金融工學硏究, 제11권 제3호 (2012. 9) 1～29

해외채권투자의 투자 효익

이준희[*]·박수천[**]·김태연[***]

<요 약>

기존 해외채권투자의 이익 또는 효익(welfare)에 대한 연구는 투자기회선의 확대 여부에 대한 실증분석이 주를 이루어왔다. 그러나 본 연구는 투자기회선의 확대여부가 아닌 투자확대에 대한 효용증감여부에 초점을 맞추어 해외채권투자의 유용성을 평가하고자 하였다. 즉 해외채권 투자시 투자자 효용이 증감하였는지를 보고자 하였다. 본 연구에서는 효익의 측정치를 일반균형 이론 하에서 도출하였다. Xia (2001)의 연구를 확장하여 CEW (certainty equivalent wealth)의 개념을 해외채권투자에 적용하였고 효익 증감 정도를 폐쇄형 공식으로 유도하였다. 도출된 효익은 국내외 자산 간의 상관관계, 위험회피정도, 채권시장 불확실성에 대한 위험의 시장가격 (market price of risk)에 의해 영향을 받는 것으로 나타났다. 효익의 실제 규모를 파악하기 위하여 실증분석을 수행하였다, 자료는 단순화를 위하여 해외채권의 경우 미국의 국채로 한정하였고 우리나라 및 미국 국채자료를 이용하여 효익 모형을 추정하였다. 불확실성에 대한 위험의 시장가격과 같은 변수는 횡단면자료를 이용하여야만 추정이 가능하므로 추정을 위하여서는 아파인(affine) 금리기간구조 추정에 자주 사용되는 칼만필터링 방법을 사용하였다. 회귀분석을 이용하여 앞서 추정된 위험의 시장가격등 본 연구에서 도출된 각 설명 변수별 효익에 대한 영향력을 살펴보았다. 그 결과, 한국의 경우 2005년부터 2008년까지 국내 투자자 관점에서 해외채권투자를 포함하여 분산투자로 인한 효익의 정도는 긍적적 요인보다는 부정적 요인이 강할 수 있었던 것으로 나타났다.

주제어: 해외채권투자, Bellman 최적화, 간접효용함수, 포트폴리오선택

논문접수일 : 2012. 3. 3　　1수정일 : 2012. 4. 29　　2수정일 : 2012. 6. 22　　게재확정일 : 2012. 6. 25
세심한 심사평을 해주신 익명의 세 분의 심사위원님과 편집위원장님께 깊이 감사드립니다.
* 주저자, 숭실대학교 경영학부 교수, E-mail: joonrh@ssu.ac.kr, Tel : 02-820-0536
** 숭실대학교 대학원, 경영학과 박사과정, E-mail : park.soochun@gmail.com, Tel : 02-820-0536
*** 숭실대학교 대학원, 경제학과 석사과정, E-mail : winkty0908@naver.com, Tel : 02-820-0536

Ⅰ. 서론

해외자산투자의 긍정적, 부정적 문제를 비롯하여 해외채권투자의 분산효과 여부에 대한 연구는 매우 상반된 결론을 보이고 있다. Levy and Lerman (1988), Jorion (1989), Odier and Solnik (1993)는 80년대 자료를 이용하여 해외채권투자의 분산효과를 분석하였다. 이들의 연구에 의하면 국내 채권 및 주식 포트폴리오에 해외 채권을 포함시키는 경우 평균-분산 효율적 투자기회선(mean variance efficient frontier)이 확장되어 해외채권투자가 분산효과가 있는 것을 주장하고 있다. 반면 Eun and Resnick (1994)은 1979-89년 사이의 캐나다, 프랑스, 독일, 일본, 스위스, 영국, 미국의 채권시장을 대상으로 분산효과를 분석하였다. 실증분석 결과에 의하면 미국과 일본 투자자 입장에서는 채권의 국제투자를 통한 사후적(ex-post) 분산효과는 존재하나 일본투자자의 경우 추정위험을 고려한 사전적(ex-ante) 분산효과는 존재하지 않는다는 결과를 제시하였다. Burger and Warnock (2003)은 1990-2001년 해외채권시장 자료를 분석하였다. 이들의 연구결과에 의하면 미국 투자자 입장에서 환위험 헤지를 하지 않는 경우에는 분산투자효과의 효익이 존재하지 않으나 환위험 헤지를 하는 경우 포트폴리오의 경우 효익이 존재함을 주장하였다. 환위험 헤지의 유용성은 이론적으로나 실증적으로나 분명한 결론을 내기 어렵다. 국제적 분산 투자자는 시장위험뿐만 아니라 환위험에도 노출되어 있는데, 외환도 자산이기 때문에 완전 헤지가 그 성과 면에서 바람직하지 않다는 결론도 있기 때문이다. 이러한 실증연구를 종합하면 실증자료의 연도별, 국가별특성에 따라 해외채권투자에 대한 효익 여부는 다양한 결과를 보이고 있다.

다양한 실증연구와는 달리 이론적 연구는 저자가 아는 한 많지 않았다. 해외채권투자의 효익에 어떠한 요인이 영향을 미치며, 이론적 효익 측정치 도출이 가능한지에 대한 연구는 전무한 상태이다. 특히 위에 언급한 실증연구들도 모두 자산의 Mean Variance 포트폴리오 관점에서 해외채권투자의 투자기회의 확대여부에 초점을 맞추고 있고 정작 효익을 측정한 연구는 없다. 본 연구에서는 이러한 이론적 결핍을 해결하고 새로운 효익의 측정치를 자산의 Mean Variance 포트폴리오 관점이 아닌 일반균형이론(general equilibrium theory) 을 통해 제시하고자 한다. Xia(2001)의 장기채권 투자의 효익에 대한 연구가 있었던 바. 본 연구는 Xia (2001)의 연구에서 제시된 CEW(Certainty Equivalent Wealth)의 개념을 이용하여 이론적으로 해외채권투자 및 분산투자의 효익에 대하여, 그 규모와 요인을 분석하고자 한다. 특히 도출된 측정치를 사용하여 국내의 경우 해외채권투자의 효익이 존재하는지를 실증분석을 통해 보고자 한다.

<표 1>은 2006년 이후 국내 기관투자자가 해외자산에 투자한 투자 금액 및 비중의 추이를 나타내고 있다. 2007년 말을 기점으로 해외자산에 대한 투자가 급속히 감소한 것을 알 수 있는데 이는 미국의 금융위기 위기 이후 해외 위험자산에 대한 투자수요가 감소한 것을 반영하며, 채권투자의 비중은 주식에 비해 낮아지는 추세이며, 2010년에는 20%를 하회하고 있다.

<표 1> 기관투자가 및 자산별 외화증권 투자 추이(한국은행)

[1] 시가기준 기말잔액, ( )내는 구성비, [2] 종금사 포함, [3] KP(Korean Paper)는 거주자가 외국에서 발행하는 외화표시증권을 말함. 단위 : 억달러, %

