

Computational Engineering und Robotik

Mathe Grundlagen

0 Nullvektoren

$\langle v, w \rangle = v^T w$ Skalarprodukt

$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$$\cos(\theta) = \frac{v^T w}{\|v\| \|w\|}$$

euklidische Norm $\|p\| = \sqrt{s_p(p)}$

$d(v, w) = \|v - w\|$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & \dots \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation } R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

θ Drehwinkel

Multiplikation: assoziativ

\rightarrow kommutativ

$$\det(A) = |A| = 0 \Leftrightarrow \text{invertierbar}$$

$$RR^{-1} = R^{-1}R = E \quad \Leftrightarrow \text{reeller Raum}$$

Gauß-Jordan Verfahren

Zeilenumformungen $(A|I) \xrightarrow{*} (I|A^{-1})$

mit Adjunkter Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$$

$$C^T \quad \overset{\text{Minor}}{+} \quad C^{-1}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

Orthonormal

Spaltenvektoren normalisiert

k orthogonal zueinander

$$\Rightarrow R^T = R^{-1}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{1}$$

Eigenwerte $Rv = \lambda v$

Berechnen $\det(R - \lambda I) = 0$

Eigenvektor $(R - \lambda I)v_i = 0$

zu λ

Differentialgleichungen

Zweck

Virtual Experiments

- + cheap
- + scale
- + safe
- + mit nicht erreichbaren unbekannten Systemen
- bekannter: verstehen z.B. Fahrverhalten
- + unbekannt: optimieren z.B. Zeit, Energie, Bewegung
- + mit nicht erreichbaren unbekannten Systemen vorhersagen

Scenario

benötigt
Modell Validierung, Reality
Numerische Berechnungsverfahren
zur Simulation

System - Einheit, Zustand (f) durch Zustandsvariablen beschrieben

Modell beruht auf
Berechnung
Simulation modell - charakteristische Eigenschaften
ermöglicht Berechnung Verhalten

Simulation - designing with Model to understand
experimenting evaluate

Grundlegende Schritte

Problemspezifikation

Zweck Simulation:
z.B. Ermittle ... Steuerung/Belastung
Auswahl -
Entwickle ..

Modellierung

Systemstruktur, Modellgleichung für
Genaugigkeit \leftrightarrow Handhabbarkeit durch Abstraktion
(nicht alle relevanten Merkmale apriori bekannt)

Was?

Größen? qualitativ: Welche?
quantitativ: Einfluss?

Effekte vernachlässigen?

Beziehungen relevanter Größen?

Wechselwirkungen & Abhängigkeiten beschreiben

Gestellt resultierende Berechnungsaufgabe

Klassifikation

Dynamik stationär \leftrightarrow instationär/dynamisch
 $\theta = F(x)$ $\dot{x}(t) = F(x(t))$

Zeitachse zeitkontinuierlich
 \leftrightarrow diskret

Zustandsraum Wertkontinuierlich
 \leftrightarrow kontinuierl.

Zustandsübergänge deterministisch
 \leftrightarrow stochastisch

Simulationsmodell \Rightarrow Vorhersagen = intelligence

+ abstract kontext
 \Rightarrow general intelligence

physic simulation wesentlich für KI

Implementierung

Auswahl Berechnungsverfahren
Programmierung Modell
Visualisierung Ergebnis

Validierung - systematische Plausibilitätsprüfung

Nachweis ausreichender Glaubwürdigkeit
Tests zu Verifikation in der Regel unmöglich

Anwendung

The Scientific Method

1. Modell
2. Vorhersagen experimentell prüfen
3. Analyse Gütekriterien Hypothesen
4. Schlussfolgerung Modell
Anpassungen?
5. Sicherstellen Reproduzierbarkeit
Veröffentlichung, Kollegen

Modellbildung

White-Box
deduktiv
Fachwissen+Math
Systemidentifikation
Kalibrieren Parameter
durch Messung von Experimenten

Black Box

induktiv
Apposition aus vielen Experimenten
synthetische Modellgleichung

Beispiel

- Ariane-5 Rakete vom Kurs ab \Rightarrow fehlende Schubdüsen \Rightarrow Selbstzerstörung
- Oriention war bei kleinerer Ariane-4 erprobt
- Software lief auskomfort für Re-Start nach Start noch 40 Sek mit

Darstellung reeller Zahlen

Gleitkommazahlen - begrenzte Genauigkeit
IEEE 754

	S	Exponent E	Mantisse N	Wert $2^{E-\text{bias}}$
single precision	1 Bit	8 Bit	23 Bit	127
double	7 Bit	52	1023	

$$\text{Wert} = (-1)^S \cdot (1+M) \cdot 2^{E-\text{bias}}$$

über das Bit M implizit

Sonderfall $E=0 \Rightarrow 0$

$E=0, M \neq 0 \Rightarrow$ denormalisierte Zahl (keine Exponent)

$$E=255, M=0 \Rightarrow \pm 0$$

$M \neq 0 \Rightarrow \text{NaN}$

$$\text{normalisierte Gleitpunktzahl } z = \sum_{i=0}^{\infty} d_i B^{i-1} \cdot B^E$$

\Leftrightarrow Multiple (Arbitrary) Precision Arithmetic Libraries

+ im Prinzip unendlich genau

- Overhead Performance

exzessive Speicher

- Kompatibilität

ungleichmäßig verteilt

zwischen 2^e und 2^{e+1} je $2^{e-14 \text{ Bits}(n)}$ Abstand

relative Maschinengenauigkeit = Abstand zwischen 1 und 2

$$\text{Single: } \epsilon_{\text{ps}} = 2^{-23}$$

$$\text{Double: } \epsilon_{\text{ps}} = 2^{-52} \quad \epsilon_{\text{mach}}$$

Fehlerquelle

Rundung

Abbildung reelle Zahl $x \rightarrow$ Maschinenzahl g

$$|x - g| \leq |x - g| \cdot \epsilon_g$$

Rundungsarten

- + Intervallarithmetik (R1 anrunden / „nach rechts“
R2 ab links)
- R3 Abschneiden null
- Standard \rightarrow R4 zum Nächsten sonst zu letztes Bit = 0
Impl. mit 3 zusätzlichen Bits für Zwischenrechnung
guard
round bit
sticky

relativer Rundungsfehler außer Underflow

$$\epsilon(x) = \frac{x - g(x)}{x} \Leftrightarrow g(x) = x(1 + \epsilon(x))$$

Gleitpunktarithmetik

Addition

1. Rechtsshift Zahl kleinerem E

2. $1+1$ kann 2 Stellen vor Punkt

3. Normalisieren Erg (Verschieben)

4. Runden (Auf verfügbare Stellen)

! Oder Underflow Mant E

Multiplication

1. $E_{\text{erg}} = E_1 + E_2$ [E-bias]

2. $M_1 \cdot M_2$

3. Normalisieren

4. Runden

5. Vorzeichen

Elementare Ops

$$g(x+y) = (x+y)(1+\epsilon_1) \quad (\epsilon_1 \leq \epsilon_{\text{mach}})$$

$$\tilde{x} \quad \tilde{y} \quad \tilde{\epsilon}_1 \quad \epsilon_1 = \epsilon_i(x,y)$$

Fortpflanzung

Algorithmus Folge Elementarops.

$$f = f^{(r)} \circ f^{(r-1)} \circ \dots \circ f^{(0)}$$

mit $f^{(i)}: D_i \rightarrow D_{i+1}, D_i \subseteq \mathbb{R}^n$

! nicht Assoziativ oder Distributiv

$$\text{Einsetzen } g(x+y) = (x+y)(1+\epsilon)$$

$$g(f) = f \cdot (1 + (-\epsilon_1 + \dots + \epsilon_r + \dots))$$

! Auslöschung / Cancellation

erste m Stellen gleich \Rightarrow neue Stellen rechts nach Normalisierung

groß + klein \Rightarrow klein geht verloren

Fehlerquelle

Kondition

kleine Eingangsfehler \rightarrow Ergebnisfehler

$$x = x + \Delta x$$

$$\text{relative Fehler } \epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\text{absolute Fehler } \Delta y = \hat{y} - y = f(\hat{x}) - f(x) = \left(f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + O((\Delta x)^2) \right) - f(x)$$

relativ

$$\epsilon_y = \frac{\Delta y}{y} \quad \approx \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$= \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{x} \quad \underbrace{\epsilon_x}_{\text{Verstärkungsfaktor}}$$

Taylorentwicklung

$$\approx \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| \text{ (relative) Konditionszahl}$$

Regulierung von f
Höhere Genauigkeit
 \nearrow
groß \Rightarrow schlecht
klein \Rightarrow gut
konditioniert

Beispiele

Mult $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2 : \epsilon_y \approx \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2}$

Dir.

