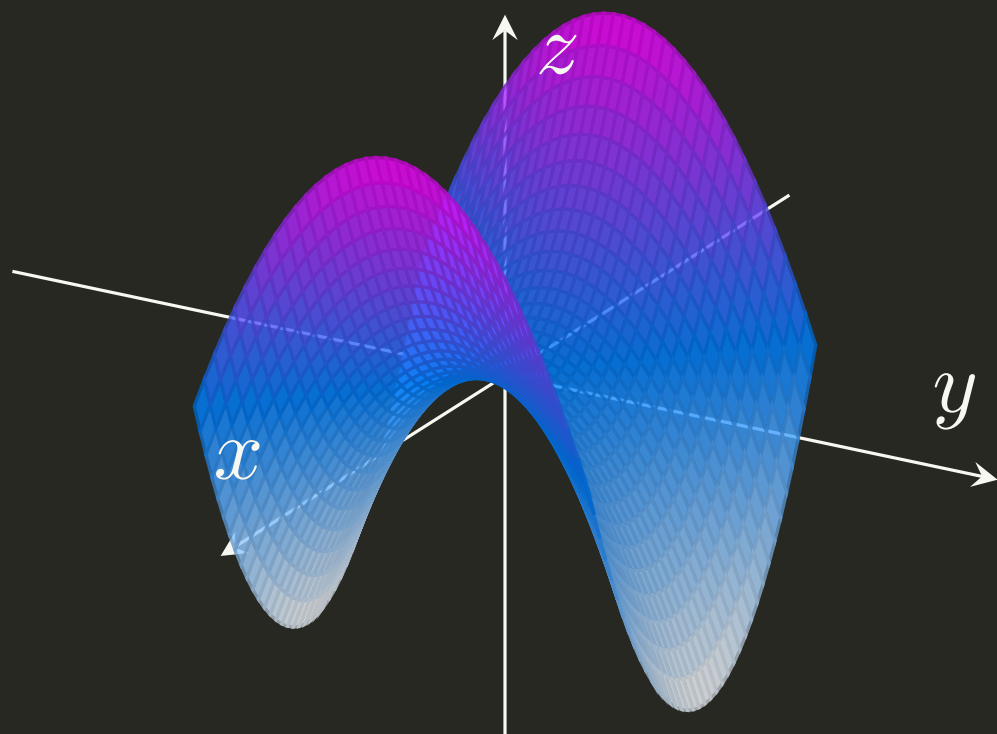


大学数学征解题集



作者：饶一鹏
邮箱：raoyipeng@qq.com

2025 年 9 月 11 日

目录

1 大学数学征解题集	3
1 北京大学-杨家忠	3
2 南京大学-梅加强	3
3 厦门大学-林亚南	6
4 复旦大学-谢启鸿、厉若	8
5 复旦大学-应坚刚	10
6 浙江大学-张立新	11
7 吉林大学-李辉来	12
8 浙江大学-王梦	13
9 东南大学-陈建龙	14
10 湖南交通工程学院高科技研究院-冯良贵	14
11 复旦大学-严金海	16
12 国防科技大学-王银坤	17
13 北京大学-冯荣权, 北京国际数学中心-许地生	18
14 中国科技大学-李平	19
15 南京大学-梅加强	21
16 复旦大学-严金海	24
17 北京大学-杨家忠	25
18 北京大学-冯荣权, 北京国际数学中心-许地生	26
19 复旦大学-张奇	27
20 吉林大学-周鸣君	29
21 复旦大学-江辰	29
22 吉林大学-周鸣君	32
23 复旦大学-严金海	32
24 复旦大学-楼红卫、严金海	38
25 华东师范大学-庞学诚	40
26 南京大学-石亚龙	40
27 中国科学技术大学-任广斌	41
28 南开大学-黄利兵	42
29 四川大学博士研究生-王周哲	43
30 江苏师范大学本科生-尤永皓	44
31 南京大学-梅加强	45
32 复旦大学-严金海	46
33 北京大学-杨家忠	47
34 复旦大学-严金海	47
35 北京大学-杨家忠	48

36	北京理工大学-赵鲁涛	49
37	复旦大学-楼红卫	50
38	许昌学院数学学院本科生-韩万龙	52
39	南开大学-李军	53
40	江南大学-沈莞蕾，陈海伟	54
41	复旦大学-江辰	57
42	复旦大学-韩京俊	61
43	河南师范大学，华东师范大学-庞学诚	61
44	华东师范大学-李文侠	62
45	复旦大学-严金海	64
46	复旦大学-江辰	65
47	复旦大学-严金海	66
48	复旦大学-江辰	67
49	南京大学-梅加强	72
50	浙江大学-王梦，巴黎综合理工-林徐扬	75
51	北京大学-杨家忠	77
52	苏州工学院-常建明	78

2	后记	79
---	----	----

1 大学数学征解题集

题 1 (北京大学-杨家忠). 设 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 依次为方程 $2020 \tan x = 2021x$ 的所有正根, 试计算级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$$

的值。

解. 令 $c = \frac{2020}{2021}$, 则方程变为

$$c \frac{\sin x}{x} - \cos x = 0$$

令 $f(x) = c \frac{\sin x}{x} - \cos x$, 则易知 $f(x)$ 为偶函数, 而 $f(0^+) = c - 1$, 我们将 $f(x)$ 展开为无穷乘积

$$f(x) = (c-1) \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x_i^2}\right) = (c-1) \left(1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i^2} x^2 + \dots\right)$$

再根据泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为无穷级数

$$\begin{aligned} f(x) &= c \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right) x^{2k} \end{aligned}$$

比较上述两式 x^2 系数得到 (令 $k=1$):

$$-(c-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2} = (-1) \left(\frac{c}{3!} - \frac{1}{2!} \right) \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{c-3}{6(c-1)} = \frac{4043}{6}$$

题 2 (南京大学-梅加强). 设 f 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 如果对每一个 x , 均有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h f(x+t)t \, dt = 0$$

证明: f 为常值函数。

证明. 根据题设有

$$\frac{1}{h^3} \int_0^h (f(x+t) - f(x-t))t \, dt \rightarrow 0$$

引入函数 $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$, 只需证明 $F(x)$ 必为一次多项式, 由上式得到

$$\frac{1}{h^3} \left((F(x+h) + F(x-h))h - \int_0^h (F(x+t) + F(x-t)) \, dt \right) \rightarrow 0$$

在任意的闭区间 $[a, b]$ 上, 引入 $G(x)$ 如下

$$G_\varepsilon(x) = F(x) - F(a) - \underbrace{\frac{F(b) - F(a)}{b - a}}_s (x - a) + \varepsilon(x - a)(b - x)$$

不难得到 $G_\varepsilon(a) = G_\varepsilon(b) = 0$, 若 $\max_{x \in [a, b]} \{G_\varepsilon(x)\} = G_\varepsilon(c) > 0$, 考虑偶函数 $u(h) = G_\varepsilon(c - h) + G_\varepsilon(c + h)$, 则存在 $h_1 > 0$, 使得 $h = 0$ 为 $u(h)$ 在 $[0, h_1]$ 的最大值点, 记 $h'_1 > 0$ 为 $u(h)$ 在 $[0, h_1]$ 的最小值点, 依次定义 $h_{k+1} = \frac{h_k}{2}$ 以及 $h'_{k+1} > 0$ 为 $u(h)$ 在 $[0, h_{k+1}]$ 的最小值点, 于是有 $h'_k \rightarrow 0$ 且有

$$(G_\varepsilon(c + h'_k) + G_\varepsilon(c - h'_k))h'_k - \int_0^{h'_k} (G_\varepsilon(c + t) + G_\varepsilon(c - t)) dt = u(h'_k)h'_k - \int_0^{h'_k} u(t) dt \leq 0$$

另一方面, 直接计算得到

$$\begin{aligned} & (F(c + h) + F(c - h))h - \int_0^h (F(c + t) + F(c - t)) dt \\ &= u(h)h - \int_0^h u(t) dt + 2sch + 2\varepsilon(c^2 + h^2)h - 2sch - \int_0^h 2\varepsilon(c^2 + t^2) dt \\ &= u(h)h - \int_0^h u(t) dt + \frac{4}{3}\varepsilon h^3 \end{aligned}$$

这就得到

$$\frac{1}{h^3} \left(u(h)h - \int_0^h u(t) dt \right) \rightarrow -\frac{4}{3}\varepsilon$$

取 $\varepsilon < 0$, 这与前面的 $u(h'_k)h'_k - \int_0^{h'_k} u(t) dt \leq 0$ 矛盾! 故 $G_\varepsilon(x) \leq 0$ 恒成立, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^-$ 得 $G_0(x) \leq 0$; 取 $\varepsilon > 0$ 可证 $G_0(x) \geq 0$, 故 $G_0(x) \equiv 0$. 由区间 $[a, b]$ 的任意性, 这说明 $F'(x)$ 恒为常数, 得证. \square

注. 本题的证明思路来源浙江大学数学科学学院 2018 级本科生-王尉。

一些额外思考

一、若 $[0, 1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在其上的每个点均为极值点, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上必为常数。

证明. 反证法, 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不恒为常数, 则存在两个点 a_0, b_0 , 使得 $f(a_0) \neq f(b_0)$, 不妨设 $a_0 = 0, b_0 = 1$, 且 $f(a_0) < f(b_0)$, 根据连续函数的介值定理, 必存在一点 $c_0 \in (a_0, b_0)$ 使得 $f(c_0) = \frac{f(a_0) + f(b_0)}{2}$, 因区间 $[a_0, c_0], [c_0, b_0]$ 必有一个长度不大于 $\frac{b_0 - a_0}{2}$, 将此区间记为 $[a_1, b_1]$, 依次这样递归构造, 我们得到一个非减数列 $\{a_n\}$ 、一个非增数列 $\{b_n\}$ 以及一个数列 $\{c_n\}$, 满足 $b_n > c_n > a_n$, $b_n - a_n \rightarrow 0$ 以及 $f(b_n) > f(c_n) = \frac{f(b_n) + f(a_n)}{2} > f(a_n)$. 考虑到 a_n, b_n, c_n 必有极限点记为 c , 且 c 也为一个极值点, 故存在 $\delta > 0$ 使得在 $(c - \delta, c + \delta)$ 上恒有 $f(x) \geq f(c)$ 或 $f(x) \leq f(c)$, 又知道 $f(a_n) < f(c) < f(b_n)$ 对一切 n 恒成立, 则当 n 足够大时就有 $(a_n, b_n) \subset (c - \delta, c + \delta)$, 这与 c 为极值点矛盾! \square

二、设 f 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 如果对每一个 x , 均有

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h f(x+t) - f(x) dt = 0$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h f(x+t) - f(x-t) dt = 0$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_0^h f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) dt = 0$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^4} \int_0^h f(x+2t) - 2f(x+t) + 2f(x-t) - f(x-2t) dt = 0$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^5} \int_0^h f(x+2t) - 4f(x+t) + 6f(x) - 4f(x-t) + f(x-2t) dt = 0$$

请考虑如下结论是不是成立，若不成立，请给出一个反例。

$$(1) f^{(1)}(x) \equiv 0$$

$$(2) f^{(1)}(x) \equiv 0$$

$$(3) f^{(2)}(x) \equiv 0$$

$$(4) f^{(3)}(x) \equiv 0$$

$$(5) f^{(4)}(x) \equiv 0$$

证明. (1) 引入函数 $g_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon x$ ，已知对任意的 x ，有

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h f(x+t) - f(x) dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h g_\varepsilon(x+t) - g_\varepsilon(x) + \varepsilon t dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h g_\varepsilon(x+t) - g_\varepsilon(x) dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

故得到

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h g_\varepsilon(x+t) - g_\varepsilon(x) dt \rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

对于任意区间 $[a, b]$ ，记 $\max_{x \in [a, b]} \{g_\varepsilon(x)\} = g_\varepsilon(c_1)$ ， $\min_{x \in [a, b]} \{g_\varepsilon(x)\} = g_\varepsilon(c_2)$ ，其中 $c_1, c_2 \in [a, b]$ 。

对于 $\varepsilon < 0$ 我们证明必有 $c_1 = b$ ，若不然，对任意的 $h < b - c_1$ 就有

$$\int_0^h g_\varepsilon(c_1+t) - g_\varepsilon(c_1) dt \leq 0$$

注意到 $\varepsilon < 0$ ，这与(1)矛盾！故有

$$g_\varepsilon(x) \leq g_\varepsilon(b) \implies f(x) - \varepsilon x \leq f(b) - \varepsilon b$$

上式令 $\varepsilon \rightarrow 0^-$ 得到 $f(x) \leq f(b)$ 对 $x \in [a, b]$ 恒成立。同样地，对于 $\varepsilon > 0$ ，可证 $f(x) \geq f(b)$ 对 $x \in [a, b]$ 恒成立。这就得到在 $[a, b]$ 上有 $f(x) = f(b)$ ，由区间 $[a, b]$ 的任意性，证完。

(2) 引入函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 只需证明 $F(x)$ 必为一次多项式, 则有

$$\frac{1}{h^2}(F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)) \rightarrow 0$$

在闭区间 $[a, b]$ 上引入

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(x) &= F(x) - \frac{F(b)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(b-x) \\ \implies \frac{1}{h^2}(G_\varepsilon(x+h) + G_\varepsilon(x-h) - 2G_\varepsilon(x)) &\rightarrow -2\varepsilon \end{aligned}$$

易知 $G_\varepsilon(a) = G_\varepsilon(b) = 0$, 对 $\varepsilon < 0$, 证明 $G_\varepsilon(x) \leq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立; 对 $\varepsilon > 0$, 证明 $G_\varepsilon(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 之后令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证。

(3) 在任意区间 $[a, b]$ 上引入

$$g_\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon(x-a)(b-x)$$

则

$$\frac{1}{h^3} \int_0^h g_\varepsilon(x+t) - 2g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x-t) dt \rightarrow -\frac{2}{3}\varepsilon$$

对 $\varepsilon < 0$, 证明 $g_\varepsilon(x) \leq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立; 对 $\varepsilon > 0$, 证明 $g_\varepsilon(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立, 之后令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证。

(4) 考虑函数 $f(x) = |x|$ 并不是二次多项式:

- $x \neq 0$, 当 h 足够小时可知 $x+2t, x+t, x-t, x-2t$ 同号, 此时题设成立;
- $x = 0$, 直接计算得到 $f(2t) - 2f(t) + 2f(-t) - f(-2t) = |2t| - |2t| + |2t| - |2t| = 0$, 此时题设成立;

是一个反例。

(5) 考虑函数 $f(x) = |x|x$ 并不是三次多项式:

- $x \neq 0$, 当 h 足够小时可知 $x+2t, x+t, x, x-t, x-2t$ 同号, 此时题设成立;
- $x = 0$, 直接计算得到 $f(2t) - 4f(t) + 6f(0) - 4f(-t) + f(-2t) = 4t^2 - 4t^2 + 4t^2 - 4t^2 = 0$ 此时题设成立;

是一个反例。

□

题 3 (厦门大学-林亚南). (1) 证明: 对于数域 F 上任意的 n 阶矩阵 A , 存在可逆矩阵 P 使得 $B \equiv PA$ 是对称矩阵。

(2) 设计一个算法, 实现 (1) 的任务, 即输入一个 n 阶矩阵 A , 输出相应的对称矩阵 B 。

证明. (1) 对于矩阵 A , 设其秩为 r , 我们对其作初等行变换和列变换, 存在 S, U 使得

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad A = S \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = S \begin{pmatrix} U_1 \\ O \end{pmatrix}$$

我们可以令 $P = U^T S^{-1}$, 则 PA 表示为

$$PA = U^T S^{-1} S \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = U^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = U_1^T U_1$$

不难看出其为对称矩阵。

(2) 我们对 A 作高斯消去, 算法流程如下:

Algorithm 1 矩阵对称化算法

Require: 矩阵 $A = \{a_{ij}\}$

Ensure: $B = PA = \{b_{ij}\}$, $b_{ij} = b_{ji}$

```

1: 初始化  $U \leftarrow A$ , 令  $r = n$                                 ▷ 复制原始矩阵
2: for  $k \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do                                    ▷ 主元列循环
3:   令  $k_0 = k$ , 选主元  $p$  使得  $|u_{pk}| = \max_{i \geq k} |u_{ik}|$         ▷ 部分选主元
4:   if  $u_{pk} = 0$  then
5:     if  $k < n$  then
6:       令  $k = k + 1$ , 返回到前面选主元操作继续。
7:     else
8:       令  $r = k_0$ , Break                                       ▷ 已经得到上三角矩阵
9:     end if
10:  end if
11:  if  $p \neq k$  then
12:    交换第  $k$  行与第  $p$  行                                         ▷ 数值稳定性保证
13:  end if
14:  for  $i \leftarrow k + 1$  to  $n$  do                                    ▷ 消去行循环
15:     $\mu \leftarrow u_{ik}/u_{kk}$                                        ▷ 计算乘子
16:     $u_{ik} \leftarrow 0$                                            ▷ 显式置零
17:    for  $j \leftarrow k + 1$  to  $n$  do                                ▷ 列更新
18:       $u_{ij} \leftarrow u_{ij} - \mu \cdot u_{kj}$ 
19:    end for
20:  end for
21: end for
22: 得到的矩阵  $U$  及秩  $r$ , 选取  $U$  的前  $r$  行组成矩阵  $U_r$ 
23: return  $U_r^T U_r$ 

```

□

题 4 (复旦大学-谢启鸿、厉若). 设 n 阶复方阵 A 满足: 对任意的正整数 k , $|A^k + I_n| = 1$. 证明: A 是幂零矩阵.

牛顿公式

引理 1. 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

引入根的幂和 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 则成立如下等式:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0, \quad k > n.$$

证明. 分如下两种情况:

- 对于 $k > n$ 的情况:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0$$

已知

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

每个等式两边同乘上 x_i^{k-n} , 即得

$$x_i^k - \sigma_1 x_i^{k-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n x_i^{k-n} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

将 n 个等式相加即证.

- 对于 $k \leq n$ 的情况:

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0$$

我们先用两种方法证明如下(2)式: (其中 $\deg(g) < n$)

$$x^{k+1} f'(x) = \left(s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_{k-1} x + s_k \right) f(x) + g(x), \quad (2)$$

— 方法一: 我们取 $x > \max\{|x_i|\} (i = 1, 2, \dots, n)$, 根据 $f(x)$ 的形式不难得到

$$\begin{aligned} x^{k+1} f'(x) &= x^k f(x) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{x_i}{x}} \\ &= x^k f(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \left(\frac{x_i}{x} \right)^j + x^k f(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left(\frac{x_i}{x} \right)^j \\ &= f(x) \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^n x^{k-j} x_i^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+j}}{x^j} f(x) \\ &= f(x) \sum_{j=1}^k x^{k-j} s_j + \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^n (-1)^t \sigma_t x_i^{k+j} x^{n-t-j} \\ &= f(x) \sum_{j=1}^k x^{k-j} s_j + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^{\min(s-1, n)} (-1)^t \sigma_t x_i^{k+s-t} x^{n-s} \end{aligned}$$

对于任意固定的 $s > n$, 考虑上式第二项 x^{n-s} 的系数

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=0}^n (-1)^t \sigma_t x_i^{k+s-t} = \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i^{k+s-n} = 0$$

– 方法二:

$$\begin{aligned} x^{k+1} f'(x) &= f(x) \sum_{i=1}^n \frac{x^{k+1} - x_i^{k+1}}{x - x_i} + f(x) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{x - x_i} \\ &= f(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k x_i^j x^{k-j} + x_i^{k+1} \sum_{i=1}^n \frac{f(x)}{x - x_i} \\ &= f(x) \sum_{j=0}^k s_j x^{k-j} + g(x) \end{aligned}$$

故(2)式得证。

有了上述结果, 我们重写 $f(x)$, $f'(x)$ 如下

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j x^{n-j} \quad f'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma_j (n-j) x^{n-j-1}$$

则有

$$\begin{aligned} x^{k+1} f'(x) &= \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \sigma_t (n-t) x^{n+k-t} \\ \sum_{i=0}^k s_i x^{k-i} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j x^{n-j} &= \sum_{t=0}^{n+k} \sum_{j=\max(0, t-k)}^t (-1)^j \sigma_j s_{t-j} x^{n+k-t} \end{aligned}$$

比较(2)式两侧 x^n 的系数, 取 $t = k$, 并注意到 $s_0 = n$, $\sigma_0 = 1$, 则得到:

$$(-1)^k \sigma_k (n-k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma_j s_{k-j} \implies (-1)^k \sigma_k (-k) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \sigma_j s_{k-j}$$

证毕。

□

证明. 记 A 的 n 个特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 只需证明它们均为 0。

对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 考虑 A 的若当标准型不难得到

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i^k + 1) = 1 \implies \underbrace{\lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k + \lambda_1^k \lambda_2^k + \dots + \lambda_{n-1}^k \lambda_n^k + \dots + \lambda_1^k \lambda_2^k \dots \lambda_n^k}_{\text{共 } 2^n - 1 \text{ 项}} = 0$$

对于 $k = 1$ 的每一项, 我们记为 $x_1, x_2, \dots, x_{2^n-1}$ 是一个 $2^n - 1$ 次方程的根, 且所有的根幂和均为 0。根据引理 1, $2^n - 1$ 次方程只有最高次的系数不为 1, 故得到 $x_1, x_2, \dots, x_{2^n-1}$ 满足方程 $x^{2^n-1} = 0$, 这得到 $x_i = 0, (i = 1, 2, \dots, 2^n - 1)$, 而 $\lambda_i = x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 故得到所有的 λ_i 均为 0, 证毕。 □

题 5 (复旦大学-应坚刚). 向平面随机地投掷一根长为 $l = 2$ 的针。求：

- (1) 针仅与平行线 $\{x = n : n \in \mathbb{Z}\}$ 之一相交的概率；
- (2) 针与平行线 $\{x = 3n, x = 3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ 相交的概率。

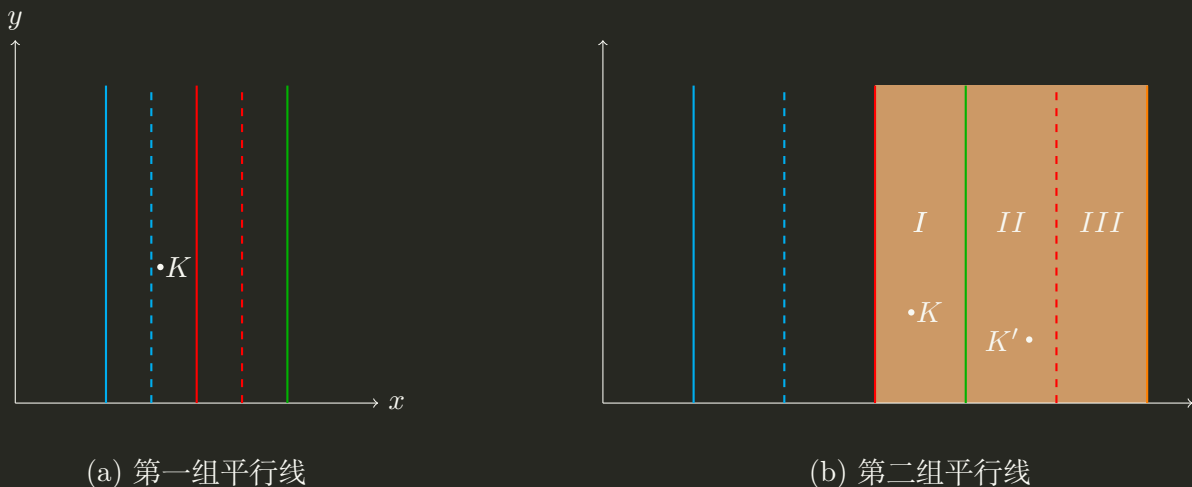


图 1: 两组平行于 y 轴的直线示例

解. (1) 如图 (a), 取针的中点 K , 平行线间距为 $d = 1$, 设针与 y 方向的夹角为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 则半针在 x 方向投影长度为 $\frac{l}{2} \sin \theta$, K 点必在某一个实线和虚线之间, 若 $\frac{l}{2} \sin \theta \geq \frac{d}{2}$, 此时必相交, 此时 $\theta \geq \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{\pi}{6}$, 故相交的概率为

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{l \sin \theta}{d} d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{6(2 - \sqrt{3}) + 2\pi}{3\pi}$$

(2) 如图 (b), 考虑阴影区域, 则针的中点 K 落在每个区域的概率为 $\frac{1}{3}$,

- 对于 I 区域, 针相交的概率记为 P_1 , 此时根据 (1) 的结果, 得到

$$P_1 = \frac{6(2 - \sqrt{3}) + 2\pi}{3\pi}$$

- 对于 I, II , 针相交的概率记为 P_2 , 此时可视为平行线间距 $d = 2$, 若 $\theta \geq \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{\pi}{2}$ 此时必相交, 则根据 (1) 的思想得到

$$P_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin \theta}{d} d\theta = \frac{2}{\pi}$$

从而总相交概率为

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{6(2 - \sqrt{3}) + 2\pi}{3\pi} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{\pi} = \frac{24 - 6\sqrt{3} + 2\pi}{9\pi}$$

题 6 (浙江大学-张立新). 设 X 和 Y 是相互独立的非退化随机变量, a 为实数。假设 $X+Y$ 与 aX 同分布。证明:

(1) $|a| > 1$ 。

(2) X 是正态随机变量当且仅当 Y 是正态随机变量。

(3) 设 Y 服从两点分布。证明 X 服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布 $U[-1, 1]$ 的充分必要条件是 $|a| = 2$ 且 $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ 。

证明. (1) 设 $\varphi_X(t)$ 与 $\varphi_Y(t)$ 分别为 X, Y 的特征函数, 则有

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)$$

由于 Y 非退化, 则存在 t_0 使得 $|\varphi_Y(t_0)| < 1$ 。

• 若 $|a| < 1$, 则

$$|\varphi_X(at_0)| \leq |\varphi_X(t_0)| \implies |\varphi_X(a^n t_0)| \leq |\varphi_X(t_0)|$$

根据 $|\varphi_X(a^n t_0)| \rightarrow 1$, 知道 $|\varphi_X(t_0)| \geq 1$, 矛盾!