		2006.12	2007.6	2007.12	2008.6	2008.12	2009.6	2009.12	2010.6	2010.12	2011.6	2011.12
기관투자가별	자산운용사	175.4	445.3	760.4	585.1	251.4	350.4	430.4	354.7	397.8	375.7	273.5
		(31.6)	(51.6)	(65.2)	(61.5)	(46.4)	(53.7)	(57.8)	(54.8)	(57.1)	(54.5)	(47.0)
	보 험 사	236.6	258.0	260.6	234.5	187.4	208.2	221.1	215.2	217.7	228.9	228.3
		(42.7)	(29.9)	(22.4)	(24.6)	(34.6)	(31.9)	(29.7)	(33.2)	(31.3)	(33.2)	(39.2)
	외국환은행[1]	112.9	124.2	114.9	110.1	84.6	76.0	70.5	57.7	62.0	61.5	56.8
		(20.4)	(14.4)	(9.9)	(11.6)	(15.6)	(11.6)	(9.5)	(8.9)	(8.9)	(8.9)	(9.8)
	증 권 사	29.4	36.2	30.2	22.4	18.0	18.1	22.1	20.0	19.1	23.3	23.7
		(5.3)	(4.2)	(2.6)	(2.4)	(3.3)	(2.8)	(3.0)	(3.1)	(2.7)	(3.4)	(4.1)
자산별	주 식	163.2	419.4	761.0	594.5	265.9	357.0	432.4	363.6	399.5	376.1	270.8
		(29.4)	(48.6)	(65.3)	(62.4)	(49.1)	(54.7)	(58.1)	(56.2)	(57.4)	(54.6)	(46.5)
	자산운용사	148.6	399.1	733.3	563.2	241.0	332.9	405.7	336.6	369.2	346.1	242.8
	보 험 사	12.1	16.1	20.1	20.1	15.2	15.2	17.1	17.7	19.5	19.5	17.0
	외국환은행[1]	0.6	2.1	3.3	5.7	3.7	3.0	2.7	2.7	2.9	2.9	2.8
	증 권 사	1.9	2.1	4.4	5.5	6.0	5.9	6.9	6.7	8.0	7.6	8.2
	채 권	241.8	291.1	259.5	230.7	166.4	144.6	150.1	123.8	128.6	145.8	135.5
		(43.6)	(33.7)	(22.3)	(24.2)	(30.7)	(22.2)	(20.2)	(19.1)	(18.5)	(21.2)	(23.3)
	자산운용사	24.3	43.3	25.9	21.3	9.3	10.2	17.0	12.1	20.9	23.5	22.0
	보 험 사	138.4	156.4	159.1	149.3	116.3	104.4	103.4	89.0	86.4	93.4	88.5
	외국환은행[1]	52.8	61.7	49.4	44.4	31.1	22.6	21.4	18.6	18.0	22.4	19.1
	증 권 사	26.3	29.6	25.0	15.6	9.7	7.4	8.3	4.1	3.2	6.6	5.9
	Korean Paper[2]	149.4	153.2	145.6	126.9	109.1	151.2	161.5	160.2	168.3	167.5	175.9
		(26.9)	(17.7)	(12.5)	(13.3)	(20.1)	(23.2)	(21.7)	(24.7)	(24.2)	(24.3)	(30.2)
	자산운용사	2.5	2.8	1.2	0.5	1.2	7.3	7.7	5.9	7.7	6.1	8.7
	보 험 사	86.2	85.5	81.4	65.1	55.9	88.6	100.6	108.6	111.8	116.1	122.7
	외국환은행[1]	59.5	60.4	62.2	60.0	49.7	50.4	46.3	36.4	41.0	36.2	34.9
	증 권 사	1.3	4.4	0.8	1.3	2.3	4.9	6.9	9.2	7.9	9.1	9.6
합 계		554.4	863.6	1,166.1	952.1	541.5	652.8	744.0	647.6	696.5	689.4	582.2
		(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)	(100.0)

본 연구와 연결하여 해외채권투자에 투자주체들이 어떠한 영향변수들을 고려하여야 하는지 알아보는 것도 의미가 있을 것으로 보이며, 특히 2000년대 중반이후 국민연금의 경우 수익률 제고를 위하여 해외채권투자에 필요성이 강조되는바, 해외채권 투자

시 어떠한 변수를 반영하여야 하는지 이론적·실증적 툴(tool)을 제시하는 것도 의미가 있을 것으로 판단된다.

본 연구의 구성은 2장에서 모형에 대하여 설명하고자 한다. 제 3장에서 자산배분의 최적화, 4장에서 간접효용함수를 이용한 최적의 채권배분, 5장에서는 채권 투자의 CEW(certainty equivalent wealth)에 대하여 논하고 6장에서는 국내외자료를 사용한 간단한 실증분석 그리고 마지막 7장에서 결론을 내고자 한다.

Ⅱ. 모형

1. 모형의 가정과 정의

Xia(2001)의 모형을 반영하나, 본 연구는 장기채권의 효익(welfare)을 측정하고자 하는 것이 아니기 때문에 물가수준의 확률과정은 불필요하다. 본 연구의 경제상황에 대한 가정과 용어의 정의를 설명하도록 하자.

(i) 불확실성에 대한 경제는 다음의 확률측도공간(probability measure space)을 가정한다. 즉 (Ω, $\Im(\Im_t)_{t \geqq 0}$, P)이고 확률측도 P는 물리적 측도(physical measure)이다.

(ii) z_s, z_1, z_2 불확실성을 나타내는 Brownian motion은 측도 P에서 정의된다.

(iii) 본 연구는 채권포트폴리오 운용에 초점을 맞추고자 한다. 즉, 채권 투자 배분의 경우 주식시장의 변수를 고려하여 자산 배분이 이루어지도록 모형을 설정하고, 환율의 헤지를 배제한 모형을 가정하도록 한다.

(iv) 모형 설명에 앞서 본 연구에서 사용될 변수를 정의하면 다음과 같다.

σ_s: 국내 주가지수 수익률의 변동성

σ_1: 국내 단기이자율(무위험)의 변동성

σ_2: 해외 단기이자율(무위험)의 변동성

ρ_{s1}: 주가지수 수익률과 국내 단기이자율의 상관계수

ρ_{s2}: 주가지수 수익률과 해외 단기이자율의 상관계수

ρ_{12}: 국내단기 이자율과 해외 단기이자율의 상관계수

λ_s: 주가지수 수익률에 대한 위험의 시장가격(market price of risk, 이후 MPR로 표기)

λ_1: 국내 단기이자율에 대한 위험의 시장가격

λ_2: 해외 단기이자율에 대한 위험의 시장가격

M: 국내 pricing kernel

M_f: 해외 pricing kernel

I : 국내 주가지수(또는 대표주식)

r : 국내 단기이자율

r_f: 해외 단기이자율

$P(t,T)$: 만기 T인 t시점의 국내 할인채권가격

$P_f(t,T)$: 만기 T인 t시점의 해외 할인채권가격(해외통화로 표시)

$P_f^d(t,T)$: 해외 채권을 환율을 곱하여 국내화폐가치로 환산한 할인채권가격

$S(t)$: t시점의 환율, 즉 해외화폐 1단위당 국내가격

$(\quad)'$: 전치행렬

(v)투자자산은 주식, 국내채권, 해외채권의 3가지로 한정한다.[1)]

다음절에서는 구체적인 모형을 설명하고자 한다.

2. 국내시장모형

국내의 경제상황을 나타내는 변수로는 주가지수와 단기이자율만을 고려한다.

(i) 주가지수(대표주식)는 다음의 GBM(Geometric Brownian Motion)의 확률과정을 가정한다.

$$\frac{dI}{I} = (r + \sigma_s \lambda_s)dt + \sigma_s dz_s \tag{1}$$

여기서, σ_s, λ_s는 앞서 정의한 바와 같다.

(ii) 이자율은 Vasicek 모형을 가정한다.

---

1) 파생상품등의 투자자산을 배재함으로 모형을 단순화한다는 비판을 받을 수도 있으나, 대부분 연금이 주식과 채권으로 구성된다는 점을 고려할 때, 현실과 동떨어진 가정은 아니라 판단된다.

$$dr = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_1 dz_1 \tag{2}$$

σ_1은 앞서 정의한 바와 같고 κ는 국내의 단기이자율의 평균으로의 회귀속도를 의미하며, $\bar{r}$은 국내 단기이자율의 장기 평균을 의미한다.

(iii) 국내의 pricing kernel 또는 SDF(Stochastic Discount Factor)은 다음의 확률과정을 가정한다.

$$\frac{dM}{M} = -rdt - \lambda_1 dz_1 \tag{3}$$

여기서, λ_1은 앞서 정의하였듯이 단기이자율에 대한 시장의 위험가격(MPR: market price of risk)을 의미한다. 주지하는 바와 같이 MPR는 물리적 측도와 EMM(Equivalent Martingale Measure)를 연결시켜주는 매개체라 할 수 있다.

3. 해외시장모형

본 연구는 해외채권시장을 모형에 포함함에 따라 국내와 마찬가지로 특정외국의 채권시장모형을 가정하고자 한다.

(i) 국내채권시장과 마찬가지로 해외특정국가의 명목이자율과정도 국내의 경우와 같이 다음의 Vasicek 과정을 따른다.

$$dr_f = \kappa_f(\overline{r_f} - r_f)dt + \sigma_2 dz_2 \tag{4}$$

σ_2는 앞서 정의한 바와 같고 κ_f는 해외 단기이자율의 평균으로의 회귀속도를 의미하며, $\overline{r_f}$는 해외 단기이자율의 장기 평균을 의미한다.

(ii) 해외 경우도 국내와 비슷하게 다음과 같은 pricing kernel 또는 SDF(Stochastic Discount Factor)는 다음의 확률과정을 가정한다.

$$\frac{dM_f}{M_f} = -r_f dt - \lambda_2 dz_2 \tag{5}$$

여기서, λ_2은 국내와 마찬가지로 해외단기이자율에 대한 시장의 위험가격(market price of risk)을 의미한다. 위에서 가정한 파라미터κ, κ_f, $\bar{r}$, $\overline{r_f}$, σ_1, σ_2, λ_1, λ_2는 모두 실수의 상수이다.

