作业 L1.3 - L1.5：NFA/DFA 转换与 ϵ-消除

2025 年 12 月 16 日

题目 1

将如下 NFA 转换成等价的 DFA：

(a) 字母表 $\Sigma = \{0, 1\}$，状态 q_1 为初态，q_3 为终态。转移如图所示：q_1 上有 $0, 1$ 自环，且 $q_1 \xrightarrow{1} q_2$，$q_2 \xrightarrow{0,1} q_3$。

(b) 字母表 $\Sigma = \{a, b, c\}$，初态 A，终态 B。转移如图所示：$A \xrightarrow{\epsilon,c} B$，$A \xrightarrow{a,c} C$，$C \xrightarrow{\epsilon,b} A$，$C \xrightarrow{b} B$，$C \xrightarrow{c} C$。

Solution.

(a) 子集构造法

NFA 的转移：

$$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}, \quad \delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}, \quad \delta(q_2, 0) = \{q_3\}, \quad \delta(q_2, 1) = \{q_3\}, \quad \delta(q_3, 0) = \delta(q_3, 1) = \emptyset.$$

构造 DFA 的状态为 NFA 状态集合：

$$S_0 = \{q_1\}\ (\text{初态}), \quad S_1 = \{q_1, q_2\}, \quad S_2 = \{q_1, q_3\}, \quad S_3 = \{q_1, q_2, q_3\}.$$

接受态为包含 q_3 的集合：S_2, S_3。

转移表：

DFA 状态	0	1
$S_0 = \{q_1\}$	S_0	S_1
$S_1 = \{q_1, q_2\}$	S_2	S_3
$S_2 = \{q_1, q_3\}$	S_0	S_1
$S_3 = \{q_1, q_2, q_3\}$	S_2	S_3

(b) 含 ϵ 的子集构造法

先计算 ϵ-闭包：

$$\epsilon\text{-cl}(A) = \{A, B\}, \quad \epsilon\text{-cl}(B) = \{B\}, \quad \epsilon\text{-cl}(C) = \{A, B, C\}\ (\text{因}C \xrightarrow{\epsilon} A,\ A \xrightarrow{\epsilon} B).$$

DFA 初态为 $\epsilon\text{-cl}(\{A\}) = \{A, B\}$，并且凡是包含 B 的集合都是接受态（因为可通过 ϵ 到达终态）。

可达的 DFA 状态只有三个：

$$T_0 = \{A, B\}\ (\text{初态，接受}), \quad T_1 = \{A, B, C\}\ (\text{接受}), \quad T_\emptyset = \emptyset\ (\text{陷阱态，非接受}).$$

逐字母计算转移（$\delta_D(X, x) = \epsilon\text{-cl}(\text{move}(X, x))$），得到：

DFA 状态	a	b	c
$T_0 = \{A, B\}$	T_1	$T_\emptyset$	T_1
$T_1 = \{A, B, C\}$	T_1	T_0	T_1
$T_\emptyset = \emptyset$	$T_\emptyset$	$T_\emptyset$	$T_\emptyset$

题目 2

$\Sigma = \{a, b\}$，设计识别“以 abb 结尾”的 NFA，并将其转换成等价 DFA。

Solution.

NFA 设计（允许回退重新匹配）
取状态集合 $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$，其中 s_0 为初态，s_3 为终态。转移定义为：

$$\begin{aligned}
\delta(s_0, a) &= \{s_0, s_1\}, & \delta(s_0, b) &= \{s_0\}, \\
\delta(s_1, b) &= \{s_2\}, & \delta(s_1, a) &= \emptyset, \\
\delta(s_2, b) &= \{s_3\}, & \delta(s_2, a) &= \emptyset, \\
\delta(s_3, a) &= \emptyset, & \delta(s_3, b) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

直观上：s_1, s_2, s_3 分别表示“刚看到后缀的 a、ab、abb”。
等价 DFA（最短后缀法 / 子集构造的最小结果）
用 4 个状态表示“当前已匹配的最长后缀是 abb 的前缀”的长度：

$$q_0 : \epsilon, \quad q_1 : \mathsf{a}, \quad q_2 : \mathsf{ab}, \quad q_3 : \mathsf{abb}(\text{接受}).$$

转移表：

	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_1	q_0

终态只有 q_3，它恰好对应“读入串以 abb 结尾”。

题目 3

将题 1(b) 的 ϵ-NFA 转换成等价的**不含 ϵ-移动**的 NFA。

Solution.

对每个状态 p，令 ϵ-闭包为 $\epsilon\text{-cl}(p)$。消 ϵ 的标准做法是：

$$\delta'(p, x) = \epsilon\text{-cl}\Big(\bigcup_{r \in \epsilon\text{-cl}(p)} \delta(r, x)\Big), \qquad F' = \{p \mid \epsilon\text{-cl}(p) \cap F \neq \emptyset\}.$$

本题中 $F=\{B\}$，且

$$\epsilon\text{-cl}(A)=\{A,B\},\quad \epsilon\text{-cl}(B)=\{B\},\quad \epsilon\text{-cl}(C)=\{A,B,C\},$$

因此新终态为 $F'=\{A,B,C\}$（初态 A 也成为终态，对应原自动机可通过 ϵ 直接到达 B）。

计算 δ'：

δ'	a	b	c
A	$\{A,B,C\}$	$\emptyset$	$\{A,B,C\}$
B	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
C	$\{A,B,C\}$	$\{A,B\}$	$\{A,B,C\}$

该 NFA 不含 ϵ-边，且与原 ϵ-NFA 等价。