• 若 $|a| = 1$, 则有 $\varphi_Y(t) = 1$ 恒成立, 这说明 $Y \equiv 0$ 是退化的, 矛盾!

(2) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 是正态分布, 则有 $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, 代入方程得到

$$e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi_Y(t) = e^{i\mu at - \frac{\sigma^2 a^2 t^2}{2}} \implies \varphi_Y(t) = e^{i\mu(a-1)t - \frac{\sigma^2(a^2-1)t^2}{2}}$$

这得到 $Y \sim N(\mu(a-1), \sigma^2(a^2-1))$ 为正态分布。

反过来, 若 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 是正态分布, 则有

$$\begin{aligned} \varphi_X(t)e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} &= \varphi_X(at) \\ \implies \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/a)} &= e^{i\mu \frac{t}{a} - \frac{\sigma^2 t^2}{2a^2}} \\ \implies \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/a^n)} &= \exp\left(\sum_{k=1}^n i\mu t \frac{1}{a^k} - \sum_{k=1}^n \sigma^2 t^2 \frac{1}{2a^{2k}}\right) \\ \implies \varphi_X(t) &= \exp\left(\frac{i\mu t}{a-1} - \frac{\sigma^2 t^2}{2(a^2-1)}\right) \end{aligned}$$

这说明 $X \sim N\left(\frac{\mu}{a-1}, \frac{\sigma^2}{a^2-1}\right)$ 为正态分布。

(3) 设 Y 取值为 α, β 概率为 $p, 1-p$, 则 $\varphi_Y(t) = pe^{i\alpha t} + (1-p)e^{i\beta t}$; 若 $X \sim U[-1, 1]$, 则 $\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$

必要性: 此时 $\varphi_Y(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t$, 不妨设 $a = 2$, 则由

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) \cos t &= \varphi_X(2t) \\ \implies \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/2^n)} &= \prod_{k=1}^n \cos \frac{t}{2^k} = \frac{\sin t}{2^n \sin \frac{t}{2^n}} \\ \implies \frac{t\varphi_X(t)}{\sin t} &= \frac{\frac{t}{2^n}}{\sin \frac{t}{2^n}} \varphi_X(t/2^n) \end{aligned}$$

上式令 $n \rightarrow +\infty$ 得到 $\frac{t\varphi_X(t)}{\sin t} = 1$ 。对 $a = -2$ 可类似证明，必要性证毕。

充分性：此时有

$$\frac{\sin t}{t}(pe^{i\alpha t} + (1-p)e^{i\beta t}) = \frac{\sin at}{at}$$

对比虚部得到 $p \sin(\alpha t) + (1-p) \sin(\beta t) = 0$ 对一切 $t \in \mathbb{R}$ 成立，这说明 $\sin(\alpha t)$ 与 $\sin(\beta t)$ 线性相关，故有 $\alpha = \pm\beta$ ，且 $p = \frac{1}{2}$ ，又 $\alpha \neq \beta$ 知 $\alpha = -\beta$ 。再计算实部得到

$$\frac{\sin t}{t} \cos(\alpha t) = \frac{\sin at}{at} \implies a \cos(\alpha t) \sin t = \sin at$$

根据积化和差公式，对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 有：(其中 $|a| > 1$)

$$a(\sin((1+\alpha)t) + \sin((1-\alpha)t)) = 2 \sin at$$

这说明 $\sin((1+\alpha)t)$, $\sin((1-\alpha)t)$, $\sin at$ 线性相关，这得到

- 若 $\alpha = 0$ ，则 $a = \pm 1$ 与 $|a| > 1$ 矛盾！
- 若 $1 - \alpha = 0$ ，则 $a \sin 2t = 2 \sin at$ ，得到 $a = \pm 2$ 。
- 若 $1 + \alpha = 0$ ，则 $a \sin 2t = 2 \sin at$ ，得到 $a = \pm 2$ 。

故有 $p = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\beta = \pm 1$, $|a| = 2$ ，证毕。

□

题 7 (吉林大学-李辉来). 求级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-3)!!!}{2^k(3k-1)!!!}$$

的和。

解. 引入幂级数 $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k+2} a_k x^{3k+2}$ ，其中 $a_k = \frac{(3k-3)!!!}{2^k(3k-1)!!!}$ ，易得 $a_1 = \frac{1}{4}$ ，且有如下递推关系：

$$a_{k+1} = \frac{3k}{2(3k+2)} a_k = \frac{3k+2-2}{2(3k+2)} a_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3k+2} \right) a_k$$

两边同乘以 x^{3k+2} ，并对 k 从 $1 \rightarrow +\infty$ 求和得到

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+1} x^{3k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{3k+2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k+2} a_k x^{3k+2}$$

$f(x)$ 的收敛半径 $R = 2$ ，对其逐项求导得到 $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{3k+1}$ 。

我们只需求 $f'(1)$ 的值，首先有

$$\frac{f'(x) - a_1 x^4}{x^2} = \frac{1}{2} x f'(x) - f(x) \implies x^2 f(x) + \left(1 - \frac{1}{2} x^3\right) f'(x) = \frac{1}{4} x^4$$

对于任意的 $p > 1$ 及任意的 $\|x\|_p = 1$, 令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 根据 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|_p^p &= \sum_{k=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right|^p \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^{\frac{1}{p}} |a_{kj}|^{\frac{1}{q}} |x_j| \right)^p \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}| |x_j|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}| \right)^{\frac{p}{q}} \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{kj}| |x_j|^p \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{kj}| \right) |x_j|^p \\
 &\leq M
 \end{aligned}$$

令 $M_p = M^{\frac{1}{p}}$, 故得到 $\|Ax\|_p \leq M_p \|x\|_p$

□

题 9 (东南大学-陈建龙). 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 它的 3 个特征值为 λ_i , 满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, α_1, α_2 为属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量。证明 A 由 λ_1, λ_3 和 α_1, α_2 唯一确定。

证明. 不妨设 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 且都为单位向量, 否则, 我们令 $s = -\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_2)}$, 并将 $\alpha_1 + s\alpha_2$ 单位化后记为 α_2 即可。作 α_1, α_2 的叉积 $\alpha_3 = \alpha_1 \times \alpha_2$, 此时必有 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$, 作 $P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$, 则有

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \implies A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

证毕。

□

题 10 (湖南交通工程学院高科技研究院-冯良贵). 设 $R = \{1, 0, -1\}$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为 \mathbb{R} 上 n 阶方阵全体, 证明: 集合

$$S_n = \{\det(A) \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ 且 } A \text{ 的元素属于 } R\}$$

必包含闭区间 $[-2^{n-1}, 2^{n-1}]$ 内的一切整数。

进一步, 我们提出如下开放问题: S 是否由闭区间 $[-2^{n-1}, 2^{n-1}]$ 内的一切整数所构成?

证明. 我们对行列式某一行加个负号, 即得到行列式的相反数, 故只需考虑 $[0, 2^{n-1}]$ 的情况。引入记号 $H_n = \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ 且 } A \text{ 的元素属于 } R\}$, $K_n = \{k \mid k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \in [-2^{n-1}, 2^{n-1}]\}$ 。当 $n = 1$ 时, 显然 $S_1 = \{-1, 0, 1\}$, 下面考虑 $n > 1$ 的情况。

对于任意的整数 $k \in [0, 2^{n-1}]$, 构造 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

对于 $k(< 2^{n-1})$, 我们可以将其表示为二进制计数 $\underline{a_{n-2} \dots a_1 a_0}$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 写明白即为:

$$k = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_{n-2} 2^{n-2}$$

- 对于 $k = 2^{n-1}$, 我们令 $a_i = 1$, 前 $n-1$ 行乘以 $-a_i$ 加到最后一行得到右下角元素为 $2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) = 1$, 则最后一行每个元素均在 R 中, 再对第 $2 - (n-1)$ 行反序逐步实行此操作;
- $k \in [0, 2^{n-1})$, 我们使用 $k = \underline{a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ 的 a_i , 将第 i 行乘以 $-a_i$ 加到最后一行, 则最后一行每个元素均在 R 中, 再对第 $2 - (n-1)$ 行反序逐步实行同 $k = 2^{n-1}$ 情况的操作。

最后得到的矩阵 A_n 属于 H_n , 且 $\det(A_n) = k$, 这就得到了 $K_n \subset S_n$ 。

下面说明对于 $n < 4$, S_n 中的最大值 2^{n-1} , 但当 $n \geq 4$ 时, 不成立。

- $n = 1$ 时是显然的;
- $n = 2$ 时, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq 2$, 取 $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$ 即可。
- $n = 3$ 时, 对第一列作高斯消去法得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 。

- 若某个 $i_0, j_0 (i_0, j_0 = 2, 3)$ 使得 $|a_{i_0 j_0}| = 2$, 则同行另一个元素若不为零, 则必定同号, 这就说明若存在 $|a_{i_0 j_0}| = 2$, 必有 $\det(A) \leq 2 \times 2 = 4$,
- 若所有的 $i, j (i, j = 2, 3)$ 都有 $|a_{ij}| < 2$, 根据 $n = 2$ 的结果 $\det(A) \leq 2$ 。
- $n = 4$ 我们构造

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

直接计算得到 $\det(A_4) = 16 > 2^{4-1} = 8$ 。

若对于 $n \geq 4$, 我们已经构造了 A_n , 使得 $\det(A_n) > 2^{n-1}$, 则对于 $n+1$, 构造如下矩阵 A_{n+1}

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & \alpha \\ \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T$ 为仅第一个元素为 1, 其余为 0 的列向量. 则 $\det(A_{n+1}) = 2 \det(A_n) > 2^n$, 且把第一行乘以 -1 加到最后一行, 易知 $A_{n+1} \in H_{n+1}$, 至此构造完毕.

综合以上论证, 结论证毕. □

题 11 (复旦大学-严金海). 设 f 为 \mathbb{R} 上的非线性连续函数, 称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的严格凹支撑点, 若存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) > f(x_0) + k(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

类似地, 称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的严格凸支撑点, 若存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) < f(x_0) + k(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

设 f 有两条斜渐近线 $y = k_i x + b_i$ ($k_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$):

$$\lim_{(-1)^i x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_i x - b_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

问两条渐近线满足什么条件时, f 必有严格凹支撑点或严格凸支撑点? 为什么?

解. 我们分以下情况来说明:

- 若 $k_2 > k_1$, f 必存在严格凹支撑点, 无严格凸支撑点. 令 $g_k(x) = f(x) - kx$.

对任意的 $k_2 > k > k_1$, 易得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_2 x - b_2 + (k_2 - k)x + b_2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (k_2 - k)x + b_2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1 x - b_1 + (k_1 - k)x + b_1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (k_1 - k)x + b_1 = +\infty \end{aligned}$$

这说明 $g_k(x)$ 在 \mathbb{R} 上有最小值点 x_0 , 下面说明存在 $k \in (k_1, k_2)$ 使得 $g_k(x)$ 有唯一的最小值点.

若不然, 对任意 $k \in (k_1, k_2)$, 必然存在两点 $x_1 < x_2$ 使得 $g_k(x_1) = g_k(x_2) \leq g_k(x)$, 即

$$f(x_2) - kx_2 \leq f(x_1) - kx_1$$

取 $k' = k + s < k_2$ ($s > 0$), 则存在两点 $x'_1 < x'_2$ 使得 $g_{k'}(x'_1) = g_{k'}(x'_2) \leq g_{k'}(x)$, 则有

$$f(x'_1) - kx'_1 \leq f(x_1) - (k + s)x_1 + sx'_1 \leq f(x_2) - kx_2 + s(x'_1 - x_2) \leq f(x'_2) - kx'_2 + s(x'_1 - x'_2)$$

这说明 $x'_1 > x_2$, 故得到 $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)$ 不交. 考虑 (k_1, k_2) 是不可数集, 而对于每个 $k \in (k_1, k_2)$, 都存在区间 (x_{k1}, x_{k2}) 及有理数 $r_k \in (x_{k1}, x_{k2})$, 所以我们得到有理数集至少为不可数集, 矛盾!

若 f 有严格凸支撑点 x_0 , 则存在 k 使得 $g_k(x)$ 有上界. 若 $k > k_2$, 知道 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = +\infty$; 若 $k < k_1$, 知道 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = +\infty$; 二者皆与 $g_k(x)$ 有上界矛盾.

- 若 $k_2 < k_1$, f 必存在严格凸支撑点, 无严格凹支撑点。将 $-f(x)$ 仍记为 $f(x)$, 直接使用上述结论即可。
- 若 $k_2 = k_1$, 都可能发生。列出例子如下

– 无严格凹凸支撑点:

$$f(x) = kx + \arctan x$$

– 有严格凸支撑点 0, 无严格凹支撑点:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ kx + \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

– 有严格凹支撑点 0, 无严格凸支撑点:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ kx - \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

– 有严格凹支撑点 $-\frac{\pi}{2}$, 严格凸支撑点 $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \pi \\ kx + \sin x, & |x| \leq \pi \end{cases}$$

注. 本题的证明思路来源合肥工业大学张神星副研究员。

题 12 (国防科技大学-王银坤). 证明: 对于 $n \geq 1$ 且 n 为整数, 等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

成立。

证明. 引入函数

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k$$

易知 $f_n(0) = 0$, 求导后不难得到

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x)^{k-1}$$

进一步我们有:

$$1 + (-x)f'_n(x) = (1-x)^n$$

待证等式右端即为 $f_n(1)$ ，可以表示如下

$$\begin{aligned}
 f_n(1) &= \int_0^1 f'_n(x) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^{n-1}(1-x)}{x} dx \\
 &= f_{n-1}(1) + \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx \\
 &= f_{n-1}(1) + \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

又 $f_1(1) = 1$ ，故得到

$$f_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

证毕。 □

题 13 (北京大学-冯荣权, 北京国际数学中心-许地生). 对 n 阶实矩阵 A , 定义其范数为 $\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$, 其中 $\|v\|$ 表示 n 维向量 v 的范数。若 A 的元素都是整数, 则称 A 为整矩阵。证明: 若 A 为整矩阵且 $\|A\| \leq 1$, 则存在整矩阵 P 和正整数 m 使得 $\det(P) \neq 0$ 且

$$PA^mP^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r = \text{rank}(A^m)$ 。

证明. 首先由有限维空间的范数等价性知, 存在 $c_2 > c_1 > 0$, 对任意的向量 v 有 $c_1\|v\| \leq \|v\|_2 \leq c_2\|v\|$ 。根据题设及范数的定义知, 对任意的正整数 k , 有 $\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq 1$, 且

$$\|A^k\|_2 := \sup_{v \neq 0} \frac{\|A^k v\|_2}{\|v\|_2} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{c_2 \|A^k v\|}{c_1 \|v\|} = \frac{c_2}{c_1} \|A^k\| \leq \frac{c_2}{c_1}$$

这说明矩阵列 $\{A^n\}$ 中的每一个矩阵, 其中的元素都是有界的, 由 A 为整矩阵不难得到对任意的 $k \in \mathbb{N}$, A^k 仍为整矩阵, 故矩阵列 $\{A^n\}$ 中只有有限个不同的矩阵。

记矩阵列 $\{A^n\}$ 中的矩阵集为 M_n , 并记其中的元素个数为 N , 且其中的元素对矩阵乘法运算是封闭的。根据秩不等式得到 $0 \leq r(A^{k+1}) \leq r(A^k)$, 则数列 $a_k = r(A^k)$ 必有极限 $r_0 \geq 0$ 。

- 若 $r_0 = 0$, 则存在 $s > 0$ 使得 $A^s = O$, 取 $P = I_n$ 得证。
- 若 $r_0 > 0$, 则存在 $s > 0$, 使得 $r(A^k) = r_0$ 对所有的 $k \geq s$ 成立, 考虑矩阵列 $\{A^{ks}\} (k = 1, 2, \dots)$, 则我们取其中 $N + 1$ 个, 由容斥原理知必存在两个 $k_1 > k_2$ 使得 $A^{k_1 s} = A^{k_2 s}$, 即得到

$$A^{k_2 s} (A^{(k_1 - k_2)s} - I_n) = O$$

已知 $r(A^{k_2 s}) = r_0 > 0$, 存在 r_0 个线性无关整向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, r_0)$, 使得 $\beta_i = \alpha_i A^{k_2 s} \neq 0$, 且 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, r_0)$ 也线性无关。此时就有

$$\beta_i A^{(k_1 - k_2)s} = \beta_i$$

考虑到 $r(A^{(k_1 - k_2)s}) = r_0$, 取方程 $\mathbf{x} A^{(k_1 - k_2)s} = \mathbf{0}$ 的整向量构成的基础解系 $\beta_{r_0+1}, \dots, \beta_n$ 。

令 $m = (k_1 - k_2)s$, 并引入如下整矩阵 P

$$P = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)$$

即得到要证结论。

证毕。 □

题 14 (中国科技大学-李平). 设 $a > 0$, 求出所有 \mathbb{R} 上的非负连续函数 f 使得 $f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt$ 为常数。

解. 首先引入集合 $S = \{u(x)\}$ 是满足如下条件的非负连续函数集

$$C = u(x) - a \int_x^{x+1} u(t) dt \quad (C \leq 0)$$

易知 S 中的每个元素无穷可导, 我们来考虑 S 中函数的性质。

考虑

$$u'(x) = au(x+1) - au(x) \implies [e^{ax}u(x)]' = ae^{ax}u(x+1) \geq 0$$

若 $e^{sx}u(x)$ 单调增, 我们有

$$u(x) \leq \int_x^{x+1} ae^{st}u(t)e^{-st} dt \leq \int_x^{x+1} ae^{s(1+x)}u(1+x)e^{-st} dt = \frac{e^s - 1}{s}(u'(x) + au(x))$$

这就得到

$$u'(x) + \left(a - \frac{s}{e^s - 1}\right)u(x) \geq 0$$

记 $g(x) = a - \frac{x}{e^x - 1}$, 引入数列 $a_0 = a, a_{n+1} = g(a_n)$, 则对任意的 n 就有 $e^{a_n x}f(x)$ 单调增。注意到 $g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}$, 令 $g_1(x) = xe^x - e^x + 1$, 且有 $g_1'(x) = xe^x$, 故得到 $g_1(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 \downarrow , 在 $(0, +\infty)$ 上 \uparrow , 但 $g_1(0) = 0$, 故得到 $g(x)$ 为单调增函数。根据 $a_1 < a$, 得到 $a_2 = g(a_1) < g(a) = a_1$, 故 a_n 单调递减。引入 $h(x) = g(x) - x = a - \frac{xe^x}{e^x - 1}$, 直接计算得到 $h'(x) = -\frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$, 故 $h(x)$ 单调减, 且 $h(+\infty) = -\infty, h(-\infty) = +\infty$, 故 $h(x)$ 有唯一的一个零点 x_a 。

从 $h(a_0) = h(a) < 0 = h(x_a)$ 立刻得到 $a_0 > x_a$, 所以就有

$$g(a_0) > g(x_a) \implies a_1 > x_a \implies g(a_1) > g(x_a) \implies a_2 > x_a \quad \cdots \quad a_n > x_a$$

故 a_n 有下界, 令 $n \rightarrow +\infty$, 知道 $a_n \downarrow x_a$, 从而就有 $e^{x_a x}u(x)$ 单调增。

- 若 $0 < a \leq 1$, 则 $h(0) \leq 0$, 此时 $x_a \leq 0$ 。注意到

$$e^{x_a x} u'(x) = a e^{-x_a} e^{x_a(x+1)} u(x+1) - a e^{x_a x} u(x) \geq a e^{x_a x} u(x) (e^{-x_a} - 1)$$

这就得到 $u'(x) \geq a u(x) (e^{-x_a} - 1) \geq 0$, 且 $u'(x)$ 满足

$$0 = u'(x) - a \int_x^{x+1} u'(t) dt$$

这说明 $u'(x) \in S$, 对 $u^{(n)}(x) (n \geq 1)$ 递推使用完全一样的推导, 即得到 $u^{(n)}(x) \in S$ 且 $u^{(n)}(x) \geq 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。于是根据泰勒展开就知道

$$u'(x) = a u(x+1) - a u(x) \geq a u'(x) + \frac{a}{2} u''(x)$$

- 若 $a = 1$, 则有 $u''(x) = 0$, 这说明 $u(x) = c_1 x + c_2$, 根据 S 的定义 $u(x)$ 为非负函数, 必有 $c_1 = 0, c_2 \geq 0$ 。
- 若 $a < 1$, 则有

$$u''(x) + \frac{2(a-1)}{a} u'(x) \leq 0$$

假设 $e^{sx} u'(x)$ 单调减, 就有

$$u'(x) = a \int_x^{x+1} e^{-st} e^{st} u'(t) dt \geq a e^{s(x+1)} u'(x+1) \int_x^{x+1} e^{-st} dt = \frac{e^s - 1}{s} (a u'(x) + u''(x))$$

这即为

$$u''(x) + \left(a - \frac{s}{e^s - 1} \right) u'(x) \leq 0$$

引入数列 $b_0 = \frac{2(a-1)}{a}$, $b_{n+1} = g(b_n)$, 则对任意的 n 就有 $e^{b_n x} u'(x)$ 单调减, 且有

$$b_1 = a + \frac{b_0}{1 - e^{b_0}} > a + b_0 \implies b_2 = g(b_1) > g(b_0) = b_1 \implies \dots \implies b_{n+1} > b_n$$

且 $h(b_0) > a > 0 = h(x_a)$, 这说明 $b_0 < x_a$, 进而 $b_n < x_a$ 有上界, 令 $n \rightarrow +\infty$ 得到 $e^{x_a x} u'(x)$ 单调减, 考虑到 $u'(x) \in S$, 不难得到 $e^{x_a x} u'(x)$ 单调增, 故得到

$$e^{x_a x} u'(x) = c \implies u(x) = c_1 e^{-x_a x} + c_2 (c_1, c_2 \geq 0)$$

- 若 $a > 1$, 则 $h(0) > 0$, 此时 $x_a > 0$, 令 $v(x) = e^{x_a x} u(x)$, 则 $v(x)$ 单调增, 且有

$$C = e^{-x_a x} v(x) - a \int_x^{x+1} e^{-x_a t} v(t) dt$$

注意到 $a e^{-x_a} = a - x_a$, 求导得到

$$v'(x) = (a - x_a)(v(x+1) - v(x)) \implies 0 = v'(x) - (a - x_a) \int_x^{x+1} v'(t) dt$$

下面我们证明 $0 < a - x_a < 1$, 进而得到 $v'(x) \in S$

$$a - x_a - 1 = \frac{x_a e^{x_a}}{e^{x_a} - 1} - x_a - 1 = \frac{1 + x_a - e^{x_a}}{e^{x_a} - 1} < 0 \quad a - x_a = \frac{x_a}{e^{x_a} - 1} > 0$$