4. 환율의 유도

해외채권투자의 효익에 관한 연구이므로, 양국가간의 환율을 정의하여야 한다. 비재정거래(no arbitrage)를 만족하기 위해서는 식 (3), (5)로부터 다음의 환율에 대한 확률과정이 결정된다. 즉, 환율 S, 단위당 외국자산 가격과 국내자산 가격의 교환비율은 다음의 식을 만족한다.

$$\frac{dS}{S} = \frac{dM_f}{M_f} - \frac{dM}{M} + \lambda_1^2 dt - cov\left(\frac{dM}{M}, \frac{dM_f}{M_f}\right)$$

여기서, $cov(a,b)$는 a와 b의 공분산을 의미한다. 식 (3)과 (5)를 위식에 대입하면,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= (r - r_f + \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 \rho_{12}) dt + \lambda_1 dz_1 - \lambda_2 dz_2 \\ &= (r - r_f + \sigma^*) dt + \lambda_1 dz_1 - \lambda_2 dz_2 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, $E[dz_1 dz_2] = \rho_{12} dt$를 가정하며, $\sigma^* = \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 \rho_{12}$로 정의한다.

5. 채권가격의 Dynamics

국내외 단기 이자율이 Vasicek 과정을 따르기 때문에 할인채권의 가격은 다음과 같은 지수 아파인(exponential affine)의 형태를 취한다.

$$P(t,T) = \exp(A(t,T) - B(t,T) r) \tag{7}$$

여기서, 함수 $A(.)$, $B(.)$는 FPDE (Fundamental Partial Differential Equation)을 만족하며, 구체적인 식은 잘 알려져 있다. 특히 본 연구에서는 $B(t,T)$이 중요한 역할

을 하며, 그 구체적인 수식은 다음과 같다.

$$B(t,T)=\frac{1-\exp(-\kappa(T-t))}{\kappa}$$

위 채권가격 (7)의 SDE(Stochastic Differential Equation)를 구하기 위하여 채권가격 $P(.)$에 Ito lemma를 적용하자. 국내 채권가격에 Ito lemma를 적용하면 다음의 SDE를 만족한다. 즉,

$$\frac{dP}{P}=(r-B(t,T)\sigma_1\lambda_1)dt-B(t,T)\sigma_1 dz_1 \tag{8}$$

해외채권의 외화표시 채권가격은 같은 과정을 통하여 다음의 식을 만족한다.

$$P(t,T)_f=\exp(A(t,T)_f-B(t,T)_f r_f) \tag{9}$$

마찬가지로 해외채권의 SDE를 구하기 위하여 해외채권가격에 Ito lemma를 적용하면 다음의 식이 도출된다.

$$\frac{dP_f}{P_f}=(r_f-B(t,T)_f\sigma_2\lambda_2)dt-B(t,T)_f\sigma_2 dz_2 \tag{10}$$

본 연구는 외화자산을 국내자산 가격으로 환산하여야 한다. 즉 식 (9)를 원화표시로 나타내고자 한다. Ito chain rule에 의해 해외채권의 원화표시가격인 P_f^d는 다음을 만족한다.

$$\frac{dP_f^d}{P_f^d}=\frac{dP_fS}{P_fS}=\frac{dP_f}{P_f}+\frac{dS}{S}+cov(\frac{dP_f}{P_f},\frac{dS}{S}) \tag{11}$$

식 (11)에 식 (6)과 (10)를 대입하면, 다음이 성립한다.

$$\frac{dP_f^d}{P_f^d}=(r+K(t,T))dt+\lambda_1 dz_1-(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2)dz_2 \tag{12}$$

여기서,

$$K(t,T)=\sigma^{*}-B(t,T)_f\lambda_1\sigma_2\rho_{12}=\lambda_1^2-\lambda_1\rho_{12}(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2)$$
$$B(t,T)_f=\frac{1-\exp(-\kappa_f(T-t))}{\kappa_f}\quad \text{그리고}\ \ \sigma^{*}=\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2\rho_{12}$$

Ⅲ. 자산배분의 최적화

제Ⅱ장에서 가정한 모형을 바탕으로 채권자산 포트폴리오의 최적 투자 배분을 결정하도록 하자. 투자자의 효용함수는 Xia(2001)의 연구를 포함하여 여러 연구에서 사용된 등탄력성효용함수(isoelastic utility function) 또는 멱효용함수 (power utility function)를 가정한다. 따라서 최적화문제와 제약조건은 다음의 식을 만족한다.

$$Max_x E[\frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}]$$
$$\text{제약조건}\ \ \frac{dW}{W}=(r+x'\Lambda)dt+x'\sigma dz,\ \ (W>0) \tag{13}$$

여기서, Max_x는 자산배분벡터 $x'=(x_1,x_2,x_3)'$에 대한 최대값을 의미하며, $E[.]$는 기댓값을 의미한다. 그리고 W_t는 t시점의 부(wealth)를, γ는 상대적위험회피계수(coefficient of relative risk aversion)를 의미한다. x_s, x_1, x_2는 대표주식, 국내채권, 해외채권의 자산배분을 의미한다. 투자자산의 MPR 벡터인 Λ는 다음과 같다.[2)]

$$\Lambda=(\sigma_s\lambda_s,-B(t,T)\sigma_1\lambda_1,\lambda_1^2-\lambda_1\rho_{12}(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2))'$$

식 (8)과 (12)로부터 자산의 변동성행렬 σ는 다음의 3×3행렬로 결정된다.

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_s, & 0, & 0\\ 0 & -B(t,T)\sigma_1, & 0,\\ 0, & \lambda_1, & -(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2)\end{pmatrix}$$

2) Xia(2001)의 10페이지 Λ는 오타임.

본 연구에서는 $\Lambda=\sigma\lambda'$의 관계가 성립하도록 MPR 벡터를 다음과 같이 가정한다. 즉, $\lambda'=(\lambda_s,\lambda_1,\lambda_2\rho_{12})$.

본 연구가 채권포트폴리오에 초점을 맞추고 국내의 pricing kernel의 형태를 식 (3)으로 가정하였기 때문에 상태변수(state variable)로는 단기이자율만을 고려하게 된다. 이 경우 구조식 (13)의 최적화문제의 Bellman식은 다음과 같이 표현된다.[3)]

$$Max_x\left(J_t+\frac{1}{2}W^2(x'\sigma\rho\sigma'x)J_{WW}+W(r+x'\Lambda)J_W\right.$$
$$\left.+Wx'\sigma\rho e_2\sigma_2J_{Wr}+\frac{1}{2}\sigma_1^2J_{rr}+\kappa(\bar{r}-r)J_r\right) \tag{14}$$

여기서 $e_2=(0,1,0)'$를 의미하고, 불확실 변수의 상관계수행렬은 다음과 같다.

$$\rho=\begin{pmatrix}1 & \rho_{s1} & \rho_{s2}\\ \rho_{s1} & 1 & \rho_{12}\\ \rho_{s2} & \rho_{12} & 1\end{pmatrix}.$$

그리고 J는 간접효용함수(indirect utility function)를 의미하며 하첨자는 변수에 대한 편미분 값을 의미한다.

식 (14)의 제일계조건(first order condition)은 다음과 같다.

$$x^*=(\Omega)^{-1}\left[-\frac{J_W}{WJ_{WW}}\Lambda-\frac{J_{Wr}}{WJ_{WW}}(\sigma\rho e_2\sigma_2)\right] \tag{15}$$

---

3) Brennan, M. and Y. Xia (2002)를 참조. 국내의 pricing kernel을 어떻게 잡느냐에 따라 간접효용함수가 달라지는데, 본 연구에서는 환율을 정의하기 위해 식 (3)과 같은 간단한 형태로 잡았다. 이 경우 간접효용함수가 후술할 (16)의 형태를 갖게 된다. 주의할 사항은 식 (16)의 함수 $J(.)$가 예컨대, r_f에 대한 함수이기는 하나, W안에 존재하며, 따라서 $J(.)$에 명시적으로 r_f가 나오지 않고 결과적으로 J_{r_f} 같은 편미분 값은 0의 값을 갖는다. 따라서 만일 pricing kernel을 보다 풍부하게 잡는다면, 식 (16)의 간접효용함수에 명시적으로 r_f 등의 변수가 나타날 수도 있으나 이는 쉽지 않는 전개이며, Xia (2001)의 경우도 Bellman식에 기대 물가 지수에 대한 편미분 값이 나오나 결국 편미분 값이 0이 된다. 즉 Xia (2001)의 식 (13)은 독자에게 식이 복잡하다는 오해의 소지를 남기고 있다. 따라서 본 연구에서는 실제 계산되어지는 항목만 열거하도록 한다. 또한 pricing kernel을 식 (3)과 같이 가정함으로 해외채권의 경우는 환율에 대한 헤지를 배제한 모형이 된다.

여기서, $\Omega=\sigma\rho\sigma'$를 의미한다. 식 (15)의 첫 번째 항은 평균 분산 최적화에 따른 소위 채권의 접점포트폴리오(tangent portfolio)를 의미하며, 두 번째 항은 국내이자율 변동에 국내채권의 헤지포트폴리오를 의미한다.