$$\text{Quadrat. } x \mapsto \sqrt{x} \quad \epsilon_y \approx \frac{\epsilon_x}{2}$$

harmlos

Addition $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$

$$\epsilon_y = \frac{\epsilon_{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2}} + \frac{x_1}{x_1+x_2} \epsilon_{x_1} + \frac{\epsilon_{x_2}}{\sqrt{x_1+x_2}} \epsilon_{x_2}$$

schlecht bei $x_1 \approx x_2$

Numerische Instabilität

Berechnungsverfahren stark verfälscht trotz kleiner Konditionszahl

$$\text{z.B. } f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} \quad \xrightarrow{\text{äquivalente Berechnung}} \quad f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

potentiell Auslöschung

Vorgehen

1. Konditionszahl?

2. num. stabiler Verfahren

! - ähnlich großen Zahlen

! relativ große Zwischenwerte

bei kleinem Erg.

wichtig z.B. Patriot-Abfeuerrakete

Rundungsfehler Zehntausendstel \rightarrow Sek

Fehler akkumuliert \Rightarrow verfälscht

\Rightarrow Waffen in Zehntausendstel

Lineare Gleichungsmodelle

Suche $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = b$$

Lösbarkeit & Eindeutigkeit bei ~~Gleichungen~~ ~~n=Unterdruck~~

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b) \Leftrightarrow \min \geq 1 \text{ Lösung}$$

\wedge linear unabhängige

Zeilen- oder Spaltenvektoren

Bei quadratischem A , daher $n=m$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ singulär} \Leftrightarrow \geq 1 \text{ Lösung}$$

= ~~regulär~~

= regulär 1

$$\Rightarrow x = A^{-1}b$$

Explizite Berechnung schwierig

Gauß Algorithmus

Elementartransformation - Lösungsmenge unverändert

Vertauschen Gleichungen

Mult Gleichung mit Konstante $\neq 0$

Addition Vielfaches Gleichung zu anderen

Ziel

obere Dreiecksmatrix U_{upper}

entspricht $A=LU$

$Ly=b$ durch Vornärtsubstitution

$Ux=y$ durch Rückwärtsubstitution
beginnend mit letzter Zeile

Matrixnorm

aus Vektornorm $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \text{ induziert } \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

größte Eigenwert $A^T A$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ Spaltensummennorm}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ Zeilensummennorm}$$

Fehlerabschätzung

$$(A + \Delta A) \tilde{x} = b + \Delta b$$

$$\begin{aligned} \text{In: } & f(\tilde{x}) = b - A\tilde{x} = b - Ax + Ax - A\tilde{x} \\ & = Ax - A\tilde{x} \\ & \approx Ae \quad \text{mit } e = x - \tilde{x} \\ & \|r\| = \|Ae\| \quad \text{Residuum} \end{aligned}$$

Rückwärtsfehler

ungestörtes b $\hat{x} = b$

$$x = A^{-1}b = A^{-1}(\hat{x} + e)$$

$$= (A^{-1}A + A^{-1}\Delta A)\hat{x}$$

$$= \hat{x} + (A^{-1}\Delta A)\hat{x}$$

$$\Rightarrow x - \hat{x} = A^{-1}(\hat{A} - A)\hat{x}$$

$$\Rightarrow \|x - \hat{x}\| \leq (\|\hat{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\hat{x}\|)$$

$$\Rightarrow \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} \leq \|\hat{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} \leq \underbrace{\|\hat{A} - A\|}_{\text{fehler}} \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{konditionszahl}} \underbrace{\|\hat{x}\|}_{\text{Eingabefehler}}$$

$$\|Ae\| = \|r\| \leq \|A\| \cdot \|e\| \Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|e\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|A\|}$$

$$\|\Delta A\| = \|e\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$$

$$\text{Bsp. } \kappa(A) = 10^{13}$$

$$\epsilon_A = 10^{-16} \Rightarrow \epsilon_x \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$$

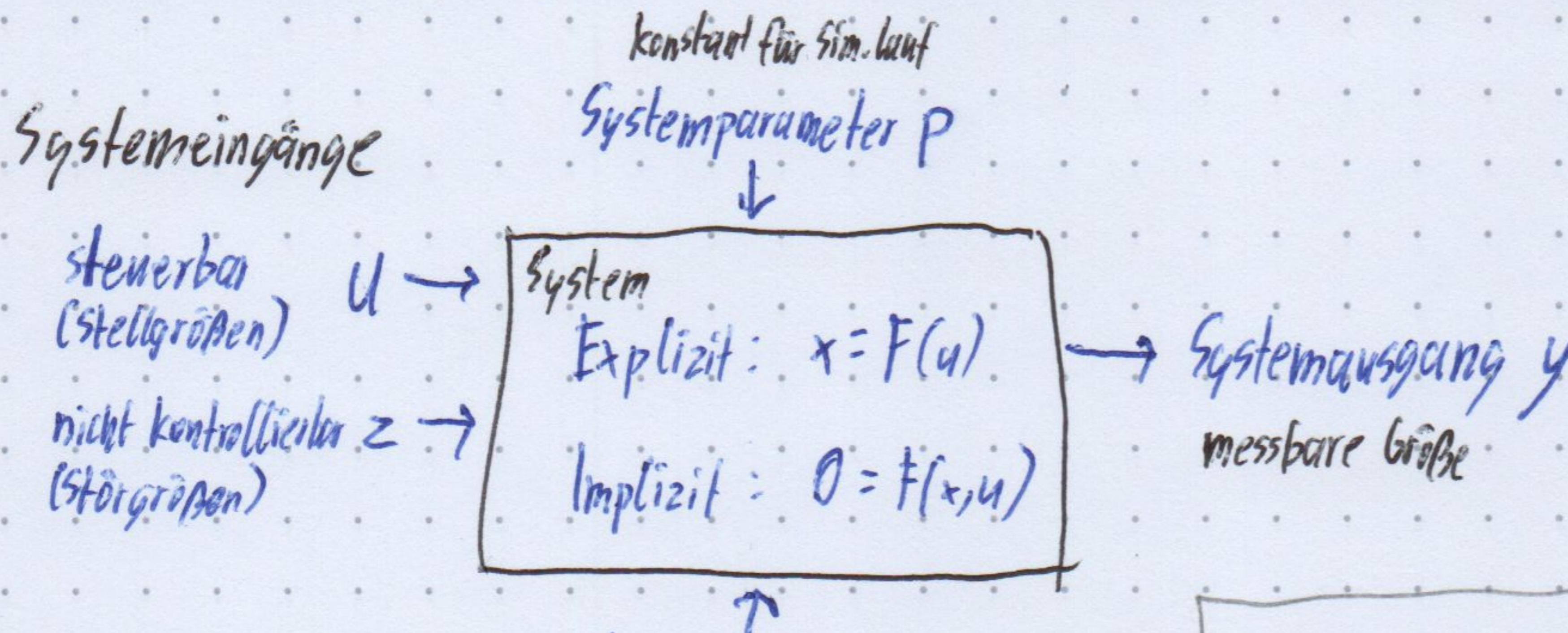
\Downarrow Invertieren

~~$\|\Delta A\| \leq \frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|A\|}$~~

gute obere Schranke, sofern $\|A\| \|A^{-1}\|$ nicht zu groß

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} \geq \frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Statische Modellierung



