin$
$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
$\arcsin' = 1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos' = -1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan' = 1/(1+x^2)$
$\sinh' = \cosh$
$\cosh' = \sinh$
$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen

Richtungsableitung $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^p$ $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$(\partial_v f)(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$ Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v

$\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ Standardbasis $\mathbb{R}^d$

partiell diff'bar $\Leftrightarrow$ in $e_1, \dots, e_d$ diff'bar

Def. $\partial_i f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := f_{x_i}(x_0) = (\partial_{e_i} f)(x_0)$ partielle Ableitung i-ter Koordinate

stetig partiell diff'bar $\Leftrightarrow \forall$ part. Abl. exist $\wedge$ stetig

für $p > 1$ f diff'bar $\Leftrightarrow \forall$ Koordinatenfunktionen f_i diff'bar

$\partial_j f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_j f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_j f_p(x_0) \end{pmatrix}$ | $d > 1$ $\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0))$ zeigt in Richtung stärkster Anstieg

Jacobi-Matrix $p \times d$

$J_f(x_0) := (\partial_j f_i(x_0))_{i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,d} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \dots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x_0) \end{pmatrix}$

Satz von Schwarz Reihenfolge mehrerer part. Abl. egal, wenn bis n stetig part. diff'bar

total diff'bar $\Leftrightarrow \exists \Phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ $f(x) = f(x_0) + \Phi(x - x_0) + r(x)$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$ $D_f(x_0) = \Phi$ Ableitung

stetig part. diff'bar $\Rightarrow$ total diff. $\Rightarrow$ partiell. diff.

total d. $\Rightarrow$ f stetig

$J_f(x_0) = Df(x_0)$ $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $(\partial_v f)(x_0) = D_f(x_0)(v) = J_f(x_0)v$

Kettenregel $D_{(f \circ g)}(x_0) = D_f(g(x_0)) \cdot D_g(x_0)$

Mittelwertsatz $f: G \to \mathbb{R}$ $a, b \in G$ $\overline{ab} \subseteq G \Rightarrow \exists \xi \in \overline{ab}$ $f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b-a)$

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex $\Leftrightarrow \forall a, b \in M \wedge \overline{ab} \subseteq M$
$\overline{ab} := \{a + \lambda(b-a) \mid \lambda \in [0,1]\}$

Schrankensatz G konvex $\wedge \exists L \geq 0$ $\|\nabla f(x)\|_2 \leq L$ $\forall x \in G$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_2 \Leftrightarrow$ Lipschitz stetig

Hesse Matrix $f: G \to \mathbb{R}$ 2 mal part. diff'bar
$H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1,\dots,d} = J_{(\nabla f)^T}(x_0)$ quadratisch, f stetig part. diff'bar $\Rightarrow$ symmetrisch

Satz von Taylor $f: G \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig part. diff.
$\forall x_0, x \in G\ \exists \xi \in \overline{x_0 x}$ $f(x) = T_{1,f}(x; x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0)$
$T_{1,f}(x; x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$

Extremwertproblem $f: G \to \mathbb{R}$
Def. wie im eindimensionalen
x_0 innerer Punkt $\wedge$ f total diff'bar:
relatives Extremum $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$
zusätzlich $H_f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ rel. Min
negativ definit $\Rightarrow$ rel. Max
indefinit $\Rightarrow$ kein Extr.
sonst $\Rightarrow$ keine Aussage
$\exists x, y \setminus \{0\}$ $(x \mid A_x) > 0$ $(y \mid A_y) < 0$
$\forall x \setminus \{0\}$ $(x \mid A_x) < 0 \Leftrightarrow \forall$ Eigenwerte < 0
Unterdeterminanten $\forall x \setminus \{0\}$ $(x \mid A_x) > 0$ $\forall$ Eigenwerte > 0
$\Leftrightarrow$ Unterdeterminanten $(-1)^m \det(a_{ij})_{i,j=1}^m < 0$

Integration in $\mathbb{R}$

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a,b]$ Zerlegung des Intervalls $\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Untersumme von f zu Z $\underline{S}_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$ unteres Integral $\underline{\int}_a^b f(x)dx := \sup\{\underline{S}_f(Z):$

Obersumme $\overline{S}_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$ $\overline{\int}_a^b f(x)dx := \inf\{\overline{S}_f(Z):$ Z Zerlegung von $[a,b]\}$

$I_j := [x_{j-1}, x_j]$ $|I_j| = x_j - x_{j-1}$ $m_j := \inf f(I_j)$ $M_j := \sup f(I_j)$ | $\underline{S}_f(Z) \leq \overline{S}_f(Z) \Rightarrow \underline{S} \leq \overline{S}$

Riemann integrierbar $\Leftrightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$

Monotonie $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ Dreiecksungleichung $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Homogenität $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ Potenzreihe $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$

Additivität $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ gleicher Konvergenzradius

Def. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ Standardabschätzung $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a) \cdot \sup|f(x)| = (b-a)\|f\|_\infty$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~ stetig v monoton $\Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow$ integrierbar | $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $c \in (a,b)$

~~[illegible]~~ $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow F' = f$ auf $[a,b]$ Stammfunktion von f | unbestimmte Integrale $\int f(x)dx :=$ Menge Stammfunktionen von f | F, G Stam. von f $F - G = c$

Hauptsatz $F(x) := \int_c^x f(s)ds$ $x \in I$ Stammf. von f $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

Φ Stammfunktionen $\Rightarrow \Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(s)ds$

Integrationstechniken $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)$

Partielle Integration f, g stetig für unbestimmte $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Substitutionsregel $\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$ | Bsp. xe^x, $\int 1 \cdot \ln(x) = x\ln(x) - x + C$, $\sin^2(x)$

für unbestimmte $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \mid x = g(t)$

rigorose Schreibweise $x = g(t)$ $\frac{dx}{dt} = g'(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ | $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$

Bsp. $\frac{e^{2x} - 1}{e^x}$ $t = e^x$ | $\sqrt{1-x^2}$ $x = \cos(t)$

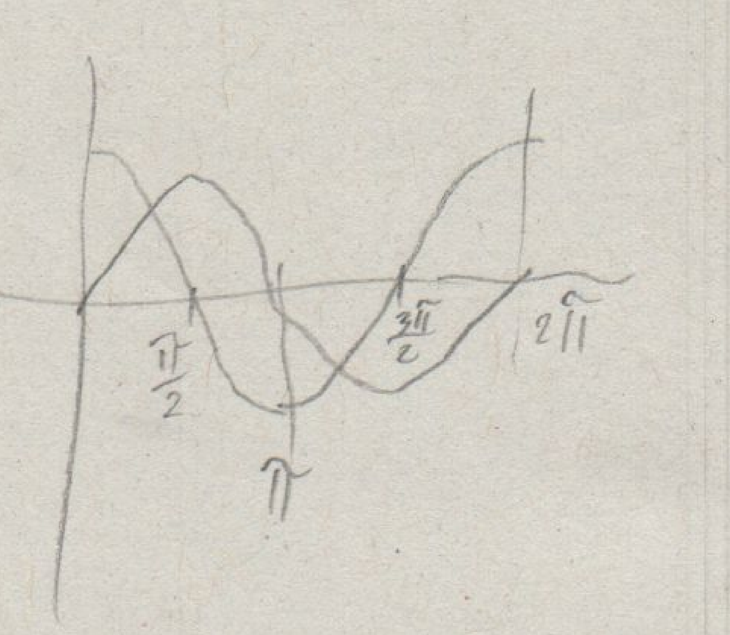
Differenzieren von Parameterintegralen

$g(x) := \int_a^b f(x, y)dy$ $x \in [\alpha, \beta]$ $[\alpha, \beta] \times [a,b] \subseteq G$

