

第十五章作业及参考答案

第一题、已知一束光波波长为 $\lambda = 2 \times 10^{-2}nm$ ，其波长的不确定度为 $1 \times 10^{-2}nm$ ，请问其光子位置的不确定度为多少？

解：

首先我们根据光波长与光子动量的关系

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad (1)$$

再考虑到动量不确定与位置的不确定性关系为

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = 4 \times 10^{-2}nm \quad (2)$$

第二题、试证明一维势阱中各个能级的粒子分布波函数彼此正交。

解：

假设此一维势阱宽度为 a 。首先我们根据一维势阱性质，利用量子力学的有关知识可以知道任意能级的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0, x > a) \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, & (0 < x < a) \end{cases} \quad (3)$$

若证明函数正交，需要对于不同的 n ，计算函数域积分

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \cos \left[\frac{(n-m)\pi x}{a} \right] - \cos \left[\frac{(n+m)\pi x}{a} \right] \right\} dx \\ &= \frac{1}{a} \left[\frac{a}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{a} \right]_0^a \\ &\quad - \frac{a}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{a} \Big|_0^a \\ &= \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

得证。