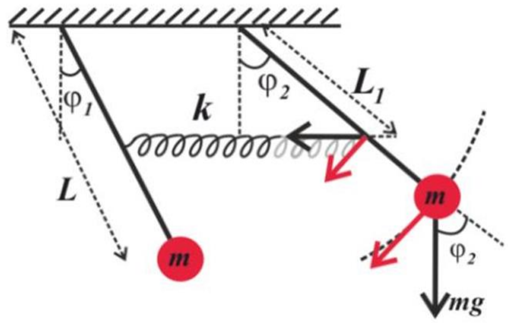
Численное моделирование по физике.

«Связанные маятники»

Условие:



Два одинаковых математических маятника, связанных пружиной с коэффициентом жёсткости k на расстоянии L_1 от точки крепления маятников. Точки крепления обоих связанных маятников находятся на одном уровне. Оба математических маятника имеют одинаковые длины подвеса L и массы m (см. рис.). Сила сопротивления для каждого маятника прямо пропорциональна скорости. Коэффициент затухания каждого маятника равен β. Для заданных начальных отклонений построить графики зависимостей углов и скоростей от времени для каждого маятника. Найти нормальные частоты. Параметры должны задаваться.

Используемые константы:

1. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81\,\frac{м}{с^2}$

Решение:

Сила тяжести создает момент сил относительно точки подвеса: $M_g = -mgL\varphi$ (используем приближение $\sin\varphi = \varphi$ для малых углов). Минус появился из-за того, что момент стремится вернуть маятник в равновесие.

Пружина также создает момент. Для первого маятника: $M_{k_1} = -k(x_1 - x_2)L_1$. При малых углах $x \approx L_1\varphi$, тогда получим $x_1 - x_2 = L_1(\varphi_1 - \varphi_2) \rightarrow M_{k_1} = -kL_1^2(\varphi_1 - \varphi_2)$. Для второго маятника аналогично: $M_{k_2} = -kL_1^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Знаки отличаются, так как пружина тянет маятники в разные стороны.

Также в системе имеется затухание, пропорциональное угловой скорости: $M_\beta = -\beta\frac{d\varphi}{dt} = -\beta w$. И момент инерции маятника: $I = mL^2$.

Тогда выразим угловое ускорение:

По II з.Н. для вращательного движения:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_\beta - M_k - M_g$$

$$I\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\beta\frac{d\varphi_1}{dt} - kL_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) - mgL\varphi_1$$

$$mL^2 I \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\beta \frac{d\varphi_1}{dt} - kL_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) - mgL\varphi_1$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{-\beta \frac{d\varphi_1}{dt} - kL_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) - mgL\varphi_1}{mL^2}$$

Аналогично для второго маятника:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{-\beta \frac{d\varphi_2}{dt} - kL_1^2(\varphi_2 - \varphi_1) - mgL\varphi_2}{mL^2}$$

Итого получили систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{-\beta \frac{d\varphi_1}{dt} - kL_1^2(\varphi_1 - \varphi_2) - mgL\varphi_1}{mL^2} \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{-\beta \frac{d\varphi_2}{dt} - kL_1^2(\varphi_2 - \varphi_1) - mgL\varphi_2}{mL^2} \end{cases}$$

Далее, численно решив данную систему ОДУ, мы получим графики $\varphi(t)$ и $V(t)$.

Выведем формулу для нахождения нормальных частот. Для этого рассмотрим систему без учета затуханий (найдем нормальные колебания).

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = A_1 e^{iwt} \\ \varphi_2(t) = A_2 e^{iwt} \end{cases}$$