$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$

f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
gerade $\Rightarrow = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$

Bsp. ableiten nach var in Integral Intervall und inneren $\to f(x) = G(g(x))$ $f'(x) = DG(\cdot) \cdot Dg(x)$



Konvergenz in normierten Räumen

(lin defs 1-1 durch $\|\cdot\|$ ersetzen)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V konv., wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$ $\|a_n - a\|_V < \varepsilon$

Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0$ $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$

Reihen-absolut konv., wenn $\sum \|a_n\|$ konvergent

$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_{n,1} \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} a_{n,d} \end{pmatrix}$

$\emptyset$ offen $\wedge$ abgeschlossen
$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen
$\mathbb{Q}$ weder noch Häufungswerte $\mathbb{R}$ inneres $\emptyset$

offene Kugel $x_0 \in V$, $r \in (0, \infty)$ $B_r(x_0) := \{x \in V : \|x - x_0\|_V < r\}$

$M \subseteq V$ offen, wenn $\forall x_0 \in M\ \exists r > 0$ $B_r(x_0) \subseteq M \Leftrightarrow M = M^\circ$

abgeschlossen $\Leftrightarrow V \setminus M$ offen $\Leftrightarrow$ Grenzwert $\forall$ konv. Folgen in M

innere Punkt x falls $\exists r > 0$ $B_r(x) \subseteq M$ | $M^\circ := \{x \in M, x$ innerer Punkt$\}$

endlicher Vektorraum: kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen $\wedge$ beschränkt
$\Rightarrow \forall$ Folgen konv. $\exists$ Teilfolge mit lim in M

Banachraum $\Leftrightarrow$ vollständiger normierter Vektorraum | normierter Raum in dem $\forall$ Cauchy-Folge konvergiert

Hilbertraum $\Leftrightarrow$ Banachraum Norm durch Skalarprodukt induziert

Banach'scher Fixpunktsatz $(V, \|\cdot\|_V)$ Banachraum $M \subseteq V$ abgeschlossen
$f: M \to M$ $\exists q \in (0,1)$: $\|f(x) - f(y)\|_V \leq q\|x - y\|_V$ $\forall x, y \in M$ (Strikte Kontraktion)
$\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt in M $f(v) = v$
Näherung $\forall x_0 \in M$ (x_n) $x_{n+1} = f(x_n)$ | $\lim_{n\to\infty} x_n = v$
A-Priori $\|x_n - v\|_V \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|_V$
A-Posteriori $\|x_n - v\|_V \leq \frac{q}{1-q}\|x_n - x_{n-1}\|_V$

reellen Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ x_0 Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists (a_n)$ in D $a_n \neq x_0$ $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$, wenn x_0 Häufungspunkt $\forall (a_n)$ in D $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$

Grenzwertsätze $+, -, \leq, \cdot, /$, $\neq 0$ dann kein 0 drin

stetig in x_0 $\Leftrightarrow \forall a_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Lipschitz-stetig: $\exists L > 0$ $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ $\forall x, y \in D$

f, g stetig $\Rightarrow f + g, f \cdot g, |f|, g \circ f$ stetig | $C(D) := \{f: D \to \mathbb{R} \mid f$ stetig auf $D\}$

Zwischenwertsatz $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $f \in C([a,b])$, $y_0 \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a), f(b)$ $\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) = y_0$

Nullstellensatz von Bolzano " $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ $\exists x_0 \in (a,b)$ $f(x_0) = 0$ | $\Leftrightarrow \exists C \geq 0\ \forall x \in D$ $|f(x)| \leq C$

(streng) monoton wachsend/fallend $x \leq y \Rightarrow f(x) < (\leq) f(y)$ | f beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ beschränkt

$I \subseteq \mathbb{R}$ $f \in C(I)$ streng monoton $\Rightarrow f: I \to f(I)$ bijektiv $f(I)$ Intervall $\Rightarrow f^{-1}$ stetig, streng monoton

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, nicht leer, $f \in C(K)$ $\Rightarrow \exists x_*, x^* \in K$ mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x$ und f beschränkt

mehrere Variablen komponentenweise | $C(D; V) := \{f: D \to V \mid f$ stetig$\}$

Für zwei Normen in $\mathbb{R}^d$ $\exists c, C: 0 < c \leq C$ $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$
$\Rightarrow$ Grenzwert von Norm unabhängig | Beweis: $\|\cdot\|_2$, Dreiecksungleichung, Cauchy-Schwarz Ungleichung $|(v \mid w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

L'Hospital (a,b) offenes Intervall (auch mit ∞)
$f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar $g'(x) \neq 0$ $\lim_{x\to a/b} f(x) = \lim_{x\to a/b} g(x) = 0 / +\infty / -\infty$
existiert $L := \lim_{x\to a/b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a/b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ incl. $\pm\infty$

Satz von Rolle
$f' = 0 \Leftrightarrow f$ konstant
$f' > 0 \Leftrightarrow f$ streng mon. w.
$f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ m. w.
...

f stetig diff'bar, wenn f' stetig
f n mal (stetig) diff'bar $\Leftrightarrow f^{(n-1)}$ (stetig) diff'bar $\wedge$ f $(n-1)$ mal (stetig) diff'bar

Mittelwertsatz $a < b$ f diff'bar $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall $f \in C^\infty(I)$

Taylorreihe $x_0 \in I$
$T_{k,f} = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ Taylorpolynom k-ten Grades
$T_f = T_{\infty,f}$ Taylorreihe von f um x_0

Satz von Taylor f $k+1$ diff'bar Fehlerterm $R_{k,f}(x; x_0)$
$\Rightarrow \exists \xi$ zwischen x und x_0
$f(x) = T_{k,f}(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$ für $k=0$ Mittelwertsatz

Extremwerte $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \to \mathbb{R}$ f hat in x_0
globales Maximum $\Leftrightarrow \forall x \in D$ $f(x) \leq f(x_0)$
relatives/lokales $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ |x - x_0| < \delta$
f diff'bar $\wedge$ x_0 innerer Punkt $\wedge$ rel. Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
$x_0 \in I^\circ$ $f \in C^n(I)$ $\exists n \geq 2$ $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $f^{(n)} \neq 0$
n ungerade $\Rightarrow x_0$ kein Extremum
n gerade $\Rightarrow f^{(n)}(x_0) > 0$ Minimum < 0 Max.

