§1.6 系统的描述和分析方法

- 系统的数学模型：系统物理特性的数学抽象。
- 系统的框图描述：形象地表示其功能。
- 系统分析方法概述

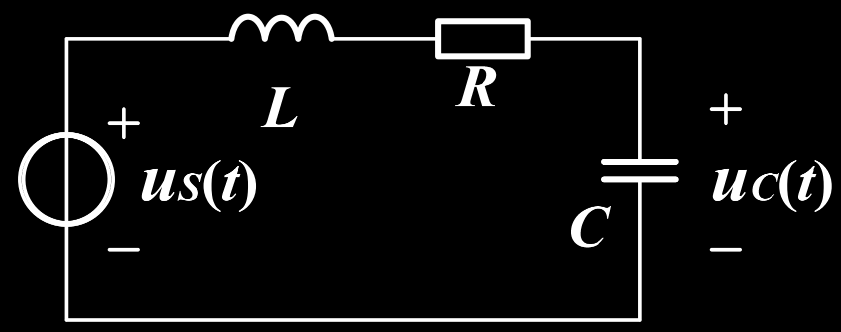
一、系统的数学模型

- 连续系统解析描述：微分方程
- 离散系统解析描述：差分方程

1. 连续系统的解析描述

图示RLC电路，以$u_S(t)$作激励，以$u_C(t)$作为响应，由KVL和VAR列方程，并整理得

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S \\ u_C(0+),\ u_C'(0_+) \end{cases}$$



二阶常系数线性微分方程。

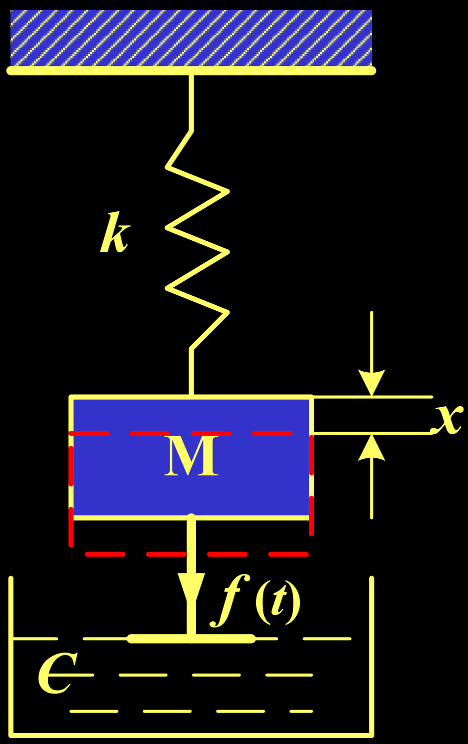
抽去具有的物理含义，微分方程写成

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = f(t)$$

这个方程也可以描述下面的一个二阶机械减振系统。

机械减振系统

其中，k为弹簧常数，M为物体质量，C为减振液体的阻尼系数，x为物体偏离其平衡位置的位移，$f(t)$为初始外力。其运动方程为



$$M\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)$$

能用相同方程描述的系统称**相似系统**。

2. 离散系统的解析描述

例：某人每月初在银行存入一定数量的款，月息为β元/月，求第k个月初存折上的款数。

设第k个月初的款数为$y(k)$,这个月初的存款为$f(k)$,上个月初的款数为$y(k-1)$，利息为β $y(k-1)$,则

$$y(k)= y(k-1)+ \beta y(k-1)+f(k)$$

即
$$y(k)-(1+\beta)y(k-1) = f(k)$$

若设开始存款月为k=0，则有$y(0)= f(0)$。

上述方程就称为$y(k)$与$f(k)$之间所满足的差分方程。所谓**差分方程**是指由未知输出序列项与输入序列项构成的方程。未知序列项变量最高序号与最低序号的差数，称为差分方程的阶数。上述为一阶差分方程。

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

描述LTI系统的是线性常系数差分方程

例：下列差分方程描述的系统，是否线性？是否时不变？并写出方程的阶数。

（1）$y(k) + (k-1)y(k-1) = f(k)$ 线性、时变，一阶

（2）$y(k) + y(k+1)\,y(k-1) = f^2(k)$ 非线性、时不变，二阶

（3）$y(k) + 2\,y(k-1) = f(1-k)+1$ 非线性、时变，一阶

解：判断方法：方程中均为输出、输入序列的一次关系项，则是线性的。输入输出序列前的系数为常数，且无反转、展缩变换，则为时不变的。

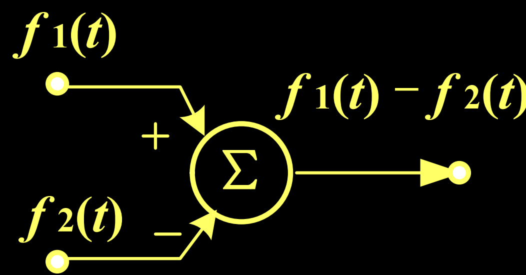
二. 系统的框图描述

上述方程从数学角度来说代表了某些运算关系：相乘、微分（差分）、相加运算。将这些基本运算用一些基本单元符号表示出来并相互联接表征上述方程的运算关系，这样画出的图称为模拟框图，简称框图。