Annahme $z=0$
 $y=x$

Vorwärtsmodell $x=F(u)$

Rückwärts / inverses Modell $F^{-1}(x)=u$

Robot

physical interaction abilities
sensing Env. Sense
" " plan
planning " act

Kinematic

Locomotion
Manipulation

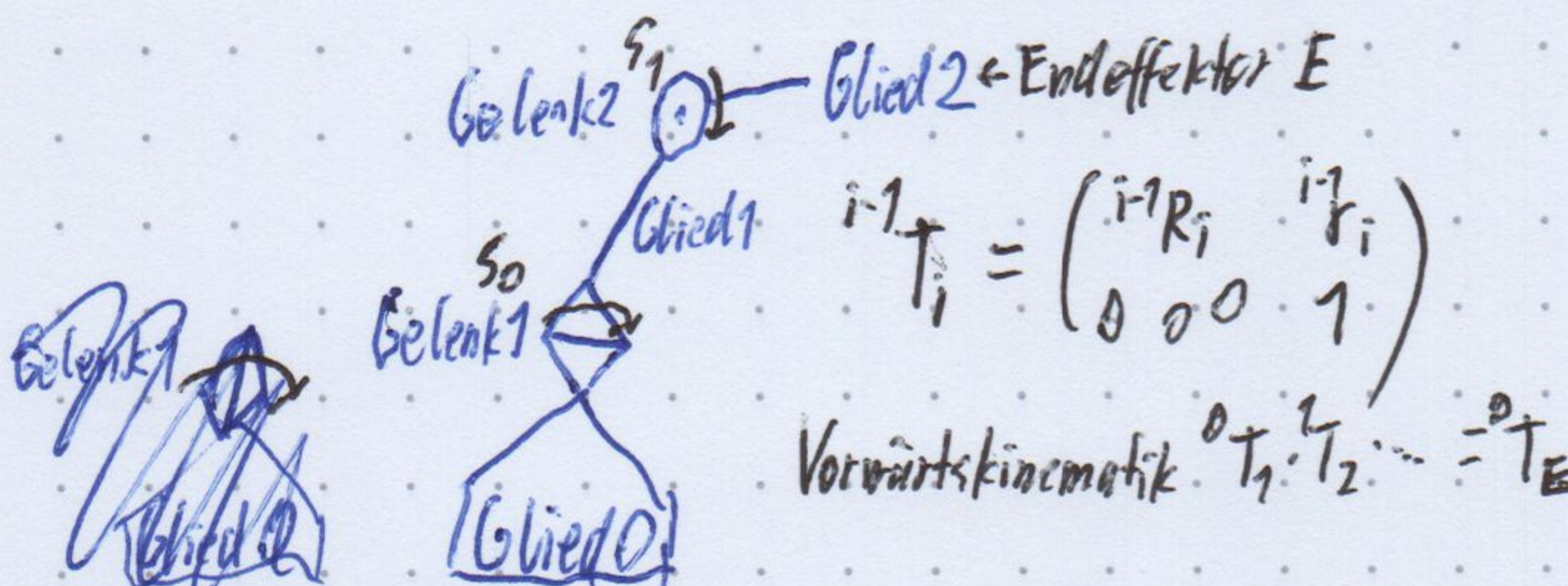
Roboterarm

effene starre kinematische Kette

Glieder
starke Körper

durch Gelenke in Kette verbunden

f Drehgelenke (revolute joints) Winkel $\theta_i = q_i$: Gelenkwinkel
f Schubgelenke (prismatic joints) Strecke d_i



Denavit-Hartenberg (DH) Konvention

z_i : Achse auf Bewegungsachse Gelenk $i+1$

x_i : senkrecht auf z_{i-1} und z_i

y_i für Rechtssystem

4 Param für Transformation

θ_i : Gelenkwinkel zwischen x_{i-1} und x_i Achse gemessen um z_{i-1}

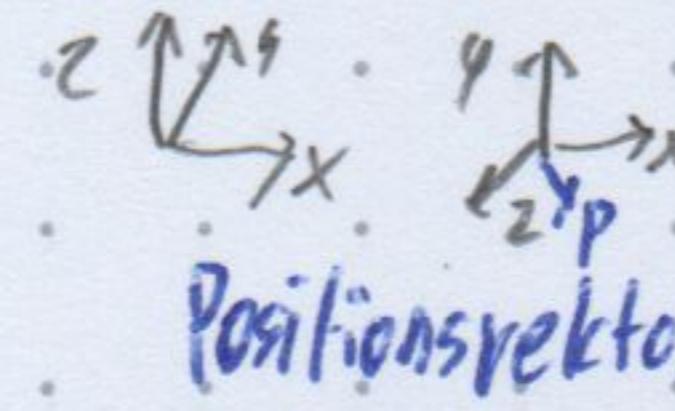
d_i : Verschiebung Ursprung $i-1$ zu x_i entlang z_{i-1}

a_i : Länge z_{i-1} zu z_i entlang x_i

BRUNNEN α_i : Verdrehung zwischen z_{i-1} und z_i gemessen um x_i

⇒ homogene Transformation ${}^iT_i = \text{Rot}(z_i, \theta_i) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_i) \cdot \text{Trans}(a_i, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i)$

kartesisches (Rechts-) Koordinatensystem



Transformationsbez. Koordinatensystem (KS)

aT_b : Koordinatenvektor Ursprung S_b bezüglich S_a

aR_b : Rotationsmatrix - nach trans Einheitsvektor s_i bezüglich S_a in Spalten

$$\left. \begin{array}{l} {}^aP = {}^aT_b + {}^aR_b {}^bP \\ \text{bezüglich } S_a \end{array} \right\} {}^aT(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^aP = \left(\begin{array}{c} {}^aP \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^aR_b & {}^aP_b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} {}^bP \\ 1 \end{array} \right) \\ = {}^aT_b \cdot {}^bP \end{array} \right\} {}^aT(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$${}^aR_b = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorwärtskinematikmodell

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \Rightarrow {}^0T_E$$

RAV Endeffektor-KS

Inverses

Lösungsansetze

analytisch

Gleichung umstellen

geometrisch

iterativ

Invers Kinematikmodell

Rotationsmatrix

orthonormal ${}^0R_n \cdot {}^0R_I = I$

6 Orthonormalitätsbedingungen

{ 3 paarweise Orthogonalität der Spaltenvek
3 norm=1

⇒ durch 3 Param darstellbar

Konventionen

Kardan-Winkel

Euler-Winkel

Lxyz nachreihende

α β γ

$$F(q) = \begin{pmatrix} {}^0r_{n,x} \\ {}^0r_{n,y} \\ {}^0r_{n,z} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^0r_{n,x}(q_1, \dots) \\ \vdots \\ \alpha(q_1, \dots) \\ \vdots \\ \gamma(q_1, \dots) \end{pmatrix} = 0$$

Ziel

Lösung nur im Arbeitsraum des Roboters

n Unbekannte

n < b im allg. keine Lösung

b Gleichungen

n = b im allg. eine Lösung

bei unabhängigen q_i

n > b im allg. ⚡ Lös.

⇒ Optimierungsproblem
nichtlinearer Ausgleichsfun. für Abweichung Soll Wert

Anforderungen

$$\varphi(q) = \frac{1}{2} \| F(q) \|^T \cdot (F(q)) + \frac{1}{2} (q)^T \cdot q$$

Finde Lösung, wenn existent

Echtzeit

Verfahren

explizite analytische Lösungsformel

→ ideal - schwierig

allg. iteratives Verfahren

- keine Garantie - Startwert + Bibliotheken

Kombination
analytische Teillösung
iterativer Restlöser

Spezialverfahren

Ausnutzung spezieller Struktur

Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$0 = F(x)$ gesucht $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Jacobi-Matrix

$$J_F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Berechnung

exact: analytisch (formellmanipulationsprogramm)
approximativ: numerisch

Numerische Approximation

z.B. VD-Terrätsdifferenzenquotient

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} \approx \frac{1}{\delta_j} (F(x + e_j \delta_j) - F(x))$$

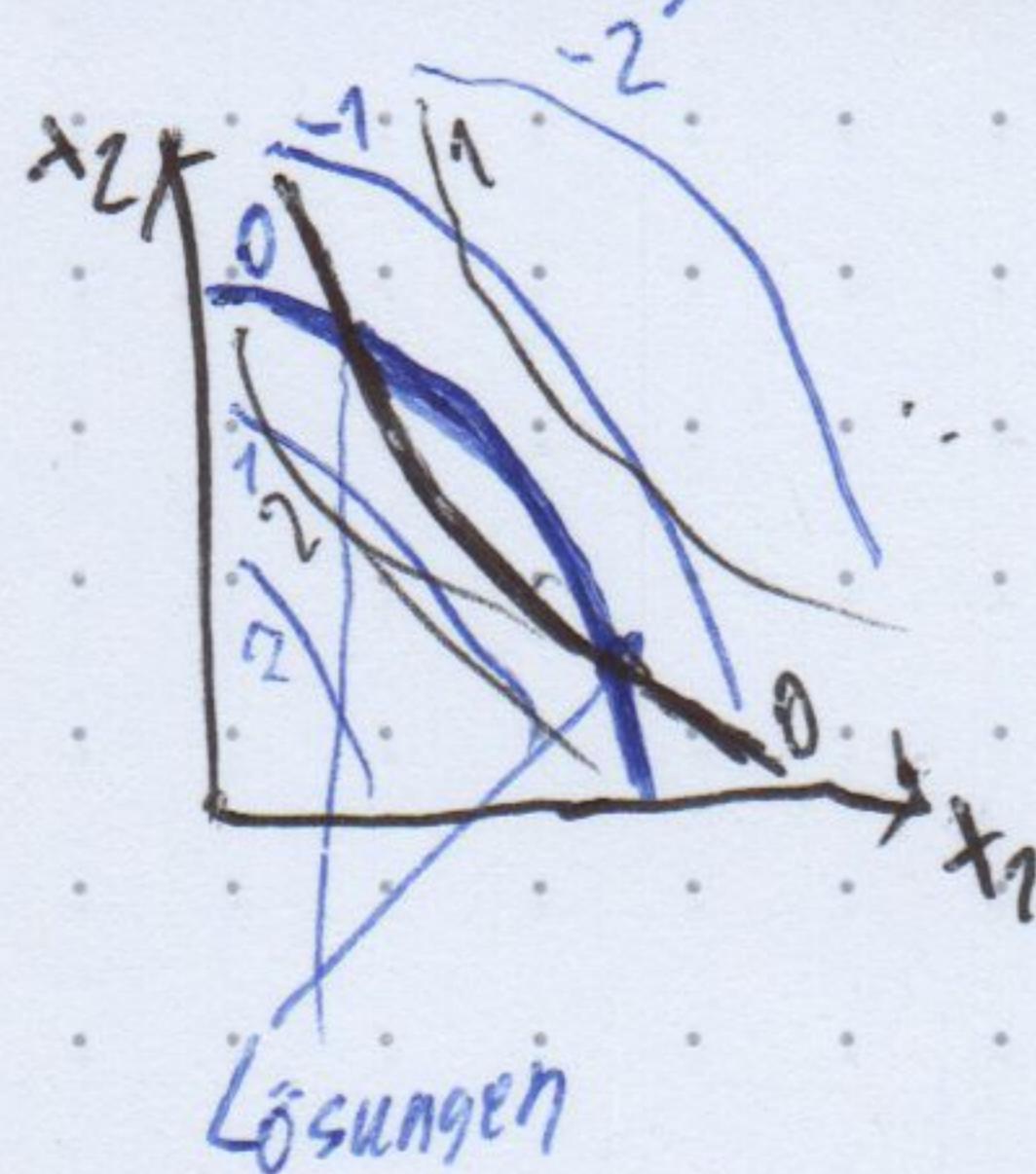
$e_j = j\text{-ter Einheitsvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Schrittweite z.B. $\epsilon(1+|x_j|)$
beginnt skaliertem $F = \epsilon = f_{\text{exact}}$

