数值积分作业

2024 年 3 月 14 日

请提交源代码和红字描述的结果，每个作业中的（1）（2）……是提供思路和流程，并非需要提交的结果。

1 作业 1：

（1）已知冷暗物质（cold dark matter，简称 CDM）密度场的功率谱为

$$P_{\rm CDM}(k) = A_s k^{n_s} T^2(k) \tag{1}$$

其中 A_s 是一个归一化系数，通过观测数据确定。$n_s = 0.96$，$T(k)$ 是 transfer function，从给定的表格中插值得到。

平滑尺度 R 的密度起伏的 variance 为：

$$\sigma^2(R) = \int_0^\infty \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} P_{\rm CDM}(k) W^2(k,R) dk, \tag{2}$$

其中窗函数

$$W(k,R) = \frac{3[\sin(kR) - (kR)\cos(kR)]}{(kR)^3} \tag{3}$$

为实空间中半径为 R 的 top-hat 函数在傅里叶空间里的形式。记 $\sigma(R = 8h^{-1}{\rm Mpc}) = \sigma_8$，观测表明，$\sigma_8 = 0.82$。

先设 $A_s = 1$，取 $R = 8h^{-1}$ Mpc，$h = 0.6774$，从 Eq. (2) 计算出 $\sigma^2(R = 8h^{-1}{\rm Mpc})$，然后用观测的值 $(0.82)^2$ 除以这个计算出来的结果，即得到归一化系数 A_s。确定 A_s 之后，**将 $P_{\rm CDM}(k)$ 作为 k 的函数画出来，k 的取值范围为 $10^{-5} - 10^3$ Mpc^{-1}。**

提示：实际积分 Eq. (2) 时，不用真的从 0 积分到无穷大，从 $k = 10^{-5}$ 积分到 10^5 即可，或者自己试一试看取什么范围结果就已经收敛。

```python
# 开始把需要用到的package或者其中的function先导入
import numpy as np
from scipy.interpolate import interp1d


#读入transfer function的表格，用于插值。注意忽略第一行，因为那一行是用于说明的文字
data=np.loadtxt('./transfer-function.txt',skiprows=1)


#data的第一列是k，第二列是T(k)，k是*对数均匀*分割的，同时T(k)本身的数量级涵盖范围较广。为了
#使得插值更加准确，都取对数，以使数据更加平滑
data_lgk=np.log10(data[:,0])
data_lgTk=np.log10(data[:,1])

#先定义插值函数，插值方式选择三次样条插值"cubic"
lgTk_interp=interp1d(data_lgk,data_lgTk,kind='cubic')

#然后从插值函数定义一个Tk，输入k之后返回插值得出的T(k)。后面的[()]符号是因为interp1d函数默认返回一个矩阵，
#即使只有一个元素也是矩阵类型，有时做函数使用的时候不方便。[()]可以把只有一个元素的矩阵转换为标量。
def Tk(k):
    return 10**lgTk_interp(np.log10(k))[()]



#然后Tk就可以作为函数使用，给出任意k对应的Tk。

#e.g. k=1e-3
k=1e-3
a=Tk(k)
print('k=',k,'Tk=',a)

#e.g. k=10.0
k=10.0
a=Tk(k)
print('k=',k,'Tk=',a)
```

图 1: Python 插值使用举例（如运行程序时遇到问题，可以删掉中文注释）。

（2）温暗物质（warm dark matter，简称 WDM）的功率谱为:

$$P_{\rm WDM}(k) = P_{\rm CDM}(k)T^2_{\rm WDM}(k), \tag{4}$$

其中

$$T_{\rm WDM}(k) = (1 + (\alpha k)^{2\mu})^{-5/\mu}, \tag{5}$$

$\mu = 1.12$,

$$\alpha = 0.049 \left(\frac{m_{\rm WDM}}{\rm keV}\right)^{-1.11} \left(\frac{\Omega_{\rm WDM}}{0.25}\right)^{0.15} \left(\frac{h}{0.7}\right)^{1.22} h^{-1}\ [{\rm Mpc}]. \tag{6}$$

