作业 L0.3 - L1.2：证明与 DFA

2025年12月16日

L0.3：证明题

题目 1

试证明：每个包含两个或两个以上结点的图应包含有相等度数的两个结点。

Solution.

设图 G 有 $n \geq 2$ 个结点。每个结点的度数属于集合 $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$。

注意不可能同时存在度数为 0 的结点与度数为 $n-1$ 的结点：若某结点度为 $n-1$，它与所有其他结点相邻，则不存在孤立结点（度为 0）。

因此，n 个结点的度数只能取自 $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ 或 $\{1, 2, \ldots, n-1\}$，无论哪种情况都只有 $n-1$ 种可能取值。由抽屉原理（鸽巢原理），n 个结点中必有两个结点度数相同。

题目 2

用反证法证明：素数有无穷多个。

Solution.

反证。假设素数只有有限多个，记为 $p_1, p_2, \ldots, p_k$。考虑数

$$N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1.$$

对任意 i，N 除以 p_i 余 1，因此没有任何 p_i 能整除 N。于是 N 要么本身是素数（与“素数只有 k 个”矛盾），要么有某个素因子 q，但 q 不在 $\{p_1, \ldots, p_k\}$ 中（同样矛盾）。故假设不成立，素数有无穷多个。

题目 3

设 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ 为前 n 个自然数之和，$C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 为前 n 个立方数之和。通过对 n 的归纳证明下列等式，从而证明 $C_n = S_n^2$。

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Solution.

(1) 证明 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$。
当 $n = 1$ 时，$S_1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ 成立。假设对某个 n 成立，即 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$。则

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

故对 $n+1$ 也成立，从而对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

(2) 证明 $C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$。
当 $n = 1$ 时，$C_1 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 成立。假设对某个 n 成立：

$$C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

则

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

故对 $n+1$ 成立，从而对所有 n 成立。由 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ 得

$$C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_n^2.$$

L1.1：DFA 基础

题目 4

下图给出了两台 DFA M_1 和 M_2 的状态图。回答下述关于这两台机器的问题：

(a) 它们的起始状态是什么？它们的接受状态集是什么？

(b) 对输入 aabb，它们经过的状态序列是什么？

(c) 它们接受字符串 aabb 吗?

(d) 它们接受字符串 ϵ 吗?

Solution.

(a) 从状态图上的入箭头可见，两台机器起始状态均为 q_1。
接受状态为双圈状态:

$$F_1 = \{q_2\}, \qquad F_2 = \{q_1, q_4\}.$$

(b) 对输入 aabb:

- M_1: $q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_1$。
- M_2: $q_1 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_4$。

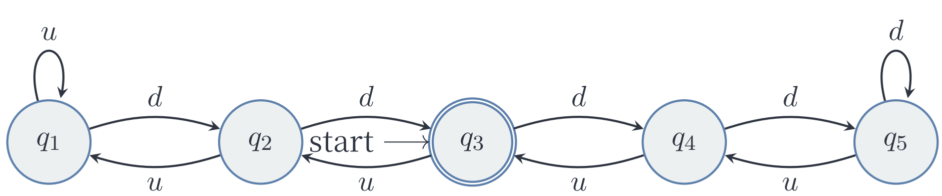
(c) M_1 最终停在 $q_1 \notin F_1$，因此不接受 aabb；M_2 最终停在 $q_4 \in F_2$，因此接受 aabb。
(d) ϵ 时机器停在起始状态 q_1。因此 M_1 不接受 ϵ（$q_1 \notin F_1$），而 M_2 接受 ϵ（$q_1 \in F_2$）。

题目 5

DFA M 的形式化描述为 $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{u, d\}, \delta, q_3, \{q_3\})$，其中 δ 由下表给出。试画出这台机器的状态图。

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

Solution.