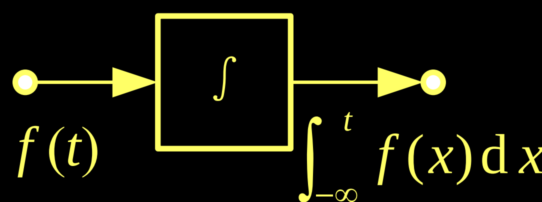
- 连续系统的基本单元
- 离散系统的基本单元
- 系统模拟

1. 连续系统的基本单元

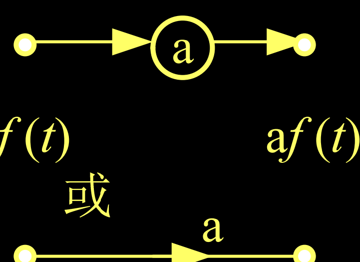
- 加法器



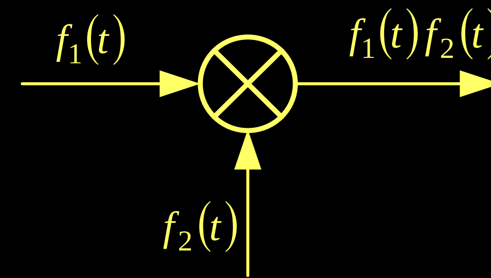
- 积分器



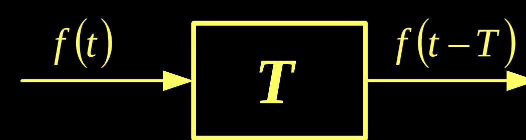
- 数乘器



- 乘法器

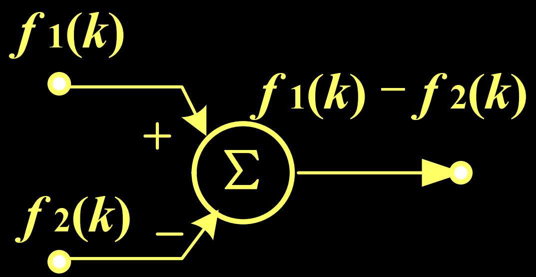


- 延时器

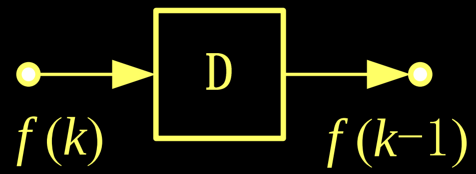


2. 离散系统的基本单元

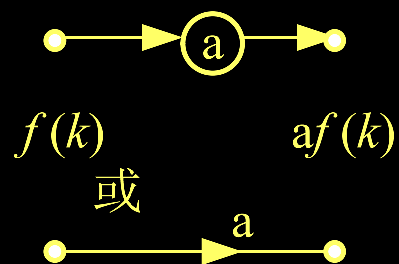
- 加法器



- 迟延单元



- 数乘器



3. 系统模拟

实际系统→方程→模拟框图
→实验室实现（模拟系统）→指导实际系统设计

例1　　例2　　例3　　例4

方程←→框图用变换域方法和梅森公式简单，后面讨论。

三. LTI系统分析概述

系统分析研究的**主要问题**：对给定的具体系统，求出它对给定激励的响应。

具体地说：系统分析就是建立表征系统的数学方程并求出解答。

系统的分析方法：
- 输入输出法（外部法）
- 状态变量法（内部法）（chp.8)

外部法
- 时域分析（chp.2,chp.3)
- 变换域法
  - 连续系统—频域法(4)和复频域法(5)
  - 离散系统—频域法(4)和z域法(6)

系统特性：系统函数（chp.7)