Potenzreihen

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ x_0 - Entwicklungspunkt

Satz von Herbrand Konvergenzradius $\left(\sum a_n x^n\right) \cdot \left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ Konvergenzradius min der beiden

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \infty \Rightarrow 0 \\ e \Rightarrow 1/e \\ 0 \Rightarrow \infty \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ " / Rand muss untersucht werden

$f: \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig

wichtige Funktionen stetig, streng monoton
$\ln := E^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$
$a \in (0, \infty)$ $a^x := e^{x \ln(a)}$
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$\ln(x^a) = a \ln(x)$
$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Trigonometrische Funktionen

ungerade $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

gerade $\cos(z) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$e^{iz} = \cos(z) + \sin(z)i$

$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ def. auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$|\sin(x)| \leq 1$ $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
Additionstheoreme

$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ $\quad \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sin(-iz)$
$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(-iz)$
$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$

Polardarstellung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $\mathbb{C} \setminus \{(k\pi + \frac{\pi}{2})i\}$
$z = x + yi = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = re^{i\varphi}$
$zw = re^{i\varphi} se^{i\psi} = rse^{i(\varphi + \psi)}$ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$

$\sin(x + yi) = \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)i$
$\cos(x + yi) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\sinh(y)i$

Fourierreihen

$f: I \to \mathbb{R}$ stückweise stetig $\Leftrightarrow \exists Z$ auf Intervallen stetig $\wedge \forall \lim_{+/-}$ von f exist

$\Rightarrow F_{N,f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)dx = (f(x) \mid \frac{1}{\sqrt{T/2}}\cos(n\omega x))$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx$ | Skalarprodukt mit $\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T/2}}\cos(n\omega x), \frac{1}{\sqrt{T/2}}\sin(n\omega x)$ Orthogonalbasis

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ f Periode $L \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(\frac{L}{2\pi}x)$ Periode 2π

f gerade $\Rightarrow b_n = 0$ $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \dots$
f ungerade $\Rightarrow a_n = 0$ $b_n = \dots$

$f \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ Fortsetzung
$f_P(x) = f(y(x))$ $x = k(x)T + y(x)$ periodische (eindeutig)

f stückweise glatt $\Leftrightarrow \exists Z$ f auf I_j stetig $\wedge$ diff'bar $\wedge \forall \lim_{+/-} f^{(\alpha)}$ exist $f'(x_i) \wedge f(x_i)$

$\Rightarrow F_f(x) = \frac{\lim_{y\to x^+} f_P(y) + \lim_{y\to x^-} f_P(y)}{2}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung
$|(v \mid w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Untervektorraum U
$U \neq \emptyset$
$\forall a, b \in U\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}: \lambda a + \mu b \in U$

Norm
$\|v\| \geq 0$ $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

induzierte Norm $\sqrt{(f \mid f)}$ Skalarprodukt
$(x \mid x) \geq 0$
$(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$
$(\alpha x + \beta y \mid z) = \alpha(x \mid z) + \beta(y \mid z)$

$\lim_{n\to\infty} n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$

geometrische Summenformel
$q \neq 1$ $\sum_{n=0}^{k} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Leibniz Krit
getrennt zeigen ob absolut konv

Häufungswert von $a_n \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_\varepsilon(a)\}$ $\forall \varepsilon > 0$ unendlich groß

...gewöhnliche Differentialrechnung meist = Anzahl Konst. in Lösung

...gewöhnliche Differentialgleichung DGL der Ordnung n $t \in I$

...$n \in \mathbb{N}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

...autonom $\Leftrightarrow$ F nicht von t abhängig

...Anfangswertproblem

...(AWP) $\begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) & t \in I \\ y^{(j)}(t_0) = y_j & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$

...Lösung $y: J \to \mathbb{R}$ $J \subseteq I$ $J = I \Leftrightarrow$ globale Lösung

...Elementare Lösungsmethoden

Schmierrechnung $\frac{dy}{dt} = g(t) h(y(t))$ $\Rightarrow \frac{1}{h(y(t))} dy = g(t) dt$ $\Rightarrow \int \frac{1}{h(y(t))} dy = \int g(t) dt$ umformen nach $y(t)$

...Trennung der Variablen (Getrennte Veränderliche)

$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $h(y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists$ offen $J \subseteq I$ mit genau 1 Lösung

$y = H^{-1} \circ G$ $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$ $H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(\eta)} d\eta$

...; auch andere ...

...Homogene Differentialgleichung

$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right) \Rightarrow$ Substitution $u(t) := \frac{y(t)}{t}$

Getrennte Veränderliche $\Uparrow$ $y(t) = t\,u(t)$

$u'(t) = \frac{t y'(t) - y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}\left(g\left(\frac{y(t)}{t}\right) - u(t)\right) = \frac{1}{t}\left(g(u(t)) - u(t)\right)$

Existenz und Eindeutigkeitsresultate

Satz von Peano f stetig

$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ min 1 Lösung auf J offen

Satz von Picard Lindelöff

f stetig $\wedge \exists L$ $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ basiert auf Banachschem Fixpunktsatz

$\Rightarrow$ kompaktes Intervall J mit eindeutiger Lösung

Picard-Iteration Supremumsnorm: $\|T(v) - T(u)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|$ $\forall u, v \in C(J)$

$u_{n+1} = T(u_n) := t \mapsto \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s)) ds\right)$

konvergiert für $\forall u_0$ gegen Lösung

A-priori-Abschätzung $q = \frac{1}{2}$?

$\|u_n - y\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u_1 - u_0\|$

A-posteriori-Abschätzung

$\|u_n - y\| \leq \frac{q}{1-q} \|u_n - u_{n-1}\|$

Beweis über

...Lineare DGL erster Ordnung $a, b: I \to \mathbb{R}$ stetig

$y'(t) + a(t) y(t) = b(t)$ $b = 0 \Leftrightarrow$ homogen

...Superpositionsprinzip $y_1, y_2: I \to \mathbb{R}$ Lösungen homogener linearer DGL $\Rightarrow y = \alpha y_1 + \beta y_2$ Lösung

$y_0 = C$ $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds$

...sen

...homogen $\Rightarrow$ getrennte Veränderliche $y(t) = C e^{-A(t)}$

...in" $\Rightarrow$ Variation der Konstanten Formell

$y(t) = e^{-A(t)} y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)} ds$

...Duhamelsche Formell homogenes Lösen

...genau eine globale Lösung $\Rightarrow c$ von t abhängig machen

$y(t) = c(t) e^{-A(t)}$

$\Rightarrow$ Einsetzen in DGL $\underbrace{(c(t) e^{-A(t)})'}_{b(t) - a(t) y(t) = y'(t) =} = -a(t) c(t) e^{-A(t)} + c'(t) e^{-A(t)}$