Genaigkeit

$$|\text{Wert-Appr.}| \leq |S_j| \cdot \left| \frac{\partial^2 F_i(x)}{\partial x_j^2} \right| \quad x \in [x_0, x_1], S_j \text{ sehr klein} \Rightarrow \text{Rundungsfehler}$$

\Rightarrow maximal Hälfte gültige Dezimalstellen von F

Veranschaulichung: Höhenliniendiagramm bei 2 Inputs



Fixpunktiteration

+ leicht
impl.,
Rechenaufwand

+ ausgleichende
globale Konvergenz

Konvergenzbedingung Fixpunkt
 $x^{(k)} \text{ nahe } x_s$
 $\forall \lambda_i: \text{Eigenwerte } \lambda_i(x): |\lambda_i| < 1 \Rightarrow \text{konvergiert } x^{(k)} \rightarrow x_s$

kontrahierend

Einfache FPI
 $x = F(x) + x$

Manuell

Relaxationsmatrix

$x = x + A \cdot F(x)$
einfachster Ansatz
Diagonalmatrix
optimal =

$$A = \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x_s) = - \left[\frac{\partial F(x_s)}{\partial x} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial F(x_s)}{\partial x} + I = 0$$

\Rightarrow konvergente FPI fast immer möglich

x^* nahe x_s :

$$|g(x) - x_s| \leq (-|x - x_s|)^p \quad (p > 0, p \in \mathbb{N})$$

Verfahren Ordnung p

einfaches FPI 1
(volles) Newton 2

- Jacobi-Matrix aufwendig
sobald ein Element fällt max. lineare Konvergenz

Newton-Verfahren

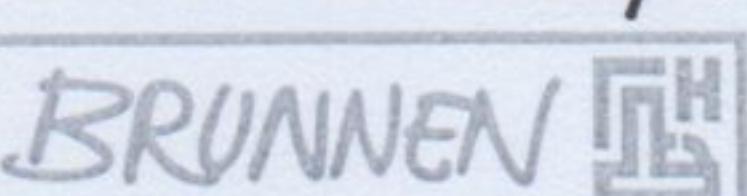
+ gute
lokale Konvergenz

Idee: $x_s = x + \Delta x$
 $0 = F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} \cdot \Delta x$
 $\Rightarrow \Delta x = - \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]^{-1} \cdot F(x)$

Iterationsgeschritt

Berechne $J_F(x^{(k)})$
Löse $J_F(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$
Berechne $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$

Terminierungstest



nahe genug $\|F(x^{(k+1)})\| \leq \epsilon$ Ändern
 $\|\Delta x^{(k)}\| \leq \epsilon (1 + \|F(x^{(k)})\|)$ Funkt.Wert

kein Fortschritt $\|F(x^{(k+1)})\| \geq \|F(x^{(k)})\| - \epsilon$

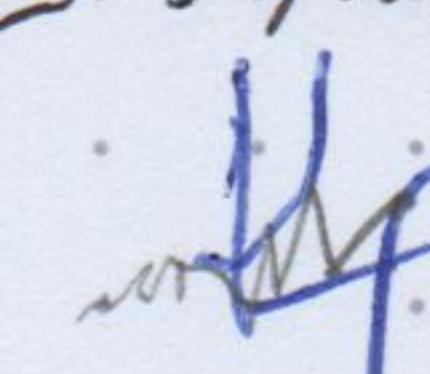
Schritte $k+1 \geq k_{\max} \sim 10^{-4}, \sim 10^{-8}$

Startrek.

Einzugsbereich mehrerer Lösungen

Wahl
- Kenntnis
- ansprechen
heranfasten von
einfacherem Problem

Singularitäten, Divergenz



hech nichtlineare Probleme

\Rightarrow Schrittweitensteuerung

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)} \quad 0 < \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$$

$$\text{näherungsweise minimieren}$$

$$\Phi(\alpha) = \|F(x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)})\|_2^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (F_i(x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)}))^2$$

so grob wie möglich für quadratische Konvergenz

8

Dynamische Modelle \leftrightarrow statisch
zeitlicher Verlauf konstanter Zustand

kinematisch - Massen, Kräfte unabhängig

kinetisch - " abhängig

Mechanische Modellbildung
Translatorisch

$$\text{Gravitationskraft } F_g = -m \cdot g \quad g = 9 \cdot e_x$$

$$\text{Federkraft } F_{\text{Feder}} = k_p (x_{\text{ref}} - x) \quad \begin{matrix} \text{O Federkraft} \\ \text{z. B. Rubbelage} \end{matrix}$$

$$! \text{Reibung} \Rightarrow \text{Dämpfer } F_{\text{Dämpfer}} = -k_d \dot{x}(t)$$

Newton's 2. Gesetz für Punktmassen

$$\sum_i F_i = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Drehmomente

$$\text{Feder } M_p = k (\varphi_0 - \varphi)$$

$$\text{Dämpfer } M_D = -d \dot{\varphi}$$

$$\text{Newton 2. G. } I \ddot{\varphi} = \sum_i M_i$$

"Inertie (Trägheitsmoment)"

$$\text{Hebel } M_i = r_i \cdot x_{F_i, t} \quad \begin{matrix} \text{Abstand} \\ \text{z. B. F_0} \end{matrix}$$