初态为 q_3，接受态为 $\{q_3\}$。

题目 6

画出识别下述语言的 DFA 状态图（字母表均为 $\{0, 1\}$）：

(a) $\{w \mid w$ 从 1 开始且以 0 结束$\}$

(b) $\{w \mid w$ 含有至少 3 个 1$\}$

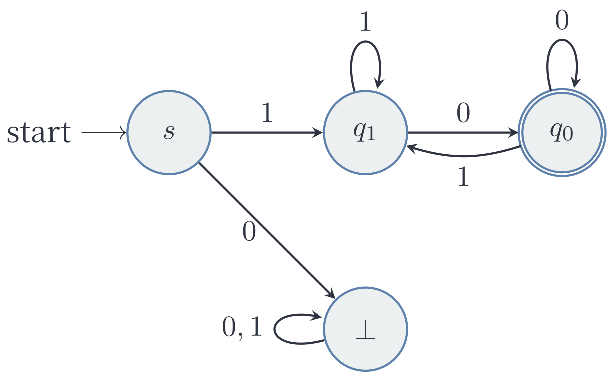
(c) $\{w \mid w$ 含有子串 0101$\}$

(d) $\{w \mid |w| \geq 3$ 且第 3 个符号为 0$\}$

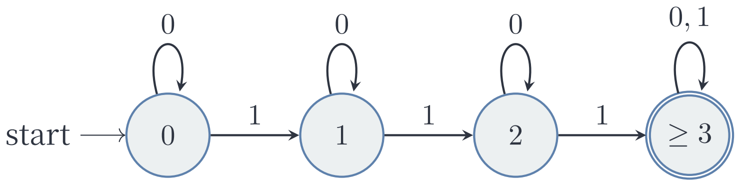
(e) $\{w \mid w$ 的奇数位置均为 1$\}$

Solution.

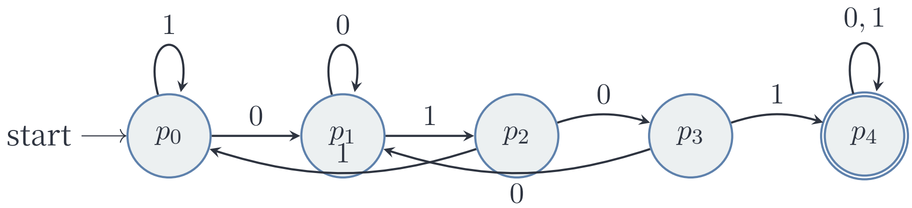
(a) 从 1 开始且以 0 结束



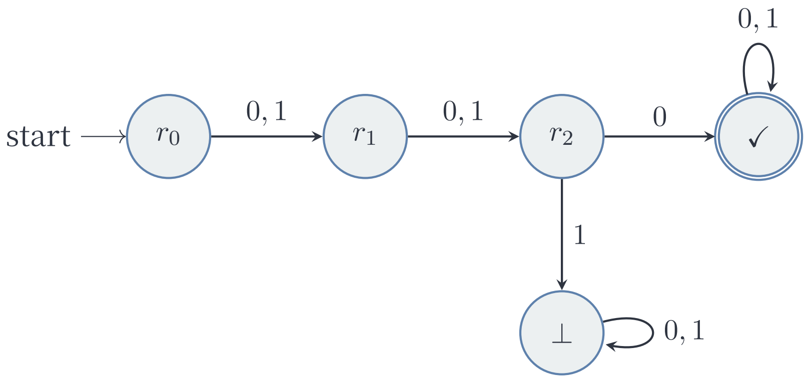
(b) 至少 3 个 1



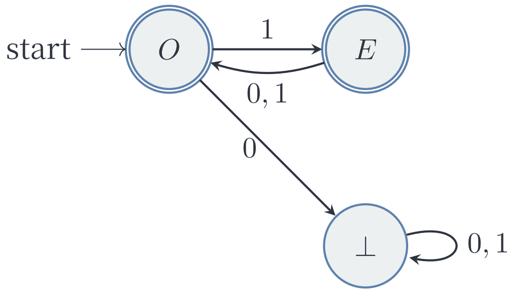
(c) 含有子串 0101



(d) 长度不小于 3 且第 3 个符号为 0



(e) 奇数位置均为 1



其中 O 表示“下一位是奇数位置”， E 表示“下一位是偶数位置”。空串 ϵ 在 O 上直接接受。

L1.2：DFA 构造（交 / 补）

题目 7

下面每个语言都是两个简单语言的交。构造识别这些语言的 DFA（字母表为 $\{a, b\}$）：

(a) $\{w \mid w$ 含有至少 3 个 a 和至少 2 个 $b\}$

(b) $\{w \mid w$ 含有偶数个 a 且含有 1 个或 2 个 $b\}$

(c) $\{w \mid w$ 从 a 开始并且最多有 1 个 $b\}$

(d) $\{w \mid w$ 含有奇数个 a 并且以 b 结束$\}$

(e) $\{w \mid |w|$ 为偶数并且有奇数个 $a\}$

Solution.