$\Rightarrow c'(t) = b(t) e^{+A(t)} \Rightarrow c(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$

...Lineare Systeme $y \in \mathbb{R}^n$ $t \in I$ Volterra-Lotka Gleichung/Räuber Beute

$\begin{cases} y'(t) = A(t) y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ homogen

$x'(t) = (\alpha - \beta y(t)) x(t)$

$y'(t) = -(\gamma - \delta x(t)) y(t)$

...ist N-Dimensionaler Untervektorraum $C^1(I; \mathbb{R}^N)$

...Basis von L =: Fundamentalsystem $y = y_p + y_h$ partikulär allgemein

...$t \in I \Leftrightarrow \exists t \in I$ $\{y_1(t), \dots, y_N(t)\}$ linear unabhängig

...Bestimmung sehr schwierig

...Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten $e^0 = I$

$y'(t) = A y(t) + b(t)$ $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ konvergent, da $\exists$ Norm $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{(A+B)}$ A invertierbar $\Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

...Lösungsansatz wie bei $N=1$ $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

...spezielle Lösung

...Variation der Konstanten Form

$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds$ $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ $A^n = S D^n S^{-1}$

$\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds$

...für homogen

...wenn A diagonalisierbar

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$\{e^{t\lambda_1} v_1, e^{t\lambda_2} v_2, e^{t\lambda_n} v_n\}$

...wenn λ Eigenwert von A, m Vielfachheit

$\Rightarrow (A - \lambda I)^m$ m dimensionaler Kern $v_1, \dots, v_m$ Basis

$u_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{t\lambda} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k v_j$

λ reel $\Rightarrow u_1, \dots, u_m$ Beiträge zum Fundamentalsys.

λ komplex $\Rightarrow \mathrm{Im}(\lambda) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, u_1, \mathrm{Im}\, u_1, \dots$ "

... für inhomogene ... weiter $\mathrm{Im}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ kein Beitrag

...Differentialgleichungen höherer Ordnung

$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

$v_1 = y$ $v_2 = y'$ ... $v_n = y^{(n-1)}$ Lösung von $v \Leftrightarrow$ Lösung von y

$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ \vdots \\ v_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ \dots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix} = b(t, v(t))$

...mit Konstanten Koeffizienten homogen $\Leftrightarrow$ Untervektorraum

$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = g(t)$ $C^n(I)$ dim n

$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{(n-1)} + \dots + a_0$

$= \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ charakteristische Polynom

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Nullstellen

m_j Vielfachheit

Fundamentalsystem $F = F_1 \cup \dots \cup F_k$

Fall $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $F_j = \{e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j - 1} e^{\lambda_j t}\}$

Fall $\lambda_j = \lambda + i\omega$, $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ $F_j = \{e^{\lambda t} \cos(\omega t), e^{\lambda t} \sin(\omega t), \dots, t^{m_j - 1} e^{\lambda t} \cos(\omega t), t^{m_j - 1} e^{\lambda t} \sin(\omega t)\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q|<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 1$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, da $s_{2k} = \sum_{n=0}^{2k} \frac{1}{n} \geq s_k + k \cdot \frac{1}{2k}$ $\lightning$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(2)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha>1$ konvergent
$\alpha \leq 1$ divergent

zfl $e^z = E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ und $E(z) \cdot E(w) = E(z+w)$ (über Cauchy-Produkt) $\mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv

Mathe II

Reihen a_n Folge in $\mathbb{K}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$ Reihe über (a_n)

$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$ k-te Partialsumme

Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\quad \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Reihenwert absolut konvergenter nicht von Reihenfolge abhängig

Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Grenzwertsätze

$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (wenn beide konvergent)

Konvergenzkriterien

Reihe über a_n konvergiert $\Rightarrow a_n$ Nullfolge

Monotoniekriterium $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

Cauchy-Kriterium $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k > l \geq n_0 \ \left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

Leibniz-Kriterium a_n monoton fallende Null-Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent

Majoranten-Kriterium $|a_n| \leq b_n \ \forall n \geq n_0 \ \wedge$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

Minoranten-Kriterium $a_n \geq b_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0 \ \wedge$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existent und <1 absolut konvergent, >1 divergent

Quotientenkriterium $a_n \neq 0 \ \forall n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ "

Konvergenz in normierten Räumen (in Def. Beträge durch Normen ersetzen) später für alle Normen Konvergenz gleich

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V konvergent gegen a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \|a_n - a\|_V < \varepsilon$ sonst divergent.

Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 \ \|a_n - a_m\|_V < \varepsilon$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn s_k konvergent

absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent

Häufungswert

Teilfolgen

$M \subseteq V$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists C \geq 0 : \forall x \in M \ \|x\|_V \leq C$

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_{n,1} \\ \lim_{n\to\infty} a_{n,2} \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} a_{n,d} \end{pmatrix}$$

offene Kugel:

$x_0 \in V, r \in (0,\infty) \quad B_r(x_0) := \{x \in V : \|x - x_0\|_V < r\}$.

$M \subseteq V$ offen $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \ \exists r > 0 \ B_r(x_0) \subseteq M \Leftrightarrow M = M^o$

abgeschlossen $\Leftrightarrow V \setminus M$ ist offen $\Leftrightarrow$ Grenzwert $\forall$ konvergenten Folgen in M

innere Punkt x, falls $\exists r > 0 \ B_r(x) \subseteq M$

$M^o := \{x \in M, x$ innerer Punkt von $M\}$ = das innere von M

$\emptyset$ und V offen und abgeschlossen, die meisten Mengen weder noch

endlicher Vektorraum: $M \subseteq V$ kompakt $\Leftrightarrow M$ abgeschlossen und beschränkt

$M \subseteq V$ endlich dim. $\wedge$ kompakt $\Leftrightarrow \forall$ Folgen konvergente $\exists$ Teilfolge mit Lim in M

$\Leftrightarrow$ min. ein Häufungswert

Banachraum $\Leftrightarrow$ vollständiger normierter Vektorraum V

$\Leftrightarrow$ normierter Raum (Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ konvergiert)

Hilbertraum $\Leftrightarrow$ Banachraum $\wedge$ Norm durch Skalarprodukt induziert

Banach'scher Fixpunktsatz

$(V, \|\cdot\|_V)$ Banachraum, $M \subseteq V$ abgeschlossen, $f : M \to M$

$\exists q \in (0,1) : \|f(x) - f(y)\|_V \leq q \|x - y\|_V \quad \forall x, y \in M$

$\Rightarrow f$ hat einen Fixpunkt in M $\Leftrightarrow$ genau ein $v \in M$ $f(v) = v$