根据前面 $0 < a < 1$ 的结果, 我们得到 $v(x) = c_1 e^{-x_v x} + c_2 (c_1, c_2 \geq 0)$, 其中 x_v 是以下方程的唯一实根

$$a - x_a = \frac{x_v e^{x_v}}{e^{x_v} - 1}$$

另外, 我们注意到

$$a - x_a = \frac{x_a e^{x_a}}{e^{x_a} - 1} - x_a = \frac{x_a}{e^{x_a} - 1} = \frac{(-x_a) e^{(-x_a)}}{e^{(-x_a)} - 1}$$

故得到 $x_v = -x_a$, 进而得到 $u(x) = e^{-x_a x} v(x) = c_1 + c_2 e^{-x_a x}$

根据题设不妨设 $f(x)$ 的下确界为 $m \geq 0$, 将 $f(x) - m$ 仍记为 $f(x)$, 则有 $f(x)$ 下确界为 0 且

$$C = f(x) - a \int_x^{x+1} f(t) dt \leq f(x)$$

两边同时取下确界, 得到 $C \leq 0$, 故 $f(x) \in S$ 。从而得到, 对于 $a > 0$, 满足题意的 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{若 } a = 1 \\ c_1 e^{-x_a x} + c_2 & \text{若 } a \neq 1 \end{cases}$$

其中 x_a 是方程 $a = \frac{x e^x}{e^x - 1}$ 的唯一实根, 且 $c_1, c_2 \geq 0$ 。

注. 本题的 $0 < a < 1$ 情况的证明思想来源于清疏数学, 对于 $a > 1$ 的情况, 转化为此类情况讨论是额外的技巧。

题 15 (南京大学-梅加强). 对于 $[0, +\infty)$ 上的函数 f_0 , 当 $n \geq 0$ 时, 递归地定义一系列函数如下:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(tx) \ln^2(1-t) dt, \quad x \in (0, +\infty).$$

试就以下两种情形分别研究函数列 $\{f_n\}$ 的极限:

(1) $f_0(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调函数。

(2) $f_0(x) = \sin \frac{1}{x} (x \in (0, +\infty))$ 。

Dini 引理

引理 2. 对于逐点递减的可积函数列 $\{g_n(t)\}$ 满足 $g_n(t) \rightarrow 0$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = 0$$

证明. 对任一固定 n 及 $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, 根据 $g_n(t)$ 可积, 存在一个剖分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ 使得

$$\sum_{i=1}^k (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

取阶梯函数 $\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^k m_i \chi_{(t_i, t_{i+1})}$, 则在每个区间 (t_i, t_{i+1}) 上就有 $f(t) - \varphi(t) \leq M_i - m_i$ 。在每个区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上, 令 $m_0 = m_{k+1} = \max_{t \in [0,1]} g_n(t)$, 构造如下 $h_n(t)$ (其中 c 待定):

$$h_n(t) = \begin{cases} m_i & \text{若 } t \in [t_i + c, t_{i+1} - c] \\ \begin{cases} m_i & \text{若 } m_{i-1} \geq m_i \\ \frac{m_i - m_{i-1}}{c}(t - t_i) + m_{i-1} & \text{若 } m_{i-1} < m_i \end{cases} & \text{若 } t \in [t_i, t_i + c] \\ \begin{cases} m_i & \text{若 } m_{i+1} \geq m_i \\ \frac{m_{i+1} - m_i}{c}(t - t_{i+1}) + m_{i+1} & \text{若 } m_{i+1} < m_i \end{cases} & \text{若 } t \in [t_{i+1} - c, t_{i+1}] \end{cases}$$

不难得到 $h_n(t)$ 为连续函数且 $\varphi_n(t) \geq h_n(t)$, 取 $c < \min \left\{ \frac{1}{2kn(M-m)}, \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right\}$, 就有

$$\int_0^1 \varphi_n(t) - h_n(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_n(t) - h_n(t) dt \leq 2 \cdot \frac{k}{2} c (M - m) < \frac{1}{2n}$$

于是我们构造出逐点递减的连续函数列 $\{h_n(t)\} (n \geq 1)$ 满足 $g_n(t) \geq h_n(t) \geq 0$, 且有

$$\int_0^1 g_n(t) - h_n(t) dt < \int_0^1 g_n(t) - \varphi_n(t) dt + \int_0^1 \varphi_n(t) - h_n(t) dt < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

根据 $\{h_n(t)\}$ 逐点递减, 记 $a_n = \max_{t \in [0,1]} \{h_n(t)\}$, 则存在 $t_n \in [0,1]$ 使得 $h_n(t_n) = a_n$, 由于 $\{t_n\}$ 有收敛子列不妨仍记为 t_n , 使得 $t_n \rightarrow t_0$, 则存在 N_1 , 使得 $n > N_1$ 时就有 $h_n(t_0) < \varepsilon$, 再根据 $h_n(t)$ 的连续性, 存在 N_2 , 当 $k > \max\{n, N_2\}$ 时就有 $a_k = h_k(t_k) < h_n(t_k) < \varepsilon$, 考虑到 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 这说明 $a_n \rightarrow 0$, 故 $h_n(t) \rightarrow 0$, 这得到当 n 足够大时, 有

$$\int_0^1 g_n(t) dt = \int_0^1 g_n(t) - h_n(t) dt + \int_0^1 h_n(t) dt < \frac{1}{n} + \varepsilon$$

□

证明. 对两种情况分别说明。

(1) 我们不妨设 $f_0(x)$ 单调增, 否则将 $-f(x)$ 仍记为 f 即可。对任意的 $n > 0$, 我们定义 $f_n(0) = f_0(0)$ 。

若已经得到 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增, 对于 $x_1 > x_2 \geq 0$, 我们得到:

$$f_{n+1}(x_1) - f_{n+1}(x_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_n(tx_1) - f_n(tx_2)) \ln^2(1-t) dt \geq 0$$

所以 $f_{n+1}(x)$ 也是单调增的, 这说明 $f_n(x)$ 对任意 $n \geq 0$, 均为单调增函数。

另一方面, 根据递推关系有:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f_n(tx) - f_n(x)) \ln^2(1-t) dt \leq 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 为逐点递减的函数列, 且有 $f_n(x) \geq f_n(0) = f_0(0)$ 有下界, 这就得到逐点收敛关系 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 且 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, 也为单调增函数。

令 $g_n(t) = f_n(tx) \ln^2(1-t)$, 将 $g_n(t) - f(tx) \ln^2(1-t)$ 代入引理 2, 在递推式中令 $n \rightarrow +\infty$ 就得到

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(tx) \ln^2(1-t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \ln^2(1-t) dt = f(x)$$

考虑 $f(x)$ 是增函数, 故对任意的 $t \in (0, 1)$, 恒有 $f(tx) = f(x)$ 。否则, 若存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(t_0x) < f(x)$ 则得到

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} f(tx) \ln^2(1-t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 f(tx) \ln^2(1-t) dt < f(x)$$

矛盾! 这说明 $f(x)$ 在任何开区间 $(0, s)$ 上为常值函数 $f(x) = c \geq f_0(0)$, 考虑到 $f_n(x)$ 为增函数, 故对任意的 $t \in (0, x)$, 就有

$$f_n(t) - c \leq f_n(x) - c \rightarrow 0$$

这说明 $f_n(x) \rightarrow c$ 在任何闭区间上成立。特别地, 若 $f_0(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续, 就有 $c = f_0(0)$ 。

(2) 若 $f_0(x) = \sin \frac{1}{x}$, 直接计算得

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n \uparrow} \sin \left(\frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_n x} \right) \ln^2(1-t_1) \cdots \ln^2(1-t_n) dt_1 \cdots dt_n$$

考虑定义在 $(0, 1)$ 上的独立同分布(i.i.d)的随机变量 $X_k (k = 1, 2, \dots)$ 以及随机变量 $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, 每个变量的概率密度函数为 $f_k(x) = \frac{1}{2} \ln^2(1-x)$ 。注意到 $\ln Y_n = \sum_{i=1}^n \ln X_i$, 分别计算 $\ln X_i$ 的均值及方差如下

$$\mathbb{E}[\ln X_i] = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln t \ln^2(1-t) dt = \mu \quad (0 > \mu > -\infty)$$

$$\text{Var}(\ln X_i) = \mathbb{E}[\ln^2 X_i] - \mathbb{E}[\ln X_i]^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln^2 t \ln^2(1-t) dt - \mu^2 = \sigma^2 \quad (0 < \sigma < +\infty)$$

再引入 $Z_n = \frac{\ln Y_n}{n}$, 根据中心极限定理得到

$$\frac{Z_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \ln Y_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

设 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 的分布函数为 $F_n(x)$, 则有

$$F_n(x) = \Phi \left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right) \quad \text{其中 } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt$$

则 Y_n 的分布函数为 $F_{Y_n}(t) (t > 0)$ 为

$$F_{Y_n}(t) = P\{Y_n < t\} = P\{\ln Y_n < \ln t\} \sim F_n(\ln t) = \Phi \left(\frac{\ln t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

记 $y = \frac{1}{x}$, 下面计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\sin \left(\frac{1}{Y_n x} \right) \right] &= \int_0^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{tx} \right) dF_{Y_n}(t) \\ &\sim \int_0^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{tx} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma t}} \exp \left(-\frac{(\ln t - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \right) dt \\ &\stackrel{v=(\ln \frac{1}{t} + n\mu)/\sqrt{2n\sigma}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left(ye^{-n\mu} e^{\sqrt{2n\sigma}v} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2) dv}_{I_n}\end{aligned}$$

注意到 $\mu < 0$, 则 $e^{-n\mu} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$ 。

引入 $A_n := e^{-n\mu} = e^{n|\mu|}$, $\alpha_n := \sqrt{2n\sigma}$, 并设

$$Z_n(v) = A_n e^{\alpha_n v} \quad \varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2}$$

于是得到

$$\begin{aligned}I_n &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A_n \alpha_n e^{\alpha_n v}} \frac{d}{dv} \cos(Z_n(v)) \varphi(v) dv \\ &= - \left[\frac{\cos(Z_n(v)) \varphi(v)}{A_n \alpha_n e^{\alpha_n v}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(Z_n(v)) \frac{d}{dv} \left(\frac{\varphi(v)}{A_n \alpha_n e^{\alpha_n v}} \right) dv \\ &= - \frac{1}{A_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(Z_n(v)) \varphi(v) dv + \frac{1}{A_n \alpha_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(Z_n(v)) \varphi'(v) e^{-\alpha_n v} dv\end{aligned}$$

注意到三角函数的有界性及 φ, φ' 的可积性, 得到

$$\begin{aligned}|I_n| &\leq \frac{1}{A_n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) dv + \frac{1}{A_n \alpha_n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(v) e^{-\alpha_n v} dv \\ &\leq \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n \alpha_n} + \int_0^{+\infty} \frac{2v}{A_n \alpha_n \sqrt{\pi}} e^{-v^2 + \alpha_n v} dv \\ &\leq \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n \alpha_n} + \frac{e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n \alpha_n \sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\alpha_n}{2}}^{+\infty} 2 \left(u + \frac{\alpha_n}{2} \right) e^{-u^2} du \\ &\leq \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n \alpha_n} + \frac{e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n \alpha_n \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha_n}{2}}^{+\infty} 2ue^{-u^2} du + \frac{Ce^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n \sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

考虑到 $\frac{\alpha_n^2}{4} = \frac{2n\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}n$, 下面只需说明 $\sigma^2 < 2|\mu|$, 这样就有 $e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}/A_n \rightarrow 0 \dots$

□

题 16 (复旦大学-严金海). 实数集 \mathbb{R} 上是否有满足如下条件的函数? 若有请给出例子, 若没有请给出证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 成立 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。

证明. 不存在满足题设的函数, 使用反证法:

若不然, 对于任意固定的 $M > 0$, 考虑集合 $A_M = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$, 则 A_M 里面没有聚点, 否则, 存在聚点 $c \in A_M$ 及一列 $x_n (x_n \in A_M) \rightarrow c$, 则根据题设, 对于 $M+1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时就有 $|f(x_n)| > M+1$, 这与 $x_n \in A_M$ 矛盾! 这说明 A_M 的元素均为离散点, 所以 A_M 至多是可数集。

另一方面, 考虑到 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中 $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq n\}$ 均为可数集, 因可数个可数集的并集也为可数集, 这说明 \mathbb{R} 是可数的, 这与实数集的不可数性矛盾! \square

题 17 (北京大学-杨家忠). 对于 $x \in (0, \pi)$, 定义 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$, 其中 $f(\frac{\pi}{2})$ 定义为 $\frac{2}{\pi}$ 。证明: f 的 k 阶导数 ($k \geq 0$) 均在 $(0, \pi)$ 内恒正。

$\tan x$ 的导数恒正

$f(x) = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的各阶导数均为正的。

首先求导得到

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + f^2(x) \geq 1 > 0$$

我们归纳证明, 若 $f^{(k)}(x) = g_k(f(x))$, 其中 $g_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_{k,i} x^i$ 是一个每项系数 $a_{k,i} \geq 0$ 的 $k+1$ 次多项式, 若 k 已经证明, 则对于 $k+1$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= g'_k(f(x)) f'(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} i a_{k,i} f^{i-1}(x) (1 + f^2(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (i+1) a_{k,i+1} f^i(x) + \sum_{i=2}^{k+2} (i-1) a_{k,i-1} f^i(x) \\ &= a_{k,1} + 2a_{k,2} f(x) + \sum_{i=2}^k \underbrace{((i+1)a_{k,i+1} + (i-1)a_{k,i-1})}_{a_{k+1,i}} f^i(x) \\ &\quad + k a_{k,k} f^{k+1}(x) + (k+1) a_{k,k+1} f^{k+2}(x) \end{aligned}$$

令

$$a_{k+1,i} = \begin{cases} a_{k,1} & \text{若 } i=0 \\ 2a_{k,2} & \text{若 } i=1 \\ (i+1)a_{k,i+1} + (i-1)a_{k,i-1} & \text{若 } 1 < i < k+1 \\ k a_{k,k} & \text{若 } i=k+1 \\ (k+1) a_{k,k+1} & \text{若 } i=k+2 \end{cases}$$

或者写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,0} \\ a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-1 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}_{(k+3) \times (k+3)} \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \\ a_{k,k+2} \end{pmatrix}$$

令 $g_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k+2} a_{k+1,i}x^i$, 则 $f^{(k+1)}(x) = g_{k+1}(f(x)) > 0$ 。

实际上, 对于奇偶阶导数有

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum_{m=0}^n a_{2n,2m+1} f^{2m+1}(x) & \text{若 } k = 2n \\ \sum_{m=-1}^n a_{2n+1,2m+2} f^{2m+2}(x) & \text{若 } k = 2n + 1 \end{cases}$$

证明. 根据题设易得 $f(x) = \frac{1}{x} - \cot x$, 考虑到 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 则有如下等式成立:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \\ \Rightarrow \ln(\sin x) &= \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \\ \Rightarrow \cot x &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-\frac{2x}{k^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{k^2\pi^2} \left(\sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^s \right) = \frac{1}{x} - \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2s+2}} \right) \frac{2x^{2s+1}}{\pi^{2s+2}} \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$f(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2s}} \right) \frac{2x^{2s-1}}{\pi^{2s}} = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2\zeta(2s)x^{2s-1}}{\pi^{2s}}$$

其中 $\zeta(n)$ 为黎曼 zeta 函数。

不难看出 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2\zeta(2n)}{\pi^{2n}}} = \frac{1}{\pi}$, 故得到级数的收敛半径为 $r = \pi$, 根据每个系数 $\frac{2\zeta(2s)}{\pi^{2s}} > 0$ 立得 $f^{(k)}(x) > 0$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 成立。□

题 18 (北京大学-冯荣权, 北京国际数学中心-许地生). 用 $M_n(\mathbb{R})$ 表示所有 n 阶实方阵构成的集合, 则在矩阵加法和数乘下, $M_n(\mathbb{R})$ 为实数域 \mathbb{R} 上的 n^2 维线性空间。证明: $M_n(\mathbb{R})$ 的任一超平面 (即 $n^2 - 1$ 维子空间) 中都存在正交矩阵。

证明. 考虑到 n^2 维线性空间 $b_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ 的 $n^2 - 1$ 维子空间是某一个线性方程组 $a_{ij}b_{ij} = 0$ 的解空间, 其中 a_{ij} 不全为零。记 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 对于任意的 A , 我们只需构造满足 $\text{tr}(A^T B) = 0$ 正交矩阵 B , 即证明结论。

设 A^T 的奇异值分解为 $A^T = P\Lambda Q$, 其中 P, Q 为正交矩阵, Λ 为对角阵, 我们取 $B = Q^T S P^T$, 其中 S 也为正交阵, 可表示为

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{满足} \quad SS^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = I_n$$

对于 ΛS 的对角元 $c_{ii} = \lambda_i s_{ii} = 0$, 即得到 $\text{tr}(\Lambda S) = 0$, 证毕。 \square

注. 本题的证明思想来源于复旦大学-江辰老师。

题 19 (复旦大学-张奇). 甲与乙下棋获胜的概率是 40%, 但甲想不停地与乙下棋直到净胜乙五局就结束, 他有可能做到这一点吗? 如果有可能, 请给出做到这一点的概率是多少; 如果不可能, 请说明原因。

证明. 设 P_m 为从净胜局数 m 开始, 最终达到甲净胜局数 +5 的概率, 则有如下递推 ($m < 5$)

$$P_m = p \cdot P_{m+1} + (1-p) \cdot P_{m-1} \implies P_{m+1} = \frac{1}{p}P_m - \frac{1-p}{p}P_{m-1}$$

得到特征方程

$$x^2 = \frac{1}{p}x - \frac{1-p}{p} = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \implies (x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

得到 $P_m = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^m + a_2$ 。

令 $m \rightarrow -\infty$, 有 $P_{-\infty} = 0$, 又知道 $P_5 = 1$, 则得到 $a_2 = 0$, $a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 1$, $a_1 = \frac{32}{243}$, 故有

$$P_m = \frac{32}{243} \left(\frac{3}{2}\right)^m$$

于是 $P_0 = \frac{32}{243}$, 即得到答案。 \square

注. 此题若改为: 甲与乙下棋获胜的概率是 40%, 若比赛规定, 谁第一个先连赢对方 m 局, 游戏就结束, 甲有可能做到这一点吗? 如果有, 请求出甲获胜的概率?

证明. 答案是肯定的, 我们把题目转化为一列无穷二值点列

$$1, 0, 1, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots$$

对于上述点列, 记 $P_{m,k}$ 为刚好到第 k 个数字, 第一次出现连续 m 个 0 的概率; $Q_{m,k}$ 为刚好到第 k 个数字, 第一次出现连续 m 个 1 的概率。每个数为 0 的概率为 $p = 0.4$, 为 1 的概率为 $1-p = 0.6$ 。记 $P_m(0)$ 为会出现连续 m 个数字是 0 的概率, $P_m(1)$ 为会出现连续 m 个数字是 1 的概率

先考虑 $m = 2$, 则有

$$\begin{cases} P_{2,2k} &= (1-p)^{k-1}p^{k-1}p^2 = (1-p)^{k-1}p^{k+1} \\ P_{2,2k+1} &= (1-p)^k p^k p = (1-p)^k p^{k+1} \end{cases} \quad \begin{cases} Q_{2,2k} &= p^{k-1}(1-p)^{k+1} \\ Q_{2,2k+1} &= p^k(1-p)^{k+1} \end{cases}$$

则得到

$$\begin{aligned} P_2(0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (P_{2,2k} + P_{2,2k+1}) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (p-p^2)^{k-1} + p \sum_{k=1}^{+\infty} (p-p^2)^k = \frac{2p^2 - p^3}{1-p+p^2} \\ P_2(1) &= \frac{2(1-p)^2 - (1-p)^3}{1-(1-p) + (1-p)^2} = \frac{1-p-p^2+p^3}{1-p+p^2} \end{aligned}$$

下面我们使用递推来考虑一般的 m , 首先考虑 $P_{m,k} (k \geq m)$, 当 $k = m$, 则此时全部的都均为 0; 当 $k > m$, 此时的序列应有如下形式:

$$\underbrace{1, 0, 1, 1, \dots, 0}_{\text{共 } k-m-1 \text{ 个}}, \underbrace{1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots}_{\text{共 } m \text{ 个}}$$

其中, 前 $k-m$ 个必没有连续的 m 个 “0” 或 “1”, 我们来求其反面: 记前 $k-m$ 个存在连续的 m 个 “0” 或 “1” 的概率为 P_k^m 。当 $k-m < m$ 时, 必然没有连续的 m 个 “0” 或者 “1”, 当 $k-m = m$ 时, 若出现的话, 只能是连续的 m 个 “1”, 故得到

$$P_k^m = \begin{cases} P_{m,m} + \dots + P_{m,k-m-1} + Q_{m,m} + \dots + Q_{m,k-m-2} + Q_{m-1,k-m-1}, & k \geq 2m+2 \\ P_{m,m} + Q_{m-1,m}, & k = 2m+1 \\ Q_{m-1,m-1}, & k = 2m \\ 0, & k < 2m \end{cases}$$

则有

$$P_{m,k} = \begin{cases} 0, & k < m \\ p^m, & k = m \\ (1 - P_k^m)(1-p) \cdot p^m, & k > m \end{cases}$$

当求得 $P_{m,k}$ 后, 使用 $1-p$ 替换 p 即得到 $Q_{m,k}$ 。至此, 我们得到了递推关系。

对于 $m = 3$,

$$\begin{aligned} P_{3,3} &= p^3 \\ P_{3,4} &= (1-p)p^3 \\ P_{3,5} &= (1-p)p^3 \\ P_{3,6} &= (1 - Q_{2,2})(1-p)p^3 = (1-p)p^3 - (1-p)^3 p^3 \\ P_{3,7} &= (1 - P_{3,3} - Q_{2,3})(1-p)p^3 = (1-p^3 - p(1-p)^2)(1-p)p^3 \end{aligned}$$

□

题 20 (吉林大学-周鸣君). 设 B 是 \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) 中的单位开球, 非负函数 u 在 B 内二阶连续可导, $u(0) = 0$ 且 u 在 B 内不恒为 0. 试证明: 对于任意的 $\alpha > 0$, 都存在 $\xi \in B$, 使得

$$\Delta u(\xi) > \alpha u(\xi),$$

其中 $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

证明. 反证法, 若存在一个 $\alpha_0 > 0$, 使得对任意的 $x \in B$, 都有 $\Delta u - \alpha_0 u \leq 0$. 考虑到 u 是非负函数, 则 $x = 0$ 是 u 的一个最小值点.

我们考虑 $v = -u$, 则 $\Delta v - \alpha_0 v \geq 0$. 其中 $x = 0$ 是 v 的一个最大值点. 由强最大值原理, v 要么只能在 ∂B 上取到其非负最大值, 要么在整个区域 B 上是常值. 皆导出矛盾! \square

题 21 (复旦大学-江辰). 设 A 是一个 n 阶复矩阵且 A 的所有特征值都为 1.

