

作业 L2.12 - L2.13: 构造 PDA

2025年12月16日

前言：构造方法说明

本作业中所有题目均要求构造接受上下文无关文法（CFG）的下推自动机（PDA）。我们采用**空栈接受（Acceptance by Empty Stack）**的标准构造方法。

对于给定的 CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ ，构造 PDA

$$M = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, q, S, \emptyset),$$

其中转换函数 δ 定义如下：

- 非终结符展开规则**：对于每个产生式 $A \rightarrow \alpha \in R$ ，加入转换 $\delta(q, \epsilon, A) \ni (q, \alpha)$ 。
- 终结符匹配规则**：对于每个终结符 $a \in \Sigma$ ，加入转换 $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ 。

注：在下方的状态图中，**红色箭头**表示展开规则，**绿色箭头**表示匹配规则。

题目 1

构造 PDA 接受由文法 $S \rightarrow aSbb \mid aab$ 产生的语言。

Solution.

1. 构造转换函数 δ

Stack Operations (展开):

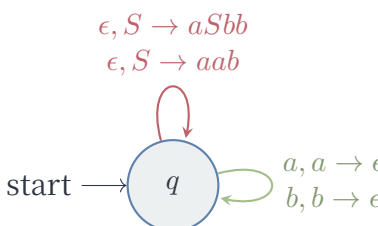
$$\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, aSbb), (q, aab)\}$$

Input Matching (匹配):

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\},$$

$$\delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$$

2. PDA 状态转移图



3. 分析

该 PDA 只有一个状态 q 。开始时栈内放入 S 。如果栈顶是 S ，PDA 猜测并将其替换为 $aSbb$ 或 aab ；如果栈顶是终结符且与输入符号一致，则消去栈顶符号。栈最终为空时接受。

题目 2

构造 PDA 接受由文法 $S \rightarrow aSSS \mid ab$ 产生的语言。

Solution.

1. 构造转换函数 δ

· 展开规则:

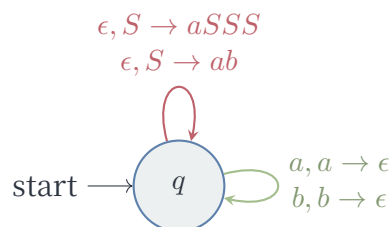
$$\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, aSSS), (q, ab)\}$$

· 匹配规则:

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\},$$

$$\delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$$

2. PDA 状态转移图



题目 3 多非终结符文法

构造对应如下文法的 PDA:

$$S \rightarrow aABB \mid aAA$$

$$A \rightarrow aBB \mid a$$

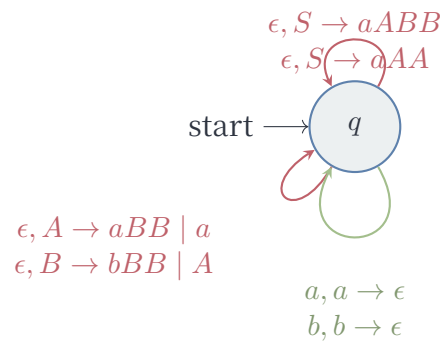
$$B \rightarrow bBB \mid A$$

Solution.

1. 转换函数 δ 详解

- S 的展开: $\delta(q, \epsilon, S) = \{(q, aABB), (q, aAA)\}$
- A 的展开: $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, aBB), (q, a)\}$
- B 的展开: $\delta(q, \epsilon, B) = \{(q, bBB), (q, A)\}$
- 终结符匹配: $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$;
 $\delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$

2. PDA 状态转移图



图注: 为了保持整洁, 部分相同左部的规则合并显示。

题目 4 相互递归文法

构造 PDA 接受由如下文法产生的语言:

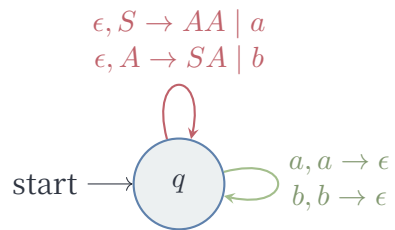
$$S \rightarrow AA \mid a, \quad A \rightarrow SA \mid b$$

Solution.

1. 转换函数 δ 表

类型	输入	栈顶	动作 (栈变化)
展开	ϵ	S	$\rightarrow AA$
展开	ϵ	S	$\rightarrow a$
展开	ϵ	A	$\rightarrow SA$
展开	ϵ	A	$\rightarrow b$
匹配	a	a	$\rightarrow \epsilon$ (pop)
匹配	b	b	$\rightarrow \epsilon$ (pop)

2. PDA 状态转移图



此图展示了 PDA 如何在单状态 q 下，通过非确定性选择（红色路径）不断重写栈顶符号，或者通过匹配（绿色路径）消去终结符。当输入读完且栈为空时接受。