

常微分方程（组）数值解法作业

2024 年 3 月 27 日

仅需完成红字描述的内容即可。

再电离时期 (epoch of reionization, 简称 EoR) 之前 ($z \gtrsim 20 - 30$), 宇宙中的气体几乎都是中性的。后来, 第一代星系开始形成并发射电离光子, 在其周围形成电离泡泡 (ionized bubble), 再电离过程开始。随着时间的增加, 第一代星系越来越多, 电离泡泡也越来越多, 越长越大。并且相互之间会贯通, 形成更大的电离区域, 这有利于电离光子的传播并进一步加速了再电离过程。最终整个宇宙的气体都再次回到电离状态 (称“再次”是因为在复合时期之前, 宇宙中的气体也是电离状态的), 此时再电离结束 ($z \sim 6$)。

这个过程中, 电离泡泡在宇宙中的体积占比满足如下常微分方程:

$$\frac{dQ_I}{dt} = f_{\text{esc}} \frac{\dot{n}_{\text{ion}}}{n_H} - C(t)\alpha_B(t)n_H(1+z)^3 Q_I$$

其中 f_{esc} 是电离光子从星系中逃逸到宇宙之中的概率, n_H 是今天的宇宙中氢元素 (包括中性氢原子和氢离子) 的平均数密度, $C(t)$ 是 clumping factor, α_B 是 B 型复合系数 (Case B recombination coefficient), 单位体积的平均电离光子发射率为

$$\dot{n}_{\text{ion}} = N_{\text{ion}} \times \frac{\text{SFRD}(z)}{m_H}$$

N_{ion} 是恒星内部的一个原子在其一生中平均产生的电离光子数目, m_H 是氢原子质量, 宇宙平均的恒星形成率密度,

$$\text{SFRD}(z) = \frac{a(1+z)^b}{1 + [(1+z)/c]^d} [M_{\odot}\text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3}]$$

Madau & Dickinson (2014) 从观测中拟合出了如下的系数: $a = 0.015, b = 2.7, c = 2.9, d = 5.6$, 对应的 SFRD 演化如下:

取 $N_{\text{ion}} = 4000$, $f_{\text{esc}} = 0.5$, $C(t) \equiv 3$, $n_H = 1.9 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$, $\alpha_B = 2.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, 且有 $dz/dt = -(1+z)H(z)$, 初值为 $z = 30$ 时, $Q_I = 0$,

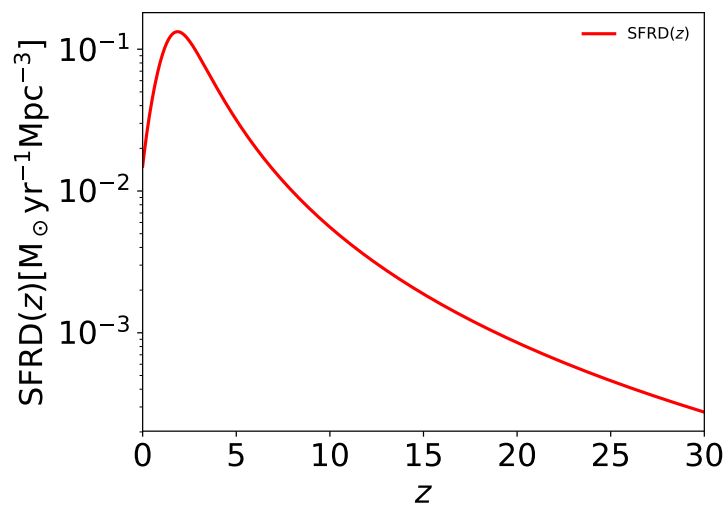


图 1: Madau & Dickinson (2014) 的 SFRD 的演化。

Q_I 随着红移的演化如下: (Q_I 必须小于 1, 当计算的结果大于 1 时, 将其直接设为 1)

试改变例子程序中的 $a, b, c, d, f_{\text{esc}}, C(t), N_{\text{ion}}$ 等参数的值, 观察 Q_I 的演化会有什么不同, 画出几个不同参数的 Q_I 图。

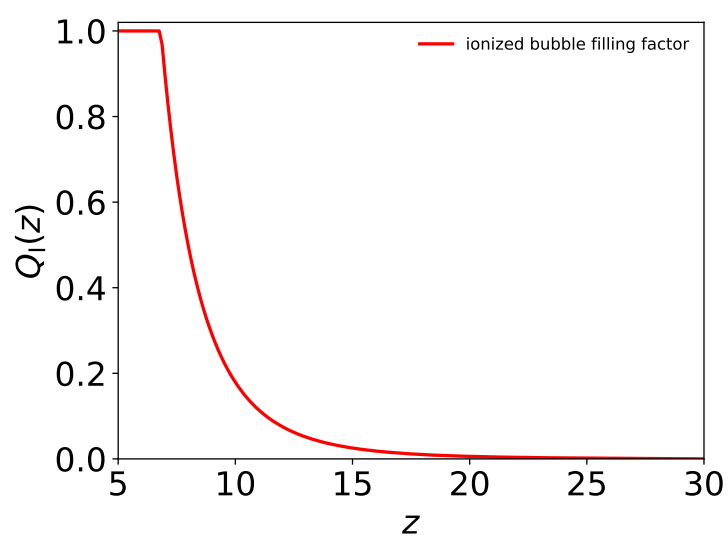


图 2: Q_I 随着红移的演化。