$\Rightarrow \forall x_0 \in M$ Folge (x_n) mit $x_{n+1} = f(x_n)$ $\lim_{n\to\infty} x_n = v$

A-priori Abschätzung $\|x_n - v\|_V \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|_V$

A-posteriori Abschätzung $\|x_n - v\|_V \leq \frac{q}{1-q} \|x_n - x_{n-1}\|_V$

BRUNNEN

Stetigkeit reeller Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 Häufungspunkt $\iff \exists (a_n)$ in D mit $a_n \neq x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y \iff x_0$ Häufungspunkt $\wedge\ \forall (a_n)$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y$

$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = y \iff$ " in $D_+ := \{x \in D : x > x_0\}$

$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = y \iff$ " in $D_- := \{x \in D : x < x_0\}$

$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = y \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y$

Übertragung Grenzwertsätze

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $\qquad$ $\forall x \in D\setminus\{x_0\}: f(x) \le g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $\qquad$ Sandwichprinzip

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$

Gilt $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0}$ $\exists \delta > 0\ |g(x)| \ge |y|/2\ \forall x \in (D \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) \setminus \{x_0\}$

dafür $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff f(a_n)$ divergiert bestimmt gegen ∞

D nicht nach oben beschränkt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y$ $\quad y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \iff$ jede Folge die bestimmt gegen ∞ divergiert..

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \iff$ ~~lim~~ $\forall a_n$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

f stetig auf D $\iff$ ~~in jed~~ f in $\forall x_0 \in D$ stetig $\qquad$ Ist x_0 Häufungspunkt:

$C(D) := \{f: D \to \mathbb{R} : f$ stetig auf $D\}$ $\qquad$ f in x_0 stetig $\iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

f, g stetig in x_0 $\Rightarrow f+g, fg, |f|, g \circ f$ stetig in x_0

Monotonie

~~mont~~ monoton wachsend $\iff \forall x, y \in D: x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

	fallend	$\ge$
streng	wachsend	$<$
	fallend	$>$

(streng) monoton $\iff$ (streng) monoton wachsend $\vee$ fallend

$I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ (impliziert stetig) streng monoton $\Rightarrow f: I \to f(I)$ bijektiv, $f(I)$ ein Intervall $f^{-1}: f(I) \to I$ stetig und auf $f(I)$ streng monoton

f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

f Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow \exists L > 0: |f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \ \forall x,y \in D$

f Lipschitz-stetig $\Rightarrow f$ stetig in $\forall x_0 \in D$

(mit $L \overset{=q}{\in} [0,1)$ strikte Kontraktion)

Zwischenwertsatz

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$, $f \in C([a,b])$, $y_0 \in \mathbb{R}$ $f(a) \leq y \leq f(b)$ y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$

Nullstellensatz von Bolzano

Sei $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$, $f \in C([a,b])$: $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$

$f: D \to \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow f(D)$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists C \geq 0\ \forall x \in D\ |f(x)| \leq C$

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und nicht leer, $f \in C(K)$

$\Rightarrow \exists x_*, x^* \in K$ mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in K$ und f beschränkt

stetige Funktion auf Kompaktum nimmt Maximum und Minimum auf Kompaktum an.

Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen

V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, $D \subseteq V$, $f: D \to W$

$x_0 \in D$ Häufungspunkt $\Leftrightarrow \exists$ Folge a_n in D: $a_n \neq x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

x_0 Häufungswert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \forall a_n \neq x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y$

f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \forall a_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

f steitig in $D \Leftrightarrow f$ in $\forall x_0 \in D$ stetig

$C(D;W) := \{f: D \to W : f \text{ stetig auf } D\}$ ist $W = \mathbb{R}$ auch nur $C(D) := C(D;\mathbb{R})$

Für $f: D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ statt $f((x_1, x_2, \ldots, x_d)^T)$

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix}$ $f_1, f_2, \ldots, f_p: D \to \mathbb{R}$ Koordinatenfunktionen

f stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ alle $f_1, f_2, \ldots, f_p$ in x_0 stetig

stetig in x_0

$f, g: D \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow f+g, fg, |f|, h \circ f$ stetig in x_0

$h: f(D) \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D^* := \{x \in D : g(x) \neq 0\} \Rightarrow f/g: D^* \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und nicht leer $f \in C(K)$

$\Rightarrow \exists x_*, x^* \in K$ $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in K$

BRUNNEN

$\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|_2$ die 2-Norm auf $\mathbb{R}^d$ — Beweis Dreiecksungleichung, Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\exists\, c, C: 0 < c \leq C \quad c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

das gleiche gilt für ~~beliebige~~ zwei beliebige Normen

nur im endlichdimensionalem

$\Rightarrow$ Grenzwert von Norm unabhängig

Potenzreihen

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ x_0 Entwicklungspunkt

Potenzreihe $\Leftrightarrow$ Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a_n Folge in $\mathbb{K}$ quasi „unendlich langes Polynom"

Satz von Hadamard

			Konvergenzradius ~~Potenzradius~~
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$	$= \infty$	$\Rightarrow$	0
	e	$\Rightarrow$	$\frac{1}{e}$
Selbiges für	0	$\Rightarrow$	∞

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius $r_1, r_2 \geq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ mindestens $r := \min\{r_1, r_2\}$ und für $|x| < r$ $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

$f: \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig auf $\{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$

wichtige Funktion

$\ln := E^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ natürlicher Logarith. stetig, streng monoton

$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$x, y \in (0,\infty)$ $q \in \mathbb{Q}$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^q) = q\ln(x)$

allgemeine Potenz $a \in (0,\infty)$ $a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$ $a^{x+y} = a^x a^y$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

ungerade $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Periode 2π

gerade $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|\sin(x)| \leq 1$ $|\cos(x)| \leq 1$

ungerade $\Leftrightarrow \forall x$ $f(-x) = -f(x)$

Additionstheoreme $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

gerade $\Leftrightarrow \forall x$ $f(-x) = f(x)$

periodisch mit Periode $L \Leftrightarrow f(x+L) = f(x)$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cancel{\cos(x)} -\sin(x)$

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ $\quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$

Eulerische Formel $\forall z \in \mathbb{C}$ $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$; $\mathrm{Re}(e^{iz}) = \cos(z)$, $\mathrm{Im}(e^{iz}) = \sin(z)$

$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ $\exists k \in \mathbb{Z}$

$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\exists k \in \mathbb{Z}$

$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ $\quad \tan: \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

BRUNNEN

$\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Polardarstellung komplexer Zahlen

Sei $z = x+yi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $r := |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ und ~~φ~~ Argument von z Winkel φ zwischen z und positiver reeller Achse

oft Bereich $(-\pi, \pi]$ im Ergebnis

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x>0 \\ \arctan(\frac{y}{x})+\pi & x<0 \land y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x})-\pi & x<0 \land y<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \land y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x=0 \land y<0 \end{cases}$$