Ⅳ. 간접효용함수(Indirect Utility Function)를 이용한 최적의 주식 및 채권포트폴리오

본 연구는 식 (3)과 같은 pricing kernel을 가정하였기 때문에 Xia(2001)의 경우와 유사한 다음의 간접효용함수를 갖게 된다.

$$J(W,r,r_f,t,T)=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}exp((1-\gamma)[c(t,T)r+d(t,T)]) \tag{16}$$

여기서, 함수 $c(t,T)$, $d(t,T)$의 구체적인 식은 추후 제시하도록 하겠다.[4)]

식 (16)를 이용하여 구체적인 투자분을 계산하도록 한다. 우선 식 (15)에 식 (16)의 간접효용함수의 편미분 값을 대입하면, 다음과 같은 최적 투자배분이 결정된다.

$$x^*=\frac{1}{\gamma}\Omega^{-1}\Lambda+\frac{(1-\gamma)c(t,T)}{\gamma}(\Omega^{-1}\sigma\rho e_2\sigma_2) \tag{17}$$

여기서, $x^*=(x_s^*,x_1^*,x_2^*)'$이다.

식 (17)로부터 본 연구의 가정에 따른 구체적인 투자분을 계산하도록 하자. 이는 후에 해외채권 투자가능성에 대한 효익을 계산하기 위해 필요한 수치이다. 다음의 세 이론을 통해 이를 제시하도록 한다.

이론 1: *식 (17)에 따른 최적의 주식(x_s^*), 국내채권(x_1^*)과 해외채권(x_2^*)는 다음의 투자배분을 만족한다.*

4) 앞서 언급하였지만 간접효용함수에 대하여 간략하게 다시 언급하도록 한다. 간접효용함수의 형태를 추정하는데 있어 pricing kernel은 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 이 pricing kernel을 다양하게 만들 경우 환율의 SDE가 복잡해지고, 이는 다시 Bellman 방정식을 복잡하게 만들게 되어 간접효용함수를 폐쇄형 공식으로 구하는 것이 사실상 어렵게 만들게 된다. 본 연구에서는 해외투자의 효익에 대하여 직관적인 이해를 위해 가장 단순한 형태의 pricing kernel을 가정하였다.

$$x_s{}^* = \frac{1}{|\rho|\sigma_s}[\lambda_s(1-\rho_{12}^2)+\lambda_1(\rho_{s2}\rho_{12}-\rho_{s1}+\rho_{12}\rho_{s1}\rho_{s2}-\rho_{12}\rho_{s2})]$$

$$x_1{}^* = -\frac{1}{|\rho|B(t,T)\sigma_1}[\lambda_s(\rho_{12}\rho_{s2}-\rho_{s1})+\lambda_1(1-\rho_{s2}^2+\rho_{12}\rho_{s1}\rho_{s2}-\rho_{12}^2)$$

$$-\frac{\lambda_1}{|\rho|B(t,T)\sigma_1(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2)}[\lambda_s(\rho_{s1}\rho_{12}-\rho_{s2})+\lambda_1(\rho_{s1}\rho_{s2}-\rho_{12}\rho_{s1}^2)]$$

$$+\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$x_2{}^* = -\frac{1}{|\rho|(B(t,T)_f\sigma_2+\lambda_2)}[\lambda_s(\rho_{s1}\rho_{12}-\rho_{s2})+\lambda_1(\rho_{s1}\rho_{s2}-\rho_{12}\rho_{s21}^2)]$$

여기서, $|\rho| = 1-\rho_{12}^2-\rho_{s1}^2-\rho_{s2}^2+2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}$

증명: 부록 1 참조.

두 번째 이론은 다음과 같다.

이론 2: 식 (17)에 따른 자산 배분이 이루어지나, 해외채권이 존재함에도 이에 투자를 하지 않을 경우 주식과 국내채권의 최적투자는 다음과 같다.

$$x_s{}^* = \frac{1}{1-\rho_{s1}^2}\frac{\lambda_s-\lambda_1\rho_{12}}{\sigma_s}$$

$$x_1{}^* = \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\frac{\lambda_s\rho_{12}-\lambda_1}{B(t,T)\sigma_1}+\frac{\gamma-1}{\gamma} \tag{18}$$

증명: 부록 2 참조.

이론 3: 식 (17)에 따른 자산 배분이 이루어지나, 해외채권과 주식이 존재함에도 이 두 자산에 투자를 하지 않을 경우 국내채권에 최적투자는 다음과 같다.

$$x_1{}^* = -\frac{1}{\gamma}(B(t,T)\sigma_1)^{-1}(\lambda_1)+\frac{(\gamma-1)}{\gamma}, \tag{19}$$

증명: 부록 3 참조.

다음 장에서는 이론 1, 2, 3에서 구한 투자분을 이용하여 자산의 추가적 투자에 따른 효익을 도출하도록 하자.

Ⅴ. 간접효용함수(Indirect Utility Function)를 이용한 CEW(Certainty Equivalent Wealth)

본 장은 본 연구에서 핵심이론을 제시한다. 식 (16)의 주식 및 국내외 채권투자 간접효용함수로부터 우선 해외채권이 있음에도 투자를 하지 않을 경우 간접효용함수를 계산해보자. 간접효용함수의 분리성에 의해 다음의 관계가 성립한다. 예컨대,

$$J(W,r,r_f,t)_{NF} = J(W,r,r_f,t) \times g(t), \tag{20}$$

여기서 $J(W,r,r_f,t)_{NF}$는 해외채권에 투자를 하지 않을 경우의 간접효용함수이며, $J(W,r,r_f,t)$는 해외채권을 포함하여 모든 자산에 투자할 경우의 간접효용함수이다. 본 연구의 함수 $g(t)$를 구하도록 하자. 함수 $g(t)$는 다음의 형태를 갖는다.

$$g(t) = \exp(f(t,T)), \tag{21}$$

식 (16)과 식 (20), (21)로 부터 $d_{NF}(t,T) = d(t,T) + f(t,T)$의 관계가 성립한다. 여기서 $d(t,T)$는 최적의 포트폴리오에 투자할 경우 식 (20)의 로딩 함수를 의미하며, $d_{NF}(t,T)$는 해외채권이 존재함에도 주식과 국내채권에만 투자를 할 경우 계산된 식 (20)의 $d(t,T)$값을 의미한다. 이 두 함수는 식 (21)에 의해 다음의 미분방정식이 성립한다.

$$\frac{\partial d_{NF}}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{22-1}$$

만일 (22)의 해 $f(.)$가 항상 (-)의 값을 가질 경우 $g(.)$가 1보다 작아 $J(W,r,r_f,t)_{NF} < J(W,r,r_f,t)$이 성립되어 해외채권이 존재함에도 이에 투자를 하지 않을 경우 전체적으로 투자의 효익(welfare)이 낮아지게 된다. 마찬가지로 주식과 해외채권이 존재함에도 이에 투자하지 않을 경우의 간접효용함수를 $J(W,r,r_f,t)_{NSF}$로 나타내면

다음의 미분방정식이 성립된다.

$$\frac{\partial d_{NSF}}{\partial t}=\frac{\partial d}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{22-2}$$

$d_{NSF}(t,T)$는 주식과 해외채권이 존재함에도 국내채권에만 투자를 할 경우 계산된 식 (20)의 $d(t,T)$값을 의미한다. 구체적으로 효익의 차이를 계산해보자.