取 $\Omega_{\rm WDM} = \Omega_m = 0.32$，$m_{\rm WDM} = 10$ keV，将 Eq. (2) 中的 $P_{\rm CDM}(k)$ 替换成 $P_{\rm WDM}(k)$，用（1）中同样的步骤，先确定 A_s，**然后再画出 $P_{\rm WDM}(k)$**。

相仿的，**把 $m_{\rm WDM} = 1$ keV 和 0.1 keV 的 $P_{\rm WDM}(k)$ 也画出来。**

图 1 中给出了一个 Python 使用插值函数的例子，图 2 中给出了一个 Python 使用积分函数的例子，作为参考。

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import quad


#被积函数只有自变量x，无参数
def fx1(x):
    return np.sin(x)

a=0.0
b=np.pi/2

# quad返还积分结果I和估计的误差err，我们只需要积分结果即可
I,err=quad(fx1,a,b,epsrel=1e-3)

print('int_0_^pi/2 sin(x)dx=',I)


#被积函数除了自变量x之后，还有一个参数omega。
def fx2(x,oemga):
    return np.sin(omega*x)

a=0.0
b=np.pi/2

omega=2.3

I,err=quad(fx2,a,b,args=(omega),epsrel=1e-3)

print('int_0_^pi/2 sin(2.3x)dx=',I)
```

图 2: Python 积分函数 quad 使用举例（如运行程序时遇到问题，可以删掉中文注释）。

2 作业 2:

暗物质晕的质量函数记为

$$\frac{dn}{dM}(M,z),$$

是质量 M 和红移 z 的函数。

（1）从提供的 dn/dM 的列表（单位是 $M_\odot^{-1}\mathrm{Mpc}^{-3}$），使用二维插值的办法，给出任意 M,z 时的质量函数 $dn/dM(M,z)$;

（2）使用数值积分，计算出 collapse fraction

$$f_{\rm coll}(z)=\frac{1}{\rho_m}\int_{M_{\rm min}(z)}^{\infty}M\frac{dn}{dM}dM,$$

其中 $\rho_m=\rho_c\Omega_m$，$\Omega_m=0.32$，$\rho_c=2.7752\times10^{11}h^2\ M_\odot\mathrm{Mpc}^{-3}$，$h=0.6774$，$M_{\rm min}=2.8\times10^9(1+z)^{-3/2}\ M_\odot$；

（3）利用数值微分，计算出 collapse fraction 对红移的导数

$$\frac{df_{\rm coll}}{dz},$$

并进一步计算出宇宙平均的恒星形成率密度（star formation rate density, SFRD）

$$\mathrm{SFRD}(z)=f_*\frac{\Omega_b}{\Omega_m}\rho_m\frac{df_{\rm coll}}{dz}\frac{dz}{dt},$$

其中

$$\frac{dz}{dt}=-(1+z)H(z)$$