记

$$P_A(m) = \det \left(\sum_{k=0}^{m-1} (A^*)^k A^k \right)$$

其中 A^* 是 A 的共轭转置。

(a) 证明: $P_A(m)$ 是以 m 为变量的多项式;

(b) 证明: $P_A(m)$ 的阶数 $\deg P_A(m)$ 是 A 的相似不变量;

(c) 计算 $\deg P_A(m)$, 用 A 的若当块的阶数表示。

正整数的自然数次幂求和

对于 $l \in \mathbb{N}$, 计算

$$F(l, m) = \sum_{i=1}^{m-1} i^l$$

对于 $l = 0$

$$F(0, m) = \sum_{i=1}^{m-1} 1 = m - 1 = a_{01}m + a_{00} \quad (a_{01} = 1; a_{00} = -1)$$

对于 $l = 1$

$$F(1, m) = \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2} = a_{12}m^2 + a_{11}m + a_{10} \quad (a_{12} = \frac{1}{2}; a_{11} = -\frac{1}{2}; a_{10} = 0)$$

使用归纳不难得到 $F(l, m)$ 是关于 m 的 $l+1$ 次多项式, 有如下表达

$$F(l, m) = \sum_{k=0}^{l+1} a_{lk} m^k$$

其中 a_{lk} 为常数, 可以由 l 递推得到。

证明. 直接考虑 A 的若当标准型, 设可逆矩阵 P 使得

$$A = P(I_n + J)P^{-1} \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_q \end{pmatrix} \quad J_i = \begin{pmatrix} \tilde{J}_i & O & \cdots & O \\ O & \tilde{J}_i & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \tilde{J}_i \end{pmatrix}_{(u_i \times \tilde{n}_i) \times (u_i \times \tilde{n}_i)}$$

设所有不同的若当块为 $\tilde{J}_i (1 \leq i \leq q)$ 共 q 个, 每个阶数为 \tilde{n}_i 且重复的数量为 u_i 。为了以下讨论的方便, 不妨设 $\{\tilde{n}_i\}$ 是单调增的, 引入 $\tilde{n}_0 = 0$, 并记 $N = \tilde{n}_q$ 。

根据多项式二项展开得到

$$A^k = P(I_n + J)^k P^{-1} = \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} P J^t P^{-1}, \quad (A^*)^k = \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (P^*)^{-1} (J^T)^t P^*,$$

记 $Q = P^* P$, 则 Q 为正定矩阵, 记 $K = \min\{m, N\} - 1 \leq N - 1$ 及 $M(a, b) = \max\{a, b\}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} (A^*)^k A^k &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (P^*)^{-1} (J^*)^i P^* \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P J^j P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{i} \binom{k}{j} (P^*)^{-1} (J^T)^i Q J^j P^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \underbrace{\sum_{k=M(i,j)}^{m-1} \binom{k}{i} \binom{k}{j}}_{f(m,i,j)} (P^*)^{-1} (J^T)^i Q J^j P^{-1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K f(m, i, j) (P^*)^{-1} (J^T)^i Q J^j P^{-1} \end{aligned}$$

注意到

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} = \sum_{s=0}^i c_{i,s} k^s$$

是关于 k 的 i 次多项式, 故 $\binom{k}{i} \binom{k}{j}$ 是关于 k 的 $i+j$ 次多项式 $p_{i,j}(k)$, 表示如下

$$p_{i,j}(k) = \sum_{s=0}^i \sum_{l=0}^j c_{i,s} c_{j,l} k^{l+s} = \sum_{l=0}^{i+j} \sum_{s=M(l-j,0)}^l c_{i,s} c_{j,l-s} k^l = \sum_{l=0}^{i+j} d_{i,j,l} k^l$$

考虑到 $i, j < N$ 有上界, 一个 $i+j$ 次关于 k 的多项式求和是关于上限的多项式

$$\begin{aligned} f(m, i, j) &= \sum_{k=M(i,j)}^{m-1} p_{i,j}(k) = \sum_{k=M(i,j)}^{m-1} \sum_{l=0}^{i+j} d_{i,j,l} k^l = \sum_{l=0}^{i+j} (d_{i,j,l} F(l, m) - d_{i,j,l} F(l, M(i, j))) \\ &= \sum_{l=0}^{i+j} \left(d_{i,j,l} \sum_{r=0}^{l+1} a_{lr} m^r - d_{i,j,l} \sum_{r=0}^{l+1} a_{lr} M^r(i, j) \right) \\ &= \sum_{r=0}^{i+j+1} \sum_{l=M(r-1,0)}^{i+j} d_{i,j,l} a_{lr} (m^r - M^r(i, j)) = \sum_{r=0}^{i+j+1} \left(\underbrace{\sum_{l=M(r-1,0)}^{i+j} d_{i,j,l} a_{lr} m^r}_{e_{i,j,r}} - \underbrace{\sum_{l=M(r-1,0)}^{i+j} d_{i,j,l} a_{lr} M^r(i, j)}_{f_{i,j,r}} \right) \end{aligned}$$

将 Q 进行 J 同结构分块, 对于任何的 i, j

$$(J^T)^i Q J^j = \begin{pmatrix} (J_1^T)^i & O & \cdots & O \\ O & (J_2^T)^i & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & (J_k^T)^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1k}^T & Q_{2k}^T & \cdots & Q_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1^j & O & \cdots & O \\ O & J_2^j & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_k^j \end{pmatrix}$$

计算得到

$$(J^T)^i Q J^j = \begin{pmatrix} (J_1^T)^i Q_{11} J_1^j & (J_1^T)^i Q_{12} J_2^j & \cdots & (J_1^T)^i Q_{1k} J_k^j \\ (J_2^T)^i Q_{12}^T J_1^j & (J_2^T)^i Q_{22} J_2^j & \cdots & (J_2^T)^i Q_{2k} J_k^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (J_k^T)^i Q_{1k}^T J_1^j & (J_k^T)^i Q_{2k}^T J_2^j & \cdots & (J_k^T)^i Q_{kk} J_k^j \end{pmatrix}$$

下面考虑

$$\begin{aligned} P^* \left(\sum_{k=0}^{m-1} (A^*)^k A^k \right) P &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{r=0}^{i+j+1} (e_{i,j,r} m^r - f_{i,j,r}) (J^T)^i Q J^j \\ &= \sum_{r=0}^{2K+1} \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \mathbf{1}_{\{i+j \geq r-1\}} (e_{i,j,r} m^r - f_{i,j,r}) (J^T)^i Q J^j \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_{\{i+j \geq r-1\}}$ 是指示函数, 当 $i+j \geq r-1$ 时为 1, 否则为 0。且 $e_{i,j,r}, f_{i,j,r}$ 关于 i, j 求和与 m 无关, 显然上式中矩阵系数是关于 m 的多项式, 则取行列式后结果 $P_A(m)$ 仍然应为 m 的多项式。

考虑到上述推导是直接针对 A 的若当标准型进行的, 而相似的矩阵有相同的若当标准型, 所以 $\deg P_A(m)$ 的阶数是相似不变的。

我们下面计算每个元素的 m 最高次幂, 考虑每一个分块

$$\sum_{r=0}^{2K+1} \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \mathbf{1}_{\{i+j \geq r-1\}} (e_{i,j,r} m^r - f_{i,j,r}) (\tilde{J}_q^T)^i \tilde{Q}_{qq} \tilde{J}_q^j$$

对于 $N = \tilde{n}_q < m$, 结合若当型乘积的特点, 考虑对角线得到

$$\deg P_A(m) = \sum_{p=1}^q u_p \sum_{k=1}^{\tilde{n}_p} (2k-1) = \sum_{p=1}^q u_p \tilde{n}_p^2$$

对于 $\tilde{n}_i \leq m < \tilde{n}_{i+1}$, 记 $m_p = \tilde{n}_p - m (p \geq i+1)$, 得到

$$\begin{aligned} \deg P_A(m) &= \sum_{p=1}^i u_p \sum_{k=1}^{\tilde{n}_p} (2k-1) + \sum_{p=i+1}^q u_p \left(m_p (2m-1) + \sum_{k=1}^m (2k-1) \right) \\ &= \sum_{p=1}^i u_p \tilde{n}_p^2 + (2m-1) \sum_{p=i+1}^q m_p u_p + m^2 \sum_{p=i+1}^q u_p \end{aligned}$$

□

题 22 (吉林大学-周鸣君). 设 $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域,

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c,$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 阶实矩阵, \mathbf{x} 和 \mathbf{b} 是 n 维列向量, c 是常数。若 $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$, 且在 $\partial\Omega$ 上有 $p \leq 0$ 成立。证明: 在 Ω 内恒有 $p \leq 0$ 。

证明. 若不然, 则存在 Ω 里面一点 \mathbf{x}_0 , 使得 $p(\mathbf{x}_0) > 0$ 记 $g(t) = p(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$, 易知 $g(0) > 0$ 。 A 的 2 阶顺序子矩阵记为 A_2 , 记 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$, 将 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处进行泰勒展开, 便得到:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 = g(0) + (\mathbf{y}^T A \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T A \mathbf{y} + \mathbf{b}^T \mathbf{y})t + \mathbf{y}^T A \mathbf{y}t^2$$

因为 Ω 为有界区域, 故可选取 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0, \dots, 0)$, 即只有前两个分量不恒为零, 于是 t^2 的系数就变为

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = (y_1 \ y_2) A_2 (y_1 \ y_2)^T = a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{21}y_1y_2 + a_{22}y_2^2$$

直接计算判断式为:

$$\Delta = (a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22} \geq 4a_{12}a_{21} - 4a_{11}a_{22} > 0$$

所以可以取 \mathbf{y}_0 使得 $\mathbf{y}_0^T A \mathbf{y}_0 = 0$ 。记 $s = \mathbf{y}_0^T A \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T A \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}^T \mathbf{y}_0$, 下面分情况来考虑:

- $s = 0$, 则 $g(t) = g(0) > 0$, 此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 上均有 $p > 0$, 这与 $\partial\Omega$ 上 $p(x) \leq 0$ 矛盾!
- $s > 0$, 则取 $t > 0$, 此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 与 $\partial\Omega$ 的一个交点处有 $p(x) > 0$, 矛盾!
- $s < 0$, 则取 $t < 0$, 此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 与 $\partial\Omega$ 的一个交点处有 $p(x) > 0$, 矛盾!

综上, 假设不成立, 即在 Ω 内恒有 $p \leq 0$ 。 □

题 23 (复旦大学-严金海). 设 $a \in (0, 1)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$ 。证明: 存在常数 A, B 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{A}{x^{1-a}} - B \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-a} f(x) - A - x^{1-a} B}{x^{2-a}} = 0.$$

根据求和公式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a^k \cos(k\theta) &= \frac{1 - a \cos \theta - a^{n+1} \cos((n+1)\theta) + a^{n+2} \cos(n\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ \sum_{k=1}^n a^k \sin(k\theta) &= \frac{a \sin \theta - a^{n+1} \sin((n+1)\theta) + a^{n+2} \sin(n\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \\ \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \frac{-1 + \cos \theta - \cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta)}{2 - 2 \cos \theta} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) &= \frac{\sin \theta - \sin((n+1)\theta) + \sin(n\theta)}{2 - 2 \cos \theta} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

一、计算下面的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

对于 $|a| < 1$, 引入如下函数

$$f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} a^n \implies f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx a^{n-1}$$

直接计算 $f'(a)$ 得到

$$f'(a) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} (ae^{ix})^n \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a} ae^{ix} \frac{1}{1 - ae^{ix}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} \right) = \frac{\cos x - a}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

注意到 $f(0) = 0$, 则得到

$$f(t) = \int_0^t f'(a) da = \int_0^t \frac{\cos x - a}{1 - 2a \cos x + a^2} da = -\frac{1}{2} \ln(t^2 - 2t \cos x + 1)$$

注意到 $f(t)$ 在 $t=1$ 处收敛, 记 $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos kx$, 则 $|S_n(x)| < \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$ 。

对 $0 < t < 1$ 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} (1-t^n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= (1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos nx \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}{n}}_{b_n(t)} \\ &= (1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n(x) - S_{n-1}(x)) b_n(t) \\ &= (1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(x) (b_n(t) - b_{n+1}(t)) - (1-t) S_0(x) b_1(t)\end{aligned}$$

考虑到 $b_n > 0$ 且单调递减, 则有

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} - f(t) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} (1 - t^n) \right| \leq (1-t)b_1(t) \left(\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} + S_0(x) \right) = (1-t) \left(\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} + 1 \right)$$

令 $t \rightarrow 1^-$ 得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos x) = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)$$

二、证明

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a} \sin^a x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

证明. 引入

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \, dx$$

则有

$$\begin{aligned} I(n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, dx \\ &= \sin^{n+1} x (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n+1)I(n) - (n+1)I(n+2) \\ \implies (n+2)I(n+2)I(n+1) &= (n+1)I(n+1)I(n) = \dots = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

注意到 $I(a)$ 为单调减, 则有

$$\frac{n}{n+1} (n+1)I(n)I(n+1) < nI^2(n) < nI(n)I(n-1)$$

上式令 $n \rightarrow +\infty$, 得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 对于任意的 $a > 0$, 就有

$$\sqrt{\frac{[a]}{[a]+1}} \sqrt{[a]+1} I([a]+1) = \sqrt{[a]} I([a]+1) < \sqrt{a} I(a) < \sqrt{[a]+1} I([a]) = \sqrt{\frac{[a]+1}{[a]}} \sqrt{[a]} I([a])$$

上式令 $a \rightarrow +\infty$, 得证。 □

证明. 注意到恒等式

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^{\frac{1}{a}}} \, dt \stackrel{s=nt^{\frac{1}{a}}}{=} \frac{a}{n^a} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{a-1} \, ds = \frac{a}{n^a} \Gamma(a)$$

对于 $|z| < 1$, 考虑如下级数:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^a} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a\Gamma(a)} (ze^{-t^{\frac{1}{a}}})^n dt \\
&= \frac{1}{a\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{-t^{\frac{1}{a}}}}{1 - ze^{-t^{\frac{1}{a}}}} dt \\
&\stackrel{s=t^{\frac{1}{a}}}{=} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{ze^{-s} s^{a-1}}{1 - ze^{-s}} ds
\end{aligned}$$

将 $z = re^{ix} (0 < r < 1)$ 代入上式, 得到:

$$\begin{aligned}
F(re^{ix}) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1} e^{-s} \underbrace{\frac{r \cos x - r^2 e^{-s}}{1 - 2re^{-s} \cos x + r^2 e^{-2s}}}_{g(r,x)} ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1} e^{-s} \underbrace{\frac{r \sin x}{1 - 2re^{-s} \cos x + r^2 e^{-2s}}}_{h(r,x)} ds i
\end{aligned}$$

对于 $g(r, x)$, 我们估计其关于 r 的导数

$$\begin{aligned}
|g'(r, x)| &= \left| \frac{(\cos x - 2re^{-s})(1 - 2re^{-s} \cos x + r^2 e^{-2s}) - (r \cos x - r^2 e^{-s})(-2e^{-s} \cos x + 2re^{-2s})}{(1 - 2re^{-s} \cos x + r^2 e^{-2s})^2} \right| \\
&\leq \frac{(1+2)(1+2+1) + (1+1)(2+2)}{(\sin^2 x + (\cos x - re^{-s})^2)^2} \\
&\leq \begin{cases} \frac{20}{\sin^4 x} & \text{if } x \neq k\pi \\ 20 & \text{if } x = (2k+1)\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

对于任意的 $x \neq 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, 就有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1} e^{-s} (g(r, x) - g(1, x)) ds \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} s^{a-1} e^{-s} |g'(\xi, x)| (1-r) ds \\
&\leq 20(1-r)M \rightarrow 0 (\text{当 } r \rightarrow 1^-)
\end{aligned}$$

对于实部, 我们有 $\Gamma(a)f(x)$:

$$\Gamma(a)f(x) = \int_0^{+\infty} s^{a-1} e^{-s} \frac{\cos x - e^{-s}}{1 - 2e^{-s} \cos x + e^{-2s}} ds \stackrel{s=xu}{=} x^a \int_0^{+\infty} u^{a-1} \frac{\cos x - e^{-xu}}{e^{xu} + e^{-xu} - 2\cos x} du$$

考虑到 $e^{xu} + e^{-xu} - 2\cos x \geq 2(1 - \cos x) \geq 0$ 及 $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$, 有如下估计:

$$x \int_0^{+\infty} u^{a-1} \frac{1 - e^{-xu} - \frac{1}{2}x^2}{e^{xu} + e^{-xu} - 2\cos x} du \leq x^{1-a} \Gamma(a) f(x) \leq x \int_0^{+\infty} u^{a-1} \frac{1 - e^{-xu}}{e^{xu} + e^{-xu} - 2\cos x} du$$

考虑到

$$\begin{aligned} x \int_0^{+\infty} u^{a-1} \frac{x^2}{e^{xu} + e^{-xu} - 2 \cos x} du &= x \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{\frac{2(1-\cos x)}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)!} x^{2n-2} u^{2n}} du \leq x \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1 - \frac{1}{12}x^2 + u^2} du \\ &\stackrel{u=\sqrt{1-\frac{1}{12}x^2}t}{=} x \left(1 - \frac{1}{12}x^2\right)^{\frac{a}{2}-1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^2} dt \rightarrow 0 (x \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2 - \frac{1}{12}x^4)} - \frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2)} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{12} \frac{x^5 u^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2 - \frac{1}{12}x^4)(e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2)} du \rightarrow 0 \end{aligned}$$

我们只需求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2} du$ 即可。
首先有

$$\begin{aligned} \frac{u^a}{(u^2+1)} - \frac{u^a \frac{1-e^{-xu}}{xu}}{\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} + 1} &= \frac{u^a \left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} + (1+u^2-u^2) - (u^2+1) \frac{1-e^{-xu}}{xu} \right)}{\left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} + 1 \right)(u^2+1)} \\ &= \underbrace{\frac{u^a \left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} - u^2 \right)}{\left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} + 1 \right)(u^2+1)}}_{S_1(u,x)>0} + \underbrace{\frac{u^a \left(\frac{e^{-xu}-1}{xu} + 1 \right)}{\left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2} + 1 \right)}}_{S_2(u,x)>0} \end{aligned}$$

下面估计 $S_1(u, x), S_2(u, x)$ 的积分：

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} S_1(u, x) du &\stackrel{t=xu}{=} x^{1-a} \int_0^{+\infty} \frac{t^a (e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{(t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)} dt \\ \int_0^{+\infty} S_2(u, x) du &\stackrel{t=xu}{=} x^{1-a} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1} (e^{-t} - 1 + t)}{(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)} dt \end{aligned}$$

对于 $S_1(u, x)$ 的 $x=0$ 附近主项，首先在 $t \rightarrow 0^+$ 时，下式成立

$$\begin{aligned} &x^{1-a} \int_0^\delta \left(\frac{t^a (e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{t^2 (e^t + e^{-t} - 2)} - \frac{t^a (e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{(t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)} \right) dt \\ &= x^{1-a} \int_0^\delta \frac{t^a (e^t + e^{-t} - 2 - t^2) ((e^t + e^{-t} - 2 + t^2)x^2 + x^4)}{t^2 (t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\ &\sim x^{3-a} \int_0^\delta \frac{t^a ((e^t + e^{-t} - 2)^2 - t^4)}{t^2 (t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\ &\sim x^{3-a} \int_0^\delta \frac{t^{a+6}}{t^2 (t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\ &\sim x^{3-a} \int_0^\delta \frac{t^{2+a}}{(t^2 + x^2)^2} dt \\ &\sim x^2 \int_0^{\frac{\delta}{x}} \frac{u^{2+a}}{(1+u^2)^2} du \end{aligned}$$

对于 $S_2(u, x)$ 的 $x = 0$ 附近主项, 首先在 $t \rightarrow 0^+$ 时, 下式成立

$$\begin{aligned}
& x^{1-a} \int_0^\delta \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{e^t + e^{-t} - 2} - \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{e^t + e^{-t} - 2 + x^2} dt \\
&= x^{3-a} \int_0^\delta \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\
&\sim \frac{x^{3-a}}{2} \int_0^\delta \frac{t^{a-1}}{(t^2 + x^2)} dt \\
&\sim \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\delta}{x}} \frac{u^{a-1}}{(1 + u^2)} du
\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
& x^{1-a} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^a(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{t^2(e^t + e^{-t} - 2)} - \frac{t^a(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{(t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)} \right) dt \\
&= x^{1-a} \left(\int_0^M + \int_M^{+\infty} \frac{t^a(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)((e^t + e^{-t} - 2 + t^2)x^2 + x^4)}{t^2(t^2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \right) \\
&\leq O(x^2) + O(x^{3-a}) \int_M^{+\infty} \frac{t^a}{t^2(t^2 + x^2)} dt \\
&\leq O(x^2)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& x^{1-a} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)x^2}{(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\
&= x^{3-a} \int_0^M + \int_M^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{(e^t + e^{-t} - 2 + x^2)(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\
&\leq O(x) + x^{3-a} \int_M^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{(e^t + e^{-t} - 2)^2} dt \\
&\leq O(x)
\end{aligned}$$

下面来计算各个主项值:

• 令 $A = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{u^2 + 1} du$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{u^2 + 1} du &\stackrel{t=\frac{1}{u^2+1}}{=} \frac{1}{2\Gamma(a)} \int_0^1 (1-t)^{\frac{a-1}{2}} t^{-\frac{a+1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2\Gamma(a)} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1-a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\Gamma(a)} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\
&\stackrel{\text{余元公式}}{=} \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{\pi}{2 \sin\left(\pi \frac{a+1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{\pi \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{\sin(\pi a)} = \Gamma(1-a) \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

- 令 $B_1 = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-2}(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{(e^t + e^{-t} - 2)} dt$
- 令 $B_2 = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^{-t} - 1 + t)}{(e^t + e^{-t} - 2)} dt$

故有 $A = \Gamma(1-a) \sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$, $B = B_1 + B_2$, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-a}f(x) - A - x^{1-a}B}{x^b} = 0 (b < 1)$$

□

题 24 (复旦大学-楼红卫、严金海). 试对以下各函数建立类似于问题 23 的结果。

$$(i) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^a}, \text{ 其中 } a \in (0, 1)。$$

$$(ii) f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}。$$

$$(iii) f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}。$$

证明. 我们同样用上题的思路计算:

$$(i) \text{ 对于 } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^a}, \text{ 我们根据上式结果}$$

$$\Gamma(a)x^{1-a}f(x) \sim \int_0^{+\infty} \frac{x^2 u^{a-1}}{e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2} du$$

我们同样作差

$$\frac{u^{a-1}}{1+u^2} - \frac{x^2 u^{a-1}}{e^{xu} + e^{-xu} - 2 + x^2} = \underbrace{u^{a-1} \frac{\frac{e^{xu} + e^{-xu} - 2}{x^2} - u^2}{(1+u^2)(1 + \frac{e^{xu} + e^{-xu} - 2}{x^2})}}_{S(u,x)} > 0$$

下面估计 $S(u, x)$ 的积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} S(u, x) du \\ & \stackrel{t=xu}{=} x^{2-a} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{(x^2 + t^2)(x^2 + e^t + e^{-t} - 2)} dt \\ & = x^{2-a} \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{t^2(e^t + e^{-t} - 2)} dt \\ & \quad - x^{2-a} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{a-1}(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)((e^t + e^{-t} - 2 + t^2)x^2 + x^4)}{t^2(x^2 + t^2)(e^t + e^{-t} - 2)(x^2 + e^t + e^{-t} - 2)}}_{T(t,x)} dt \end{aligned}$$

对于 $T(t, x)$ 的主项, 首先在 $t \rightarrow 0^+$ 时, 下式成立

$$\int_0^\delta T(t, x) dt \sim \int_0^\delta \frac{1}{6} \frac{x^2 t^{a+5}}{t^4(t^2 + x^2)^2} dt \sim \int_0^{\frac{\delta}{x}} \frac{x^a}{6} \frac{u^{1+a}}{(1+u^2)^2} du \leq O(x^a)$$

于是得到:

$$x^{2-a} \int_0^{+\infty} T(t, x) dt \leq x^{2-a} \int_0^M + \int_M^{+\infty} T(t, x) dt \sim O(x^2) + x^{4-a} \int_M^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{t^2(t^2 + x^2)} dt = O(x^2)$$

若我们引入 A, B 如下:

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u^2} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, 1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} = \pi \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \frac{1}{\sin \pi a} = \Gamma(a) \Gamma(1-a) \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$$B = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}(e^t + e^{-t} - 2 - t^2)}{t^2(e^t + e^{-t} - 2)} dt$$

故有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A - x^{1-a} \Gamma(a) f(x) - x^{2-a} B}{x^b} \rightarrow 0. (b < 2)$$

(ii) 注意到恒等式

$$\int_0^{+\infty} n^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(\ln n)} dt \stackrel{s=(\ln n)t}{=} \frac{1}{\ln n} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = \frac{1}{\ln n}$$

对于 $|z| < 1$, 我们考虑如下级数

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{z^n}{n^t} dt \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^{+\infty} z^n \frac{1}{t\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} e^{-ns^{\frac{1}{t}}} ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\Gamma(t)} \sum_{n=2}^{+\infty} (ze^{-s^{\frac{1}{t}}})^n ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\Gamma(t)} \frac{z^2 e^{-2s^{\frac{1}{t}}}}{1 - ze^{-s^{\frac{1}{t}}}} ds dt \\ &\stackrel{s=u^t}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{z^2 e^{-2u}}{1 - ze^{-u}} du dt \end{aligned}$$

将 $z = re^{ix} (0 < r < 1)$ 代入上式, 得到:

$$\begin{aligned} F(re^{ix}) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{r^2 e^{-2u} (\cos 2x - re^{-u} \cos x)}{1 - 2re^{-u} \cos x + r^2 e^{-2u}} du dt \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{r^2 e^{-2u} (\sin 2x - re^{-u} \sin x)}{1 - 2re^{-u} \cos x + r^2 e^{-2u}} du dt \quad i \end{aligned}$$

取实部, 得到

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{e^{-2u} (\cos 2x - e^{-u} \cos x)}{1 - 2e^{-u} \cos x + e^{-2u}} du dt$$