효익의 계산에 앞서 본 연구에서 사용될 확실성등가 CEW(Certainty Equivalent Wealth)를 정의해보자. 시점 t에서 자산투자(채권과 주식)를 위해 1원을 투자하여 투자만기시점(T, $t<T$)까지 운영을 가정하자. 이 경우 t시점에서 평가한 투자안의 만기시점의 기대효용은 식 (16)에 의해 다음과 같다.

$$\frac{(1)^{1-\gamma}}{1-\gamma}exp[(1-\gamma)(c(t,T)r+d(t,T))]$$

CEW는 이와 동일한 효용을 주는 만기시점의 확실한 부(sure amount of wealth)를 의미하는데, 만기에 CEW에 대한 효용은 본 연구에서는 $\frac{CEW^{1-\gamma}}{1-\gamma}$이다. 따라서 이 두 식으로부터

$$CEW=\exp[(c(t,T)r+d(t,T))]$$

이 된다. 보통의 효용이론에서 정의하는 확실성등가는 시점 개념과 무관한데, 본 연구의 정의와 연결하여 이해하려면 비교하는 효용의 시점을 만기로 이해하면 된다. CEW는 투자자산의 종류에 따라 달라진다. 주식, 국내채권, 해외채권의 최적포트폴리오투자의 경우, 주식, 국내 채권의 최적포트폴리오투자의 경우, 국내 채권만의 최적포트폴리오의 경우의 CEW는 각각 아래의 순서대로

$$\begin{aligned}&CEW=\exp(c(t,T)r+d(t,T)]),\\&CEW_{NF}=\exp(c(t,T)r+d(t,T)_{NF}]),\\&CEW_{NSF}=\exp(c(t,T)r+d(t,T)_{NSF}])\end{aligned}$$

이다. 다음으로 자산 포트폴리오의 선택에 따른 CEW의 차이를 계산해 보자. 위의 예에서처럼 해외채권을 투자하지 않을 경우와 모든 자산에 투자를 하는 경우의 CEW의 차이를 다음과 같이 정의 하자.

$$CEWD \equiv \ln CEW_{NF}(\text{or } \ln CEW_{NSF}) - \ln CEW$$

따라서 투자효익 $CEWD$은 미분방정식 (22-1)과 (22-2)로부터 함수 $f(t,T)$임을 알 수 있다.[5] 본 연구의 투자효익 $CEWD$ 즉 함수 $f(t,T)$를 구체적으로 계산하도록 하자. 이를 위해서는 다음의 몇 가지 이론이 필요하다.

이론 4: 식 (14)과 (16) 그리고 (이론 1)에서 구한 최적 투자분에 의해 주식 국내채권 해외채권이 존재할 경우 다음의 두 상미분방정식(ordinary differential equation)을 만족한다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= \kappa c(t,T) - 1, \\
\frac{\partial d}{\partial t} &= -\kappa \bar{r} c(t,T) - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_1^2 c(t,T)^2 \\
&\quad - \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\sigma_1\lambda_1 c(t,T) - \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_1^2 c(t,T) \\
&\quad - \frac{1}{2\gamma}[\lambda'(3)\rho^{-1}(3)\lambda(3) + (\lambda_1 + c(t,T)\sigma_1(1-\gamma))^2 - \lambda_1^2]
\end{aligned} \tag{23}$$

$$c(T,T) = d(T,T) = 0, \lambda'(3) = (\lambda_s, \lambda_1, \lambda_2\rho_{12}).$$

여기서,

$$\begin{aligned}
\lambda'(3)\rho^{-1}(3)\lambda(3) &= \frac{1}{|\rho(3)|}[\lambda_s(1-\rho_{12}-\rho_{s1}-\rho_{s2}+\rho_{s2}\rho_{12}+\rho_{s1}\rho_{12}) \\
&\quad + \lambda_1^2(\rho_{12}^2(\rho_{s1}-1) + \rho_{12}^2(\rho_{s1}-1)(\rho_{s2}-1) + \rho_{12}(\rho_{s1}-1))],
\end{aligned}$$

$|\rho(3)|$은 3×3의 상관행렬의 행렬식을 나타낸다. 즉,

5) Xia 연구의 경우는 CEW의 차이를 만기로 나누어 주었으나, 만기효과를 보기위해 본 연구는 만기로 표준화 하지 않았다.

$$|\rho(3)| = 1-\rho_{12}^2-\rho_{s1}^2-\rho_{s2}^2+2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}$$

증명: 부록 4 참조.

이론 5: *식 (14)과 (16) 그리고 (이론 2)에서 구한 최적 투자분에 의해 해외채권이 존재함에도 이 자산에 투자를 하지 않을 경우 다음의 상미분 방정식이 성립하고, 특히 이론 4의* $d(t,T)$ *는* $d(t,T)_{NF}$*로 대체되며 다음의 미분방정식을 만족한다.*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa c(t,T)-1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_{NF}}{\partial t} =& -\kappa\bar{r}c(t,T) - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_1^2 c(t,T)^2 \\ &- \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\sigma_1\lambda_1 c(t,T) - \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_1^2 c(t,T) \\ &- \frac{1}{2\gamma}[\lambda^{'}(2)\rho^{-1}(2)\lambda(2)+(\lambda_1+B(t,T)\sigma_1(1-\gamma))^2-\lambda_1^2]\end{aligned} \tag{24}$$

$d_{NF}(T,T)=0$, $\lambda^{'}(2) = (\lambda_s,\lambda_1)$.

여기서, $\lambda'(2)\rho^{-1}(2)\lambda(2) = \frac{1}{1-\rho_{12}^2}[\lambda_s^2-2\lambda_1\lambda_s+\lambda_1^2]$

증명: 부록 4 참조.

이론 6: *식 (14)과 (16) 그리고 (이론 3)에서 구한 최적 투자분에 의해 해외채권과 주식이 존재함에도 이 두 자산에 투자를 하지 않을 경우 다음의 상미분 방정식이 성립하고, 특히 이론 4의* $d(t,T)$ *는* $d(t,T)_{NSF}$*로 대체되며 다음의 미분방정식을 만족한다.*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa c(t,T)-1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_{NSF}}{\partial t} =& -\kappa\bar{r}c(t,T) - \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_1^2 c(t,T)^2 \\ &- \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\sigma_1\lambda_1 c(t,T) - \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_1^2 c(t,T) \\ &- \frac{1}{2\gamma}(\lambda_1+B(t,T)\sigma_1(1-\gamma))^2\end{aligned} \tag{25}$$

$d_{NSF}(T,T)=0.$

증명: 부록 4참조.

위에서 유도된 이론 4, 5, 6으로부터 국내채권, 해외채권, 주식의 세자산 중 (i)해외채권만을 투자하지 않은 경우와 (ii)주식, 해외채권 두 자산에 투자하지 않는 경우를 세 자산 모두를 투자하는 경우와 비교하여 CEWD를 계산하도록 하자.

이론 7: *(i) (이론 4, 5)에 의해 주식과 국내채권에 추가로 해외채권에 투자할 경우 투자효익 CEWD $f(t,T)_{NF}$는 다음과 같다.*

$$f(t,T)_{NF}=-\frac{1}{2\gamma}[\lambda_1^2-\lambda^{'}(3)\rho^{-1}(3)\lambda(3)](T-t) \tag{26}$$

여기서,

$$\lambda'(3)\rho^{-1}(3)\lambda(3)=\frac{1}{|\rho(3)|}[\lambda_s(1-\rho_{12}-\rho_{s1}-\rho_{s2}+\rho_{s2}\rho_{12}+\rho_{s1}\rho_{12})$$
$$+\lambda_1^2\big(\rho_{12}^3(\rho_{s1}-1)+\rho_{12}^2(\rho_{s1}-1)(\rho_{s2}-1)+\rho_{12}(\rho_{s1}-1)\big)],$$

$|\rho(3)|$은 3×3의 상관행렬의 행렬식을 나타낸다. 즉,

$$|\rho(3)|=1-\rho_{12}^2-\rho_{s1}^2-\rho_{s2}^2+2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12},$$

(ii) (이론 4. 6)에 의해 국내채권에 추가로 주식과 해외채권을 투자할 경우 투자효익 CEWD $f(t,T)_{NSF}$는 다음과 같다.

$$f(t,T)_{NSF}=-\frac{1}{2\gamma}[\lambda(2)'\rho^{-1}(2)\lambda(2)-\lambda'(3)\rho^{-1}(3)\lambda(3)](T-t) \tag{27}$$

그리고 $\lambda'(2)\rho^{-1}(2)\lambda(2)=\dfrac{1}{1-\rho_{12}^2}[\lambda_s^2-2\lambda_1\lambda_s+\lambda_1^2]$

증명: 부록 5 참조.

식 (26)과 (27)로부터 투자효익 f_{NF}, f_{NSF}를 보면, 국내외 이자율과 주가 수익률에

대한 위험의 시장가격, 수익률간 상관관계, 위험회피정도, 투자기간의 요인이 자산의 추가 투자시 효익을 증가 또는 감소시키는 것을 볼 수 있다. 다만 그 부호가 (+)인지 (-)인지를 위 식 만으로만 결정할 수 없다. 따라서 실증분석을 통해 알아보도록 하자.

Ⅵ. 실증분석

1. 모수의 추정

본 장은 본 연구에서 이론적으로 구한 CEWD를 국내외 자료를 이용하여 계산해보았다. CEWD를 계산하기 위해서는 첫째, 국내 Vasicek 모형의 모수 $(\kappa,\sigma_1,\lambda_1)$를 추정하여야 하며, 둘째, 주가수익률과 국내외 단기 이자율의 상관계수, 셋째, 각 불확실성별 위험의 시장가격(market price of risk)을 추정하여야 한다. 위험의 시장가격의 경우 국내 단기이자율은 Vasicek 모형으로부터 추정되고, 해외단기이자율의 위험의 시장가격은 본 연구에서는 λ_1과, ρ_{12}의 함수임으로 비교적 추정이 간단하다. 주가지수의 경우는 샤프비율(sharpe ratio)로 추정을 한다.

