

第九章作业及参考答案

第一题、倔强系数为 k 的水平轻质弹簧一端固定，另一端连接一轻质长棉线，且棉线的自由终端连接质量为 m 的小球。棉线中间放置于转动惯量为 J 、半径为 r 的与棉线间不滑动的滑轮上。若静止情况下，弹簧与棉线部分保持水平。

问：忽略一切其他摩擦力，待装置静止之后，轻轻地竖直下拉质量球，问 m 是否做简谐运动，若做简谐运动其周期如何？

解：设在弹簧+棉线的原长为 L_0 ，在悬挂质量小球之后长为 L' 。显然系统满足

$$mg = k(L' - L_0) \quad (1)$$

轻拉之后长度延长 x ，此时 m 受力向上，考虑到棉线向下延长。假设连接小球端绳子张力 T_2 ，弹簧张力为 T_1 小球加速度为 a 。

则力学关系，特别是转动定理

$$T_2 = mg + ma \quad (2)$$

$$T_1 = k(L' + x - L_0) \quad (3)$$

$$(T_1 - T_2)r = J\alpha \quad (4)$$

$$\alpha r = a \quad (5)$$

结合上述几个式子我们可以得到

$$\left(\frac{J}{r^2} + m\right) \frac{d^2x}{dt^2} = kx \quad (6)$$

鉴于 x 与 a 之间方向相反。故而有

$$\left(\frac{J}{r^2} + m\right) \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x} \quad (7)$$

对应的震动周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{J}{r^2} + m}{k}} \quad (8)$$

第二题、一均质长 l 、质量 m 的木杆上端连接天花板，但可自由活动。下端连接一水平轻质弹簧，弹簧另一端固定于竖直墙壁。在木杆竖直时弹簧处于原长。

问：沿弹簧直线方向轻拉木杆下端，木杆作何运动？若为简谐运动，其周期多少？

解：

轻拉木杆之后，木杆离开竖直摆角为 θ 。木杆受到两个力作用：1、木杆本身重力；2、弹簧形变。

则木杆受力力矩：

$$M_1 = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad (9)$$

$$M_2 = kl \cdot l \sin\theta \quad (10)$$

显然两个力矩方向一致，但是与 θ 方向相反。根据转动定理得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\left(mg\frac{l}{2}\sin\theta + kl^2\sin\theta\right) \approx -\left(mg\frac{l}{2} + kl^2\right)\theta \\ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}\right)\theta &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

为简谐运动的二阶偏微分方程，所以杆子的下端点做简谐运动。

对应的周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2ml}{3mg + 6kl}} \quad (12)$$