

运用贝叶斯模型计算恒星速度弥散

Suiran

2023 年 10 月 23 日

1 单参数模型

1.1 模型

根据样本数据，猜测恒星的视向速度满足正态分布，似然分布为：

$$\begin{aligned} p(y|\sigma^2) &\propto \sigma^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2\right) \\ &= (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} v^2} \end{aligned}$$

由于正态分布的共轭先验分布为逆伽玛分布，故可以假定先验分布的形式为：

$$p(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\sigma^2}$$

其中 α, β 为先验的超参数，我们可以根据经验获取先验分布的 σ 值，从而求得超参数 α, β 。对于 σ 的值，我们取为 20，根据伽玛分布的期望、方差和超参数的关系 $\sigma_0^2 = \frac{\beta}{\alpha-1}$, $[\sigma_0^2 - (\sigma_0 - 10)^2]^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ，可以近似的求出超参数。由以上先验分布和似然分布可以得后验分布：

$$p(\sigma^2|y) \propto p(y|\sigma^2)p(\sigma^2) = (\sigma^2)^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)} \exp -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{nv^2}{2} + \beta\right)$$

即 $\sigma^2|y$ 也服从逆伽马分布，其参数为 $(\alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \beta' = \frac{nv^2}{2} + \beta)$ 。

1.2 程序

另附