$z = |z|\frac{z}{|z|} = r(\cos(\varphi)+\sin(\varphi)i) = re^{i\varphi}$

$w \in \mathbb{C}$

$zw = re^{i\varphi} se^{i\psi} = rs\, e^{i(\varphi+\psi)}$

$\frac{z}{w} = \frac{re^{i\varphi}}{se^{i\psi}} = \frac{r}{s} e^{i(\varphi-\psi)}$

Hyperbolische

$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sin(-iz)$

$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(-iz)$

$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$ $z \in \mathbb{C} \setminus \{(k\pi + \frac{\pi}{2})i : k \in \mathbb{Z}\}$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sin(x+yi) = \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)i$

$\cos(x+yi) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\sinh(y)i$

BRONNEN

Ableitungsbegriff

$f: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar $\iff f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

f differenzierbar in $I \iff \forall x_0 \in I$ f in x_0 differenzierbar $\quad f': I \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f'(x)$ Ableitungsfunktion

differenzierbar $\Rightarrow$ stetig $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = a \iff \begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \\ \lim_{x \to x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0 \end{array}$$

$\iff$ Tangente beste lineare Näherung

Ableitungsregeln

$f, g: I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ diff'bar $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ (Linearität)

$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$ (Produktregel)

$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ (Quotientenregel)

$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \, g'(x_0)$ (Kettenregel)

$y = g(x)$

Hilfsfunktion $\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \in J \setminus \{y_0\} \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad f'(x_0) \neq 0$

~~$(e^x)' = e^x$~~

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$
$\tan$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
$\arcsin$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh$	$\cosh$
$\cosh$	$\sinh$
$\tanh$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad x \in (-r, r)$$

Höhere Ableitungen

f' stetig $\iff$ f stetig differenzierbar $\qquad f^{(0)} = f$

f n mal (stetig) diff'bar $\iff f^{(n-1)}$ (stetig) diff'bar $\wedge$ $f^{(n-1)}$ und diff'bar

Eigenschaften

Mittelwertsatz $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ $f \in C([a,b])$ diff'bar in (a,b)

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

Satz von Rolle

auf I

$f' = 0 \iff f$ konstant

$f' > 0 \iff f$ streng monoton wachsend

$<$ fallend

$\leq$ monoton fallend

$\geq$ ~~steig~~ wachsend

L'Hospital $\quad (a,b)$ offenes Intervall auch mit ∞ $\quad f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar $g'(x) \neq 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ oder $\pm \infty$

existiert $L := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

BRUNNEN

Taylorreihe

$I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall $x_0 \in I$ $f \in C^\infty(I)$

z.B. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 & x=0 \end{cases}$
nicht = Taylorreihe

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ heißt Taylorreihe von f um x_0

$T_{k,f}(x;x_0) := \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorpolynom k-ten Grades

Satz von Taylor $I \subseteq \mathbb{R}$ offen $x, x_0 \in I$ $k \in \mathbb{N}_0$ $f: I \to \mathbb{R}$ $k+1$ mal diff'bar

$\Rightarrow \exists\ \xi$ zwischen x und x_0 $f(x) = T_{k,f}(x;x_0) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$

Für $k=0$ Mittelwertsatz Fehlerterm $R_{k,f}(x;x_0) := \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$

Extremwerte $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \to \mathbb{R}$

f hat in $x_0 \in D$ globales Maximum / Minimum $\Leftrightarrow$ $f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0)$ $\forall x \in D$

relatives Maximum / Minimum bzw. lokales $\Leftrightarrow$ $\exists\ \delta > 0$ $f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0)$ $\forall x \in D$ $|x-x_0| < \delta$

Extremum $\Leftrightarrow$ Maximum oder Minimum

f diffbar $\wedge$ x_0 innerer Punkt $\wedge$ x_0 relatives Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$x_0 \in I^0$ $f \in C^n(I)$ $\exists n \geq 2$ $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

n ungerade $\Rightarrow x_0$ kein Extremum

n gerade $\Rightarrow f^{(n)}(x_0) > 0$ Minimum
< 0 Maximum

BRUNNEN

Lineare Abbildung immer stetig

Differenzieren von Funktionen mehrerer Variablen

Richtungsableitung $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^p$ $x_0 \in G$ $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$(\partial_v f)(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}$ Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v

$\{e_1, e_2, \dots e_d\}$ Standardbasis $\mathbb{R}^d$

f in x_0 partiell diff'bar $\Leftrightarrow$ in $e_1, e_2, \dots e_d$ diff'bar

Def. $\partial_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f_{x_i}(x_0) = (\partial_{e_i} f)(x_0)$ heißt partielle Abl. i-te Koordinate

$\partial_i f$ $G \to \mathbb{R}^p$ partielle Ableitungsfunktion

f stetig partiell diff'bar in G $\Leftrightarrow$ alle partiellen Ableitungen existieren $\wedge$ sind stetig

f in x_0 diff'bar $\Leftrightarrow$ $\forall$ Koordinatenfunktionen diff'bar

$\partial_j f(x_0) = (\partial_j f_1(x_0), \partial_j f_2(x_0), \dots \partial_j f_p(x_0))^T = \begin{pmatrix} \partial_j f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_j f_p(x_0) \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix $p \times d$

$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \cdots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$ $\quad J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x) \end{pmatrix}$

Spezialfall Gradient

$\nabla f(x_0) := J_f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots \partial_d f(x_0))$

↳ zeigt in Richtung steilsten Anstiegs

$n \in \mathbb{N}^*$ $n \geq 2$ f n-mal (stetig) partiell diff'bar in x_0 $\Leftrightarrow$ (n-1) mal (stetig) part. diff'bar und $\forall$ (n-1) Ableitungen (stetig) part. diff'bar

Satz von Schwarz Reihenfolge partieller Ableitungen ~~normal~~ egal, wenn bis n stetig-part. diff'bar

total diff'bar $\Leftrightarrow$ $\exists\, \Phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ $f(x) = f(x_0) + \Phi(x-x_0) + r(x)$ mit $\lim_{x \to x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$

$\Rightarrow$ $D_f(x_0) := \Phi$ totale Ableitung in x_0 $D_f: G \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ Ableitungs(funktion)

stetig partiell diff'bar $\Rightarrow$ total diff'bar $\Rightarrow$ partiel diff'bar

$\Downarrow$ f stetig

$\Downarrow$ alle Richtungsableitungen existieren $\Uparrow$

in x_0 total diff'bar $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ $(\partial_v f)(x_0) = Df(x_0)(v) = J_f(x_0)v$

in x_0 total diff'bar $\Rightarrow$ in x_0 part. diff'bar $J_f(x_0) = Df(x_0)$ bzw. Abbildungsmatrix von lin. Abbildung

total diff'bar $\Rightarrow$

Kettenregel f,g total diff'bar $\Rightarrow$ $D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$

$\overline{ab} := \{a + \lambda(b-a) : \lambda \in [0,1]\}$ Verbindungs-Strecke a und b