求解的基本思路：

➢ 把零输入响应和零状态响应分开求。

➢ 把复杂信号分解为众多基本信号之和，根据线性系统的可加性：多个基本信号作用于线性系统所引起的响应等于各个基本信号所引起的响应之和。

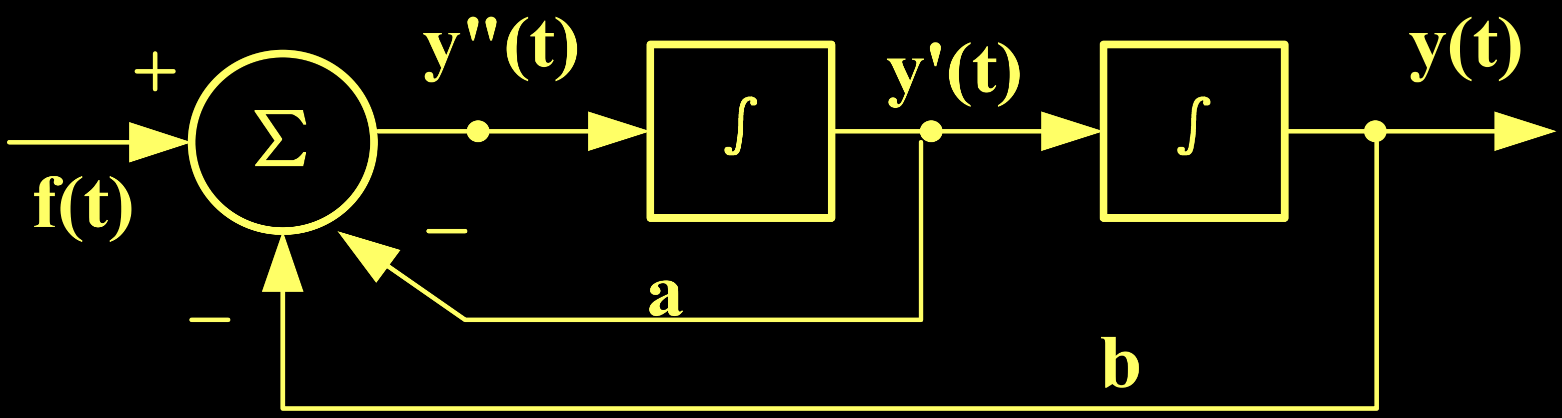
采用的数学工具：

- 时 域： 卷积积分与卷积和
- 频 域： 傅里叶变换
- 复频域： 拉普拉斯变换与Z变换

例1：由微分方程画框图

例1：已知$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$，画框图。

解：将方程写为　$y''(t) = f(t) - ay'(t) - by(t)$



例2：由微分方程画框图

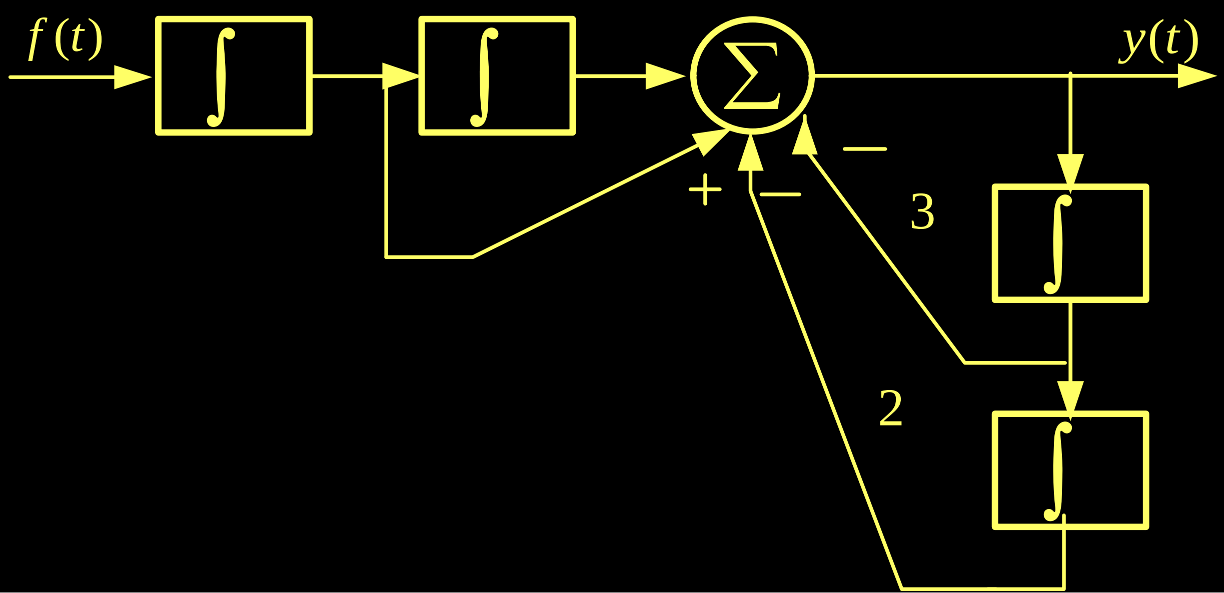
例2 请画出如下微分方程所代表的系统的系统框图。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)$$