$H(z)=H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3+\Omega_\Lambda}$，$\Omega_\Lambda=0.68$，$\Omega_b=0.048$，$H_0=67.72$ km s^{-1} Mpc^{-1}，$f_*=0.1$。

（4）从提供的星系谱能量分布（spectrum energy distribution, SED）$s(\nu)$ 的列表（单位是 erg s^{-1} Hz^{-1} $(M_\odot\mathrm{yr}^{-1})^{-1}$），利用一维插值给出任意频率的 $s(\nu)$；

（5）利用数值积分，计算出红移 $z=5-30$ 之间的星系对**今天的宇宙**贡献的背景辐射

$$J(\nu)=\frac{1}{4\pi}\int_5^{30}\epsilon(\nu',z')\frac{cdz'}{H(z')(1+z')}$$

其中 $\nu'=\nu(1+z')$，$\epsilon(\nu,z)=s(\nu)\times\mathrm{SFRD}(z)$。

画出 $J(\nu)$ 作为波长的函数，波长范围取 0.1-10 μm。

（6）重复（5），但是在其中加上一项星系际介质对频率高于 Lyα 的辐射的吸收，

$$J(\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_5^{30} \epsilon(\nu', z') e^{-\tau(\nu', z')} \frac{c dz'}{H(z')(1+z')}$$

$$\tau(\nu, z) = \begin{cases} \infty & \nu > \nu_\alpha = 2.47 \times 10^{15}\ \text{Hz \& z>6} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

把新的 $J(\nu)$ 作为波长的函数画出来，波长范围取 0.1-10 μm。

3 作业 3:

假如有一个球形天体，本身可以产生辐射，也可以吸收辐射。产生辐射的 emissivity 为:

$$\epsilon(r) = e^{-r/r_1}, \tag{7}$$

r 是到球心的距离。

天体的密度为:

$$\rho(r) = \frac{1}{1 + (r/r_2)^2} \tag{8}$$

假设吸收正比于密度的平方，即

$$\kappa(r) = \kappa_0 \rho^2(r) \tag{9}$$

取天体半径 $R = 10$，$r_1 = 5$，$r_2 = 1$，$\kappa_0 = 2.5$，计算这个天体的面亮度（surface brightness）

$$\Sigma(s) = \int_0^{2\sqrt{R^2 - s^2}} \epsilon(r') e^{-\tau(x', s)} dx' \tag{10}$$

其中 s 是到圆心的距离，

$$r' = \sqrt{R^2 + x'^2 - 2Rx' \cos(\theta)} \tag{11}$$

而

$$\theta = \arcsin(s/R).$$

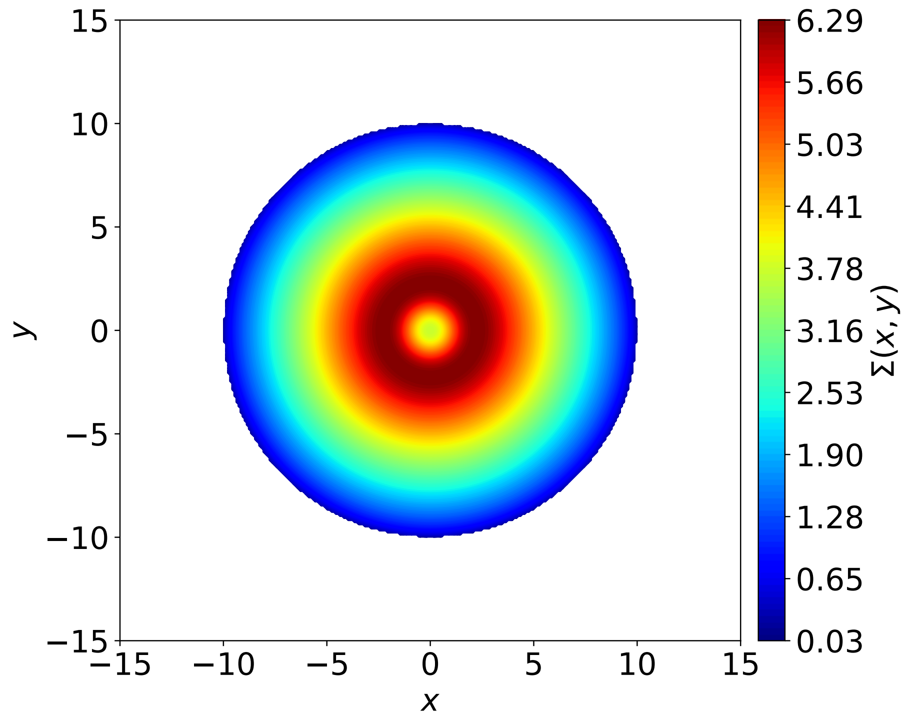

图 3: 把圆面上的面亮度画出来。

