

作业 L2.4 - L2.6: CFG 与二义性

2025 年 12 月 16 日

题目 1

分别构造产生下列语言的 CFG:

- (1) $\{1^n 0^m \mid n \geq m \geq 1\}$
- (2) $\{1^n 0^{2m} 1^n \mid n, m \geq 1\}$
- (3) $\{1^n 0^n 1^m 0^m \mid n, m \geq 1\}$
- (4) 含有相同个数的 0 和 1 的所有 01 串
- (5) 字母表 $\{1, 2, 3\}$ 上的所有正则表达式

Solution.

(1) $\{1^n 0^m \mid n \geq m \geq 1\}$

思路：先生成至少一个匹配对 10，再在左侧额外补若干个 1。

$$S \rightarrow 1S \mid T, \quad T \rightarrow 10 \mid 1T0.$$

其中 T 生成 $1^m 0^m$ ($m \geq 1$), S 在其左侧再补若干个 1, 得到 $1^{m+k} 0^m$ 。

(2) $\{1^n 0^{2m} 1^n \mid n, m \geq 1\}$

思路：外层保证两侧 1 的个数相等且至少 1, 对中间部分生成偶数个 0 且至少 2。

$$S \rightarrow 1A1, \quad A \rightarrow 1A1 \mid B, \quad B \rightarrow 00 \mid 00B.$$

B 生成 0^{2m} ($m \geq 1$), A 可继续对称包裹额外的 1。

(3) $\{1^n 0^n 1^m 0^m \mid n, m \geq 1\}$

两个独立的“相等计数”串连接：

$$S \rightarrow UV, \quad U \rightarrow 10 \mid 1U0, \quad V \rightarrow 10 \mid 1V0.$$

其中 U 生成 $1^n 0^n$ ($n \geq 1$), V 生成 $1^m 0^m$ ($m \geq 1$)。

(4) 相同个数的 0 与 1 的所有 01 串

经典文法（允许任意穿插）：

$$S \rightarrow SS \mid 0S1 \mid 1S0 \mid \epsilon.$$

该文法生成所有 0 与 1 数目相等的二进制串。

(5) $\{1, 2, 3\}$ 上的所有正则表达式

把正则表达式按“并、连接、星号、括号、字面符号、空串”归纳生成：

$$\begin{aligned} R &\rightarrow R + C \mid C, \\ C &\rightarrow CF \mid F, \\ F &\rightarrow A^* \mid A, \\ A &\rightarrow (R) \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \epsilon. \end{aligned}$$

(若课程中不允许显式 ϵ 作为基本符号, 可去掉 $A \rightarrow \epsilon$, 改用其它约定。)

题目 2

对例 2 中的文法 G ，给出字符串 $w = \text{abbb aab bab a}$ （即 abbb aabbbaba ）的派生树，并利用该派生树找出该字符串的最左派生。

Solution.

课件“例 2”的文法为:

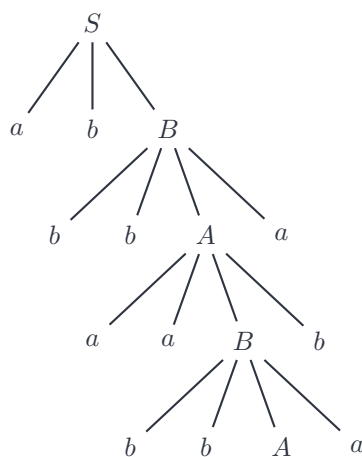
$$S \rightarrow abB, \quad A \rightarrow aaBb \mid \epsilon, \quad B \rightarrow bbAa.$$

题面字符串按连续写法为 $w = \text{abbbaabbaba}$ 。

一条成功派生（同时也是最左派生）：

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow abB \\ &\Rightarrow ab\,bbAa \\ &\Rightarrow ab\,bb\,aaBb\,a \\ &\Rightarrow ab\,bb\,aa\,bbAa\,b\,a \\ &\Rightarrow \mathbf{abbbbaabbaba} \quad (\text{用 } A \Rightarrow \epsilon). \end{aligned}$$

派生树 (用产生式展开顺序画出):



二义性与派生关系总结

题目 3

请总结：

- (1) 非二义性 CFG 的句型派生、最左/最右派生以及派生树之间的关系
- (2) 二义性文法中派生、最左/最右派生以及派生树之间的关系
- (3) 语言的固有二义性与文法的二义性之间的关系

Solution.

(1) 非二义性 CFG

- 对于同一个串 w ，**派生树唯一**（忽略同构的画法差异）。
- 由派生树可以唯一确定它的最左派生与最右派生（每一步展开当前最左/最右的非终结符）。
- 因为派生树唯一，所以最左派生、最右派生在“产生式选择序列”意义下也是唯一的（具体中间句型的书写可能等价重排，但结构不变）。

(2) 二义性文法

- 存在某个串 w 具有**至少两棵不同的派生树**。
- 不同派生树对应不同的最左派生/最右派生；反之，若存在两条不同的最左派生（或最右派生）导出同一终结串，则必然二义。
- 二义性体现在“结构”上：虽然都能导出同一串，但解析结构不同（例如不同的运算优先级/结合性）。

(3) 固有二义性 vs 文法二义性

- **文法二义性**：某个特定 CFG 是二义的（存在串有多棵派生树）。
- **语言固有二义性**：某个语言 L 的**所有** CFG 都是二义的；也就是说不存在能生成 L 的非二义 CFG。
- 因此：文法二义 \nRightarrow 语言固有二义（可能换个文法就不二义）；但语言固有二义 \Rightarrow 任意生成它的文法都二义。

题目 4

对例 7 给定的文法，采用穷举搜索法对字符串 `aab dabb`（即 `aabdabb`）进行解析。

Solution.

课件“例 7”中的文法（与课件给出的派生树相符）为：

$$S \rightarrow aAb \mid bBa, \quad A \rightarrow aAb \mid bBa, \quad B \rightarrow d.$$

目标串为 $w = aabdabb$ （即 $aab d a b b$ ）。

穷举搜索法（按“每层展开当前最左变量”的思路）

从根开始：

$$S \Rightarrow aAb$$

为了匹配以 aa 开头，继续展开最左变量 A 取 $A \Rightarrow aAb$ ：

$$aAb \Rightarrow aaAbb.$$

此时需要在中间产生 d ，选择 $A \Rightarrow bBa$ ：

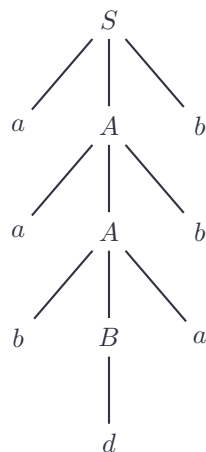
$$aaAbb \Rightarrow aabBabb.$$

最后用 $B \Rightarrow d$ ：

$$aabBabb \Rightarrow aabdabb,$$

匹配成功。

对应派生树：



最左派生序列（与上面的搜索路径一致）：

$$S \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAbb \Rightarrow aabBabb \Rightarrow aabdabb.$$