同样的分析得到

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{e^{-u}(1-e^{-u})}{e^{-u}+e^u-2+x^2} du dt$$

革命尚未成功，同志仍需努力。。。。。。。

□

题 25 (华东师范大学-庞学诚). 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) \neq f(1)$ 。若对于 $\forall c \in f([0, 1])$, $f(x) = c$ 至多只有有限个解。证明: 存在 $c_0 \in f([0, 1])$, 使得 $f(x) = c_0$ 恰好有奇数个解。

证明. 采用反证法, 不妨设 $f(0) < f(1)$, 否则将 $-f(x)$ 仍记为 $f(x)$ 进行证明即可。

取 $c_0 \in [f(0), f(1)]$, 我们考虑有限集合 $\{x | f(x) = c_0, x \in (0, 1)\}$, 其 n 个元素从小到大排列为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$, 记 $x_0 = 0, x_{2n+1} = 1$, 根据连续函数的介值定理, 在 $2n+1$ 个区间的任一个 (x_i, x_{i+1}) 上必有 $f(x) - c_0 > 0$ 或 $f(x) - c_0 < 0$ 恒成立, 且因为 $2n+1$ 是奇数, 必有一个要更多一些, 不妨设 $f(x) - c_0 > 0$ 的区间更多有 $m \geq n+1$ 个。

记每个区间 (x_i, x_{i+1}) 上 $|f(x) - c_0|$ 的最大值为 $\delta_i = |f(x'_i) - c_0| > 0, i = 0, 1, \cdots, 2n$, 取 $\delta = \min_{0 \leq i \leq 2n} \left\{ \frac{\delta_i}{2} \right\}$, 考虑函数 $g(x) = f(x) - (c_0 + \delta)$, 对于 $f(x) - c_0 > 0$ 的非端点区间 (x_i, x_{i+1}) (共 $m-1$ 个), 有 $g(x_i) < 0, g(x_{i+1}) < 0, g(x'_i) > 0$, 则在 (x_i, x_{i+1}) 上必有两个根, 又因 (x_{2n}, x_{2n+1}) 上有 $g(x_{2n}) < 0, g(x_{2n+1}) > 0$, 故在 (x_{2n}, x_{2n+1}) 上 $g(x)$ 有一个根, 所以 $g(x)$ 在 $[x_0, x_{2n+1}]$ 上根至少有 $2(m-1) + 1 = 2m - 1 \geq 2n + 2 - 1 = 2n + 1$ 个, 又知 $g(x)$ 有偶数个根, 则其根至少有 $2n + 2$ 个。

下面我们记 $c_1 = c_0 + \delta$, 重复上述过程, 我们得到数列 $\{c_n\}$ 满足 $f(x) - c_k$ 的根至少有 $2n + 2k$ 个, 考虑到 $f(0) \leq c_n \leq f(1)$ 是有界的, 故其必有收敛子列不妨仍记为 $c_n \rightarrow c$, 则不难得到 $f(x) - c$ 有无穷多个根, 这与题设矛盾! □

注. 此题的反证思想来源于 柯西永远爱你, 里面还有推广版本的描述及证明。

另外, 若 $f(0) = f(1)$, 此题结论并不成立, 下面是一个反例:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{若 } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1 & \text{若 } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] \\ (2^{k+3} - 2) \left(x - 1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{k-1}} & \text{若 } x \in \left[1 - \frac{1}{2^{2k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{2k+2}}\right] (k \geq 1) \\ -(2^{k+2} - 4) \left(x - 1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{k-1}} & \text{若 } x \in \left[1 - \frac{1}{2^{2k}}, 1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right] (k \geq 1) \\ 1 & \text{若 } x = 1 \end{cases}$$

不难得到 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = c$ 的根的数量只能为 $0, 2, 4$, 均为偶数个根。

题 26 (南京大学-石亚龙). 假设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵 ($n \geq 2$), 满足 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 并且对任何 n 元置换 σ 都有

$$\sum_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

证明: 存在实数 b_1, b_2, \dots, b_n 使得对任何 $1 \leq i, j \leq n$, 都有 $b_i - b_j \leq a_{ij}$ 。

证明. 考虑平面上 n 个互不相同的点 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 不同点连线路径 $s_i \rightarrow s_j$ 给予权重 a_{ij} , 对于任一个圈 $s_{i_1} \rightarrow s_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{i_k} \rightarrow s_{i_1}$, 记 $i_{k+1} = i_1$, 取如下置换

$$\begin{cases} \sigma(i_j) = i_{j+1} & \text{对 } j = 1, 2, \dots, k \\ \sigma(i) = i & \text{若 } i \neq i_j (j = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

由 $a_{ii} = 0$ 得到 $a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \dots + a_{i_k i_1} \geq 0$, 即圈路径的权重和是非负的。

定义 b_i 是 s_i 经过不同点到 s_1 路径权重和的最小值, 易知 $b_1 = 0$, 写明白即为:

$$b_i = \min_{\{i_k\}} \{a_{i i_1} + a_{i_1 i_2} + \dots + a_{i_k 1}\}$$

注意到任何闭合路径 (即圈) 的权重和是非负, 因为点是有限的, 故从 s_i 经过不同点到 s_1 不包含圈的路径数量也是有限的, 故上述定义是有意义的。

根据 $\{b_k\} (k = 1, 2, \dots, n)$ 的定义, 在计算 s_i 经过不同点到 s_1 的权重和最小值 b_i 时, 其必不大于先到 s_j 点, 再从 s_j 点到 s_1 点的最小路径权重和 b_j , 这得到

$$b_i \leq a_{ij} + b_j \implies b_i - b_j \leq a_{ij}$$

证毕。 □

题 27 (中国科学技术大学-任广斌). 设 $k_1, k_2, \dots, k_n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 计算

$$\frac{d^m}{dx^m} \left((x - \alpha_1)^{-k_1} (x - \alpha_2)^{-k_2} \dots (x - \alpha_n)^{-k_n} \right).$$

解. 对于任意的 $k, i \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{d^i}{dx^i} (x - \alpha)^{-k} = (-k)(-k-1)\dots(-k-(i-1))(x - \alpha)^{-(k+i)} = (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} (k+j)(x - \alpha)^{-(k+i)}$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 及无穷可微函数 $h_i(x) (1 \leq i \leq n)$

$$\begin{aligned} \frac{d^i}{dx^i} (h_1) &= h_1^{(i)}(x) \\ \frac{d^i}{dx^i} (h_1 h_2) &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} h_1^{(j)} h_2^{(i-j)} = i! \sum_{j=0}^i \frac{h_1^{(j)}}{j!} \frac{h_2^{(i-j)}}{(i-j)!} \\ \frac{d^i}{dx^i} (h_1 h_2 h_3) &= i! \sum_{j=0}^i \frac{h_1^{(j)}}{j!} \frac{(h_2 h_3)^{(i-j)}}{(i-j)!} = i! \sum_{j=0}^i \frac{h_1^{(j)}}{j!} \frac{1}{(i-j)!} (i-j)! \sum_{l=0}^{i-j} \frac{h_2^{(l)}}{l!} \frac{h_3^{(i-j-l)}}{(i-j-l)!} \\ &= i! \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^{i-j} \frac{h_1^{(j)}}{j!} \frac{h_2^{(l)}}{l!} \frac{h_3^{(i-j-l)}}{(i-j-l)!} \end{aligned}$$

对于 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, 由归纳法不难得到

$$\frac{d^i}{dx^i} (h_1 h_2 \dots h_n) = i! \sum_{|\beta|=i} \prod_{k=1}^n \frac{h_k^{(\beta_k)}}{\beta_k!}$$

其中 $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ 。

约定 $(-1)! = 1$, 令 $h_j = (x - \alpha_j)^{-k_j}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left((x - \alpha_1)^{-k_1} (x - \alpha_2)^{-k_2} \cdots (x - \alpha_n)^{-k_n} \right) &= m! \sum_{|\beta|=m} \prod_{j=1}^n \frac{h_j^{(\beta_j)}}{\beta_j!} \\ &= m! \sum_{|\beta|=m} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j!} (-1)^{\beta_j} \prod_{i=0}^{\beta_j-1} (k_j + i) (x - \alpha_j)^{-(k_j + \beta_j)} \\ &= m! \sum_{|\beta|=m} \prod_{j=1}^n \frac{(-1)^{\beta_j}}{\beta_j!} (x - \alpha_j)^{-(k_j + \beta_j)} \prod_{i=0}^{\beta_j-1} (k_j + i) \\ &= m! \sum_{|\beta|=m} \prod_{j=1}^n \frac{(-1)^{\beta_j} (k_j + \beta_j - 1)!}{\beta_j! (k_j - 1)!} (x - \alpha_j)^{-(k_j + \beta_j)} \end{aligned}$$

题 28 (南开大学-黄利兵). 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos t) dt$$

与 r 无关。证明或否定：

$$f(x) + f(-x) = 2f(0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

证明. 作变量代换 $x = r \cos t$, 则得到

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(r \cos t) dt &= \int_0^{\pi} f(r \cos t) dt + \int_0^{\pi} f(-r \cos t) dt \\ &= \int_r^{-r} f(-x) + f(x) d \arccos \left(\frac{x}{r} \right) \\ &= \int_{-r}^r \frac{f(-x) + f(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

记 $g(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $g(x)$ 为偶函数, 不妨设 $g(0) = 0$, 否则将 $g(x) - g(0)$ 替代 $g(x)$ 即可。

于是对于 $\forall r > 0$, 成立

$$0 = \int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

对于任意的 $y > 0$, 根据上式不难得到：

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^y \frac{r}{\sqrt{y^2 - r^2}} \int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx dr \\ &= \int_0^y g(x) \int_x^y \frac{r}{\sqrt{(y^2 - r^2)(r^2 - x^2)}} dr dx \\ &\stackrel{u=\frac{r^2-x^2}{y^2-x^2}}{=} \frac{1}{2} \int_0^y g(x) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)u}} du dx = \frac{\pi}{2} \int_0^y g(x) dx \end{aligned}$$

这就得到 $g(x) \equiv 0$, 证毕。 □

注. 此题的证明技巧来源于清疏数学, 本质是求解了积分方程。

题 29 (四川大学博士研究生-王周哲). 设凸区域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 是 V 上的上半连续函数。如果对任意的 $x \in V$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 都存在 $h \in (0, \delta)$, 使得

$$f(x) \leq \frac{f(x+hy) + f(x-hy)}{2}.$$

证明: f 是 V 上的凸函数。

引理

引理 3. 对于闭区间 $[a, b]$ 的上半连续函数 $f(x)$, 其必在 $[a, b]$ 上取到最大值。

证明. 首先证明 $f(x)$ 有上界, 根据上半连续的定义, 对任意的 $x_i \in [a, b]$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 δ_i , 使得 $x \in (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i) \cap [a, b]$ 时, 就有 $f(x) < f(x_i) + 1$, 易知 $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ 构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 根据有限覆盖定理, 必存在整数 N 使得 $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^N (x_{i_k} - \delta_{i_k}, x_{i_k} + \delta_{i_k})$. 取 $M = \max_{1 \leq k \leq N} \{f(x_{i_k})\} + 1$, 则得到 $f(x) < M$ 对一切 $x \in [a, b]$ 成立。

记 $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = L < +\infty$, 使用反证法: 若对任意的 $x \in [a, b]$, 都有 $f(x) < L$. 考虑函数 $g(x) = \frac{1}{L - f(x)}$, 对于任意一点 x_0 , 记 $\varepsilon_0 = L - f(x_0)$, 取 $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ 对任意的 $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ 成立, 这说明

$$L - f(x) > L - f(x_0) - \varepsilon \implies \frac{1}{L - f(x)} < \frac{1}{L - f(x_0) - \varepsilon} < \frac{1}{L - f(x_0)} + \varepsilon'$$

其中 $\varepsilon' = \frac{2}{\varepsilon_0^2} \varepsilon$, 这说明 $g(x)$ 也为上半连续函数, 故 $g(x)$ 有上界。另一方面, 由上确界定义知存在一列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n) \rightarrow L^-$, 这与 $g(x_n)$ 有上界矛盾! 故 $f(x)$ 必在某一点取到最大值, 证毕。□

证明. 使用反证法。若存在 $x_0, y_0 \in V$ 及 $\lambda_0 \in (0, 1)$ 使得

$$f(\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) y_0) > \lambda_0 f(x_0) + (1 - \lambda_0) f(y_0)$$

考虑到 V 是凸区域, 故在 $[0, 1]$ 上可以引入处处有定义的函数

$$g(\lambda) = f(\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0) - \lambda f(x_0) - (1 - \lambda) f(y_0) = f(y_0 + \lambda(x_0 - y_0)) - \lambda(f(x_0) - f(y_0)) - f(y_0)$$

对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 及 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 足够小, 使得当 $t \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap [0, 1]$ 时, 就有

$$f(y_0 + t(x_0 - y_0)) < f(y_0 + \lambda(x_0 - y_0)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta_1 = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2|f(x_0) - f(y_0)|} \right\}$, 当 $t \in (\lambda - \delta_1, \lambda + \delta_1) \cap [0, 1]$ 时就有

$$g(t) < g(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2} + \delta_1 |f(x_0) - f(y_0)| < g(\lambda) + \varepsilon$$

这说明 $g(\lambda)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的上半连续函数, 由引理 3 知 $g(\lambda)$ 必可以在某点 λ_c 处取到最大值。

注意到

$$g(0) = g(1) = 0 \quad g(\lambda_0) > 0$$

这说明 $\lambda_c \in (0, 1)$, 且 $g(\lambda_c) \geq g(\lambda_0)$ 。

记 $\alpha = y_0 + \lambda_c(x_0 - y_0)$, $\beta = x_0 - y_0$, 根据题设令 $\mathbf{x} = \alpha$, $\mathbf{y} = \beta$, 得到: 对任意的 $t \in (0, 1)$ 及 $0 < \delta < 1 - \lambda_c$, 存在 $h \in (0, \delta)$ 使得

$$f(\alpha) \leq \frac{f(\alpha + h\beta) + f(\alpha - h\beta)}{2} \implies g(t) \leq g(\lambda_c) \leq \frac{g(\lambda_c + h) + g(\lambda_c - h)}{2}$$

这说明存在一列 $h_n (> 0) \rightarrow 0^+$ 使得 $g(\lambda_c + h_n) = g(\lambda_c - h_n) = g(\lambda_c)$, 对于任一个 h_k , 对最大值点 $\lambda = \lambda_c + h_k$ 重复上述推导得到每个最大值都是一个聚点。不妨设 $\lambda_c \geq \frac{1}{2}$, 记 $h_c = \sup_{h \in (\lambda_c, 1)} \{h | g(h) = g(\lambda_c)\}$, 则必有 $g(h_c) = g(\lambda_c)$, 这是因为 $g(\lambda_c) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} g(h_{t_k}) \leq g(h_c) \leq g(\lambda_c)$ 。且有 $h_c = 1$, 若不然, 可以构造 $g(h_c + h_{c_k}) = g(\lambda_c)$ 且 h_{c_k} 单调增, 这与 h_c 的定义矛盾。所以必可以找出一列 $\{h_{t_k}\}$ 使得 $g(h_{t_k}) = g(\lambda_c) \geq g(\lambda_0)$, 另一方面, 由上半连续函数的定义, 有

$$0 < g(\lambda_0) \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} g(h_{t_k}) \leq g(1) = 0$$

矛盾! 故原命题得证。 □

注. 考虑到上半连续和凸函数的“不常见”性, 我们列出这两个定义:

定义 1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 在点 $x_0 \in E$ 处是**上半连续的**, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{对所有 } x \in B(x_0, \delta) \cap E$$

成立。如果 f 在 E 的每一点都上半连续, 则称 f 在 E 上是上半连续的。

定义 2. 函数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 是**凸函数**, 如果对任意 $x, y \in V$ 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

题 30 (江苏师范大学本科生-尤永皓). 设 $n \geq 1$, 证明:

$$0 < \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{\sqrt{k+1}} < 1.$$

证明. 注意到

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+1)x^2} dx \stackrel{y=\sqrt{k+1}x}{=} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k+1}}$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{\sqrt{k+1}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{-kx^2} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^n dx \end{aligned}$$

不难得到

$$0 < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^n dx < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

□

题 31 (南京大学-梅加强). 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{2-x^2}}{1+x^2} dx$$

解. 首先分部积分

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{2-x^2}}{1+x^2} dx \stackrel{t=\sqrt{2-x^2}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t \arctan t}{(3-t^2)\sqrt{2-t^2}} dt \\ &= \arctan \sqrt{2-x^2} \arctan x \Big|_0^1 + \underbrace{\int_0^1 \frac{x \arctan x}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}} dx}_{\text{记为 } B} \end{aligned}$$

下面来计算 $A+B = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x \arctan x}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}} dx$. 定义函数 $I(a) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x \arctan ax}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}} dx$, 求导:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{(3-x^2)(1+a^2x^2)\sqrt{2-x^2}} dx \\ &\stackrel{x=\sqrt{2}\sin\theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\theta}{(3-2\sin^2\theta)(1+2a^2\sin^2\theta)} d\theta \\ &\stackrel{\theta=\arctan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\frac{t^2}{1+t^2}}{(3-2\frac{t^2}{1+t^2})(1+2a^2\frac{t^2}{1+t^2})(1+t^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(3+t^2)(1+(1+2a^2)t^2)} dt \\ &= \frac{\pi}{2(1+3a^2)} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{1+2a^2}} \right) \end{aligned}$$

注意到 $I(0) = 0$, 则我们要求的 $I(1)$ 可以写为

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 I'(a) da = \int_0^1 \frac{\pi}{2(1+3a^2)} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{1+2a^2}} \right) da \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+3a^2)\sqrt{1+2a^2}} da \\ &\stackrel{\sqrt{2}a=\tan\theta}{=} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\arctan\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta} d\theta \\ &\stackrel{\sqrt{2}u=\sin\theta}{=} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

所以我们得到

$$\begin{cases} A - B = \frac{\pi^2}{16} \\ A + B = \frac{\pi^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{7\pi^2}{96} \\ B = \frac{\pi^2}{96} \end{cases}$$

故得到原积分的值即为 A 。

题 32 (复旦大学-严金海). 设 k 为正整数, f 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, g 在 $[0, +\infty)$ 上任意次可导且 $g(0) = 0$ 。问对于什么样的 g , 函数 f 在 0 点的右导数存在等价于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(g(x))}{x^k}$$

存在?

解. 根据泰勒展开, 有 $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$, 分如下情况来考虑:

- $k = 1$, 另外引入条件: $g'(0) \neq 1$ 。

“ \Rightarrow ”: 若 $f'_+(0)$ 存在, 则

$$\frac{f(x) - f(g(x))}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f(g(x)) - f(0)}{g(x)} \frac{g(x) - g(0)}{x} \rightarrow f'_+(0)(1 - g'_+(0))$$

“ \Leftarrow ”: 若 $\frac{f(x) - f(g(x))}{x} \rightarrow A$, 则 $x - g(x) \sim (1 - g'(0))x$, 这说明 $\frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)} \rightarrow \frac{A}{1 - g'(0)}$, 根据题 52 即证。(若 $g'(0) < 1$ 直接证明, 若 $g'(0) > 1$ 考虑反函数 $g^{-1}(x)$ 在 0 处的性质。)

- $k > 1$, 我们说明不存在 $g(x)$ 满足题设条件。

“ \Rightarrow ”: 取 $f(x) = x$, 则显然 f 满足题设要求, 且有

$$f(x) - f(g(x)) = x - g(x) = \left((1 - g'(0))x - \sum_{i=2}^k \frac{g^{(i)}(0)}{i!}x^i + o(x^k) \right)$$

若使得 $\frac{x - g(x)}{x^k}$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 时的极限存在, 则必须有 $g'(0) = 1$, $g^{(i)}(0) = 0 (i = 2, \dots, k-1)$ 。

再考虑如下满足题设要求的函数 $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

设 $g(x) \sim x + cx^k + o(x^k)$, 直接计算得到

$$\begin{aligned} f(x) - f(g(x)) &= x^2 \sin \frac{1}{x} - g^2(x) \sin \frac{1}{g(x)} = x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{g(x)} \right) + (x^2 - g^2(x)) \sin \frac{1}{g(x)} \\ &= 2x^2 \sin \left(\frac{g(x) - x}{2xg(x)} \right) \cos \left(\frac{x + g(x)}{xg(x)} \right) + (x - g(x))(x + g(x)) \sin \frac{1}{g(x)} \\ &\sim cx^k \cos \left(\frac{2}{x} \right) - 2cx^{k+1} \sin \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

若使得 $\frac{f(x) - f(g(x))}{x^k}$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 时的极限存在, 则必须有 $c = 0$, 即 $g^{(k)}(0) = 0$ 。

“ \Leftarrow ”: 设 $g(x) = x + cx^{k+m} + o(x^{k+m})$, ($c \neq 0, m \geq 1$)。

我们考虑如下函数 $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln x) & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \sin(\ln x) + \cos(\ln x) & \text{若 } x > 0 \\ \text{不存在} & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

易见 $|f'(x)| \leq 2 (x > 0)$, 直接计算

$$f(x) - f(g(x)) = f'(\xi)(x - g(x)) = -cf'(\xi)x^{k+m} + o(x^{k+m})$$

这得到 $\frac{f(x) - f(g(x))}{x^k} \rightarrow 0$, 但 $f'_+(0)$ 不存在。

题 33 (北京大学-杨家忠). **证明:**

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\cos ax - \cos a}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

证明. 根据和差化积公式

$$\cos ax - \cos a = 2 \sin\left(\frac{1+x}{2}a\right) \sin\left(\frac{1-x}{2}a\right)$$

记

$$I(a, x) = \frac{a}{\sqrt{\cos ax - \cos a}} = \frac{a}{\sqrt{2 \sin\left(\frac{1+x}{2}a\right) \sin\left(\frac{1-x}{2}a\right)}}$$

当 $a > 0$ 足够小时 ($a < \delta$), 就有

$$\begin{aligned} I(a, x) &< \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{2}a\right) \left(\frac{1-x}{2}a\right)}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

而 $\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx < +\infty$, 故 $\int_0^1 I(a, x) dx$ 关于 a 在 $[0, \delta]$ 上一致收敛。
此时就有

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\cos ax - \cos a}} = \int_0^1 I(0^+, x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

□

题 34 (复旦大学-严金海). 设 n 为正整数, $0 \leq k \leq n-1$, $P(x)$ 为 $2n-1$ 次多项式, $x=0$ 是 $P(x)$ 的 n 重根, 而 $x=1$ 是 $P(x) - \frac{(x-1)^k}{k!}$ 的 n 重根。证明:

$$\frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{|P^{(2n-1)}(x)|}{(2n-1)!} \leq \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}$$

证明. 根据题设记 $P^{(2n-1)}(x) = a$, 且对 $i = 0, 1, \dots, n-1$, 在 $x = 0$ 处有 $P^{(i)}(0) = 0$, 在 $x = 1$ 处有 $P^{(k)}(1) = 1$, $P^{(i)}(1) = 0 (i \neq k)$ 。

引入函数 $g(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$, 考虑分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 P^{(2n-1)}(x)g(x) \, dx &= (-1)^{n-1} \int_0^1 P^{(n)}(x)g^{(n-1)}(x) \, dx \\ &= (-1)^k g^{(2n-k-2)}(1) + \int_0^1 P(x)g^{(2n-1)}(x) \, dx \\ &= (-1)^k g^{(2n-k-2)}(1) \end{aligned}$$

上式左侧用 Beta 函数表示为

$$a \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1} \, dx = aB(n, n) = a \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

注意到

$$g(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(x-1+1)^{n-1}(x-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x-1)^{i+n-1}$$

以及 $2n-k-2 \in [n-1, 2n-2]$, 根据 $g(x)$ 在 $x = 1$ 处的泰勒展开得到

$$|g^{(2n-k-2)}(1)| = \binom{n-1}{n-1-k} (2n-k-2)! = (n-1)! \underbrace{\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-1-k)!}}_{a_k}$$

考虑 a_k 的单调性 ($0 < k \leq n-1$)

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} - 1 = \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-1-k)!} \frac{(k-1)!(n-k)!}{(2n-k-1)!} - 1 = \frac{n+k^2-2nk}{k(2n-k-1)} = \frac{(n-k)^2 - n(n-1)}{k(2n-k-1)} < 0$$

这得到 a_k 为递减的, 所以有

$$(n-1)! \leq |a| \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \leq (2n-2)!$$

证毕。 □

题 35 (北京大学-杨家忠). 设 f 是 $[0, 1]$ 上的函数, 定义如下:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \{10^k x\},$$

其中 $\{x\} := x - [x]$, 即 x 的小数部分。试计算

$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

证明. 根据 $\{x\}$ 函数的周期性, 引入如下各项:

$$A_k = \int_0^1 \frac{1}{2^k} \{10^k x\} dx \stackrel{y=10^k x}{=} \int_0^{10^k} \frac{1}{20^k} \{y\} dy = \frac{1}{2^k} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2^{k+1}}$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 故得到:

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

□

题 36 (北京理工大学-赵鲁涛). 设 $a < \frac{1}{2}$, $\{X_k\}$ 为相互独立的随机变量序列, 且 $P\{X_k = \pm k^a\} = \frac{1}{3}$, ($k = 1, 2, \dots$). 证明: $\{X_k\}$ 服从大数定律。

证明. 对任一个随机变量 X_k , 除了 $\pm k^a$ 不妨设它的其余取值为 $X_{ki} (i = 1, 2, \dots)$, 相应的概率为 p_{ki} , 根据概率测度为 1, 得到:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} = \frac{1}{3}$$

直接计算 X_k 的均值及方差

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{3} \cdot k^a + \frac{1}{3} \cdot (-k^a) + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}$$

$$\mathbb{E}[X_k^2] = \frac{2}{3} k^{2a} + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2$$

$$\text{Var}(X_k) = \mathbb{E}[X_k^2] - (\mathbb{E}[X_k])^2 = \frac{2}{3} k^{2a} + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2 - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki} \right)^2$$

考虑部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 则有

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}$$

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3} k^{2a} + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2 - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki} \right)^2 \right)$$

根据柯西不等式, 得到

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} |X_{ki}| \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{p_{ki}} \sqrt{p_{ki}} |X_{ki}| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2 \quad (3)$$

下面给出两种情况说明大数定律成立需要额外条件:

- 若 $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2 = o(n)$, 由(3)得到

$$\begin{aligned}
 \left| \mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] \right| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki} \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} |X_{ki}| \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{3}n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2} \\
 &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} X_{ki}^2} \sim o(1)
 \end{aligned}$$

这说明 $\frac{S_n}{n}$ 收敛于 0。另一方面, 根据切比雪夫不等式有

$$P \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \right| \geq \delta \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{3} n^{2a+1} + o(n) \right) \rightarrow 0$$

满足大数定律。

- 考虑 X_k 如下分布:

$$X_k = \begin{cases} k^a & \text{概率 } 1/3 \\ -k^a & \text{概率 } 1/3 \\ k^2 & \text{概率 } 1/3 \end{cases}$$

直接计算得到

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{3} k^2$$

从而部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ 的期望是

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{18} \sim \frac{n^3}{9} \implies \mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] \sim \frac{n^2}{9} \rightarrow +\infty$$

这说明 $\frac{S_n}{n}$ 不收敛于任何有限常数, 故大数定律不成立。

□

题 37 (复旦大学-楼红卫). 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的可微函数, 在 $[0, 2\pi]$ 上绝对可积。若 f' 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 A , 问是否有 $A = f'(x_0)$?