구체적인 데이터와 추정방법을 설명하도록 한다. 자료는 2005년 1월부터 2008년 12월까지 만기가 3개월, 6개월, 9개월, 1년, 1년 6개월, 2년, 2년 6개월, 3년, 5년, 10년의 일별 수익률자료를 사용하였다.[6] 시계열 자료상에서는 λ_1을 추정할 수 없기 때문에 횡단면 자료와 시계열자료를 혼합한 풀링(pooling)자료를 사용하였다. 국내 단기이자율 모형인 Vasicek 모형은 일별자료를 사용하였고, 추정방법은 칼만필터링(Kalman filtering)을 이용하였다. 추정단위는 매월 단위로 추정하였다. 따라서 4년에 걸쳐 추정하였음으로 모수 $(\kappa,\sigma_1,\lambda_1,\bar{r})$로 구성된 48개의 월별 시계열 자료를 추정하였다. 이렇게 월별로 따로 추정한 이유는 추가적인 외생적 성격의 변수를 이용하여 회귀분석을 하고자 함이다.

만기가 다른 국채수익률 자료를 풀링(pooling)하여 추정된 월별 모수의 평균값과 t-값의 평균값은 <표 2>와 같다. 대부분의 기간 모수는 매우 유의적으로 나왔다. 상관계수의 추정을 위해 월별 일평균 상관계수를 계산하였다. 자료는 국내 주가지수 일별 수익률, 일별 국내외 만기 3개월 국채수익률을 사용하였다.

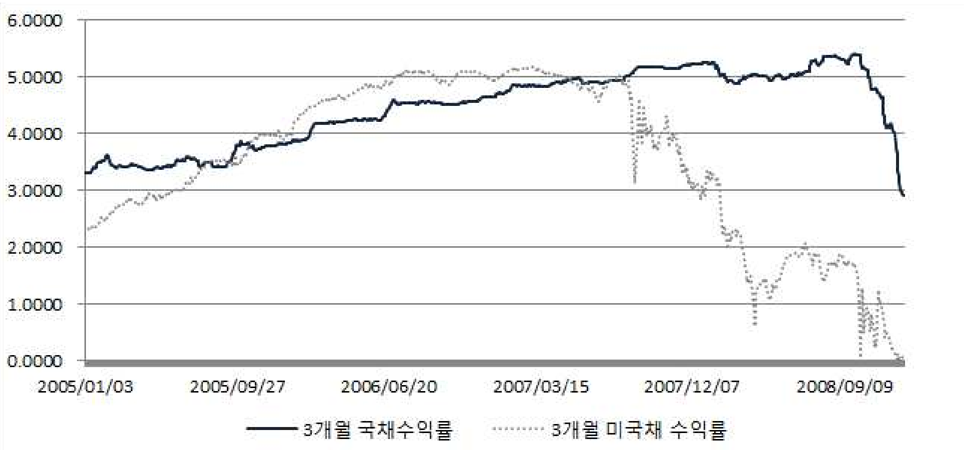
6) 금융위기를 포함한 기간을 이용하여 Vasicek모형의 추정시 모수의 변화가 심해 금융위기 이전의 자료만 사용하였다.

<표 2> 2005～2008년 월별로 추정된 Vasicek 모수 평균 추정값

** 5%하에서 유의함

	κ	$\bar{r}$	σ_1	λ_1
계수값	1.8200	0.0431	0.0093	-6.1982
t-값	16.0381**	27.6841**	6.1664**	-8.9446**

<그림 1>은 한국, 미국의 단기 국고채 수익률을 그림으로 나타내고 있다.



<그림1> 한국과 미국의 3개월 만기 국채 수익률

<표 3>에서 보면 미국과 한국의 국채 수익률의 상관계수는 예상과는 달리 0.002로 낮게 나타나고 있다. 이렇게 낮은 수치가 나온 이유는 본 연구가 일별자료를 사용하기 때문이 아닌가 판단된다.

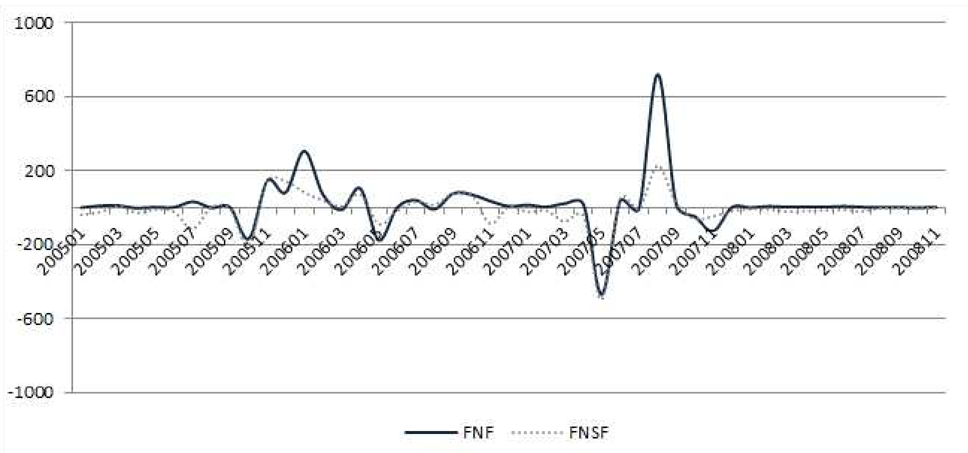
<표 3> 자료의 기초통계량

주가수익률		환율		국채수익률		미국국채수익률	
평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
0.042	1.628	1003.814	108.318	4.462	0.653	3.547	1.418

상관계수

	주가수익률	환율	국채수익률	미국국채수익률
주가수익률	1	-0.073	-0.055	0.044
환율		1	-0.158	-0.719
한국국채수익률			1	0.002
미국국채수익률				1

한편 이론 7에서 제시한 공식에 각 모수를 대입하여 추정된 두 개의 효익은 <그림 2>와 같다. <그림 2>에서의 효익의 설명은 다음과 같다. 2005년부터 2008년까지 국내채권과 국내주식의 포트폴리오에 해외채권을 추가로 투자할 경우의 효익이 f_{NF}이고, 국내채권만을 투자한 경우 주식과 해외채권을 추가로 투자할 경우의 효익이 f_{NSF}이다. 이 두함수의 값이 작을수록 (-)값을 가질수록 효익이 큰 것을 의미한다. 그림에서 보듯이 연도별, 월별로 그 값이 매우 큰 차이를 보이고 있다. 이는 월별 모수값들이 가변적인데서 비롯된다고 할 수 있다. 이론 7의 식 (26), (27)에서 보듯 위험회피정도를 나타내는 γ와 만기 $(T-t)$의 영향은 쉽게 판단할 수 없다. 즉 여타 모수의 부호 및 크기에 따라 달라지며, 효익을 단순 증폭 또는 감소시키는 역할을 한다. γ의 추정은 경제학에서도 매우 어려운 과제로 본 연구에서는 위험회피정도를 5(위험회피투자자)로 임의로 가정하였다.[7] 투자기간(horizon) 또한 5년으로 가정한다.



<그림 2> 2005~2008년 기간 추정된 투자효익 f_{NF}와 f_{NSF}

다른 변수들도 그 부호나 크기를 파악하는 것이 쉽지 않다. 따라서 본 연구에서는 효익을 종속변수로, 추정된 모수 및 외생적 성격을 갖는 변수를 설명변수로 회귀분석을 실시하였다. 설명변수로는 λ_1, λ_s, ρ_{12}, ρ_{s1}, ρ_{s2} 그리고 월별 일평균 단기 국내외 이자율과 이의 변동성이다. 이자율 평형이론(uncovered interest rate parity)에 의해 환율을 동시에 설명변수로 사용하지 않았다. 동시에 설명변수로 사용하면 이론적으로 다중 공선성이 발생되기 때문이다. 이분산성(heteroskedasticity)으로 인해 OLS

7) γ의 추정은 본 연구의 범위를 벗어나 기존 연구에서 많이 가정하는 수치를 가정하였다.

(ordinary least square)를 사용하는 대신 FGLS(feasible generalized least square)를 사용하였다. 구체적인 회귀모형과 실증결과는 다음절에서 설명하도록 하자.

2. 회귀분석모형 및 실증결과

회귀모형은 3가지의 모형을 상정하여 추정하였다.

첫 번째 모형(i) 은 효익에 나오는 변수를 중심으로 다음과 같은 회귀식을 설정하였다.

$$y = constant + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_s + \beta_2\rho_{12} + \beta_4\rho_{s1} + \beta_5\rho_{s2} + \text{오차항}$$

여기서 y는 f_{NF}와 f_{NSF}이다.