解：

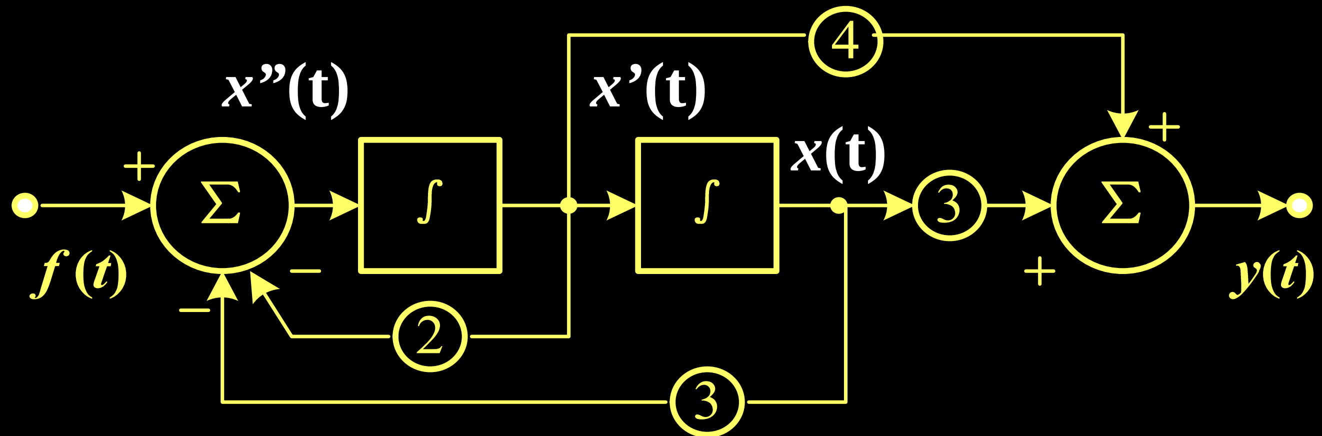
$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}=-3\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}-2y(t)+\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)$$

$$y(t)=-3\int y(t)\,\mathrm{d}t-2\iint y(t)\,\mathrm{d}t+\int f(t)\,\mathrm{d}t+\iint f(t)\,\mathrm{d}t$$



例3：由框图写微分方程

例3： 已知框图，写出系统的微分方程。



设辅助变量x(t)如图

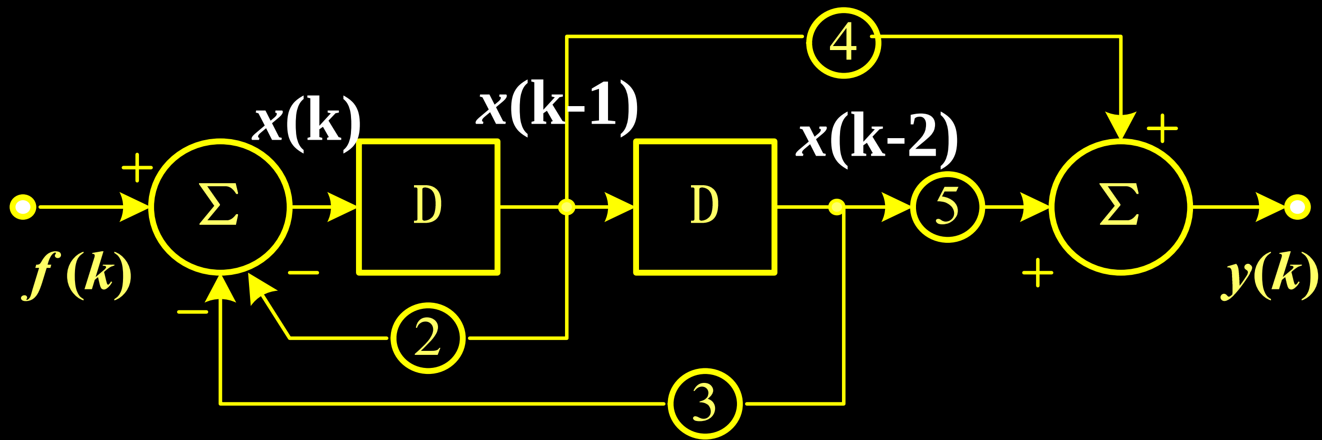
$x''(t) = f(t) - 2x'(t) - 3x(t)$,即$x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = f(t)$

$y(t) = 4x'(t) + 3x(t)$

根据前面，逆过程，得 $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 4f'(t) + 3f(t)$

例4：由框图写差分方程

例4： 已知框图，写出系统的差分方程。



解： 设辅助变量$x(k)$如图 $x(k)= f(k) – 2x(k-1) – 3x(k-2)$

即 $x(k) +2x(k-1) +3x(k-2) = f(k)$

$y(k) = 4x(k-1) + 5x(k-2)$

消去$x(k)$，得

$$y(k) +2y(k-1) +3y(k-2) = 4f(k-1) + 5f(k-2)$$