Численное моделирование по физике.

«Лунолет»

20 вариант

Условие:

Ракета с выключенным двигателем летит вертикально вверх от плоской поверхности Луны со скоростью $20\,\frac{м}{c}$. Высота над поверхностью Луны равна 2300 м. Найти высоту, на которой нужно включить двигатель так, чтобы вертикальная скорость не превышала $3\,\frac{м}{с}$. Построить графики зависимости вертикальной скорости V_y, ускорения a_y, и высоты H от времени. Вывести значение вертикальной скорости на высоте 0.

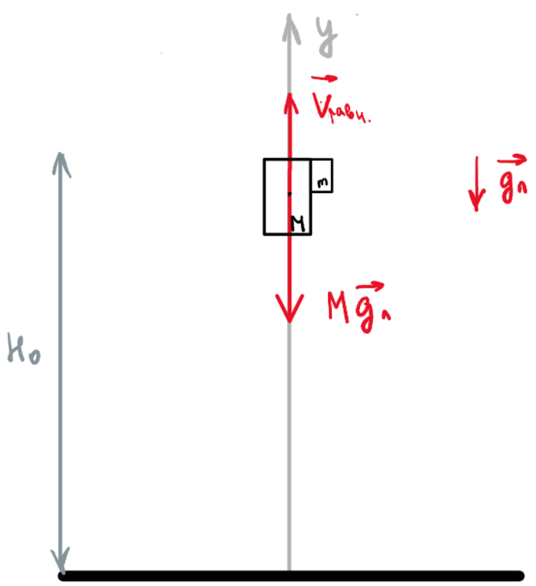
Используемые константы:

1. Масса аппарата $М_а = 2150$ кг (2000 кг корабль, 150 кг пилот в скафандре)
2. Масса топлива $m_т = 150$ кг
3. Масса аппарата с топливом $M = 2300$ кг
4. Ускорение свободного падения $g_Л = 1.62\,\frac{м}{c^2}$ на Луне
5. Предельная перегрузка при маневрах $a_{max} = 8g = 78{,}48\,\frac{м}{c^2}$
6. Скорость истечения продуктов сгорания из реактивного двигателя $V_p = 3660\,\frac{м}{с}$
7. Расход топлива двигателем $b = 15\,\frac{кг}{с}$
8. Начальная высота $H_0 = 2300$ м
9. Начальная скорость $V_0 = 20\,\frac{м}{с}$

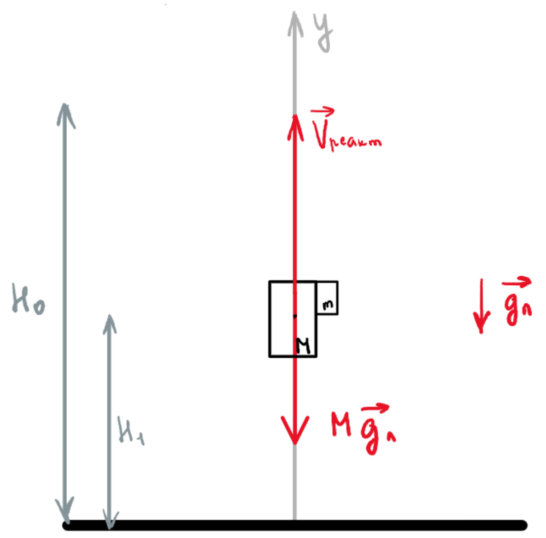
Решение:

Для начала отобразим графически модель задачи.

Движение ракеты с выключенным двигателем:



Движение ракеты со включенным двигателем:



Задачу можно разделить на 2 части: движение с выключенным двигателем и движение со включенным. Будем рассматривать движение только по Оу, так как по Ох не происходит никаких изменений. Разберем обе части:

1. Движение с выключенным двигателем

   Ракета движется равноускоренно ($\vec{a} = \vec{g_Л}$) со скоростью $\overrightarrow{V_{равн}}$. Какое-то время она будет лететь вверх, после чего скорость станет меньше 0 и она начнет падать, развивая отрицательную скорость. Эту скорость далее нам нужно скомпенсировать за счет включенного двигателя.

   Используемые уравнения:
   $\overrightarrow{V_{равн}} = \vec{V_0} + \vec{a}t$ – уравнение скорости при равноускоренном движении. Принимая во внимание $a = g_Л = 1{,}62\,\frac{м}{c^2}$ и $V_0 = 20\,\frac{м}{c}$, получим:

   $$\boldsymbol{V}_{равн} = \mathbf{20 - 1{,}62}\boldsymbol{t} \qquad (1)$$

   $H_1 = H_0 + \vec{V_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$ – уравнение высоты при равноускоренном движении. Принимая во внимание $H_0 = 2300$ м, $V_0 = 20\,\frac{м}{c^2}$ и $a = g_Л = 1{,}62\,\frac{м}{c^2}$, получим:

   $$\boldsymbol{H}_{равн} = \mathbf{2300 + 20}\boldsymbol{t} - \frac{\mathbf{1{,}62}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \qquad (2)$$

2. Движение со включенным двигателем

   Ракета движется реактивно со скоростью $\overrightarrow{V_{реакт}}$, компенсируя сниженную на прошлом этапе скорость. На этом этапе нам важно к моменту приземления получить скорость, не превышающую $3\,\frac{м}{с}$ (по условию), а также не потратить все топливо.