두 번째 모형(ii)은 모형(i)에 외생적 변수라 판단되는 한국과 미국의 단기 평균 수익률을 추가하였다. 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y = constant + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_s + \beta_2\rho_{12} + \beta_4\rho_{s1} + \beta_5\rho_{s2} \\ + \beta_6 Kmean + \beta_7 Umean + \text{오차항} \end{aligned}$$

여기서, $Kmean$은 한국 단기이자률의 평균을, $Umean$은 미국 단기이자율의 평균을 의미한다. 단기이자율의 대용치로는 국고채 3개월물의 수익률자료를 이용하였다.

세 번째 모형(iii)은 모형(ii)에 양국의 단기이자율의 변동성(volatility)을 추가하였다. 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y = constant + \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_s + \beta_2\rho_{12} + \beta_4\rho_{s1} + \beta_5\rho_{s2} \\ + \beta_6 Kmean + \beta_7 Umean + \beta_8\sigma_1 + \beta_9\sigma_2 + \text{오차항} \end{aligned}$$

여기서, σ_1은 한국단기이자율의 변동성을, σ_2는 미국단기이자율의 변동성을 의미한다.

추정결과는 <표 4>과 같다. 5%의 유의 수준 하에서 λ_1, ρ_{12}, ρ_{s1}, λ_s의 네 변수가 비교적 (+)로 유의하게 나왔다. 첫 번째, λ_1의 역할은 매우 복잡하다. 본 연구의 모형에서 식 (8)과 식 (12)를 보면 ①국내채권의 초과 수익률, ②해외채권을 국내화폐가치로 평가 시 해외채권 초과 수익률 및 ③해외채권 수익률의 변동성에 영향을 준다. ①과 ③의 효과가 강하면 해외채권투자에 대한 효익은 떨어지게 되며, ②의 효

과가 강하면 효익은 커지게 된다. 2005년부터 2008년까지의 자료 분석 결과는 비유의적이거나, 부호 값이 (+)로 유의적으로 나와, ①과 ③의 영향이 ②보다 큰 것으로 판단된다.

<표 4> 추정 모형별 FGLS 추정 계수값 및 유의성

()안은 t값을 의미한다. $\overline{R^2}$는 위부터 0.228, 0.184, 0.242, 0.163, 0.225, 0.124, ** 5 %, * 10% 에서 유의

종속변수 \ 설명변수		β_1 (λ_1)	β_2 (λ_S)	β_3 (ρ_{12})	β_4 (ρ_{S1})	β_5 (ρ_{S2})	β_6 ($Kmean$)	β_7 ($USmean$)	β_8 (σ_1)	β_9 (σ_2)
1	fNF	-4.8186 (-1.0666)	138.6834 (2.3425)**	106.2796 (3.0446)**	191.0776 (2.0374)**	-43.8917 (-0.5300)				
	fNSF	2.6151 (2.2169)**	74.8141 (2.3381)**	75.3892 (3.0151)**	79.265 (1.0077)	30.3897 (0.6709)				
2	fNS	-6.2334 (-1.3057)	194.4618 (2.3289)**	108.5370 (3.1042)**	237.0353 (2.3442)**	-23.4840 (-0.3005)	38.8973 (1.1910)	-17.3413 (-1.3423)		
	fNSF	1.8788 (1.8022)*	95.8847 (2.4070)**	75.6618 (3.1608)**	94.8308 (1.2027)	42.7332 (0.7886)	11.0465 (0.7518)	-9.3346 (-0.9668)		
3	fNS	-6.5012 (-1.3611)	196.1071 (2.2532)**	110.9777 (3.1385)**	235.8408 (2.3935)**	-7.7275 (-0.09693)	20.4424 (0.6762)	-12.1650 (-1.0162)	242.6452 (0.4695)	212.5308 (1.8133)*
	fNSF	1.7283 (1.5501)	94.0997 (2.3925)**	76.1645 (3.1746)**	96.0592 (1.1501)	48.5207 (0.7909)	5.3809 (0.2924)	-7.9400 (-0.8783)	164.9190 (0.3521)	62.0037 (0.8029)

두 번째, ρ_{12}는 국내단기이자율과 해외단기이자율의 상관관계이다. 직관적으로 상관관계가 높으면 분산투자의 효과가 떨어져 효익이 떨어진다. 그러나 식 (12)에 보면 ρ_{12}는 해외자산의 초과 수익률에 영향을 주고 λ_1의 부호에 따라 효익을 증가시킬 수도 감소시킬 수도 있다. 본 연구의 실증결과에 의하면 (+)로 유의하게 결과가 나타남으로서 효익을 감소시키는 역할을 하고 있다. 즉 상관관계가 높으면 효익이 감소하는 것으로 나타났다.

세 번째, ρ_{s1}은 주가수익률과 한국의 단기이자율의 상관관계로 이 값이 높으면 주식 및 해외채권 투자의 효익은 감소하게 되는데, 실증분석에서도 예상과 같은 결과가 나왔다.

마지막으로 λ_s는 주식의 초과 수익률로 f_{NF}를 종속변수로 사용하는 경우 주식의 초과 수익률이 높으면 해외채권에 투자 효익이 당연히 떨어지게 되어 직관적인 해석이 가능하다. 그러나 f_{NSF}를 종속변수로 사용하는 경우 효익을 증가 시킬 것으로 기대 되었으나, 이 경우도 국내자료의 경우 효익을 감소시키는 것으로 결과가 나왔다. 다소 해석상 문제가 있으나, ρ_{12}가 유의적인 (+)의 결과를 보이는 것으로 보아 국내채권수익률과 상관관계가 높을 경우는 주식투자로 인한 분산효과가 미미하여 효익이 감

소하는 것이 아닌가 판단된다.

나머지 변수 중 모형(iii)의 σ_2가 10% 유의수준에서 (+)로 유의하게 나왔다. 이는 해외이자율의 변동성이 해외채권 투자의 효익을 감소시키는 역할을 하는 것으로 나와 직관적인 예상과 일치한다. 그 외의 변수는 유의성이 매우 낮게 나왔다. 본 논문에는 보고하지 않았으나, 환율을 설명변수로 추가하였다. 이 경우도 변수의 유의성은 매우 낮았다. 본 연구의 결과를 보면, 실증분석기간 중 한국의 분산투자의 효과가 있었는지 판단이 쉽지는 않지만 변수들이 효익을 높이는 방향으로의 유의성이 낮았고, 효익을 감소시키는 방향으로의 유의성은 높아 분석기간 동안 전반적으로 해외채권투자 및 분산투자에 대한 효익은 미미하였던 것으로 판단된다.

이는 <표 1>의 자료와도 유사한 결과를 보이는 것으로 판단된다. <표 1>을 보면 2007년을 기점으로 기관투자자들의 해외채권투자의 투자규모가 급속히 감소하였는데, 본 연구에서 추정한 효익도 기간이 정확히 일치하지는 않으나 2007년 중간이후를 정점으로 급속히 감소하여 거의 0의 수준을 유지하는 것으로 나타났다. 이러한 현상이 회귀모형 결과에서 반영된 것으로 판단된다.

본 연구에서 제시된 모형이 해외채권투자에 대한 투자동기를 모형화한 것이 아니기 때문에 효익과 실제 해외채권투자 규모의 관계를 명확히 밝힐 수는 없으나 전반적으로 유사한 패턴을 갖는 것으로 판단된다. 정확한 관계를 갖지 못하는 이유는 실증모형을 포함하여 본 연구모형 가정의 단순화 및 추정방법상 모수 추정에 일별자료를 사용한 점 등 여러 가지가 있을 수 있으나, 일반적으로 기관투자자들의 해외채권에 대한 투자결정을 효익 측면이 아닌 분산투자효과를 기대하고 이루어지는 원인도 있을 것으로 판단된다.

그럼에도 불구하고 이자율이나 환율을 예측하듯이 본 연구에서 제시된 이자율모형, 환율 등의 모수를 예측추정(forecasting)하여, 효익을 사전적으로 계산한다면, 해외채권의 포트폴리오 편입비중에 대한 의사결정에 유용한 도움을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

Ⅶ. 결론

본 연구는 해외채권의 투자가 얼마만큼 효익을 줄 수 있는지를 이론적으로 도출하고 실증 분석을 통해 살펴보았다.