以下给出“状态含义 + 转移表”的构造（均为饱和计数/直积构造，直接可画成状态图）。

(a) 至少 3 个 a 且至少 2 个 b

取状态集合 $Q = \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$，第一维记录 a 的个数（3 表示 ≥ 3），第二维记录 b 的个数（2 表示 ≥ 2）。初态 $(0, 0)$，接受态 $F = \{(3, 2)\}$。转移为饱和加一：

$$\delta\big((i, j), a\big) = \big(\min(i + 1, 3), j\big), \qquad \delta\big((i, j), b\big) = \big(i, \min(j + 1, 2)\big).$$

(b) 偶数个 a 且 b 的个数为 1 或 2

取状态为 (p,k)，其中 $p\in\{E,O\}$ 表示 a 的奇偶性，$k\in\{0,1,2,\geq 3\}$ 表示 b 的个数（≥ 3 为陷阱态）。初态 $(E,0)$，接受态 $F=\{(E,1),(E,2)\}$。转移表:

状态	a	b
$(E,0)$	$(O,0)$	$(E,1)$
$(O,0)$	$(E,0)$	$(O,1)$
$(E,1)$	$(O,1)$	$(E,2)$
$(O,1)$	$(E,1)$	$(O,2)$
$(E,2)$	$(O,2)$	$(E,\geq 3)$
$(O,2)$	$(E,2)$	$(O,\geq 3)$
$(E,\geq 3)$	$(O,\geq 3)$	$(E,\geq 3)$
$(O,\geq 3)$	$(E,\geq 3)$	$(O,\geq 3)$

(c) 从 a 开始且最多 1 个 b

状态集合 $\{s,A_0,A_1,\perp\}$，s 表示尚未读入符号；A_0 表示已以 a 开始且目前 b 个数为 0；A_1 表示已以 a 开始且目前 b 个数为 1；$\perp$ 为陷阱态。初态 s，接受态 $F=\{A_0,A_1\}$。转移表:

状态	a	b
s	A_0	$\perp$
A_0	A_0	A_1
A_1	A_1	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

(d) 奇数个 a 且以 b 结束

状态表示 (p,ℓ)：$p\in\{E,O\}$ 为 a 的奇偶性，$\ell\in\{\#,a,b\}$ 为“最后读到的符号”（# 表示空）。初态 $(E,\#)$，接受态 $F=\{(O,b)\}$。转移规则:

$$\delta((p,\ell),a)=(\overline{p},a),\qquad \delta((p,\ell),b)=(p,b),$$

其中 $\overline{E}=O$，$\overline{O}=E$。

(e) 长度为偶数且 a 的个数为奇数

状态表示 (L,P)：$L\in\{E,O\}$ 表示长度奇偶性，$P\in\{E,O\}$ 表示 a 的奇偶性。初态 (E,E)，接受态 $F=\{(E,O)\}$。转移:

$$\delta((L,P),a)=(\overline{L},\overline{P}),\qquad \delta((L,P),b)=(\overline{L},P).$$

题目 8

下述每个语言都是一个简单语言的补。构造识别这些语言的 DFA（字母表为 $\{a,b\}$）：

(a) $\{w \mid w \text{ 不含子串 } ab\}$

(b) $\{w \mid w \text{ 中既不含子串 } ab \text{ 也不含子串 } ba\}$

(c) $\{w \mid w \text{ 是不在 } a^*b^* \text{ 中的任意串}\}$

(d) $\{w \mid w \text{ 是恰好不含 2 个 } a \text{ 的任意串}\}$

Solution.

(a) 不含子串 ab

状态集合 $\{q_0, q_1, \perp\}$：q_0 表示“当前未处于刚读到 a 的状态”（安全），q_1 表示“最后一个符号是 a”（若再读 b 就违例），$\perp$ 为已出现 ab。初态 q_0，接受态 $F = \{q_0, q_1\}$。转移表：

状态	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

(b) 既不含 ab 也不含 ba

该语言等价于“全是 a 的串”或“全是 b 的串”（以及空串）。状态集合 $\{s, A, B, \perp\}$，初态 s，接受态 $F = \{s, A, B\}$。转移表：

状态	a	b
s	A	B
A	A	$\perp$
B	$\perp$	B
$\perp$	$\perp$	$\perp$

(c) 不在 a^*b^* 中

一个串不在 a^*b^* 中当且仅当出现过某个位置先读到 b，之后又读到 a（即包含子串 ba）。状态集合 $\{q_0, q_1, q_\checkmark\}$：$q_0$ 表示尚未见到 b；q_1 表示已经进入 b^* 阶段（见过 b）；$q_\checkmark$ 表示已出现 ba。初态 q_0，接受态 $F = \{q_\checkmark\}$。转移表：

状态	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	$q_\checkmark$	q_1
$q_\checkmark$	$q_\checkmark$	$q_\checkmark$

(d) 恰好不含 2 个 a

即接受所有 a 的个数不等于 2 的串。取状态 $\{0, 1, 2, \geq 3\}$ 记录 a 的个数（≥ 3 饱和），初态 0，接受态 $F = \{0, 1, \geq 3\}$（唯一拒绝态为 2）。转移：

$$\delta(k, b) = k, \qquad \delta(k, a) = \min(k + 1, 3).$$