证明. 记 $S_n(h; x)$, $\sigma_n(h; x)$ 分别为函数 h 的 Fourier 级数的部分和以及 Cesàro 和。以下不妨设 $x_0 = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$ (否则, 将 $f(x) - f(0) \cos x - f'(0) \sin x$ 仍记为 $f(x)$ 进行论证), 根据题设可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f'; 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f'; 0) = A$$

另一方面, 引入如下函数 $g(x)$:

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{\sin \frac{x}{2}}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积, 且在 0 点处连续, 根据 Fejér 积分的性质, 得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(0; |g|) = |g(0)| = 0.$$

进而由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} dt = 0 \quad (4)$$

再运用分部积分得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin nt}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{n \sin nt}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = A. \end{aligned} \quad (5)$$

从而由 Stolz 公式得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = A$$

根据(4),(5)得到

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \sin \frac{nt}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^3 \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} + \frac{\sin nt}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right) dt = 0.$$

这证明了结论。 □

注. 此解答来源于供题者楼红卫教授。该题的条件可以大大减弱, Fatou 曾经给出如下结果:

设以 2π 为周期的周期函数 f 在 $[0, 2]$ 上绝对可积, 在 x_0 处可导。其 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则有

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} nr^n (-a_n \sin nx + b_n \cos nx) = f'(x_0)$$

即 f 的 Fourier 级数求导后的级数在 x_0 处的 Abel 和为 $f'(x_0)$ 。

题 38 (许昌学院数学学院本科生-韩万龙). 设 $k \geq 1$, f 在 $[0, 1]$ 上 $k+1$ 阶可导, 对于 $0 \leq j \leq k$, $j \neq 1$, 有 $f^{(j)}(0) = 0$ 。而 $f'(0) = 1$, $f^{(k+1)}(0) = A \neq 0$ 。又对于 $x \in (0, 1]$, 有 $0 < f'(x) < 1$ 。取 $x_1 \in (0, 1]$, 对于 $n \geq 1$, 依次定义 $x_{n+1} = f\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right)$ 。试计算极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\ln n} x_n$$

解. 先来说明 x_n 单调递减, 已知 $x_2 = f(x_1)$, 则有

$$x_2 - x_1 = f(x_1) - x_1 = f(x_1) - f(0) - x_1 \xrightarrow{\xi_1 \in (0, x_1)} (f'(\xi_1) - 1)x_1 < 0$$

故 $x_2 < x_1$ 。

另一方面有

$$x_2 = f(x_1) = f(0) + f'(\xi_1)x_1 = f'(\xi_1)x_1 > 0$$

故得到 $0 < x_2 < x_1 \leq 1$ 。

若对 n 已经证明, 下面用归纳法证明 $0 < x_{n+1} < x_n$ 。首先引入数列 $s_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= f\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right) - f\left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right) \\ &= f'(\xi) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x_j \right) \\ &= f'(\xi) \left(\frac{(n-1)s_{n-1} + x_n}{n} - s_{n-1} \right) \\ &< f'(\xi) \left(\frac{(n-1)s_{n-1} + s_{n-1}}{n} - s_{n-1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

且有

$$x_{n+1} = f(s_n) - f(0) \xrightarrow{\eta \in (0, s_n)} f'(\eta)s_n > 0$$

则 x_n 必有极限 a ($1 > a \geq 0$), 且 $a = f(a)$, 若 $a > 0$, 则有

$$a = f(a) - f(0) \xrightarrow{\theta \in (0, a)} f'(\theta)a < a$$

矛盾! 故必有 $a = 0$ 。

根据题设递推公式, 我们使用 $\{s_n\}$ 来代替 $\{x_n\}$ 数列, 则有 s_n 递推公式如下:

$$(n+1)s_{n+1} - ns_n = f(s_n) \implies s_n - s_{n+1} = \frac{s_n - f(s_n)}{n+1}$$

先来证明 $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \rightarrow 1$, 即证明 $\frac{f(s_{n+1}) - f(s_n)}{f(s_n)} \rightarrow 0$. 直接计算得到

$$\begin{aligned} \frac{f\left(s_n - \frac{s_n - f(s_n)}{n+1}\right) - f(s_n)}{f(s_n)} &= -f'(\xi_1) \frac{s_n - f(s_n)}{(n+1)f(s_n)} \\ &= -f'(\xi_1) \frac{s_n}{(1+n)(f(s_n) - f(0))} + f'(\xi_1) \frac{1}{n+1} \\ &= -f'(\xi_1) \frac{1}{(1+n)f'(\xi_2)} + f'(\xi_1) \frac{1}{n+1} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

设待求的极限为 L , 我们使用 stolz 公式来求解 L^k ,

$$\begin{aligned} L^k &= \ln n x_n^k \\ &= \frac{\ln(1+1+n) - \ln(1+n)}{\frac{1}{x_{n+2}^k} - \frac{1}{x_{n+1}^k}} \\ &\sim \frac{1}{1+n} \cdot \frac{x_{n+1}^k x_{n+2}^k}{(x_{n+1} - x_{n+2})(x_{n+1}^{k-1} + \cdots + x_{n+2}^{k-1})} \\ &\sim \frac{s_n - s_{n+1}}{s_n - f(s_n)} \cdot \frac{x_{n+1}^{2k}}{(f(s_n) - f(s_{n+1}))kx_{n+1}^{k-1}} \\ &\sim \frac{f(s_n)^{k+1}}{kf'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{s_n - f(0) - f'(0)s_n - \cdots - \frac{f^{k+1}(\eta_n)}{(k+1)!} s_n^{k+1}} \\ &\sim \frac{-(k+1)!}{kf'(\xi_n)f^{k+1}(\eta_n)} \cdot \left(\frac{f(s_n) - f(0)}{s_n}\right)^{k+1} \\ &\rightarrow -\frac{(k+1)!}{kA} \end{aligned}$$

这就得到要求极限为

$$L = \left(-\frac{(k+1)!}{kA}\right)^{\frac{1}{k}}$$

题 39 (南开大学-李军). 设 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, 定义数列:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}a_n + a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: 数列 $\left\{\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 收敛, 并求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

证明. 由递推式可以得到

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-n}{n} \left(\frac{1}{n-1} a_{n-1} + a_{n-2} \right) + a_{n-1} = \frac{n-1}{n} (a_{n-1} - a_{n-2})$$

记 $F_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 对奇偶分情况得到

$$\begin{cases} a_{2n} - a_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}(a_2 - a_1) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} a_0 = \frac{1}{2nF_n} a_0 \\ a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}(a_1 - a_0) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (a_1 - a_0) = F_n(a_1 - a_0) \end{cases}$$

再根据 $a_n = n(a_{n+1} - a_{n-1})$ 得到

$$\begin{cases} a_{2n} = 2n(a_{2n+1} - a_{2n-1}) = 2n \left(F_n(a_1 - a_0) + \frac{1}{2nF_n} a_0 \right) \\ a_{2n+1} = (2n+1)(a_{2n+2} - a_{2n}) = (2n+1) \left(\frac{1}{(2n+2)F_{n+1}} a_0 + F_n(a_1 - a_0) \right) \end{cases}$$

下面使用 Wallis 公式

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F_n\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

故得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{2n}}{\sqrt{2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n}F_n(a_1 - a_0) + \frac{1}{\sqrt{2n}F_n} a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(a_1 - a_0) + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} a_0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{(2n+2)F_{n+1}} a_0 + \sqrt{2n+1}F_n(a_1 - a_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(a_1 - a_0) + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} a_0 \end{aligned}$$

这即为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_1 - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} a_0$$

□

题 40 (江南大学-沈莞蕾, 陈海伟). 在平面上, 已知两圆 C_1, C_2 , 圆心分别为 A, B , 半径分别为 R, r , 且 A, B 之间的距离为 d ($R, r, d > 0$). P, Q 分别为圆 C_1, C_2 (包括圆周) 上的动点, C 为经过 P 和 Q 的动圆 (见图 2), 求 C 的圆心 S 在该平面上可能出现的区域。

解. 根据对称性不妨设 $R \geq r$, 以 AB 中垂线为 x 轴, AB 为 y 轴建立平面直角坐标系。设坐标 $A\left(0, \frac{d}{2}\right)$, $B\left(0, -\frac{d}{2}\right)$, 设 $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$, 则圆心 S 所在的 PQ 中垂线方程:

$$(x_q - x_p)x + (y_q - y_p)y = \frac{x_q^2 + y_q^2 - x_p^2 - y_p^2}{2} \quad (6)$$

作参数变换 (其中, $r_1 \leq R, r_2 \leq r$)

$$\begin{cases} x_p &= r_1 \cos \alpha \\ y_p &= \frac{d}{2} + r_1 \sin \alpha \\ x_q &= r_2 \cos \beta \\ y_q &= -\frac{d}{2} + r_2 \sin \beta \end{cases}$$

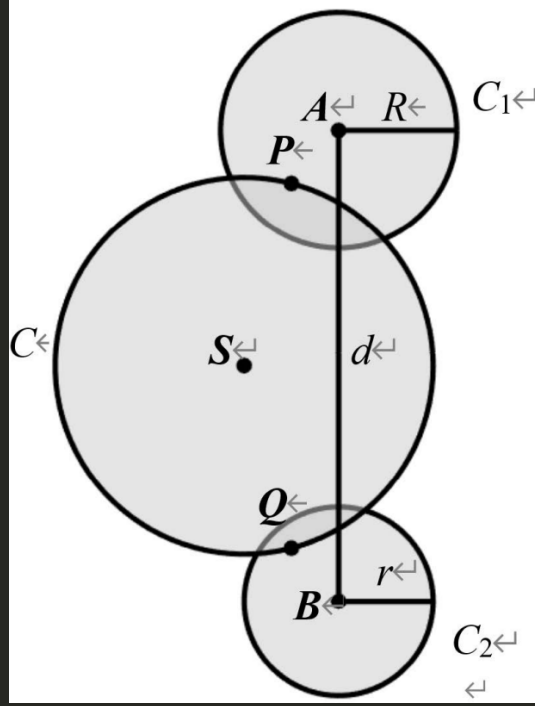


图 2: 问题 40 图示

将上式带入(6)得到

$$(r_2 \cos \beta - r_1 \cos \alpha)x + (-d + r_2 \sin \beta - r_1 \sin \alpha)y = \frac{r_2^2 - r_1^2 - (r_2 \sin \beta + r_1 \sin \alpha)d}{2}$$

令 $a_1 = \frac{r_1}{d} \in \left[0, \frac{R}{d}\right]$, $a_2 = \frac{r_2}{d} \in \left[0, \frac{r}{d}\right]$, 则上式化为

$$(a_2 \cos \beta - a_1 \cos \alpha)x + (-1 + a_2 \sin \beta - a_1 \sin \alpha)y = \frac{a_2^2 - a_1^2 - (a_2 \sin \beta + a_1 \sin \alpha)d}{2}$$

整理得到

$$\begin{aligned} & \left[a_2 x \cos \beta + \left(a_2 y + \frac{a_2 d}{2} \right) \sin \beta \right] + \left[(-a_1 x) \cos \alpha + \left(-a_1 y + \frac{a_1 d}{2} \right) \sin \alpha \right] = y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} d \\ \Rightarrow & \sqrt{a_2^2 x^2 + \left(a_2 y + \frac{a_2 d}{2} \right)^2} \sin(\beta + \theta_2) + \sqrt{a_1^2 x^2 + \left(a_1 y - \frac{a_1 d}{2} \right)^2} \sin(\alpha + \theta_1) = y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} d \\ \Rightarrow & \left| y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} d \right| \leq a_2 \underbrace{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2} \right)^2}}_{S \text{到} B \text{的距离}} + a_1 \underbrace{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2} \right)^2}}_{S \text{到} A \text{的距离}} \end{aligned}$$

令 $z = y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} d$, 我们考虑 $S' = (x, z)$ 的轨迹, 则上式变为:

$$|z| \leq a_2 \sqrt{x^2 + \left(z + (a_1^2 - a_2^2 + 1) \frac{d}{2} \right)^2} + a_1 \sqrt{x^2 + \left(z + (a_1^2 - a_2^2 - 1) \frac{d}{2} \right)^2}$$

我们考虑 $z \geq 0$ 的区域, 并将不等式取等。

记 $f(z) = z + (a_1^2 - a_2^2 + 1)\frac{d}{2}$, $g(z) = z + (a_1^2 - a_2^2 - 1)\frac{d}{2}$, 得到

$$\begin{aligned} & z^2 + a_2^2 [x^2 + f^2(z)] - 2za_2\sqrt{x^2 + f^2(z)} = a_1^2 [x^2 + g^2(z)] \\ \implies & (z^2 + a_2^2 [x^2 + f^2(z)] - a_1^2 [x^2 + g^2(z)])^2 = 4z^2 a_2^2 (x^2 + f^2(z)) \\ \implies & ((a_2^2 - a_1^2)x^2 + k(z))^2 = 4z^2 a_2^2 x^2 + 4z^2 a_2^2 f^2(z) \\ \implies & (a_2^2 - a_1^2)^2 x^4 + [2(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 4a_2^2 z^2] x^2 + k^2(z) - 4a_2^2 z^2 f^2(z) = 0 \end{aligned}$$

其中 $k(z) = z^2 + a_2^2 f^2(z) - a_1^2 g^2(z)$, 我们对 x^2 配方

$$\left[(a_2^2 - a_1^2)x^2 + \frac{(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 2a_2^2 z^2}{a_2^2 - a_1^2} \right]^2 = 4a_2^2 z^2 \left(f^2(z) - \frac{k(z)}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2^2 z^2}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \right)$$

将 $f(z), g(z), k(z)$ 带入右侧得到

$$\begin{aligned} & f^2(z) - \frac{k(z)}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2^2 z^2}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \\ &= \frac{a_1^2 z^2}{(a_2^2 - a_1^2)^2} - \frac{2a_1^2 dz}{a_2^2 - a_1^2} + a_1^2 d^2 \\ &= \left(\frac{a_1 z}{a_2^2 - a_1^2} - a_1 d \right)^2 \end{aligned}$$

这就得到下面两式：

$$\begin{aligned} & \left((a_2^2 - a_1^2)x^2 + \frac{(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 2a_2^2 z^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{2a_1 a_2 z^2}{a_2^2 - a_1^2} - 2a_1 a_2 dz \right) = 0 \\ & \left((a_2^2 - a_1^2)x^2 + \frac{(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 2a_2^2 z^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{2a_1 a_2 z^2}{a_2^2 - a_1^2} + 2a_1 a_2 dz \right) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

对上面(7)的第一式配方得到：

$$\begin{aligned} & (a_2^2 - a_1^2)^2 x^2 + [(a_2 + a_1)^2 - 1](a_2 - a_1)^2 z^2 + [1 - (a_1 + a_2)^2](a_2 - a_1)^2 (a_2^2 - a_1^2) dz \\ & + \frac{d^2}{4} (a_2^2 - a_1^2)^2 [(a_2^2 - a_1^2)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2) + 1] = 0 \\ \implies & (a_2^2 - a_1^2)^2 x^2 + [(a_2 + a_1)^2 - 1](a_2 - a_1)^2 \left(z^2 - (a_2^2 - a_1^2) dz + \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{4} d^2 \right) \\ & + \frac{d^2}{4} (a_2 - a_1)^2 (a_2 + a_1)^2 (1 - (a_1 + a_2)^2) = 0 \\ \implies & (a_2 - a_1)^2 \left((a_2 + a_1)^2 x^2 + [(a_2 + a_1)^2 - 1] \left(z - \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} d \right)^2 + \frac{d^2}{4} (a_2 + a_1)^2 (1 - (a_1 + a_2)^2) \right) = 0 \end{aligned}$$

对上面(7)的第二式配方得到:

$$\begin{aligned}
 & (a_2^2 - a_1^2)^2 x^2 + [(a_2 - a_1)^2 - 1](a_2 + a_1)^2 z^2 + [1 - (a_2 - a_1)^2](a_2 + a_1)^2(a_2^2 - a_1^2)dz \\
 & + \frac{d^2}{4}(a_2^2 - a_1^2)^2 [(a_2^2 - a_1^2)^2 - 2(a_1^2 + a_2^2) + 1] = 0 \\
 \Rightarrow & (a_2^2 - a_1^2)^2 x^2 + [(a_2 - a_1)^2 - 1](a_2 + a_1)^2 \left(z^2 - (a_2^2 - a_1^2)dz + \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{4}d^2 \right) \\
 & + \frac{d^2}{4}(a_2 - a_1)^2(a_2 + a_1)^2(1 - (a_2 - a_1)^2) = 0 \\
 \Rightarrow & (a_2 + a_1)^2 \left((a_2 - a_1)^2 x^2 + [(a_2 - a_1)^2 - 1] \left(z - \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}d \right)^2 + \frac{d^2}{4}(a_2 - a_1)^2(1 - (a_2 - a_1)^2) \right) = 0
 \end{aligned}$$

观察以上两个等式, 可以发现等号成立满足方程 (令 $s = a_1 + a_2$ 或 $s = a_2 - a_1$)

$$s^2 x^2 + (s^2 - 1)y^2 = \frac{d^2}{4}s^2(s^2 - 1) \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{(s^2-1)d^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{s^2 d^2}{4}} = 1$$

下面我们来分情况:

- 若 $s = 0$, $y = 0, x \in \mathbb{R}$;
- 若 $s = 1$, $x = 0, y \in \mathbb{R}$;
- 其余情况, $|y| \leq \frac{sd}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\frac{(s^2-1)d^2}{4}}}$, 且

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \text{if } s < 1 \\ |x| < \frac{\sqrt{s^2 - 1}d}{2}, & \text{if } s > 1 \end{cases}$$

题 41 (复旦大学·江辰). 计算如下 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

解. 记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 则根据 $Ax = \lambda x$ 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} + x_n \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ nx_n \end{pmatrix}$$

引入多项式函数 $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k x^k$, 则 $f(x)$ 必满足 $0 < \deg(f)$, 根据上述方程不难得到

$$\frac{\lambda(1-x)}{x^n} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)$$

下面我们将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开为泰勒级数, 即有 $f(x) - f(1) = \sum_{k=1}^n a_k (x-1)^k$, 记 $t = x-1$, 则上述函数方程变为:

$$\begin{aligned} 0 &= (1+t)^n \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{1}{1+t} - 1 \right)^k + \lambda t \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (-t)^k (1+t)^{n-k} + \lambda \sum_{k=1}^n k a_k t^k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (-t)^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} t^i + \lambda \sum_{k=1}^n k a_k t^k \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_k (-1)^k \binom{n-k}{m-k} + \lambda m a_m \right) t^m \end{aligned}$$

于是得到 a_n 的递推关系为:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)a_1 = 0 & m = 1 \\ \sum_{k=1}^{m-1} a_k (-1)^k \binom{n-k}{m-k} + ((-1)^m + \lambda m) a_m = 0 & m > 1 \end{cases}$$

- 若 $\lambda = (-1)^{m+1} \frac{1}{m} (1 \leq m \leq n)$, 则必有 $a_k = 0 (k = 1, 2, \dots, m-1)$, 我们可以取 $a_m = 1$, 这时就有 $0 < m \leq \deg(f)$, 就必有非零向量 x 为 A 的特征向量。
- 否则, 从递推式不难得到 $a_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$, 这导出 $f(x) \equiv f(1)$, 这与 $\deg(f) > 0$ 矛盾!