$$\text{Impulsmoment } L(t) = I \cdot \dot{\varphi}(t)$$

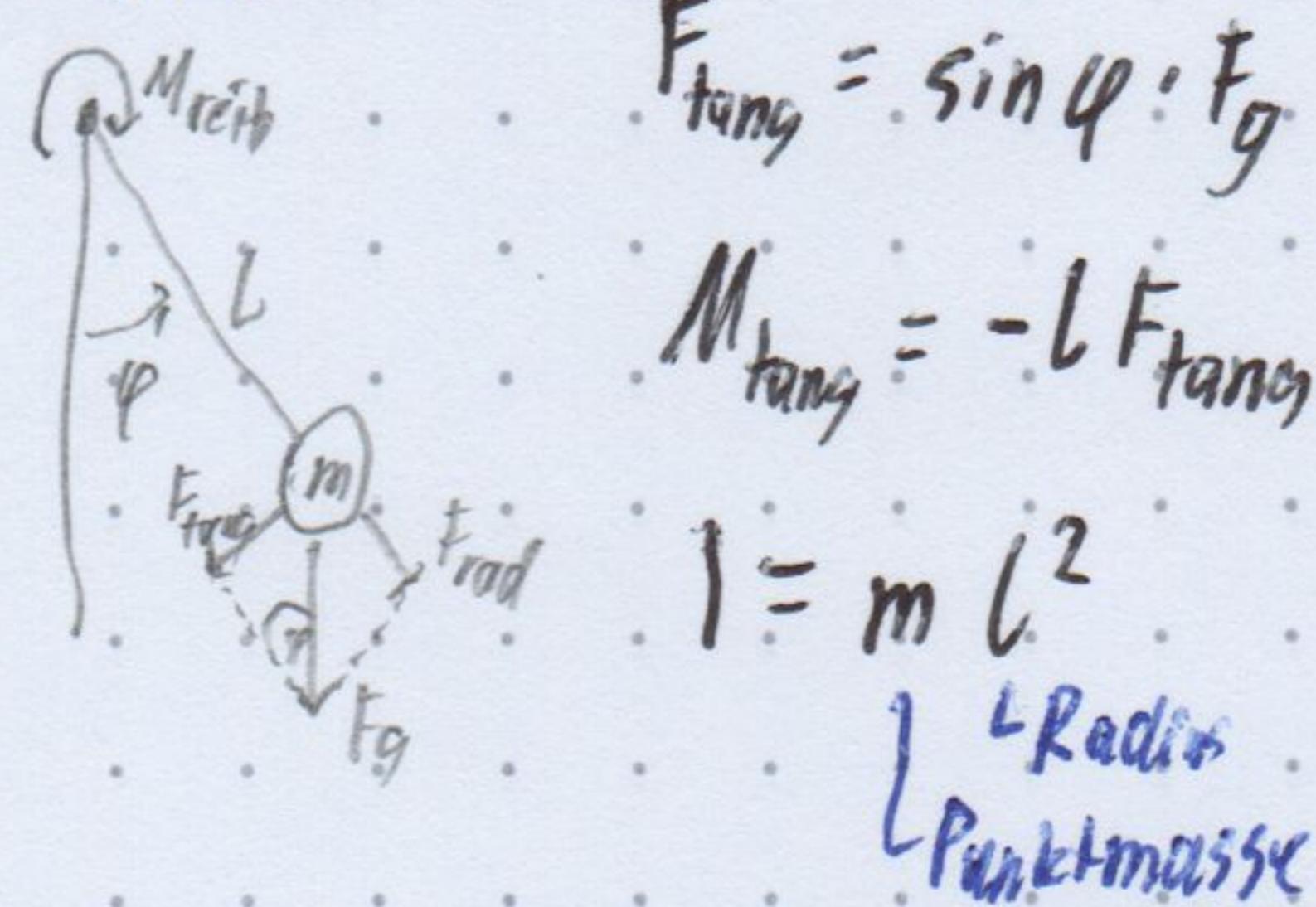
$$L(F) = I \cdot \bar{\varphi}(t)$$

Beispiele

Feder-Masse-Dämpfer Systeme

$$m \ddot{x}(t) = F_{\text{ext}} + k_p (x_{\text{ref}} - x) - k_d \dot{x}(t) \quad \begin{matrix} \text{z. B. } F_0 \end{matrix}$$

Pendel



$$F_{\text{tang}} = \sin \varphi \cdot F_g$$

$$M_{\text{tang}} = -l F_{\text{tang}}$$

$$I = m l^2$$

l Radus
Punktmasse

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) - \frac{d}{ml^2} \dot{\varphi}(t)$$

Alternativ über konstant bleiben
der Gesamtenergie $E(t)$

1. „Freischneiden“ des Körpers

Punktmassen - $x(t) \in \mathbb{R}^3$ kompletter Zustand

2. Aufstellen einzelner Kräftegleichungen

räumliche Deformation + Orientierung

$$\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$$

ODE - Gewöhnliche Differentialgleichungen

System 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Zustandsvariablen

Lösbarkeit

n Integrationskonstanten

z.B. durch n Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Lipschitz Bedingung

$$\|f(a) - f(b)\| \leq L \|a - b\| \quad \forall a, b$$

$$\exists L > 0$$

\Rightarrow eindeutige Lösung
für Anfangswert $x(t)$ für $t > 0$

beschränkte Vektorraum

Ordnung - höchste vorkommende Ableitung

Transformation auf erste Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, \ddot{x}^{(n-1)}(t))$$

$$\Rightarrow v_1 = x, v_2 = \dot{x}, \dots, v_n = x^{(n-1)}$$

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ \vdots \\ v_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ f(t, v(t)) \end{pmatrix} = b(t, v(t))$$

autonom - $\dot{x}(t) = f(x(t))$

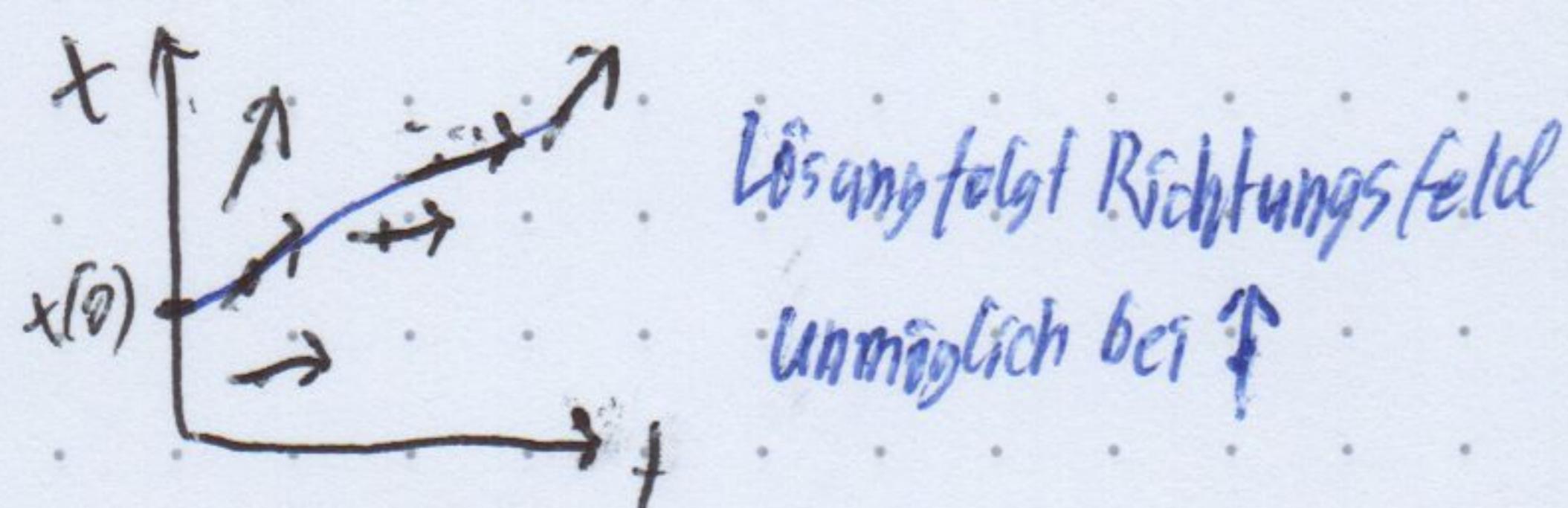
Autonomisierung

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = t, \dot{x}_{n+1} = 1, x_{n+1}(0) = 0$$