   Используемые уравнения:
   $m\frac{d\vec{V}}{dt'} = \vec{V_p}\frac{dm}{dt'} + \vec{F}$ – уравнение Мещерского, описывающее реактивное движение, где $m = m(t') = M - bt'$ – масса топлива. В нашем случае $\vec{F} = m\vec{g_Л}$. Тогда получаем $m\frac{d\vec{V}}{dt'} = \vec{V_p}\frac{dm}{dt'} + m\vec{g_Л}$. По Оу получим: $m\frac{dV}{dt'} = V_p\frac{dm}{dt'} - mg_Л$. Так как в нашем случае топливо сжигается

равномерно, положим $\frac{dm}{dt'} = k = const$. Получим: $m\frac{dV}{dt'} = V_p b - Mg_{Л}$. Нас интересует скорость, поэтому интегрируем:

$$mdV = \left(V_p b - mg_{Л}\right)dt'$$

$$dV = \left(\frac{V_p b}{m} - g_{Л}\right)dt'$$

$$\int_0^V dV = \int_0^{t'} (\frac{V_p b}{m} - g_{Л})\, dt'$$

$$\int_0^V dV = \int_0^{t'} \frac{V_p b}{M - bt'} dt' - \int_0^{t'} g_{Л}\, dt'$$

$$\begin{bmatrix} x = M - bt' & dx = -bdt \\ x(0) = M & x(t') = M - bt' \end{bmatrix}$$

$$\int_0^V dV = -\int_M^{M-bt'} \frac{V_p}{x} dx - \int_0^{t'} g_{Л}\, dt'$$

$$V = V_p \ln\left(\frac{M}{M - bt'}\right) - g_{Л} t'$$

Так как $V = V_{реакт} - V_{равн}$, получим:

$$V_{реакт} = V_{равн} + V_p \ln\left(\frac{M}{M - bt'}\right) - g_{Л} t'$$

Подставим туда известные нам значения:

$$\boldsymbol{V}_{реакт} = \boldsymbol{V}_{равн} + \mathbf{3660\,ln}\left(\frac{\mathbf{2300}}{\mathbf{2300-15}\boldsymbol{t'}}\right) - \mathbf{1{,}62}\boldsymbol{t'} \qquad (3)$$

$H = \int_0^{t'} V_{реакт} dt'$ – уравнение высоты при реактивном движении. Найдем интеграл:

$$H = \int_0^{t'} (V_{равн} + V_p \ln\left(\frac{M}{M - bt'}\right) - g_{Л} t')\, dt'$$

$$H = V_{равн} t' - g_{Л}(t')^2 + \int_0^{t'} V_p \ln\left(\frac{M}{M - bt'}\right) dt'$$

При этом $H = H_{реакт} - H_{равн}$.

$$H_{реакт} = H_{равн} + V_{равн} t' - g_{Л}(t')^2 + \int_0^{t'} V_p \ln\left(\frac{M}{M - bt'}\right) dt'$$

Подставим известные нам значения:

$$\boldsymbol{H}_{реакт} = \boldsymbol{H}_{равн} + \boldsymbol{V}_{равн}\boldsymbol{t'} - \mathbf{1{,}62}(\boldsymbol{t'})^{\mathbf{2}} + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t'}} \mathbf{3660\,ln}\left(\frac{\mathbf{2300}}{\mathbf{2300-15}\boldsymbol{t'}}\right) \boldsymbol{dt'} \qquad (4)$$

Итого получили четыре формулы:

$$\begin{cases} V_{\text{равн}} = 20 - 1{,}62t \\ H_{\text{равн}} = 2300 + 20t - \dfrac{1{,}62t^2}{2} \\ V_{\text{реакт}} = V_{\text{равн}} + 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right) - 1{,}62t' \\ H_{\text{реакт}} = H_{\text{равн}} + V_{\text{равн}}t' - 1{,}62(t')^2 + \displaystyle\int_0^{t'} 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right)dt' \end{cases}$$