注. 本题还有一种构造思想, 来源于 清疏数学, 该思想使用组合数构造出可逆矩阵相似于一个上三角矩阵, 具体如下:

约定 $C_j^i = 0$, 如果 $j < i$ 或 $j < 0$. 引入下三角矩阵 P

$$P := \begin{pmatrix} C_0^0 & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

证明

$$(P^{-1}AP)_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i-1}}{i} C_{n-i}^{j-i}, & 1 \leq i \leq j \leq n \\ 0, & 1 \leq j < i \leq n \end{cases}$$

一、计算如下 n 阶矩阵 J_n 的特征值:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解. 记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 J_n 对应于特征值为 λ 的特征向量, 则根据 $J_n x = \lambda x$ 得到

$$x_k = \lambda x_{n+1-k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \implies x_k = \lambda^2 x_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

易知 $\lambda = \pm 1$, 记 I_n 为 n 阶单位阵, 下面针对 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = -1$ 构建相应的特征向量。

- 若 $n = 2k$, 构建如下矩阵 P

$$P = \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ J_k & -J_k \end{pmatrix}$$

- 若 $n = 2k + 1$, 构建如下矩阵 P

$$P = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} & I_k \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ J_k & \mathbf{0} & -J_k \end{pmatrix}$$

则不难得到上述 P 是可逆矩阵, 且满足

$$J_n P = P \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & -I_k \end{pmatrix} \quad \begin{cases} s = k, & \text{if } n = 2k \\ s = k + 1, & \text{if } n = 2k + 1 \end{cases}$$

这就得到 J_{2k} 的特征值为 k 个 1, k 个 -1 ; J_{2k+1} 的特征值为 $k+1$ 个 1, k 个 -1 。

二、对于如下 n 阶矩阵

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明:

- K_n 的 n 个特征值为 $(k = 1, 2, \dots, n)$:

$$\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right)$$

- S_n 的 n 个特征值为 $(k = 1, 2, \dots, n)$:

$$\begin{cases} \lambda_k = 2 \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} \right) & \text{if } n = 2m+1 \\ \lambda_k = 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{2n+1} \right) & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

证明. 分别证明如下:

- 记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 K_n 对应于特征值 λ 的特征向量, 则根据 $K_n x = \lambda x$ 得到

$$x_{k-1} + x_k = \lambda x_{n+2-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \text{ 且 } x_{n+1} = 0 \quad (8)$$

引入函数 $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k x^k$, 首先根据方程(8)不难得到:

$$\begin{cases} (1+x)f(x) = x_1 x + \lambda x^{n+2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \left(1 + \frac{1}{x}\right) f\left(\frac{1}{x}\right) = x_1 \left(\frac{1}{x}\right) + \lambda f(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{n+2} \end{cases} \implies f(x) = x_1 \frac{\lambda x^{n+2} + x^2 + x}{x^2 + (2 - \lambda^2)x + 1}$$

下面只需说明对于任意的 λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), $f(x)$ 为 $\deg(f) \leq n$ 的非零多项式即可。

令 $\lambda = 2 \cos \theta$, 代入 $f(x)$ 得到

$$f(x) = x_1 \frac{2 \cos \theta x^{n+2} + x^2 + x}{x^2 + (2 - 4 \cos^2 \theta)x + 1} = x_1 \frac{2 \cos \theta x^{n+2} + x^2 + x}{x^2 - 2 \cos 2\theta x + 1}$$

对于分母得到 $x^2 - 2 \cos 2\theta x + 1 = 0$ 的两个根为 $t_{1,2} = \cos 2\theta \pm i \sin 2\theta = e^{\pm 2\theta i}$, 不妨设 $t_1 = e^{2\theta i}$, $t_2 = e^{-2\theta i}$, 且 $|t_1| = |t_2| = 1$ 。我们对 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开 (其中 $\deg(g(x)) \leq n$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x_1}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{t_2 - x} - \frac{1}{t_1 - x} \right) (2 \cos \theta x^{n+2} + x^2 + x) \\ &= \frac{x_1}{2 \sin 2\theta i} \sum_{k=0}^{+\infty} (t_2^{-(k+1)} - t_1^{-(k+1)}) x^k (2 \cos \theta x^{n+2} + x^2 + x) \\ &= \frac{x_1}{2 \sin 2\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \sin(2(k+1)\theta) x^k (2 \cos \theta x^{n+2} + x^2 + x) \\ &= g(x) + \frac{x_1}{\sin 2\theta} (\sin(2n\theta) + \sin(2(n+1)\theta)) x^{n+1} + \\ &\quad \frac{x_1}{2 \sin 2\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} [4 \sin((2k+2)\theta) \cos \theta + 2 \sin((2n+2k+2)\theta) + 2 \sin((2n+2k+4)\theta)] x^{n+2+k} \\ &= g(x) + \frac{2x_1}{\sin 2\theta} \sin((2n+1)\theta) \cos \theta x^{n+1} \\ &\quad + \frac{x_1}{2 \sin 2\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} 8 \cos \theta \sin \left(\left(2k + n + \frac{5}{2} \right) \theta \right) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) x^{n+2+k} \end{aligned}$$

若我们取 $x_1 \neq 0$, 对于 $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$, ($k = 1, 2, \dots, n$), 不难看出 $f(x) = g(x)$, 且 $f(x)$ 的一次项的系数为 x_1 , 这就说明 $f(x)$ 是次数不超过 n 的非零多项式。

- 用同样的方法可以对 S_n 的特征值证明, 此时引入的 $f(x)$ 变为:

$$f(x) = x_1 \frac{\lambda x^{n+2} - x^2 + x}{x^2 - (2 - \lambda^2)x + 1}$$

同样设 $\lambda = 2 \cos \theta$, 便可证明题设 θ 满足 $f(x)$ 多项式条件, 此处不再赘述。

结论证毕。 □

题 42 (复旦大学-韩京俊). 设 n 是正整数, $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \notin \mathbb{Q}$ 是 $2n-1$ 个互不相同的无理数。求证: 存在 n 个互不相同的 $y_1, y_2, \dots, y_n \in \{x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}\}$, 使得 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 中任意多个 (至少一个) 数之和均是无理数。

证明. 我们将 $2n-1$ 个互不相同的无理数组成的集合为 $2n-1$ 元无理集记为 X_n 。

对 n 作归纳法来证明本题。当 $n=1$ 时, $X_1 = \{x_1\}$, 则 $kx_1 \notin \mathbb{Q}$ 显然成立。若对 n 已经证明, 现在来证明 $n+1$ 的情形。

考虑 $X_{n+1} = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}\}$, 根据归纳假设, 对于 $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}\}$, 存在 $y_1, y_2, \dots, y_n \in X_n$ 使得 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 中任意多个 (至少一个) 数之和均是无理数, 不妨就设 $y_i = x_i$ 。

若 $n+1$ 的命题不成立, 则任何一个 $x_{n+k} (k=1, 2, \dots, n+1)$ 加入集合后, 得到的 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+k}$ 不满足题设, 则必有不全为零的 $0 \leq a_{ki} \in \mathbb{Q}$, 使得

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = r_k \in \mathbb{Q} \quad k=1, 2, \dots, n+1$$

考虑集合 $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}\}$, 存在不全为零的数 $0 \leq b_i \in \mathbb{Q}$, 使得

$$b_1x_{n+1} + b_2x_{n+2} + \dots + b_{n+1}x_{2n+1} = r \in \mathbb{Q}$$

于是我们就有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} b_k \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + \sum_{k=1}^{n+1} b_k x_{n+k} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k r_k \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k a_{ki} \right)}_{c_i} x_i = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} b_k r_k}_{\in \mathbb{Q}} - r \end{aligned}$$

若 $c_i, (i=1, 2, \dots, n)$ 全为零, 则有 $b_k a_{ki} = 0$ 对所有 $1 \leq k \leq n+1, 1 \leq i \leq n$ 成立, 矛盾! 故我们证明了 $n+1$ 的情况, 命题得证。 □

题 43 (河南师范大学, 华东师范大学-庞学诚). 是否存在正整数列 $\{m_n\}$ 使得以下条件蕴涵级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛?

(i) $\{a_n\}$ 单调;

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+m_n} a_k = 0.$$

解. 不妨设 a_n 单调递减, 否则将 $-a_n$ 记为 a_n 来考虑. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 根据第二个条件得到: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时就有 $|S_{n+m_n} - S_n| < \varepsilon$. 我们分情况来考虑

- a_n 无界, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时有 $a_n < -1$, 于是 $|S_{n+m_n} - S_n| > |a_{n+1}| > 1$, 矛盾!
- a_n 趋于 $a > 0$, 则 $a_n \geq a$, 于是 $|S_{n+m_n} - S_n| > |a_{n+1}| \geq a$, 矛盾!
- a_n 趋于 $a < 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时就有 $a_n < \frac{a}{2}$, 于是 $|S_{n+m_n} - S_n| > |a_{n+1}| \geq \frac{|a|}{2}$, 矛盾!
- a_n 趋于 0, 则 a_n 为非负数列, 考虑 $\{S_n\}$, 根据上述分析不难得到 $S_n > 0$ 且严格单调增. 假如存在 $\{m_n\}$ 满足题设条件, 那么必可以选择递增的 $\{m_n\}$ 满足条件. 下面对任意递增的 $\{m_n\}$, 我们构造 $\{S_n\}$, 使得 $\{S_n\}$ 满足上述条件, 但无界.

取 $b_1 = 1$, 定义 $b_{n+1} = b_n + m_{b_n}$, 构造 $\{S_n\}$ 使得 $S_{b_{n+1}} - S_{b_n} = \frac{1}{n}$. 这是可以做到的, 因为 $\{m_n\}$ 是递增的, 即 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 是递增的, 考虑到 $b_n + 1 \sim b_{n+1}$ 有 m_{b_n} 项. 对 $0 < i < b_{n+1} - b_n$, 取 $S_{b_n+i} = S_{b_n} + \frac{i}{nm_{b_n}}$, 则有

$$S_{b_{k+1}} - S_{b_1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

易知当 $k \rightarrow +\infty$ 时就有 $S_{b_{k+1}} \rightarrow +\infty$, 所以构造的 $\{S_n\}$ 是无界的, 故发散.

另一方面, 对于任意的 n , 由于 $\{b_k\}$ 是单调增的, 所以存在 k 使得 $b_k \leq n < b_{k+1}$, 设 $n = b_k + j$ ($0 \leq j < b_{k+1} - b_k$), 则 $S_n = S_{b_k+j} = S_{b_k} + \frac{j}{km_{b_k}}$. 考虑到 $b_k \leq n < b_{k+1}$, 则必有 $b_{k+1} = b_k + m_{b_k} \leq n + m_n < b_{k+1} + m_{b_{k+1}} = b_{k+2}$, 于是得到

$$S_{n+m_n} - S_n < S_{b_{k+2}} - S_{b_k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

这里根据 $b_k \leq n < b_{k+1}$ 可知对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 k 使得 $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, 当 n 足够大时就可以满足 $S_{n+m_n} - S_n < \varepsilon$, 故有 $S_{n+m_n} - S_n \rightarrow 0$. 但此时 S_n 是发散的.

综合上述情况可得, 满足题设的 $\{m_n\}$ 是不存在的.

题 44 (华东师范大学-李文侠). 设 $A \subseteq \mathbb{Z}_+$, 定义 $S_n \equiv S_n(A) := \#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})$, 其中 $\#(E)$ 表示集合 E 中元素的个数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} = \alpha < 1.$$

证明: $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ 收敛.

进一步, 是否存在 A 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} = 1$ 且 $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ 收敛?

证明. 首先引入数列

$$a_k = \frac{1}{k} \quad b_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k \in A \\ 0, & \text{if } k \notin A \end{cases}$$

根据题设知道 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, 且有 $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$.

- 若 $\alpha < 1$, 选取 $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2}$, 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时就有 $S_n < n^{\alpha+\varepsilon} = n^{\frac{1+\alpha}{2}}$.

取 $n > N_0$, 记 $s = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ 并考虑

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0} a_k b_k}_{\text{记为 } M} + \sum_{k=N_0+1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= M + a_n S_n + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} S_k (a_k - a_{k+1}) - a_{N_0+1} S_{N_0} \\ &\leq M + a_n n^s + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} \frac{k^s}{k(k+1)} \\ &\leq M + n^{s-1} + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} \frac{1}{k^{2-s}} < +\infty \end{aligned}$$

上式令 $n \rightarrow +\infty$, 便得到 $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k < +\infty$, 证毕。

- 若 $\alpha = 1$, 我们来构造 A , 令 $S_n = [n(\ln n)^{-2}] (n > 2)$, 这里的 $[x]$ 为高斯函数, 意为不超过 x 的最大整数。则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) \\ &= a_n S_n + \sum_{k=3}^{n-1} S_k (a_k - a_{k+1}) + S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) \\ &= \frac{[n(\ln n)^{-2}]}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{[k(\ln k)^{-2}]}{k(k+1)} + S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) \\ &\leq \frac{1}{(\ln n)^2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{(\ln k)^2(k+1)} + S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) \\ &< \frac{1}{\ln n} + S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) + \int_2^n \frac{1}{(\ln x)^2 x} dx \\ &= \frac{t=\ln x}{\ln n} \frac{1}{\ln n} + S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) + \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{1}{t^2} dt \\ &= S_2(a_2 - a_3) + S_1(a_1 - a_2) + \frac{1}{\ln 2} < +\infty \end{aligned}$$

至此, 我们根据 S_n 的构造就给出了满足条件的 A 。

□

题 45 (复旦大学-严金海). 对任意有界正数数列 $\{a_n\}$, 定义映射

$$F(\{a_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}$$

并记集合

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = F(\{a_n\}), a_n \in \{2, 6\}, n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

证明 A 为 \mathbb{R} 中的疏朗闭集。

证明. 首先引入

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} \\ x_n &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \quad (n \text{ 次根号}) \\ y_n &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}} \quad (n \text{ 次根号}) \end{aligned}$$

不难得到

$$b_n < \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}}} = b_{n+1}$$

这说明 b_n 单调增, 且有

$$\sqrt{2} \leq x_n (\rightarrow 2) \leq b_n \leq y_n (\rightarrow 3) < 3$$

这说明 b_n 有上界, 故对任意满足题设的 $\{a_n\}$, $F(\{a_n\})$ 必存在。

现在设有两个数列 $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 是第一个 $a_k \neq a'_k$ 的下标, 不妨设 $a_k = 6$, $a'_k = 2$, 则有

$$F(\{a_n\}) \geq \underbrace{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_k + 2}}}}}_{s_{\{a_n\}, k}} > \underbrace{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a'_k + 3}}}}}_{S_{\{a'_n\}, k}} \geq F(\{a'_n\})$$

其中 $s_{\{a_n\}, k}$, 表示对 $\{a_n\}$ 只截取到下标 k , 后面项全设为 2, $S_{\{a'_n\}, k}$ 表示对 $\{a'_n\}$ 只截取到下标 k , 后面项全设为 6。实际上, 根据 b_n 的上下界不难得到 $F(\{a_n\}) - F(\{a'_n\}) \in \left[\frac{3}{2^k 3^k}, \frac{5}{2^k 2^{\frac{k}{2}}} \right]$ 。

这说明 $F(\{a_n\})$, $F(\{a'_n\})$ 的大小取决于第一个 $a_k \neq a'_k$, 且 $A \cap (S_{\{a'_n\}, k}, s_{\{a_n\}, k}) = \emptyset$ 。(若不然, 存在 $s \in (S_{\{a'_n\}, k}, s_{\{a_n\}, k})$, 且 $s = F(\{a''_n\})$ 。若前 $k-1$ 个指标有 $a_n \neq a''_n$, 根据上述推导有 $s > s_{\{a_n\}, k}$ 或 $s < S_{\{a'_n\}, k}$, 矛盾; 若 $a''_n = a_k$, 则 $s \geq s_{\{a_n\}, k}$, 矛盾; 若 $a''_n = a'_k$, 则 $s \leq S_{\{a'_n\}, k}$, 矛盾!)

引入如下 $A \rightarrow [0, 1]$ 的映射, 对 A 中的元素 x 定义 (非单射, 如 $0.5 = \frac{1}{2} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2^n} \quad \text{其中 } x = F(\{a_n\}), c_n = \begin{cases} 1 & \text{若 } a_n = 6 \\ 0 & \text{若 } a_n = 2 \end{cases}$$

下面说明 f 是连续的, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到 N 使得 $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$, 取 $\delta > 0$ 待定, 则当 $x, x' \in A$ 且 $0 < x - x' < \delta$ 时, 存在 $\{a_n\}, \{a'_n\}$ 使得

$$\delta > x - x' = F(\{a_n\}) - F(\{a'_n\}) \geq \frac{3}{2^k 3^k}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ 是第一个 $a_k \neq a'_k$ 的下标。取 $\delta = \frac{3}{6^{N-1}}$, 得到 $k \geq N$, 进而有

$$0 \leq f(x) - f(x') \leq 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

故连续性得证。

现在我们对区间 $I = [2, 3]$ 及 $J = [0, 1]$ 作以下操作:

- (1) 对 I 挖去区间 $I_{11} = (\sqrt{2+3}, \sqrt{6+2})$ 后仍记为 I ; 对 J 挖去点 $\frac{1}{2}$ 后仍记为 J ;
- (2) 对 I 挖去区间 $I_{21} = (\sqrt{2+\sqrt{2+3}}, \sqrt{2+\sqrt{6+2}})$, $I_{22}(\sqrt{6+\sqrt{2+3}}, \sqrt{6+\sqrt{6+2}})$ 后仍记为 I ;
对 J 挖去点 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ 后仍记为 J ;
- (3) 第 m 次操作是对 I 挖去 m 个互不相交的开区间 $I_{mp}(p = 1, 2, \dots, m)$ 后仍记为 I ; 对 J 挖去点 $\frac{2p-1}{2^m}(p = 1, 2, \dots, m)$ 后仍记为 J ; 一直进行下去.....

记 $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{p=1}^m I_{mp}$ 是可数个互不相交开区间的并, 不难证明 E 为开集, 故得到 $A = [2, 3] \setminus E$ 为闭集。

另一方面, 假设 A 不是疏朗集, 由于 A 已经为闭集, 则 A 必包含一个开区间 I_0 , 由于 f 在 A 上是连续函数, 则 $f(I_0)$ 也为 $[0, 1]$ 中的一个开区间, 考虑到 m 次操作后, J 中区间的最大长度为 $\frac{1}{2^m}$ 。设 $f(I_0)$ 长度为 δ , 则 $m > -\frac{\ln \delta}{\ln 2}$ 时, 就有 $\frac{1}{2^m} < \delta$, 矛盾! 故 A 为疏朗闭集, 证毕。 \square

题 46 (复旦大学-江辰). 设 $A_k(1 \leq k \leq m)$ 是 n 阶实对称半正定矩阵。证明:

$$\det \left(I_n + \sum_{k=1}^m A_k \right) \leq \prod_{k=1}^m \det (I_n + A_k).$$

引理

引理 4. 对于每个特征值 $\lambda_i \leq 1$ 的 n 阶正定矩阵 K , 以及半正定矩阵 A , 成立

$$\det (I_n + KA) \leq \det (I_n + A) \quad (9)$$

证明. 先考虑正定矩阵 A , 则存在正交矩阵 Q 与可逆矩阵 P 使得:

$$Q^T A Q = P^T P \quad Q^T K Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

在(9)左乘 Q^T ，右乘 Q 得到

$$\det(I_n + \Lambda P^T P) \leq \det(I_n + P^T P)$$

再对上式左乘 P ，右乘 P^{-1} ，则我们只需证明：

$$\det(I_n + P\Lambda P^T) \leq \det(I_n + PP^T) \quad (10)$$

记 $M_1 = I_n + P\Lambda P^T$ ， $M_2 = P(I_n - \Lambda)P^T$ 分别是正定、半正定矩阵，则存在可逆矩阵 P_1 ，使得 $P_1 M_1 P_1^T = I_n$ ，此时 $P_1 M_2 P_1^T$ 仍为半正定矩阵，设其特征值为 $\mu_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，且有

$$1 \leq \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i) \implies \det(P_1 M_1 P_1^T) \leq \det(P_1 M_1 P_1^T + P_1 M_2 P_1^T) \implies \det(M_1) \leq \det(M_1 + M_2)$$

故有(10)得证。对于 A 是半正定的情况，我们考虑 $A + \varepsilon I_n$ ，之后令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即可。 \square

证明. 我们对 m 作归纳法。

- 对于 $m = 1$ ，很显然此时左右两侧相等，命题成立。
- 若 $m \geq 1$ ，已经证明了命题。记 $K = \left(I_n + \sum_{k=1}^m A_k\right)^{-1}$ ，则 K 满足引理 4 条件。

考虑 $m + 1$ ：

$$\begin{aligned} \det\left(I_n + \sum_{k=1}^m A_k + A_{m+1}\right) &= \det\left(I_n + \sum_{k=1}^m A_k\right) \det(I_n + K A_{m+1}) \\ &\leq \prod_{k=1}^m \det(I_n + A_k) \det(I_n + A_{m+1}) \\ &= \prod_{k=1}^{m+1} \det(I_n + A_k) \end{aligned}$$

\square

题 47 (复旦大学-严金海). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数且 $\sin f(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致连续。证明 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上也一致连续。

证明. 若不然，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，以及 \mathbb{R} 上的两个数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ ，满足

$$\begin{cases} |a_n - b_n| < \frac{1}{n} \\ |f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon_0 \end{cases}$$

考虑有界数列 $\{\sin(f(a_n))\}$ ，则必存在收敛子列仍记为 $\{\sin(f(a_n))\}$ 使得 $\sin(f(a_n)) \rightarrow a \in [-1, 1]$ 。再考虑有界数列 $\{\sin(f(b_n))\}$ ，则必存在收敛子列仍记为 $\{\sin(f(b_n))\}$ 使得 $\sin(f(b_n)) \rightarrow b \in [-1, 1]$ 。于

是根据 $\sin f(x)$ 的一致连续得到

$$\begin{cases} |a_n - b_n| < \frac{1}{n} \\ |\sin(f(a_n)) - \sin(f(b_n))| \rightarrow |a - b| \end{cases} \implies a = b$$

不妨设 $a_n \geq b_n$, $f(a_n) = \pi a_{n1} + a_{n2}$, $f(b_n) = \pi b_{n1} + b_{n2}$, 其中 $a_{n1} \geq b_{n1}$ 均为整数, $a_{n2}, b_{n2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。则得到

$$\begin{aligned} \sin(\pi a_{n1} + a_{n2}) &\rightarrow a \\ \sin(\pi b_{n1} + b_{n2}) &\rightarrow a \\ |\pi(a_{n1} - b_{n1}) + a_{n2} - b_{n2}| &> \varepsilon_0 \end{aligned}$$

- 若 $a_{n1} - b_{n1} = 0$ 有无穷多项, 则此列 a_{n1} 必有无穷多个偶数 (或奇数), 不妨设为偶数, 则必有收敛的子列不妨仍记为 $\{a_{n2}\}, \{b_{n2}\}$, 使得

$$a_{n2} \rightarrow a_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad b_{n2} \rightarrow b_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(a_2) = \sin(b_2) = a$$

根据 $|a_{n2} - b_{n2}| > \varepsilon_0$, 知道 $|a_2 - b_2| \geq \varepsilon_0$, 这与 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调递增矛盾!

- 若 $a_{n1} - b_{n1} > 1$ 有无穷多项, 则 $|f(a_n) - f(b_n)| > \pi$, 于是我们可以取两个值 $w, v \in (b_n, a_n)$, 使得 $|\sin(f(w)) - \sin(f(v))| > \frac{1}{2}$, 这与 $\sin f(x)$ 一致连续矛盾!
- 若 $a_{n1} - b_{n1} = 1$ 有无穷多项, 则 $f(a_n) - f(b_n) = \pi + a_{n2} - b_{n2}$, 知存在子列仍记为 a_{n2}, b_{n2} , 使得 $a_{n2} \rightarrow a_2, b_{n2} \rightarrow b_2$, 且 $a_2 = -b_2$,

- 若 $a_2 = -\frac{\pi}{2} = -b_2$, 则当 n 足够大时不成立 $|\pi + a_{n2} - b_{n2}| > \varepsilon_0$ 。
- 若 $a_2 > -\frac{\pi}{2}$, 此时存在 $c > 0$ 使得 $f(a_n) - f(b_n) > c$, 于是有

$$|\sin(f(a_n)) - \sin(f(b_n))| > c|\cos \xi_n| > c|\cos a_2|$$

这同样与 $\sin f(x)$ 一致连续矛盾!

结合上述所有情况, 证毕。 □

题 48 (复旦大学-江辰). 设 A 和 B 是 n 阶实方阵, 满足如下条件:

- (a) A 是可逆对称矩阵, 有且只有一个正特征值;
- (b) $B - I_n$ 是幂零矩阵;
- (c) $B^T AB = A$ 。

求 B 的 Jordan 标准型。

解. 我们证明, $B - I_n$ 的若当标准型是零矩阵 或者 仅有一个 3 阶非平凡若当块 $J_3(0)$ 。

根据 (b) 可知 $B = I_n + C$, 这里 C 是幂零阵, 根据 (a) 可知存在可逆矩阵 P 使得

$$A = P^T S P \quad \text{其中 } S = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{n-1} \end{pmatrix}$$

则 (c) 变为

$$(I_n + (PCP^{-1})^T)S(I_n + \underbrace{PCP^{-1}}_D) = S$$

对 n 维向量 x, y , 引入双线性函数 $f(x, y) = x^T S y$, 则根据上式得到对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 成立

$$f(Dx, y) + f(x, Dy) + f(Dx, Dy) = 0 \iff f(Dx, y) = -f(x, D(I_n + D)^{-1}y) \quad (11)$$

下面我们分三步来证明:

- 证明: D 最多只有一个非平凡的若当块。

假设 D 有两个非平凡若当块, 则存在两个向量组 $\{\alpha_i\}(1 \leq i \leq p)$, $\{\beta_j\}(1 \leq j \leq q)$ 使得

$$\begin{cases} D\alpha_p = \mathbf{0} \\ D\alpha_i = \alpha_{i+1} \quad (1 \leq i \leq p-1) \end{cases} \quad \begin{cases} D\beta_q = \mathbf{0} \\ D\beta_j = \beta_{j+1} \quad (1 \leq j \leq q-1) \end{cases}$$

其中 $p, q > 1$ 。分别取 $y = \alpha_p$, $y = \beta_q$, 根据(11)得到对任意的 x 有

$$\begin{cases} f(Dx, \alpha_p) = 0 \\ f(Dx, \beta_q) = 0 \end{cases} \implies f(\alpha_p, \alpha_p) = f(\beta_q, \beta_q) = f(\alpha_p, \beta_q) = 0$$

下面来导出矛盾, 设 $\alpha_p = (a \ \alpha)$, $\beta_q = (b \ \beta)$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n-1}$, 则有

$$a^2 = \|\alpha\|^2 \quad b^2 = \|\beta\|^2 \quad ab = \alpha^T \beta$$

由柯西-施瓦茨不等式得到

$$a^2 b^2 = |\alpha^T \beta|^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 = a^2 b^2$$

这说明不等式取等号, 则存在 $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ 使得 $\alpha = \lambda\beta$, 于是有 $a^2 = \lambda^2 b^2$, $ab = \lambda b^2$ 。

- 若 $a = 0$, 则 $b = 0$, 此时 $\alpha = \beta = \mathbf{0}$, 从而 α_p, β_q 均为零向量, 矛盾!
- 若 $a \neq 0$, 则 $b \neq 0$ 且有 $a = \lambda b$, 这说明 $\alpha_p = \lambda\beta_q$, 故有 α_p, β_q 是线性相关的, 仍然矛盾!