Mittelwertsatz: $f: G \to \mathbb{R}$ $a,b \in G$ $\overline{ab} \subseteq G$ $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in \overline{ab}$ $f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b-a)$

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in M \Rightarrow \overline{ab} \subseteq M$

Schrankensatz G konvex $\wedge$ $\exists L \geq 0$ $\|\nabla f(x)\|_2 \leq L$ $\forall x \in G$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq L\|x-y\|_2$ $\forall x,y \in G$ $\Leftrightarrow$ f Lipschitz stetig

$f: G \to \mathbb{R}$ in x_0 zweimal partiell diff'bar $\Rightarrow$ $H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1,\dots,d}$ Hesse Matrix von f in x_0

$H_f(x_0) = J_{(\nabla f)^T}(x_0)$ immer quadratisch, f stetig part. diff'bar $H_f(x_0)$ symmetrisch

Satz von Taylor $f: G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diff'bar

$\forall x_0, x \in G \; \exists \xi \in \overline{x_0 x} \quad f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^T H_f(\xi)(x-x_0)$

$T_{1,f}(x;x_0) := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)$ Taylorpolynom ersten Grades von f in x_0

Extremwertprobleme in mehreren Variablen $f: G \to \mathbb{R}$ $G \subseteq \mathbb{R}^n$

$x_0 \in G$ globales Minimum / Maximum $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ ($\leq$) $\forall x \in G$ — Mini $\vee$ Max $\Leftrightarrow$ Extremum

relativ $\exists \delta \; f(x) \leq f(x_0) \; \|x-x_0\| \leq \delta$

x_0 innerer Punkt f total diff'bar: x_0 relatives Extremum $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$

zusätzlich $H_f(x_0)$

- positiv definit $\Rightarrow$ rela. Minimum
- negativ definit $\Rightarrow$ rela. Maximum
- indefinit $\Rightarrow$ kein rel. Extremum
- sonst keine Aussage

Im Vergleich zu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mehrere Maxima ohne Min dazwischen möglich

Integration in $\mathbb{R}$

$Z := \{x_0, x_1, \dots x_n\} \subseteq [a,b]$ Zerlegung des Intervalls $[a,b] \Leftrightarrow a = x_0 < x_1 \dots < x_{n-1} < x_n = b$

da für $I_j := [x_{j-1}, x_j] \quad |I_j| = x_j - x_{j-1} \quad m_j := \inf f[I_j] \quad M_j := \sup f[I_j]$

Untersumme von f zu $Z := \underline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j|$

Obersumme von f zu $Z := \overline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j|$ — $\underline{s}_f(Z) \leq \overline{s}_f(Z)$

unteres Integral von f auf $[a,b] := \underline{\int}_a^b f(x)\,dx := \sup\{\underline{s}_f(Z) : Z$ Zerlegung von $[a,b]\}$

oberes Integral von f auf $[a,b] := \overline{\int}_a^b f(x)\,dx := \inf\{\overline{s}_f(Z) : Z$ Zerlegung von $[a,b]\}$ — $\underline{\int} \leq \overline{\int}$

f auf $[a,b]$ Rieman Integrierbar $\Leftrightarrow \underline{\int}_a^b f(x)\,dx = \overline{\int}_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$

Potenzreihe — gleicher Konvergenzradius

$\int \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \,dx = \sum_{n=0}^\infty \int a_n x^n \,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$

Monotonie $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Dreiecksungleichung $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Homogenität $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad c \in (a,b)$

Additivität $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Standardabschätzung

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = (b-a)\|f\|_\infty$

Def. $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\vee$ monoton $\Rightarrow$ integrierbar

unbestimmte Integral

Def. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f \Leftrightarrow F' = f$ auf $[a,b]$

$\int f(x)\,dx :=$ Menge Stammfunktionen von f

F, G Stammfunktionen von $f \Rightarrow F - G = c$

Hauptsatz $F(x) := \int_c^x f(s)\,ds \quad x \in I$ ist Stammfunktion von $f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

Φ Stammfunktion $\Rightarrow \Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(s)\,ds$

Integrationstechniken

Beispiele xe^x
$1\ln(x)$ $\int = x\ln(x) - x + C$
$\sin^2(x)$

Partielle Integration
f, g stetig

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)$$

für unbestimmte $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Substitutionsregel

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

für unbestimmte $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \,\Big|_{x=g(t)}$

rigorose Schreibweise
$x = g(t)$
$\frac{dx}{dt} = g'(t)$ „$\Rightarrow dx = g'(t)\,dt$"

Beispiele $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$
$\sqrt{1-x^2}$ $x = \cos(t)$

f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
gerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Differenzieren von Parameterintegralen

$[\alpha,\beta] \times [a,b] \subseteq G$

$$g(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy \qquad x \in [\alpha,\beta]$$

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Fourierreihen

$\omega > 0$
$a_n \neq 0 \vee b_n \neq 0$

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$$

trigonometrisches Polynom vom Grad N
mit Frequenz ω

Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

f Periode L $\Rightarrow \tilde{f}(x) = f\left(\frac{L}{T}x\right)$ Periode T

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P(x)\cos(n\omega x)\,dx = \left(P(x) \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{2}}}\cos(n\omega x)\right)$$

Skalarprodukt, damit
$\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{2}}}\cos(n\omega x), \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{2}}}\sin(n\omega x)$
Orthogonalbasis

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

$I \to \mathbb{R}$
f stückweise stetig $\Leftrightarrow \exists Z$ f auf Intervallen stetig und $\lim_{x\pm} f$ existieren
$\Downarrow$
$F_{N,f}(x)$ Fourierpolynom von f vom Grad N

$F_f := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$ Fourierreihe

not official

f gerade $\Rightarrow b_n = 0$ $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}$

ungerade $\Rightarrow a_n = 0$ $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}$

$f_P(x) = f(y(x))$ $x = \underbrace{k(x)}_{\text{eindeutig}}T + y(x)$ periodische Fortsetzung

f stückweise glatt $\Leftrightarrow \exists Z$ f auf Intervallen stetig diff'bar $\lim_{x\pm} f^{(1)}$ existieren
$\Downarrow$

$$F_f(x) = \frac{\lim_{y\to x+} f_P(y) + \lim_{y\to x-} f_P(y)}{2}$$

BRUNNEN

Gewöhnliche Differentialrechnung

gewöhnliche Differentialgleichung DGL der Ordnung n — meistens n äquivalent zu Anzahl Konst in Lösung

$n \in \mathbb{N}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig $\quad y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots y^{(n-1)}(t)) \quad t \in I$

autonom $\iff$ F nicht von t abhängig — bei $n=1$ $y'(t) = f(t, y(t))$

Anfangswertproblem

$$(AWP) \begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots y^{(n-1)}(t)) & t \in I \\ y^{(j)}(t_0) = y_j & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Lösung $y: J \to \mathbb{R}$ $\quad J \subseteq I$

$J = I \iff$ globale Lösung

Elementare Lösungsmethoden

$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y(t)) \Rightarrow \frac{1}{h(y(t))} dy = g(t)\,dt \Rightarrow \int \frac{1}{h(y(t))} dy = \int g(t)\,dt$ umformen nach $y(t)$

(Getrennte Veränderliche)
Trennung der Variablen

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)\, h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad h(y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ offen mit genau eine Lösung } y = H^{-1} \circ G$$

⚠ auch anders def.