Подставим (1) в (3) и (1) в (4):

$$\begin{cases} H_{\text{равн}} = 2300 + 20t - \dfrac{1{,}62t^2}{2} \\ V_{\text{реакт}} = 20 - 1{,}62t - 1{,}62t' + 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right) \\ H_{\text{реакт}} = H_{\text{равн}} + (20 - 1{,}62t)t' - 1{,}62(t')^2 + \displaystyle\int_0^{t'} 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right)dt' \end{cases}$$

Подставим (2) в (4) и получим систему из 2 уравнений с двумя неизвестными – t и t':

$$\begin{cases} V_{\text{реакт}} = 20 - 1{,}62t - 1{,}62t' + 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right) - 1{,}62t' \\ H_{\text{реакт}} = 2300 + 20t - \dfrac{1{,}62t^2}{2} + (20 - 1{,}62t)t' - 1{,}62(t')^2 + \displaystyle\int_0^{t'} 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right)dt' \end{cases}$$

По условию $V_{\text{реакт}} = 3\ \frac{\text{м}}{c}$ и $H_{\text{реакт}} = 0$ м.

$$\begin{cases} \boldsymbol{3 = 20 - 1,62t - 1,62t' + 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right) - 1,62t'} \\ \boldsymbol{0 = 2300 + 20t - \dfrac{1,62t^2}{2} + (20 - 1,62t)t' - 1,62(t')^2 + \displaystyle\int_0^{t'} 3660\ln\left(\dfrac{2300}{2300 - 15t'}\right)dt'} \end{cases}$$

Также нам надо учитывать предельную перегрузку a_{max}. С помощью нее найдем предельное время падения со включенным и с выключенным двигателем.

$a_{\text{равн}} = 1{,}62\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – соответственно при равноускоренном движении предельную перегрузку мы не превысим.

$$a_{\text{реакт}} = V'_{\text{реакт}} = -V_p\frac{b}{M - bt'} - g$$

По условию $a_{\text{реакт}} \leq a_{max}$, тогда:

$$-V_p\frac{b}{M - bt'} - g \leq\ 8 \cdot g$$

$$t' \leq \frac{M + \frac{V_p b}{9g}}{b}$$

$$t' \leq 194{,}79\ c$$

К тому же, надо учитывать время, за которое топливо кончится.

$$t' \leq \frac{m_{\text{т}}}{b}$$

$$t' \leq 10 \text{ с}$$

Тогда получится следующая система:

$$\begin{cases} \mathbf{3 = 20 - 1,62t - 1,62t' + 3660 \ln\left(\frac{2300}{2300 - 15t'}\right) - 1,62t'} \\ \mathbf{0 = 2300 + 20t - \frac{1,62t^2}{2} + (20 - 1,62t)t' - 1,62(t')^2 + \int_0^{t'} 3660 \ln\left(\frac{2300}{2300 - 15t'}\right) dt'} \\ \mathbf{t' \leq 10} \end{cases}$$

Решим данную систему численно для данных значений.

[Shiny App (suiremon.github.io)](https://suiremon.github.io/modeling1/)

Сайт может долго грузиться, подождите минутку.

Допустимые значения:

$M \in (0; 10000)$

$m \in (0; 10000)$

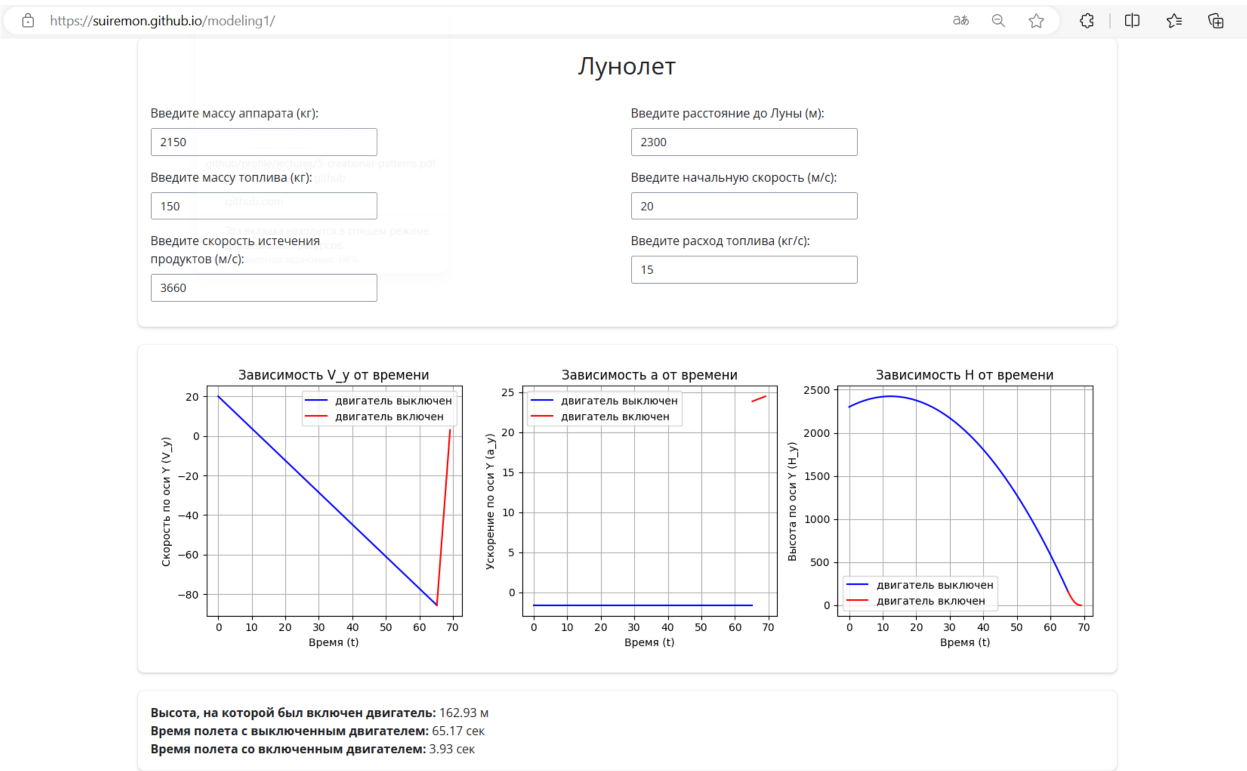
$H_0 \in (0; 10000)$

$V_p \in (-10000; 10000)$

$V_0 \in (-10000; 10000)$

$b \in (-10000; 10000)$

Примеры работы программы:



https://suiremon.github.io/modeling1/

Лунолет

Введите массу аппарата (кг): 2150

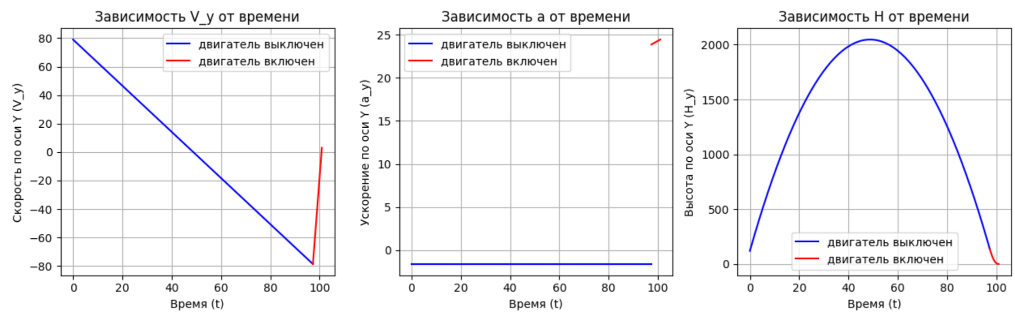
Введите массу топлива (кг): 150

Введите скорость истечения продуктов (м/с): 3660

Введите расстояние до Луны (м): 120

Введите начальную скорость (м/с): 79

Введите расход топлива (кг/с): 15



Высота, на которой был включен двигатель: 137.63 м
Время полета с выключенным двигателем: 97.31 сек
Время полета со включенным двигателем: 3.62 сек

https://suiremon.github.io/modeling1/

Лунолет

Введите массу аппарата (кг): 2150

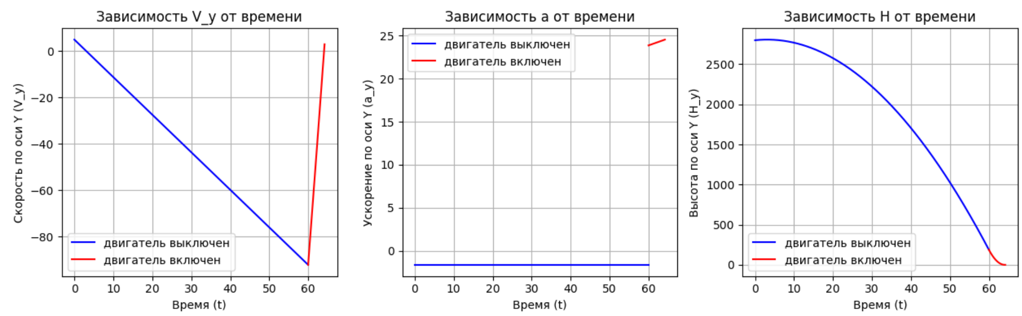
Введите массу топлива (кг): 150

Введите скорость истечения продуктов (м/с): 3660

Введите расстояние до Луны (м): 2800

Введите начальную скорость (м/с): 5

Введите расход топлива (кг/с): 15



Высота, на которой был включен двигатель: 188.67 м
Время полета с выключенным двигателем: 59.95 сек
Время полета со включенным двигателем: 4.21 сек