这说明 D 的若当标准型最多只能有一个非平凡若当块。

- 证明: D 的非平凡若当块不可能是偶数阶。

使用反证法。对于 $k > 1$, 引入函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i x^i$ 。注意到 $f(x)$ 中最低是一次幂, 故 $f^r(x)$ 的最低是 r 次幂, 对应的系数为 $(-1)^r$ 。由(11)得到

$$f(Dx, y) = f(x, f(D)y) \implies f(D^r x, y) = f(x, f^r(D)y)$$

记 $1 \leq k = 2m \leq n$ 为满足 $D^k = O$ 的最小正整数。则对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$f(D^{2m-1}x, y) = f(x, f^{2m-1}(D)y) = -f(x, D^{2m-1}y) \implies (D^{2m-1})^T S = -SD^{2m-1}$$

且 $(D^{2m-1})^2 = D^{4m-2} = D^{2m}D^{2m-2} = O$, 由引理 5 知, D^{2m-1} 必为零矩阵, 这与 $k = 2m$ 是满足 $D^k = O$ 的最小正整数矛盾!

- 构造相似于 3 阶若当块 $J_3(0)$ 的 D 满足题设条件 $(I_3 + D)^T S (I_3 + D) = S$ 。证明对于相似于 $2m+1 (m > 1)$ 阶若当块 $J_{2m+1}(0)$ 的 D 不可能存在。

根据引理 6, 只需构造相似于 $J_{2m+1}(0)$ 的 N 满足 $N^T S + SN = O$ 即可。

– $m = 1$, 考虑 3 阶矩阵情况。令 N 为

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

直接验证知道 $N^2 \neq O$, $N^3 = O$, 满足题设条件。对维数高于 3 的矩阵 ($m > 1$), 直接对 N 零扩展即可, 即引入

$$N_{2m+1} = \begin{pmatrix} N_3 & O \\ O & O_{2m-2} \end{pmatrix}$$

直接可验证 N_{2m+1} 满足题设条件。

– $m > 1$, 我们证明不存在这样的 N 。若不然, 存在 P 使得 $N = PJ_{2m+1}(0)P^{-1}$, 这得到

$$J_{2m+1}^T(0) \underbrace{P^T S P}_U + P^T S P J_{2m+1}(0) = O$$

直接计算并根据 U 的对称性, 不难得到 U 有如下形式:

$$\begin{pmatrix} s_0 & 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 & s_m \\ 0 & -s_1 & 0 & \ddots & 0 & -s_m & 0 \\ s_1 & 0 & \ddots & \ddots & s_m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & s_m & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -s_m & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $s_m \neq 0$ 保证 U 的可逆, 为了方便不妨直接令 $s_m = 1$ 。下面说明当 $m > 1$ 时, U 的正惯性指数不可能是 1 进而导出矛盾。

根据 U 的奇偶交错, 我们可以对奇偶项解耦为如下两个二次型 U_1, U_2 :

$$U_1 = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_1 & s_2 & \ddots & s_{m-1} & s_m & 0 \\ s_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & s_{m-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{m-1} & s_m & \ddots & \cdots & \ddots & 0 \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_{m-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

记二次型 A 的正负惯性指数为 p_A, q_A , 考虑 m 维向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 并令 $x_1 = 1, x_i = 0 (i = 2, \dots, m-1)$, 直接计算 $\mathbf{x}^T U_2 \mathbf{x}$ 得到

$$\mathbf{x}^T U_2 \mathbf{x} = s_1 x_1^2 + 2x_1 x_m = s_1 + 2x_m$$

显然 $\mathbf{x}^T U_2 \mathbf{x}$ 可以根据 x_m 的取值可正可负, 这说明 $p_{U_2} \geq 1, q_{U_2} \geq 1$, 类似考虑 U_1 得到 $p_{U_1} \geq 1, q_{U_1} \geq 1$, 从而得到 $p_U = p_{U_1} + q_{U_2} \geq 2 > 1$, 与 $p_U = 1$ 矛盾!

综合上述讨论, 我们得到 B 的若当标准型为 I_n 或者 $J_3(1) \oplus I_{n-3}$ 。

引理

引理 5. 对于 n 阶实矩阵 D , 满足 $D^2 = O$, 若

$$D^T S = -SD \quad \text{其中 } S = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_{n-1} \end{pmatrix}$$

则 D 是零矩阵。

证明. 对 D 进行如下分块

$$D = \begin{pmatrix} d & \alpha^T \\ \beta & H \end{pmatrix}$$

根据 $D^T S = -SD$ 得到

$$\begin{pmatrix} 2d & \alpha^T - \beta^T \\ \alpha - \beta & -H - H^T \end{pmatrix} = O \implies d = 0, \alpha = \beta, H = -H^T$$

再根据 $D^2 = O$ 得到

$$\begin{pmatrix} d^2 + \alpha^T \beta & d\alpha^T + \alpha^T H \\ d\beta + H\beta & \beta\alpha^T + H^2 \end{pmatrix} = O \implies \alpha = \beta = \mathbf{0}, H^2 = O$$

结合 $H = -H^T$ 知 $HH^T = O$, 这说明 $\text{tr}(HH^T) = 0$, 即有 $H = O$, 从而 D 为零矩阵。 \square

引理 6. 对于 n 阶矩阵 S, N , 其中 N 为幂零阵, 设 $N^{k+1} = O$. 引入如下定义

$$e^N := \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} N^i \quad \ln(I_n + N) := \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i$$

- 若 N 满足 $N^T S + S N = O$, 则有 $(e^N)^T S e^N = S$ 。(N 无需幂零)
- 若 N 满足 $(I_n + N)^T S (I_n + N) = S$, 则有 $\ln^T (I_n + N) S + S \ln (I_n + N) = O$ 。

证明. 分别证明如下:

- 考虑矩阵值函数 $F(t) = (e^{tN})^T S e^{tN}$, 对其求导得到

$$\frac{dF(t)}{dt} = (e^{tN})^T S e^{tN} + (e^{tN})^T S e^{tN} = (e^{tN})^T (N^T S + S N) e^{tN} = O$$

这说明 $F(t)$ 为常矩阵, 则 $(e^N)^T S e^N = F(1) = F(0) = S$ 。

- 首先由 $(I_n + N)^T S (I_n + N) = S$ 得到 $N^T S + S N + N^T S N = O$, 即为 $N^T S = S f(N)$, 其中 $f(N)$ 如下定义:

$$f(N) = \sum_{i=1}^k (-1)^i N^i$$

对于 $s \geq r$, 根据恒等式

$$\sum_{p=r}^s \binom{p-1}{r-1} = \binom{s}{r}$$

不难归纳得到

$$f^r(N) = \sum_{s=r}^{+\infty} \binom{s-1}{r-1} (-1)^s N^s \quad (12)$$

根据(12)并注意到 $(N^T)^i S = S f^i(N)$, 直接计算得到

$$\begin{aligned} \ln^T (I_n + N) S + S \ln (I_n + N) &= \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} (N^T)^i S + S \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \\ &= S \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} f^i(N) + S \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \\ &= S \left[\sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} \sum_{s=i}^k \binom{s-1}{i-1} (-1)^s N^s + \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \right] \\ &= S \left[\sum_{s=1}^k (-1)^s N^s \sum_{i=1}^s \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{s-1}{i-1} + \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \right] \\ &= S \left[\sum_{s=1}^k \frac{(-1)^{s+1}}{s} N^s \sum_{i=1}^s (-1)^i \binom{s}{i} + \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \right] \\ &= S \left[\sum_{s=1}^k \frac{(-1)^s}{s} N^s + \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i \right] \\ &= O \end{aligned}$$

证毕。 □

注. $n = 3$ 时, 有一个类似于 $J_3(0)$ 的矩阵例子:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

下面再给出一个幂零矩阵的判定条件

定理 1 (中山大学-许锐航). 实数域上矩阵 A 是幂零矩阵的充要条件是: 存在实矩阵 B 使得 $A = AB - BA$ 。

证明. 此引理对复数域也成立。

- 充分性: 归纳证明 $kA^k = A^k B - BA^k$ 。首先 $k = 1$ 显然成立, 若对 k 已证明, 下面考虑 $k + 1$ 。根据题设, 有

$$kA^{k+1} = A(A^k B - BA^k) = A^{k+1} B - (A + BA)A^k = A^{k+1} B - BA^{k+1} - A^{k+1}$$

即对 $k + 1$ 也成立, 这得到对任意的 k , 有 $\text{tr}(A^k) = 0$, 根据牛顿公式知道 A 的所有特征值均为 0, 故 A 为幂零矩阵。

- 必要性: 根据若当标准型理论知道存在可逆的实矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$ 为若当标准型。先对 m 阶若当块 $J = J_m(0)$ 证明结论成立。我们只需找到 B 使得 $J = JB - BJ$, 由于 $J = e_{i+1} \otimes e_i (1 \leq i \leq m - 1)$, 设 $B = b_{p,q} e_p \otimes e_q$, 则有

$$e_{i+1} \otimes e_i = b_{i,q} e_{i+1} \otimes e_q - b_{p,i+1} e_p \otimes e_i \implies b_{i,i} - b_{i+1,i+1} = 1$$

取 B 为如下形式的矩阵即可:

$$Q = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对于一般情况, 考虑

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_q \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} Q_1 & O & \cdots & O \\ O & Q_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & Q_q \end{pmatrix}$$

即证明了必要性。

证毕。 □

题 49 (南京大学-梅加强). 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为有界数列。

(1) 若

$$a_n = \frac{1}{3}(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}), \quad \forall n \geq 0,$$

证明: $a_n \equiv a_0$ ($\forall n \geq 0$)。

(2) 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_n - \frac{1}{3}(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) \right)$$

存在, 是否有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

存在?

证明. 令 $a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} = 0$, 引入数列 b_n , 使得

$$b_{n+3} = (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - 3a_n \quad (n \geq -3)$$

因为 a_n 有界, 引入母函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, ($|x| < 1$), 则有:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ x f(x) &= \quad + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ x^2 f(x) &= \quad \quad a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots \end{aligned} \quad (13)$$

记 $p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, 将(13)三个等式相加便得到:

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2)f(x) &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (3a_0 + b_3)x^3 + (3a_1 + b_4)x^4 + \cdots \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + (3a_0 + b_3)x^3 + (3a_1 + b_4)x^4 + \cdots \\ &= 3x^3 f(x) + p(x) \end{aligned}$$

即为

$$f(x) = \frac{p(x)}{1 + x + x^2 - 3x^3} \quad (14)$$

记 $A_{n+2} = 3a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$, 先证明 $b_n \rightarrow 0$, 这是因为

$$\begin{aligned} b_{n+3} + 3a_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \implies A_{n+3} = A_{n+2} + b_{n+3} \\ &= A_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} \\ &= \cdots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{n+3} b_k \end{aligned}$$

根据 a_n 有界, 必有 A_n 有界, 根据 b_n 是收敛的, 若其极限不为 0, 从而 $\sum_{k=1}^n b_k$ 无界, 故 A_n 也无界, 矛盾! 故 b_n 的极限必为 0。

考虑(14)式, 将 $\frac{p(x)}{3}$ 仍记为 $p(x)$, 则 $f(x)$ 可以写为:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + x^2)(1-x)}$$

设 x_1, x_2 是方程 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + x^2 = 0$ 的两个根, 注意到 $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, 且 x_1, x_2 互为共轭, 则得到 $|x_1| = |x_2| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, 记 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\theta i}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\theta i}$ 则得到:

$$\begin{aligned} (1-x)f(x) &= \frac{p(x)}{(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + x^2)} \\ &= \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x_2 - x} - \frac{1}{x_1 - x} \right) p(x) \\ &= \frac{1}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{x_2} \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^s - \frac{1}{x_1} \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^s \right) \left(\sum_{t=0}^{+\infty} b_t x^t \right) \\ &= c \sum_{s=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^{s+1} \sin((s+1)\theta) x^s \cdot \sum_{t=0}^{+\infty} b_t x^t \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (\sqrt{3})^{n-k+1} \sin((n-k+1)\theta) \cdot b_k \right) x^n \end{aligned} \quad (15)$$

(1) 若每个 $b_n = 0 (n \geq 3)$, $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ 。

故根据(15)式知道, 对于 $n > 2$, $(1-x)f(x)$ 的展开式中 x^n 的系数为:

$$\begin{aligned} &c \left(\sum_{k=0}^2 (\sqrt{3})^{n-k+1} \sin((n-k+1)\theta) \cdot b_k \right) \\ &= c(\sqrt{3})^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin((n-1)\theta)b_2 + (\sin n\theta)b_1 + \sqrt{3} \sin((n+1)\theta)b_0 \right) \\ &= c(\sqrt{3})^n \left(\left(\cos \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} + \cos \theta \sqrt{3}b_0 + b_1 \right) \sin(n\theta) + \left(\sin \theta \sqrt{3}b_0 - \sin \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} \right) \cos(n\theta) \right) \\ &= c(\sqrt{3})^n \sqrt{\left(\cos \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} + \cos \theta \sqrt{3}b_0 + b_1 \right)^2 + \left(\sin \theta \sqrt{3}b_0 - \sin \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} \right)^2} \sin(n\theta + \alpha) \end{aligned}$$

根据 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sin(n\theta + \alpha) = 1$ 及 $\sqrt{3} > 1$, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故必有

$$\begin{cases} \cos \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} + \cos \theta \sqrt{3}b_0 + b_1 = 0 \\ \sin \theta \sqrt{3}b_0 - \sin \theta \frac{b_2}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -b_2 - 3b_0 + 3b_1 = 0 \\ 3b_0 - b_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b_1 = 2b_0 \\ b_2 = 3b_0 \end{cases}$$

这直接推出 $a_k = a_0 (k \geq 0)$, 证毕。

(2) 下面考虑 b_n 的一般情况, 结论是不一定, 我们来给出一个反例如下:

考虑 $a_n = \sin(\ln n)$, 易得 $|a_n| \leq 1$ 是有界的, 下面计算 b_{n+3} :

$$\begin{aligned}
 |b_{n+3}| &= |(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - 3a_n| \\
 &= |\sin(\ln(n+1)) + \sin(\ln(n+2)) + \sin(\ln(n+3)) - 3\sin(\ln(n))| \\
 &= |\sin(\ln(n+1)) - \sin(\ln(n)) + \sin(\ln(n+2)) - \sin(\ln(n)) + \sin(\ln(n+3)) - \sin(\ln(n))| \\
 &\leq 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right) \\
 &\leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} \\
 &\leq \frac{6}{n}
 \end{aligned}$$

故得到 $b_n \rightarrow 0$, 但 $a_n = \sin(\ln n)$ 有界且不收敛。

□

题 50 (浙江大学-王梦, 巴黎综合理工-林徐扬). 设 f 为 $[0, +\infty)$ 上局部可积的非负函数, 证明:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \leq \limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \leq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

并进一步讨论严格不等号成立的可能性。

证明. 我们先来分两种情况证明最左侧的不等式:

- 若 $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = +\infty$, 记 $g(t) = \int_0^t f(s) ds$, 显然有 $g(0) = 0$, 则 $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{g(T)}{T} = +\infty$ 。

对于任意的 $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
 \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &\geq \lambda \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda t} g'(t) dt = \lambda e^{-\lambda t} g(t) \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}} + \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda t} g(t) dt \geq e^{-1} \lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
 \implies \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &\geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} e^{-1} \lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = +\infty \\
 \implies \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &= +\infty
 \end{aligned}$$

- 若 $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = m < +\infty$, 令 $g(t) = \int_0^t f(s) ds - mt$, 则 $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{g(T)}{T} = 0$ 。所以只需要证明如下不等式:

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (f(t) - m) dt = \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g'(t) dt \geq 0$$

我们使用反证法, 若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及 $\{\lambda_k\} \rightarrow 0^+$, 使得 $\lambda_k \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_k t} g'(t) dt < -\varepsilon_0$, 根据 $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{g(T)}{T} = 0$ 知道, 对 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$, 存在 $N_1 > 0$, 使得 $\frac{g(t)}{t} > -\varepsilon_1$ 对任意的 $t > N_1$ 成立。取

$N > N_1$, 考虑

$$\begin{aligned}
\lambda_k \int_0^N e^{-\lambda_k t} g'(t) dt &= \lambda_k e^{-\lambda_k t} g(t) \Big|_0^N + \lambda_k^2 \int_0^N e^{-\lambda_k t} g(t) dt \\
&= \lambda_k N e^{-\lambda_k N} \frac{g(N)}{N} + \underbrace{\lambda_k^2 \int_0^{N_1} e^{-\lambda_k t} g(t) dt}_{B(\lambda_k)} + \lambda_k^2 \int_{N_1}^N e^{-\lambda_k t} g(t) dt \\
&\geq (-\varepsilon_1) \lambda_k N e^{-\lambda_k N} + B(\lambda_k) + (-\varepsilon_1) \lambda_k^2 \int_{N_1}^N e^{-\lambda_k t} t dt \\
&= (-\varepsilon_1) \lambda_k N e^{-\lambda_k N} + B(\lambda_k) + (-\varepsilon_1) \left[(\lambda_k N_1 + 1) e^{-\lambda_k N_1} - (\lambda_k N + 1) e^{-\lambda_k N} \right] \\
&= B(\lambda_k) + (-\varepsilon_1) (\lambda_k N_1 + 1) e^{-\lambda_k N_1} + \varepsilon_1 e^{-\lambda_k N}
\end{aligned}$$

上式令 $N \rightarrow +\infty$ 得到

$$-\varepsilon_0 > \lambda_k \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_k t} g'(t) dt \geq B(\lambda_k) + (-\varepsilon_1) (\lambda_k N_1 + 1) e^{-\lambda_k N_1}$$

再令 $k \rightarrow +\infty$, 得到 $-\varepsilon_0 > -\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾!

对于上极限, 若 $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = +\infty$, 不等式显然成立。否则, $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = M < +\infty$, 记 $g(t) = M - f(t)$, 则要证明的不等式变为

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (M - g(t)) dt &\leq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (M - g(t)) dt \\
\iff \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt &\leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g(t) dt
\end{aligned}$$

这就转化为了上面下极限的不等式结果, 证毕。

对于严格不等式, 考虑如下函数:

$$f(t) = \begin{cases} 2^m & \text{若 } t \in [2^m, 2^m + 1), m = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

即函数在区间 $[2^m, 2^m + 1)$ 上取值为 2^m , 其余部分为零。

- 当 $T = 2^m$ 时:

$$\frac{1}{2^m} \int_0^{2^m} f(t) dt = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 1 - 2^{-m} \rightarrow 1$$

- 当 $T = 2^m + 1$ 时:

$$\frac{1}{2^m + 1} \int_0^{2^m + 1} f(t) dt = \frac{1}{2^m + 1} \sum_{k=0}^m 2^k = 2 \frac{2^m}{2^m + 1} - \frac{1}{2^m + 1} \rightarrow 2$$

所以得到

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 1, \quad \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 2$$

计算:

$$\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^m}^{2^{m+1}} 2^m e^{-\lambda t} dt = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{m=0}^{\infty} 2^m e^{-\lambda 2^m}$$

考虑函数 $g(x) = xe^{-\lambda x}$, 求导得到 $g'(x) = (1 - \lambda x)e^{-\lambda x}$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right)$ 上单调增, $\left(\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$ 上单调减. 所以对于固定的 $\lambda > 0$, 有

$$\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]} 2^m e^{-\lambda 2^m} + (1 - e^{-\lambda}) \sum_{m=\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty} 2^m e^{-\lambda 2^m} = A + B$$

其中

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\lambda}) \int_0^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]} 2^x e^{-\lambda 2^x} dx &\leq A \leq (1 - e^{-\lambda}) \int_1^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]} 2^x e^{-\lambda 2^x} dx + (1 - e^{-\lambda}) 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]} e^{-\lambda 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}} \\ (1 - e^{-\lambda}) \int_{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty} 2^x e^{-\lambda 2^x} dx &\leq B \leq (1 - e^{-\lambda}) \int_{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty} 2^x e^{-\lambda 2^x} dx + (1 - e^{-\lambda}) 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1} e^{-\lambda 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}} \end{aligned}$$

从上式不难得到

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\lambda}) \int_0^{+\infty} 2^x e^{-\lambda 2^x} dx \\ &\stackrel{u=2^x}{=} \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\lambda}) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln 2} e^{-\lambda u} du \\ &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln 2} \frac{e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

故构造的函数满足:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 1 < \frac{1}{\ln 2} = \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

□

题 51 (北京大学-杨家忠). 设 p, q, r 为两两互异的正数, 证明:

$$\frac{p}{(p-q)(p-r)} \ln p + \frac{q}{(q-p)(q-r)} \ln q + \frac{r}{(r-p)(r-q)} \ln r > 0$$

证明. 根据 p, q, r 的循环性, 不妨设 $p > q > r > 0$, 则要证不等式等价于

$$(q-r)p \ln p + (p-r)(-q) \ln q + (p-q)r \ln r > 0$$

进而转化为

$$(q-r)(p \ln p - q \ln q) > (p-q)(q \ln q - r \ln r)$$

引入函数 $f(x) = x \ln x$, 求得 $f'(x) = 1 + \ln x$, 再求得 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ 。根据微分中值定理, 存在 $\xi_1 \in (q, p)$, $\xi_2 \in (r, q)$ 以及 $\eta \in (\xi_2, \xi_1)$, 使得

$$\frac{p \ln p - q \ln q}{p - q} - \frac{q \ln q - r \ln r}{q - r} = f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\eta} > 0$$

证毕。 □

题 52 (苏州工学院-常建明). 是否存在在区间 $[0, 1]$ 上连续的两个函数 f, g , 使得 f 在 0 处右可导, 且有

$$0 < g(x) < x (0 < x < 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(g(x))}{x - g(x)} = A \neq f'_+(0)$$

证明. 不存在, 下面给出详细的说明。若不然, 我们不妨设 $A = 0$, 否则将 $f(x) - Ax$ 仍记为 $f(x)$ 进行论证, 下面我们只需证明 $f'_+(0) = 0$ 即可。

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, 1)$ 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时就有

$$-\varepsilon(x - g(x)) < f(x) - f(g(x)) < \varepsilon(x - g(x))$$

对任意的 $x \in (0, \delta)$, 定义数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = x$, $a_{n+1} = g(a_n)$, 不难得到 a_n 为单调递减数列且有下界 0, 则 a_n 必有极限 $a \geq 0$, 若 $a > 0$, 取极限得到 $a = g(a) < a$ 矛盾, 故必有 $a = 0$ 。且有

$$\begin{aligned} f(a_n) - f(a_{n+1}) &< \varepsilon(a_n - a_{n+1}) \implies f(a_1) - f(a_n) < \varepsilon(a_1 - a_n) \\ f(a_n) - f(a_{n+1}) &> -\varepsilon(a_n - a_{n+1}) \implies f(a_1) - f(a_n) > -\varepsilon(a_1 - a_n) \end{aligned}$$

上面两式令 $n \rightarrow +\infty$, 根据 f 的连续性得到

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon x$$

由 ε 的任意性, 这得到 $f'_+(0) = 0$, 证毕。 □

2 后记

本习题集是杂志《大学数学》的“问题征解”一栏收录的习题。出于对数学的兴趣，我对其中的一部分进行了探索，对于一部分问题，我还加入了额外的思考拓展，以求让每个题目的思路不至于特别突兀。每题的解答未必正确，如有不严谨或错漏之处欢迎与我邮件联系！

饶一鹏 raoyipeng@qq.com

2025 年 9 月 11 日于湖南长沙尖山湖