Подставим в систему выше:

$$\begin{cases} -w^2 A_1 e^{iwt} = \frac{kL_1^2\left(A_1 e^{iwt} - A_2 e^{iwt}\right) - mgLA_1 e^{iwt}}{mL^2} \\ -w^2 A_2 e^{iwt} = \frac{kL_1^2\left(A_2 e^{iwt} - A_1 e^{iwt}\right) - mgLA_2 e^{iwt}}{mL^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -w^2 mL^2 A_1 = \mathrm{k}L_1^2(A_1 - A_2) - mgLA_1 \\ -w^2 mL^2 A_2 = \mathrm{k}L_1^2(A_2 - A_1) - mgLA_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 mL^2 A_1 = mgLA_1 + \mathrm{k}L_1^2(A_1 - A_2) \\ w^2 mL^2 A_2 = mgLA_2 + \mathrm{k}L_1^2(A_2 - A_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 mL^2 A_1 = A_1(mgL + kL_1^2) - A_2(kL_1^2) \\ w^2 mL^2 A_2 = A_2(mgL + kL_1^2) - A_1(kL_1^2) \end{cases}$$

Тогда пусть $M = mL^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} mgL + kL_1^2 & -kL_1^2 \\ -kL_1^2 & mgL + kL_1^2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$. Запишем в виде матричного уравнения:

$$\begin{bmatrix} mgL + kL_1^2 & -kL_1^2 \\ -kL_1^2 & mgL + kL_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = w^2 mL^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$KA = w^2 MA$$

$$(K - w^2 M)A = 0$$

Чтобы найти w_1, w_2, необходимо вычислить:

$$\Delta(K - w^2M) = 0$$

$$\Delta(K - w^2M) = (mgL + kL_1^2 - w^2mL^2)^2 - (kL_1^2)^2 = 0$$

$$(mgL + kL_1^2 - w^2mL^2)^2 = (kL_1^2)^2$$

$$mgL + kL_1^2 - w^2mL^2 = \pm kL_1^2$$

$$w^2mL^2 = mgL + kL_1^2 \pm kL_1^2$$

$$\left[\begin{array}{l} w_1^2 = \dfrac{mgL + kL_1^2 - kL_1^2}{mL^2} = \dfrac{g}{L} \\ w_2^2 = \dfrac{mgL + kL_1^2 + kL_1^2}{mL^2} = \dfrac{mgL + 2kL_1^2}{mL^2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} w_1 = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \\ w_2 = \sqrt{\dfrac{mgL + 2kL_1^2}{mL^2}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} w_1 = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \\ w_2 = \sqrt{\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}} + \dfrac{2\mathrm{kL}_1^2}{\mathrm{mL}^2}} \end{array}\right.$$

Отсюда получаем две нормальные частоты – первая отвечает за колебание одного маятника без влияния пружины (синхронное движение маятников), вторая за колебание с учетом растягивания/сжатия пружины (асинхронное движение маятников)

Решим данные системы численно для данных значений.

Допустимые значения:

$m \in (0; 10000)$ кг – масса маятников

$L \in (0; 10000)$ м – длина подвеса

$L_1 \in (0; 10000)$ м – расстояние между маятниками

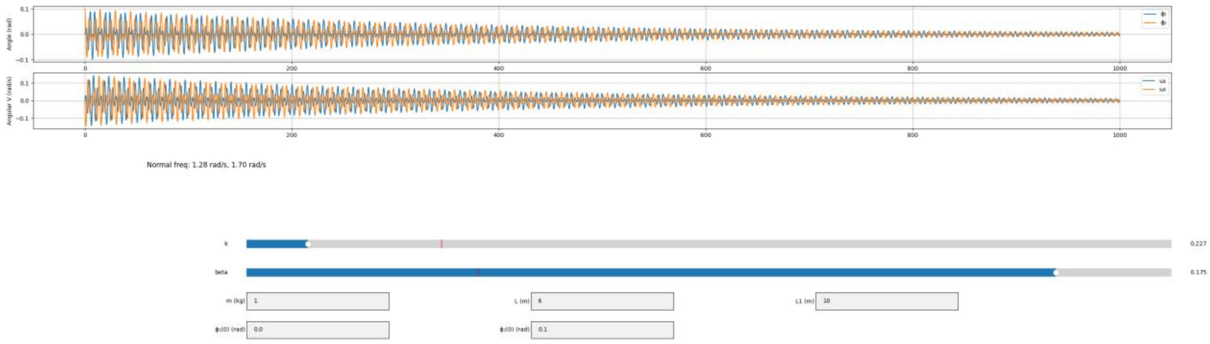
$k \in (0; 2)$ Н/м – коэффициент жесткости пружины