$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(\eta)}\, d\eta$

Homogene Differentialgleichungen

$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right) \Rightarrow$ Substitution $u(t) := \frac{y(t)}{t}$

$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}\left(g\left(\frac{y(t)}{t}\right) - u(t)\right) = \frac{1}{t}\left(g(u(t)) - u(t)\right)$

$\Downarrow$ getrennte Veränderliche

$\Downarrow$

$y(t) = t\, u(t)$

Lineare DGL erster Ordnung

$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad a, b: I \to \mathbb{R}$ stetig $\quad$ ~~trenn(bar) veränderlich~~ $\cancel{y(t) = c(t)}$

$b = 0 \iff$ homogen $\quad$ sonst inhomogen

Superpositionsprinzip $\quad y_1, y_2: I \to \mathbb{R}$ Lösungen homogener linearer DGL $\Rightarrow y = \alpha y_1 + \beta y_2$ Lösung

homogen $\Rightarrow$ getrennte veränderliche $= y(t) = C e^{-A(t)} \quad A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$, $y_0 = C$

inhomogen $\Rightarrow$ Variation der Konstanten Formel $\quad y(t) = e^{-A(t)} y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)}\, ds$

$b(t) = y'(t) + a(t)y(t)$

Variation der Konstanten-Formel (Duhamelsche Formel)

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ genau eine globale Lösung $\quad y(t) = e^{-A(t)} y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{A(s)}\, ds$

$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

homogenes System lösen $\Rightarrow$ c von t abhängig machen

$y(t) = c(t) e^{-A(t)}$

$\Rightarrow$ einsetzen DGL $(c(t)e^{-A(t)})' = a(t)\cancel{y(t)}\, c(t) e^{-A(t)}$

Produktregel $\Rightarrow$ kürzen $\Rightarrow c'(t) = \dots \Rightarrow$ Integrieren

$\Downarrow$

$c(t)$ einsetzen

Systeme von Differentialgleichungen

z.B. Volterra-Lotka-Gleichung Räuber-Beute: $x'(t) = (\alpha - \beta\, y(t))\, x(t)$, $y'(t) = -(\gamma - \delta x(t))\, y(t)$

Lineare Systeme $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Menge L Lösungen homogen $\Rightarrow$ N-Dimensionaler Untervektorraum $C^1(I;\mathbb{R}^N)$

Teilbeweis Lineare Kombination Lösungen wieder Lösung

$b = 0 \Leftrightarrow$ homogen

Basis des Lösungsraum =: Fundamentalsystem

$y_1, y_2, \dots y_N \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ Lösungen Lineares System

Fundamentalsystem

$\Leftrightarrow \forall t \in I \; \{y_1(t), y_2(t), \dots y_N(t)\}$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow \exists t \in I \; \{y_1(t), y_2(t), \dots y_N(t)\}$ linear unabhängig

partikulär eine Lösung inhomogenes System

$$y = y_p + y_h$$

allgemeine Lösung homogenes System

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

$y'(t) = Ay(t) + b(t)$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

konvergent, da für richtige Norm $\|A^n\| \le \|A\|^n$ zurückspielen auf e^x

wenn A diagonalisierbar $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_N$ Eigenwerte

dazugehörig $v_1, v_2, \dots v_N$ Eigenvektoren

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem $\{e^{t\lambda_1} v_1, e^{t\lambda_2} v_2, \dots e^{t\lambda_N} v_N\}$ für $y'(t) = Ay(t)$

$e^0 = I$

$AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$

A invertierbar $\Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_2} & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

λ Eigenwert von A, m Vielfachheit $\Rightarrow (A - \lambda I)^m$ m-dimensionaler Kern $v_1, \dots v_m$ Basis

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} \qquad A^n = SD^nS^{-1}$$

$$u_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{t\lambda} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k v_j$$

Variation konstante formell

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\, ds$$

$$e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds$$

Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

$v_1 = y \quad v_2 = y' \dots v_n = y^{(n-1)}$

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ \vdots \\ v_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ F(t, v_1(t), \dots v_n(t)) \end{pmatrix} = G(t, v(t))$$

Lösung von $v \Leftrightarrow$ Lösung von y

BRUNNEN

Lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t)$$

homogen
$\Downarrow$
$g = 0 \Leftrightarrow$ Lösungen Untervektorraum $C^n(I)$ dim n

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

charakteristisches Polynom der Differentialgleichung

$y = y_p + y_h$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ paarweise verschiedene Nullstellen
m_j Vielfachheit

Fundamentalsystem $F = F_1 \cup \ldots \cup F_k$

Fall $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $\quad F_j = \{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots t^{m_j-1} e^{\lambda_j t}\}$

Fall $\lambda_j = \lambda + i\omega$, $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ $\quad F_j = \{e^{\lambda t}\cos(\omega t), e^{\lambda t}\sin(\omega t), te^{\lambda t}\cos(\omega t), te^{\lambda t}\sin(\omega t), \ldots, t^{m_j-1} e^{\lambda t}\cos(\omega t), t^{m_j-1} e^{\lambda t}\sin(\omega t)\}$

Existenz und Eindeutigkeitresultate

Satz von Peano in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

f stetig $\Rightarrow$ min 1 Lösung auf J offen

Satz von Picard-Lindelöff

f stetig $\wedge \exists L \quad \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in \mathbb{R}\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ kompaktes Intervall J mit eindeutiger Lösung $\qquad$ basiert auf Banachschen Fixpunktsatz

Picard-Iteration

$u_{n+1} := T(u_n) = t \mapsto \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\,ds\right)$ konvergiert für $\forall u_0$ gegen die Lösung

A-priori-Abschätzung

$$\|u_n - y\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u_1 - u_0\|$$

~~[illegible]~~ $q = L$ $\qquad$ Supremumsnorm

A-posteriori-Abschätzung

$$\|u_n - y\| \leq \frac{q}{1-q} \|u_n - u_{n-1}\|$$

BRUNNEN

Differentialgleichung

Lösen

allgemein

$g(t) \cdot h(y)$

Trennung Var

$\frac{y}{t}$

Substitution

Linear

inhomogen → homogen

gesamt + Superpositionsprinzip

ein Variation der Konstanten

höhere Ordnung

Theorie

Existenzlösung

f-stetig

Peano

1 Lösung, Näherung

strikte Kontraktion

Picard Lindelöff

sin h