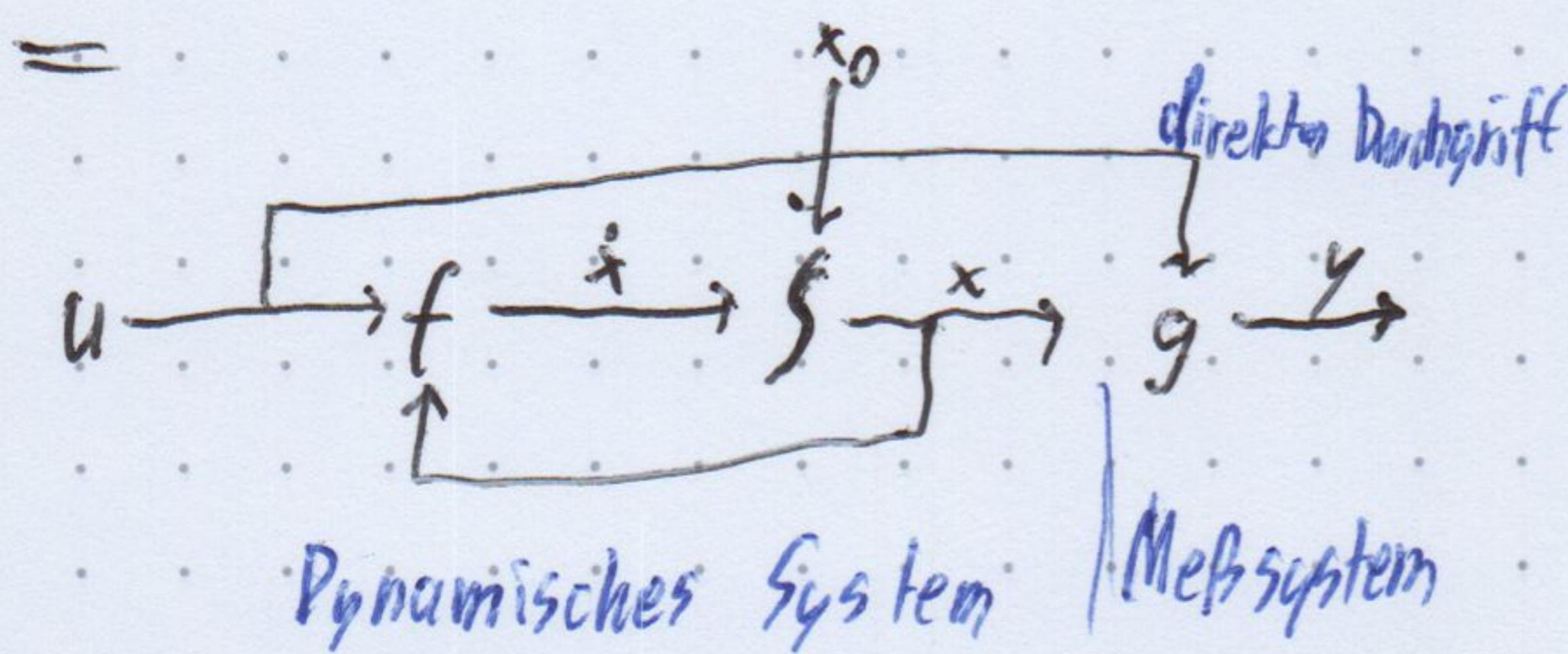
$$\dot{x}(t) = f(x)$$

Visualisierung Richtungsfeld



Lösung folgt Richtungsfeld

unmöglich bei f



$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

Lineare Systemdynamik

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c$$

konstant oder zeitabhängig

dann oft auch Messsystem linear

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

e.g.
Robotodynamik

Verfahrenstechnik

e.g. Rührkessel Reaktor

Zulauf, Ablauf \Rightarrow Bilanzgleichung
gewünschte & ungewünschte Reaktion

elektronische Schaltkreise

Simulation von ODEs

Lineare ODEs analytisch

Eigenwerte durch

homogener Anteil $\dot{x} = Ax$

Eigenwerte $\det(A - \lambda I) = 0$

Eigenvektoren

Allgemeine Lösung $x(t) = \alpha_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n v_n e^{\lambda_n t}$

Fall $\lambda_i + i\omega$: $\alpha_i e^{\lambda_i t} (\cos(\omega t) + \alpha_i e^{\lambda_i t} \sin(\omega t)) \dots$

spezielle Lösung α_i durch Anfangswert bestimmen

inhomogen $a_x(t) + b$

$x(t) = h_h(t) + x_p(t)$

h_h homogene Lösung

Variation der Konstanten

dann ableiten, nach umstellen, integrieren

Allgemeine ODEs numerisch

approximative diskrete Zeitpunkte

$$t_k \rightarrow t_{k+1} = t_k + h_k$$

$$x_k = x(t_k)$$

Schrittweite

Lokale Approximationsfehler

$$\text{LTE}(k) = x_{k+1} - \left(x_k + h_k \cdot \tilde{\Phi}(-) \right)$$

Ordnung p. $\text{LTE} \in O(h^{p+1})$
konsistent $O(h)$

Mehrschrittverfahren \leftrightarrow Einschrittverfahren

Verwendet mehr als
ein x_{k-1} (x_{k-2}, \dots)

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot \tilde{\Phi}(t_k, x_k, \underbrace{x_{k+1}}_{\text{wenn unabhängig}}, h; f)$$

(Consistenzbed., $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(t_k, x_k, x_{k+1}, h; f) = f(x_k)$)

Globale Approximationsfehler: $\text{LTE} + \text{Fortpflanzungsfehler}$

$$\text{GTE}(k) = x_k - \left(x_0 + h_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \tilde{\Phi}(t_i, \tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, h_i; f) \right)$$

zu kleine $h_k \Rightarrow$ Rundungsfehler

Explizites Euler-Verfahren Approximiere Untersumme $h_k f_k$

$$x_{k+1} = x_k + h_k f(x_k)$$

LTE: Taylorentwicklung $x(t_{k+1}) = x_k + h_k f(x_k) + O(h^2)$
Ordnung 1

Implizites Euler-Verfahren

Approx Obersumme

$$x_{k+1} = x_k + h_k f(x_{k+1})$$

- Lösung nicht-lineares Gleichungssystem

Ordnung 1

Symplektisches Euler-Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_1, k+1 \\ x_2, k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1, k \\ x_2, k \end{pmatrix} + h_k \begin{pmatrix} x_2, k+1 \\ f_2(x_1, k, x_2, k) \end{pmatrix}$$

für symplektische ODE

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{Erhält Periodizität}$$

Heun-Verfahren (Prädiktor-Korrektur Verfahren)

$$x_{k+1}^P = x_k + h_k \cdot f(x_k)$$

zweistufiges Einschrittverfahren

$$x_{k+1} = x_k + h_k \frac{1}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1}^P))$$

Ordnung 2

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$s_1 = f(x_k)$$

$$s_2 = f(x_k + h \alpha_1 s_1)$$

$$s_3 = f(x_k + h \beta_1 s_1 + h \alpha_2 s_2)$$

$$s_4 = f(x_k + h \gamma_1 s_1 + h \beta_2 s_2 + h \alpha_3 s_3)$$

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$$

$\epsilon = 1$

Klassisch

$$s_1 = f(x_k)$$

$$s_2 = f(x_k + h/2 s_1)$$

$$s_3 = f(x_k + h/2 s_2)$$

$$s_4 = f(x_k + h s_3)$$

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{1}{6} (s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

Ordnung 4, wenn f 4-mal stetig diff.

1. Ordnung meistens zu ungenau,
daher sehr + Echtzeitanwendung

Schrittweitensteuerung



adaptive für starke lokale Änderungen

Berechne mit h_k und $h_{k/2}$

Schätze LFE

$$\text{CE} / \quad h_k := h_{k/2}$$

Berechne LFE für $h_{k/2}$ + geringe Diffunktionsänderung

$$\text{CE} / \quad h_{k+1} = 2h_k$$

$$h_k \approx h_k$$

Berechne mit Ordnung p und $p+1$

Schätze LFE

$$\text{CE} / \quad h_k := h_{k/2}$$

Teste 2 h_k

$$\text{CE} / \quad h_{k+1} = 2h_k$$

$$h_{k+1} \approx h_k$$

+ Einbettung des Verfahrens
=> effizient

Zeitcharakteristika ODEs

lineare ODEs

$$\text{Für } \lambda_j \quad T_j = \min\left\{\frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|}, \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda_j)|}\right\}$$

$$T_{\max} = \max_j T_j, \quad T_{\min} = \min_j T_j$$

Faustregel

Simulationsdauer

| stabiles ODE $\Rightarrow t_f \approx 5 \cdot T_{\max}$ approx Gleichgewichtsz.

| instabiles! $\Rightarrow |x(t_f)| > M$ ^{Werte uninteressant}

Diskretisierungsschrittweite

$$h = \Delta t \leq \alpha \cdot T_{\max} \quad \alpha \approx \frac{1}{20}$$

Steife ODE

$$\text{Faustregel steif} \Leftrightarrow \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \geq 10^2$$

\Leftarrow numerische Lösbarkeit

niedrigere Schrittweite

implizites diff. Verfahren

steifes Verhalten erwartbar, wenn

$$\partial f = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \text{ Eigenwerte } \lambda_i \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda_i) \ll 0$$

Zeitcharakteristik

Beispiel λ_1, λ_2

$$\dot{x}_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} x_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} x_2$$

$$\text{Lösung: } x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} - c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{Euler mit h } \tilde{x}_1 = c_1 (1 + h \lambda_1)^t + c_2 (1 + h \lambda_2)^t$$

$$\tilde{x}_2 = -$$

damit $\tilde{x}_1 \rightarrow \infty$ gegen 0

$$h < 2 / |\lambda_1|$$

Für $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$

h sehr klein, obwohl λ_2 fast neg.

Unstetige ODE

e.g. Stoßvorgänge Sprüngliche Geschwindigkeit

~~Reibung~~ F(t) = F_0 \cdot \operatorname{sign}(x_v(t))

Losreisen Haft \rightarrow Gleitreibung

Stellgrößen Ventil, Absturzintervall

Approx Teilmodelle e.g. mit stückweise stetigen Funk.

Strukturvariable Systeme Dimensionen x ändern sich

e.g. abheben, Verlust Gelenkartik.

Hysterese Teil von f. hängt von Vorgeschichte ab $x = \begin{cases} +1 & x \leq 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$

f. weniger diff bar als Ordnung Verfahren \Rightarrow Fehler beliebig hoch

• I konst. $\delta h \Rightarrow$ Angen zu und durch e.g. Game Physics Engine

| adaptiv h \Rightarrow reduziert h bis durch oder stop.