몇 가지 이론을 통해 해외채권의 기회가 주어질 경우 국내채권 및 해외채권의 최적

투자 비중을 도출하였고 간접효용함수로부터 투자효익의 함수를 도출하였다. 본 연구에서 도출된 효익의 측정치를 이용하여 실증분석을 실시한 결과 한국의 경우 2005년부터 2008년까지 해외채권에 대한 투자효익은 긍정적 요인보다는 부정적 요인이 강하였던 것으로 판단된다. 이는 국내의 경우 2007년을 정점으로 해외채권투자규모가 급속히 감소한 것과 유사한 패턴을 보이는 것으로 판단된다. 본 연구 모형의 가능한 활용성에 대하여 언급한다면, 사전적 예측을 통하여 기관 투자자의 해외채권 투자비중 결정에 유용한 도움을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

본 연구의 공헌은 처음으로 해외채권에 대한 투자효익을 일반균형이론을 이용하여 이론적으로 도출하였고, 실증분석을 통해 한국의 경우 해외채권투자의 효익 여부를 분석하였다.

본 연구의 한계로는 비교적 이자율 모형을 포함하여 간단한 가정하에 도출된 결과이며, 앞서 언급하였듯이 다양한 형태의 pricing kernel을 가정하지 못한점 그리고 환헤지 등의 효과를 모형에 고려하지 못한 점을 들 수 있겠다. 다만 블랙숄즈의 옵션가격 모형이 가정의 비현실성에도 불구하고 모형의 간략함으로 많은 사람들이 사용한다는 것을 감안할 때 모형의 간략함이 현실을 전혀 반영하지 못하는 것은 아니라고 생각된다. 조금 더 진보된 모형은 추후 연구과제로 남기고자 한다.

참고문헌

이준희 · 이명호 (2009), "한국 금리기간구조의 장기 기억성에 대한 연구," 금융공학연구, 제8권 제3호, 25-46.

홍정효 (2011), "원달러 통화 선물시장과 CDS시장사이의 선도-지연에 관한 실증적 연구," 금융공학연구, 제10권 제4호, 103-121.

국민연금 중장기 기금운용 (2004), 국민연금.

Brennan, M. and Y. Xia (2002), "Dynamic Asset Allocation under Inflation," *Journal of Finance*, 3, 1201-1238.

Burger, J. and F. Warnock (2003), "Board of Governors of the Federal Reserve System," *International Finance Discussion Papers*, 755.

Eun, C. and B. Resnick (1994), "International Diversification of Investment Portfolios: U. S. and Japanese Perspectives," *Management Science,* 40(1), 140-161.

Jorion, P. (1989), "Asset Allocation with Hedged and Unhedged Foreign Stocks and Bonds," *Journal of Portfolio Management*, 49-54.

Levy, H. and Z. Lerman (1988), "The Benefit of International Diversification in Bonds," *Financial Analysts Journal*, 44, 56-64.

Odier, P. and B. Solnik (1993), "Lessons for International Asset Allocation," *Financial Analyst Journal*, 49, 63-77.

Vaihekoski, M. and E. Patari (2007), "Empirical Test of Asset Pricing Models in Finnish Stock Market," *Working paper*.

Xia, Y. (2001), "Long Term Bond Markets and Investor Welfare," *Working paper*.

부 록

1. 이론 1의 증명

(i) $\Lambda = (\sigma_s \lambda_s, -B(t,T)\sigma_1\lambda_1, \lambda_1^2 - \lambda_1\rho_{12}(B(t,T)_f\sigma_2 + \lambda_2))'$

(ii) 자산의 변동성행렬 σ는 다음과 같다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_s, & 0, & 0 \\ 0 & -B(t,T)\sigma_1, & 0, \\ 0, & \lambda_1, & -(B(t,T)_f\sigma_2 + \lambda_2) \end{pmatrix}$$

(iii) $\lambda' = (\lambda_s, \lambda_1, \lambda_2\rho_{12})$ 그리고 $\Lambda = \sigma\lambda'$의 관계가 성립한다. 위 (i) (ii) (iii)을 식 (17)에 넣어 계산하면 이론 1의 결과가 도출된다.

2. 이론 2의 증명

(i) $\Lambda = (\sigma_s \lambda_s, -B(t,T)\sigma_1\lambda_1)'$

(ii) 자산의 변동성행렬 σ는 다음과 같다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_s, & 0 \\ 0 & -B(t,T)\sigma_1 \end{pmatrix}$$

(iii) $\lambda' = (\lambda_s, \lambda_1)$ 그리고 $\Lambda = \sigma\lambda'$의 관계가 성립한다. 위 (i) (ii) (iii)을 식 (17)에 넣어 계산하면 이론 2의 결과가 도출된다.

3. 이론 3의 증명

식(17) $\Omega = B(t,T)^2\sigma_1^2$, $\Lambda = -B(t,T)\sigma_1\lambda_1$, $\Omega^{-1}\sigma\rho e_2\sigma_1 = -(B(t,T))^{-1}$, $c(t,T) = B(t,T)$를 대입하면 된다.

4. 이론 4, 5, 6의 증명

간접효용함수의 형태는 다음과 같다.

$$J(W,r,r_f,t,T)=\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}exp((1-\gamma)[c(t,T)r+d(t,T)])$$

위의 간접효용함수를 W와 r에 대하여 각각 2차까지 편미분을 시행하면,

$$J_W=\frac{1-\gamma}{W}J,\ J_{WW}=-\frac{\gamma(1-\gamma)}{W^2}J,\ J_{Wr}=\frac{(1-\gamma)^2c}{W}J,$$
$$J_r=(1-\gamma)cJ,\ J_{rr}=(1-\gamma)^2c^2J$$

이 도출된다. 여기서 하첨자는 해당 변수에 대한 편미분 값을 의미하며, $c=c(t,T)$를 의미한다.

(i) 위 편미분 값을 이론 1에서 구한 투자 벡터 $x=(x_s,x_1,x_2)'$ 과 함께 Bellman 방정식 (14)에 대입하면 다음의 방정식이 도출된다.

$$\begin{aligned} r(1-\kappa c+\frac{\partial c}{\partial t})+\ \frac{\partial d}{\partial t}+\kappa\bar{r}c+\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_1^2c^2 \\ -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\sigma_1\lambda_1c(t,T)-\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_1^2c(t,T) \\ +x'\sigma\rho e_2\sigma_1(1-\gamma)c-\frac{1}{2}\gamma(x'\Omega x)+x'\Lambda=0 \end{aligned}$$

이론 1의 투자분을 위식에 넣어 정리하면 다음과 같은 식이 도출된다.

$$\begin{aligned} r(1-\kappa c+\frac{\partial c}{\partial t})+\ \frac{\partial d}{\partial t}+\kappa\bar{r}c+\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_1^2c^2 \\ -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}\sigma_1\lambda_1c(t,T)-\frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_1^2c(t,T) \\ +\frac{1}{2\gamma}[\lambda'\rho^{-1}\lambda+(\lambda_1+B(t,T)\sigma_1(1-\gamma))^2-\lambda_1^2]=0 \end{aligned}$$

위 편미분 방정식을 r을 중심으로 두 개의 상미분 방정식으로 나타내면 이론 4의 방정식이 성립된다.

(ii) 주식과 국내채권에만 투자하는 경우도 이론 2의 투자분을 Bellman 방정식에 대

입하면 비슷한 결과가 나온다.

(iii) 주식 및 해외자산에 투자하지 않을 경우는 이론 3의 투자분을 Bellman 방정식에 대입하여 계산하면 된다.

5. 이론 7의 증명

미분 방정식의 오른쪽이 상수이므로 시간에 대하여 적분하면 된다.

Abstract

A Study on Foreign Bond Market and Investor Welfare

Joon H. Rhee,[*] Soo C. Park,[**] and Tea Y. Kim[***]

While most papers related to the investment benefit of foreign financial assets have focused on efficient set expansions, this paper studies increase or decrease of investor's welfare in investing foreign bonds. This paper drives invertor's welfare from the certainty equivalence wealth between with and without the foreign bond. The study is an extension and application of Xia (2001)'s long term bond market model to foreign bonds market. This paper obtains new results by solving Bellman equation. We find that the investor's welfare from foreign bond investment are affected by the correlations between asset returns, the market prices of risk from uncertainties, and degree of investor's risk aversion. We also perform the empirical studies of the calculated welfare. We use the U.S. Treasury bonds as the foreign bonds for estimating our model. From the empirical research, we find that the welfare in the view of Korean investors from the additional foreign bond investment may be reduced between the period of 2005 and 2008.

Key Words: Foreign Bond Investment, Bellman Optimality, Indirect Utility Function, Portfolio Selection

[*] Professor, Business School of Soongsil University, Seoul Korea, Tel: 02-820-0536, E-mail: joonrh@ssu.ac.kr

[**] Graduate Student (Ph.D.program), Business School of Soongsil University, Tel: 02-820-0536, E-mail: park.soochun@gmail.com

[***] Graduate Student (Master program), Departnment of Economics, Soongsil University, Seoul Korea, Tel: 02-820-0536, E-mail: winkty0908@naver.com