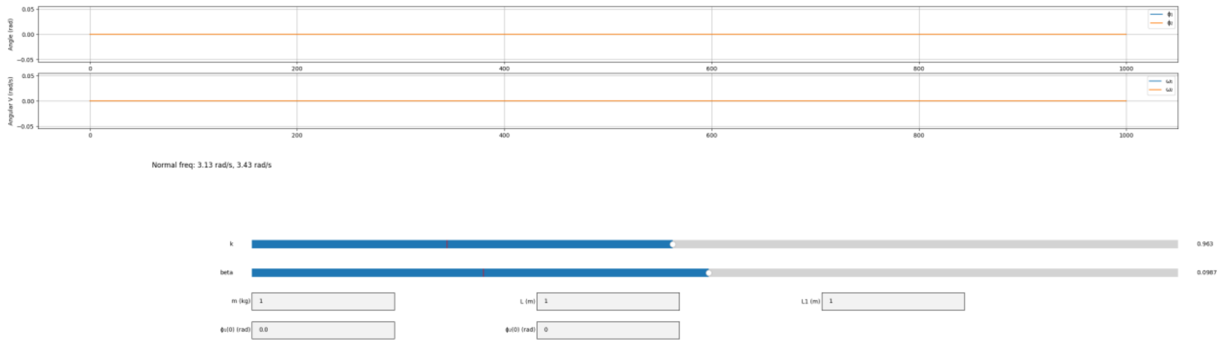
$b \in (0; 0{,}2)$ c^{-1} – коэффициент затухания

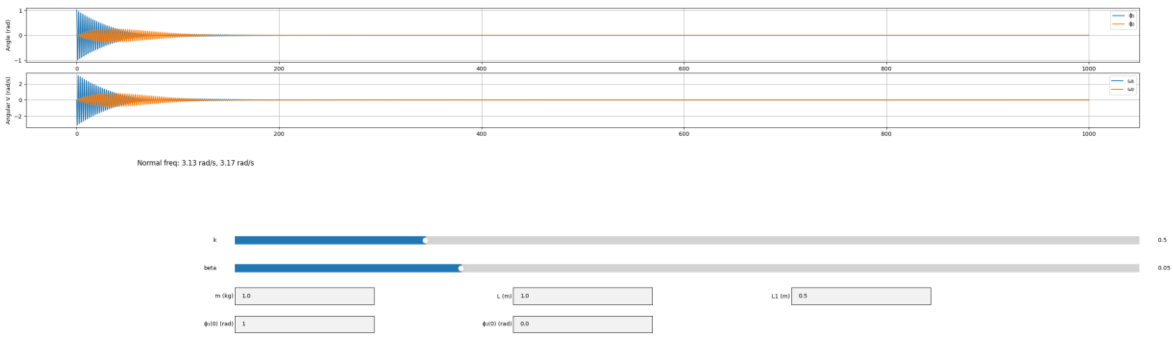
$\varphi_1 \in [-1;\ 1]$ рад – угол отклонения первого маятника

$\varphi_2 \in [-1;\ 1]$ рад – угол отклонения второго маятника

Примеры работы программы:


Angle (rad)
Angular V (rad/s)
Normal freq: 1.28 rad/s, 1.70 rad/s
k
0.227
beta
0.175
m (kg) 1
L (m) 6
L1 (m) 10
ϕ₁(0) (rad) 0.0
ϕ₂(0) (rad) 0.1


Angle (rad)
Angular V (rad/s)
Normal freq: 3.13 rad/s, 3.43 rad/s
k
0.963
beta
0.0987
m (kg) 1
L (m) 1
L1 (m) 1
ϕ₁(0) (rad) 0.0
ϕ₂(0) (rad) 0


Angle (rad)
Angular V (rad/s)
Normal freq: 3.13 rad/s, 3.17 rad/s
k
0.5
beta
0.05
m (kg) 1.0
L (m) 1.0
L1 (m) 0.5
ϕ₁(0) (rad) 1
ϕ₂(0) (rad) 0.0