\Rightarrow abschnittsweise stetig

| feste Umschaltzeitpunkte rechts t_{s,i}

| Nullstelle Schaltfunktion

$$q(x(t_s), t_s) = 0$$

Detection nach Vorzeichenwechsel \Rightarrow Ermittle Nullstelle Θ , integriere bis t_{s,i}; dann neu aufsetzen

Gleichgewichtslösungen

$$\dot{x}(t) = 0 = f(\underline{x}_s)$$

gesucht

linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + c$$

$$x_s = -A^{-1}(Bu_s + c)$$

exists & eindeutig $\Leftrightarrow A$ invertierbar

stationäre Zustände

- Bestimme Gleichgewichtslösung + Rechenaufwand
kein Approx.-Schluss
- check durch simulieren oder Linearisierung
- ob stabiler Gleichgewichtspunkt

Linearisierung um Gleichgewichtslösung $f(x_s, u_s) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= x(t) - x_s \\ \dot{\Delta x}(t) &= \dot{x}(t) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_s, u_s} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_s, u_s} \cdot \Delta u(t) \\ \Delta x(t_0) &= x(t_0) - x_s\end{aligned}$$

auch um Trajektorien $x_{\text{des}}(t)$ möglich
 x_{desired}

1 Jakobi M.
Berechnung

Stabilität lineare ODEs Analyse Phasenebene

Eigenwert-
zerlegung

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{j=1}^n c_j v_j t^{k_j} e^{\lambda_j t}$$

$$\lambda = a + bi$$

$$e^{\lambda t} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt))$$

$\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0 \Rightarrow$ schwingt

$\operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow$ Divergenz / Instabilität
 $< 0 \Rightarrow$ Kon. / Stabilität

$\operatorname{Re}(\lambda) = 0, \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0 \Rightarrow$ für lineares ODE ungedämpfte Oszillation

keine Garantie für nichtlineare

kann z.B. durch μ von der Pol Oszillation

$$\ddot{y} - \mu(1-y^2)y + y = 0$$

ODE stabil \Leftrightarrow begrenzte Eingaben \rightarrow
" " Ausgaben $x(t)$

x_s uniform stabil $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_s\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_s\| < \epsilon \quad \forall t > 0$

keine Oszillation

Stabiler Knoten \Leftrightarrow Zustandsverlauf konvergiert monoton exponentiell schnell zur Gleichgewichtslösung

Instabiler Knoten \Leftrightarrow divergiert

Oszillation

Stabiler Schraub

Instabiler Schraub

Ungedämpfter Wirbelpunkt

Degenerierte Fälle A nicht nilla Raum

dogen stabiler Kehlkopf

in-

dogen Sattelpunkt L: T

Steuerung und Regelung

Ziel: ODE beeinflussen zu stabilem x_{des} -Sollwert

1. Stabil

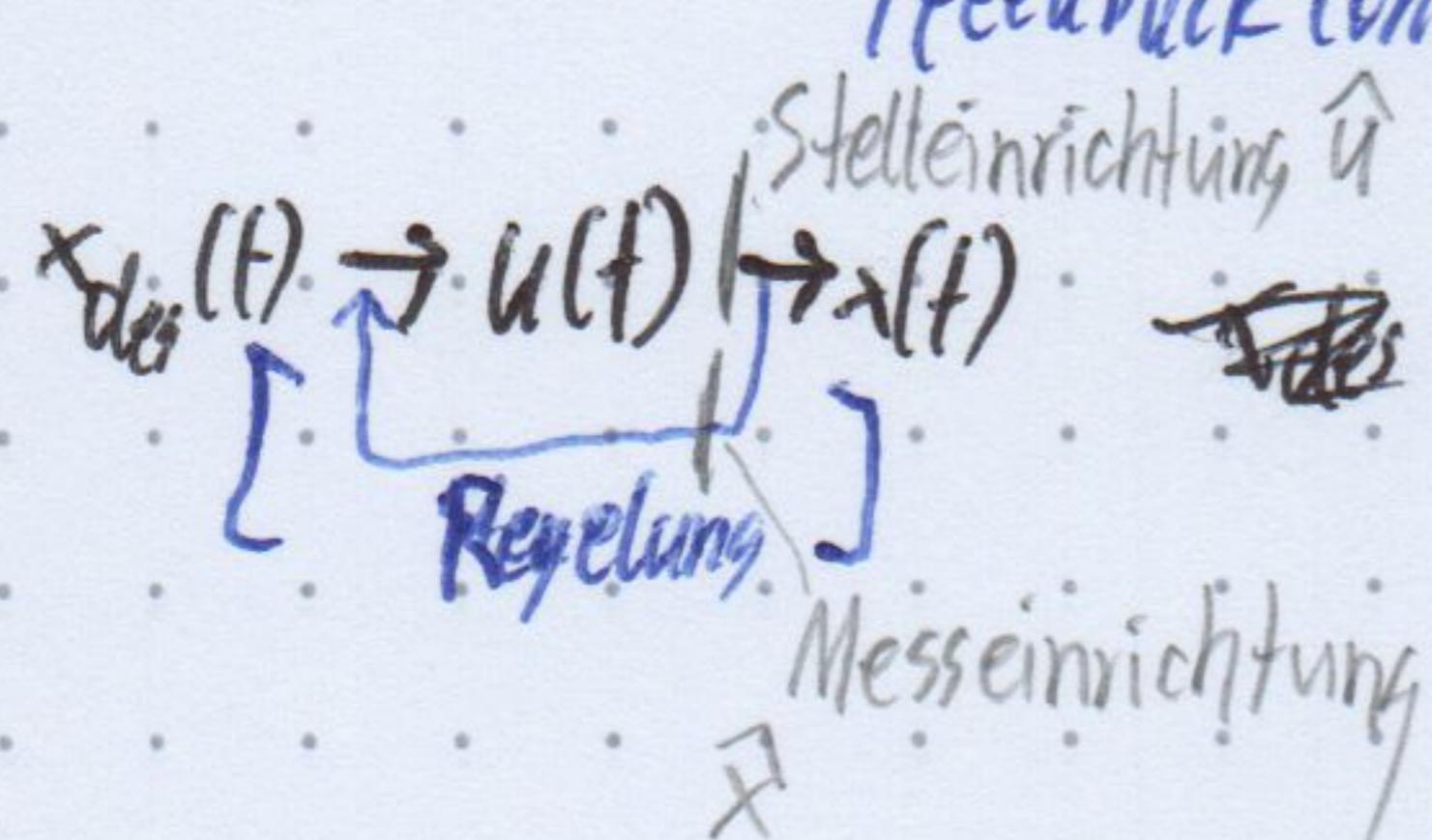
$x_{des}(t)$ -Sollwerttrajektorie

2. $\min \|x_{des}(t) - x(t)\|$

~~Regelung~~ ~~Steuern~~
Open Closed - Loop control

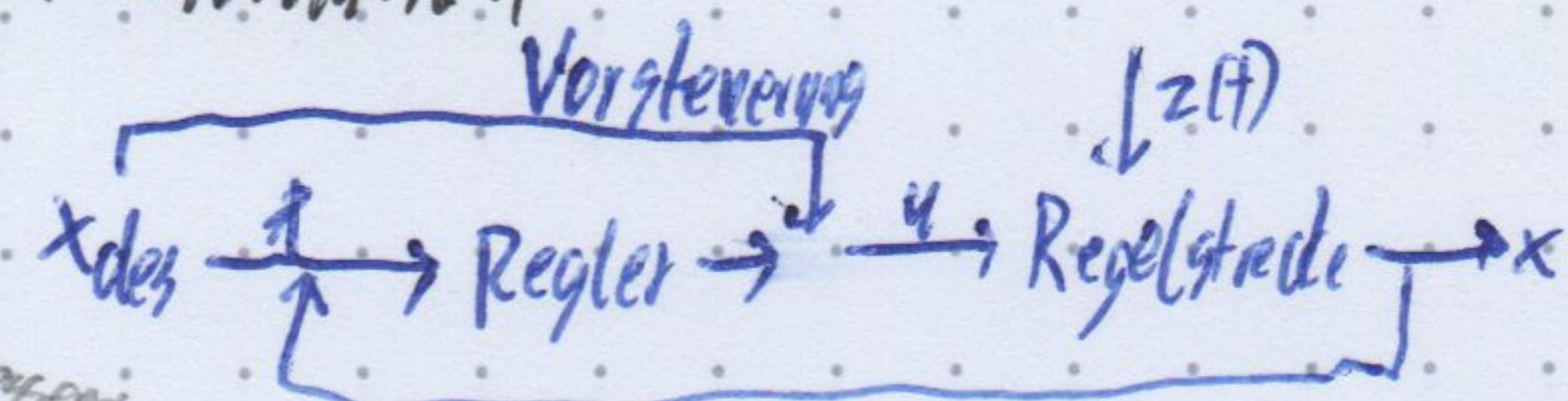
Steuerung \leftrightarrow Regelung

open closed - loop control
/ feedback control



Vorausicht \Rightarrow Filtergemessen
nicht alles messbar
verzögert

Kombination



Regelung linearer Systeme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

lineare Regelung $u(t) = Kx(t)$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$$