在距离球心 s 的视线上，离球表面 x' 距离处的光深为

$$\begin{aligned}\tau(x', s) &= \int_0^{x'} \kappa dx'' \\ &= \int_0^{x'} \kappa_0 \rho^2(r'') dx''\end{aligned} \tag{12}$$

而

$$r'' = \sqrt{R^2 + x''^2 - 2Rx'' \cos(\theta)} \tag{13}$$

画出 $\Sigma(s)$ 作为 s 的函数，即横坐标为 s，纵坐标为 $\Sigma(s)$。

作为参考，如果把 $\Sigma(x, y)$，其中 $\sqrt{x^2 + y^2} = s$ 画出来的话，是如图 3 样子。这个例子说明，由于吸收的效应存在，天体最亮的部分并不是最中心。

图 4 对这个计算物理图像进行了说明。图 5 则给了类似形式的积分的 Python 例子。

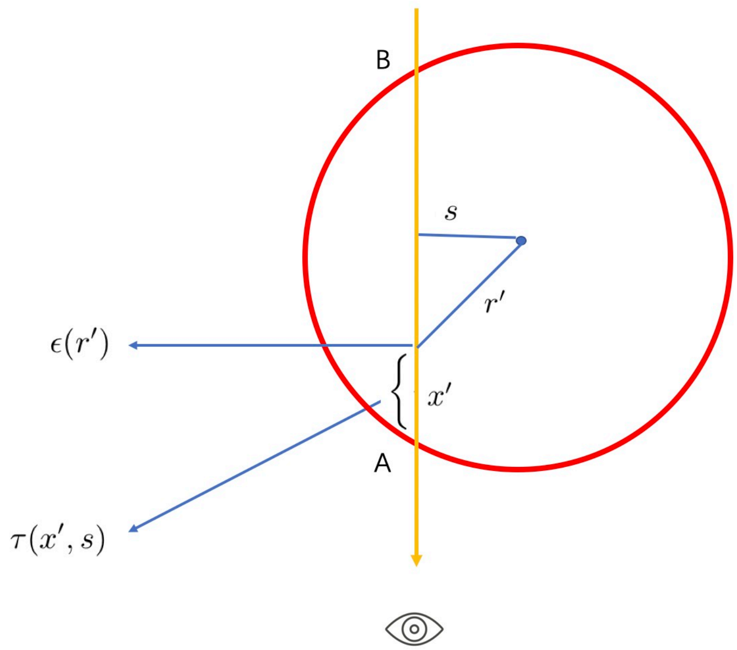

图 4: 图中带箭头的黄色线是一条视线，距离球心 s。观测者看到的辐射是沿着视线方向上球内部的介质的贡献之和，即图中 A 点和 B 点之间的介质。A 点到 B 点的距离是 $2\sqrt{R^2-s^2}$。A 和 B 之间的某点，距离 A 为 x'，到球心的距离是 $r'=\sqrt{R^2+x'^2-2Rx'\cos(\theta)}$（余弦定理，其中 $\theta=\arcsin(s/R)$），因此其 emissivity 是 $\epsilon(r')$。该 emissivity 被观测者接收到之前，被 A 到 $A+x'$ 之间的介质吸收，变为 $\epsilon(r')e^{-\tau(x')}$。$\tau(x')$ 是从 A 点到 $A+x'$ 之间介质的光深。假设 A 点和 $A+x'$ 点之间任意一点距离 A 为 x''，则该点离球心的距离为 $r''=\sqrt{R^2+x''^2-2Rx''\cos(\theta)}$，该点的密度为 $\rho(r'')$。则从 A 到 $A+x'$ 的光深为积分 $\tau(x')=\int_0^{x'}\kappa_0\rho^\alpha(r'')dx''$ 最终观测者接收到的辐射是 A 和 B 之间所有的点的贡献的积分 $\Sigma(s)=\int_0^{2\sqrt{R^2-s^2}}\epsilon(r')e^{-\tau(x')}dx'$

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import quad


def kappa(xpp):
    return xpp**2

def tau(xp):
    ss,err=quad(kappa,0.0,xp,epsrel=1e-3)
    return ss

def emissivity(xp):
    return np.exp(-xp)

def f(xp):
    return emissivity(xp)*np.exp(-tau(xp))



ss,err=quad(f,0.0,1.0,epsrel=1e-3)

print('ss=',ss)
```

图 5: 类似辐射转移性质的积分形式，即被积函数中含有积分，且位于指数位置上的 Python 例子。