Eigenwerte bestimmen Verhalten

Kritische Dämpfung

$$\operatorname{Im}(\lambda_{\text{krit}}) = 0 \Rightarrow K_{D,\text{krit}}$$

$K_D < K_{D,\text{krit}}$ schwingt unter kritische Dämpfung
 $>$ "nicht über"

PD-Regler - Proportional, Derivative

$$u(\varphi, \dot{\varphi}) = k_p (\varphi_s - \varphi) + k_D (\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi})$$

$e(t) \star$ Regeldifferenz $\dot{e}(t) \star$

$$x = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$u(t) = (-k_p - k_D)x(t)$$

! Regelfehler, wenn x_{des} kein Gleichgewichtspunkt

\Rightarrow modellbasierte Vorsteuerung

\Rightarrow PID-Regler

$$u = k_D (\varphi_0 - \varphi) + k_p (\varphi_0 - \varphi) + k_I \int_0^t (\varphi_0 - \varphi) dt$$

Messfehler (Modellparam.
Systemzustand)

andere Fehler
~~st. suchen~~

Schätzung Fehler

$$x \pm \delta_x$$

Lanilog $\Rightarrow S_x = \text{KB} 0,5 \cdot \text{ kleinste Maßeinheit}$

$I_{\text{digital}} \Rightarrow S_A = \text{kleinste Maßeinheit}$

Modell Numerik Impl. Randw

Rechnen

$+,- \Rightarrow$ Messfehler addieren

$$(x \pm \delta_x) \cdot (y \pm \delta_y) = x \cdot y \pm (e_x + e_y) \cdot x \cdot y$$

| relative Fehler $\frac{\delta x}{x}$

Konventionen

Messfehler nur 1 Ziffer

• Wert • bis inkl erste fehlerbehaftete Stelle

mehrere Schritte \rightarrow erst am Ende runden
Fare $\exists S \geq 0$

cosinus, exp \Rightarrow über Reihendarstellung

Ausdruckskraft gewöhnliche Differentialgleichungen

Das Verhalten von Zuständen

von 1 unabhängigen Variable abhängt.

typischerweise Zeit.

⇒ Partielle Differentialgleichungen?

$$0 = f(x, t, h(x, t), \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}, \dots)$$

Beispiele

Navier-Stokes Gleichung - Strömungsverhalten Flüssigkeiten

$$P \frac{Dv}{Dt} = P \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \cdot v \right)$$

Schrödinger-Gleichung - zeitliche Änderung quantenmechanischer Zustand

Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung - optimale Feedback-Regelung

$$\frac{\partial r(t, \lambda)}{\partial t} = \min_u \left\{ L(t, \lambda, u) + \left(\frac{\partial r(t, \lambda)}{\partial x} \right)^T \cdot f(t, \lambda, u) \right\}$$

BRUNNEN

$x \in \mathbb{R}^n$ 且 $\dot{x} = f(t, x, u)$

Schwingung von Brücke h, Roboter mit elastischen Gelenken, Autostrukturen bei Aufzug, Wellenabschwächung Handy

Systemidentifikation

Ziel: Modell f_{θ} : $x \rightarrow y$

- Eingangsgröße
- Parameter Θ
- Klasse von Strukturen

1. Sammle Daten

2. Wähle Klasse f_{θ}

3. Param. Identifikation

Datenblatt - Fertigungstoleranzen

messen - Fehler

- nicht modellierbar

Aspekte z.B.

Reibung

V. last, C⁰ abhängig

Reibmoment

$T_r(q) = F_x + F_z e^{-\frac{q}{\mu}} + F_y q$

Antrieb

cable, Getriebe

Verformbare Objekte

White box

feste Struktur

Black box

Strukturvariablen

Grey Box

Mischung

Klasse f_{θ} durch Domänenwissen

Parameterschätzung

aus $y_i = f(x_i)$ $i=1, \dots, N$ $D = \{y_i, x_i\} | i=1, \dots, N$

$$L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l(y_i - f_{\theta}(x_i))$$

|
e_i
Func. mit min. bei 0
typischerweise konkav

Regressions-/Minimierungsproblem

$$\min_{\theta} L(\theta)$$

Häufige Spezialfälle:

Non linear Least Squares Regression

$$l(e_i) = e_i T e_i = \|e_i\|_2^2$$

Lineare "

Modell von Form

$$f_{\theta}(x) = \theta^T \psi(x)$$

| Feature Func.

$\Rightarrow L(\theta)$ streng convex

analytische Lösung $\psi = (\psi(x_1), \dots)$

$$\Psi \Psi^T \cdot \theta = \Psi \gamma \quad \gamma = (y_1, \dots)^T$$

ohne physikalische Prinzipien

Black Box Lineur Least Squares Regression

Wahl Feature function (Statistical Machine Learning)

Monome

$$x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots$$

Cosinusfunktion

$$\cos(w_i^T x + b_i)$$

zufällig aus

| gleichverteilung $U(0, 2\pi)$

| Gauß'sche Verteilung $N(0, I)$

...

Neuronale Netze ("adaptive" Features) Kette von Modellen

$$h_0 = x / \text{nicht-lineare Funktion}$$

$$h_k = \phi(W_{k-1} h_{k-1}(x))$$

$$f_{\theta}(x) = W_k h_k(x)$$

- aufwändig

+ gut $k \geq 2$ kann bei geeignetem ϕ jede stetige func. auf kompaktem Intervall approximieren

verrauschte Daten \Rightarrow Filtern / Smoothing

? nicht zu viel! Zeitverzögerung
 \Rightarrow filtern, Kalman Smoothing

nur $\varphi, \dot{\varphi}$ nicht messbar \Rightarrow Simuliere System (Euler) numerisch

$$\hat{x}_{\theta, t+1} (= \hat{x}_{\theta, t} + \Delta t f_{\theta}(\hat{x}_{\theta, t})) \quad \hat{x}_{\theta, 0} = x_0$$

$$\min_{\theta} \sum_{t=1}^T l(x_t, \hat{x}_{\theta, t})$$

- komplex

Fehlerquellen

Modellierungsfehler

Param.
Annahmen

Fehlerakkumulation

Approximationsfehler

iterative Berechnungsverfahren

Rundungsfehler

Programmierfehler

Verifikation - formulier Korrektheitsnachweis \Rightarrow Validierung - ausreichende Glaubwürdigkeit

auf Spec

- komplex

{ max Zeit

- kein "wahres" Model
braucht

Lang Error

Tests

Beispiele analysieren = Intuition?

weiche Faktoren =

der
impl

Syntaktische Fehlerfreiheit

Plausibilitätsprüfung Spezialfälle

Numerische Korrektheit Vergleich analytische Lösung

Reproduktion bestachtes Verhalten

Verhersage fiktives

Verhaltensanomalie seines Modells

Extremsituationen

Param variation / sensitivität

zu plausiblen Variationen

Model

Konsistenz Modellannahmen

Ausreichende DetAILiertheit

Gemäßigkeit Param.

Berechnungsverfahren

geeignetheit (implizit explizit)

Approximationsfehler (Ordnung, Schrittweite)

Rundungsfehler (Auslöschung)

Validierung Parameterschätzung

Fehlerquellen / Klassen

systematisch (falsche Annahmen
Kalibrierung, Messgeräte)

zufällig (Rauschen)

\Rightarrow mehrmals schätzen $\theta^i = [\theta_1^i, \dots, \theta_{d_\theta}^i]$ NWert

statistische Analyse

Annahme: Param unabhängig normalverteilt

$$\mu_\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta^i \quad \sigma_{\theta,k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_k^i - \mu_{\theta,k})^2$$

Ichterschätzung

$$\theta_k \approx \mu_{\theta,k} \pm \sigma_{\theta,k}$$

zu 99,7% in

$$[\mu_{\theta,k} - 3\sigma_{\theta,k}, \mu_{\theta,k} + 3\sigma_{\theta,k}]$$

genauere Gesamtvarianz

$$\Sigma_\theta = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_i - \mu_\theta)(\theta_i - \mu_\theta)^T$$

$$\sigma_{\theta,k}^2 = \Sigma_{\theta,kk}$$

$$\Sigma_{\theta,ij} = \Sigma_{\theta,kj} \text{ Korrelation } \theta_j, \theta_k$$

Overfitting auf $D = \{(y_i, x_i)\}_{i=1}^{N-1}$

\Rightarrow teile D inter. extrapolieren
 D_{train} D_{test}

zufällige Aufteilung z.B. 80% 20%

ähnliche Fehler

nach Trajektorien (Test anderer Bereich Zustand)

- großer Fehler in Test bei Black Box Modellen