

基于双尺度分析的脆性断裂应变梯度模型

饶一鹏^{1,2} 向美珍² 崔俊芝¹

¹ 中国科学院计算数学与科学工程计算研究所 (ICMSEC)

² 北京应用物理与计算数学研究所 (IAPCM)

2022 年 9 月 4 日



① 研究背景

② 双尺度渐进展开方法简介

③ 模型推导

④ 数值结果

⑤ 总结与展望

1 研究背景

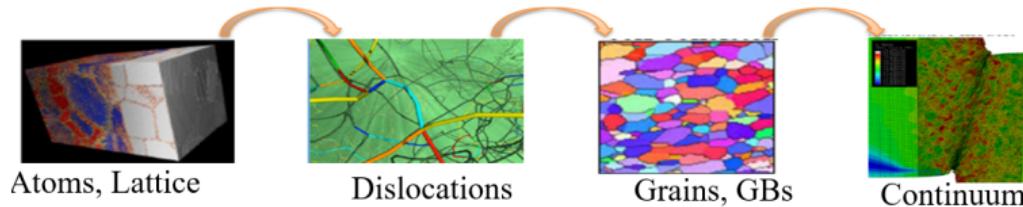
2 双尺度渐进展开方法简介

3 模型推导

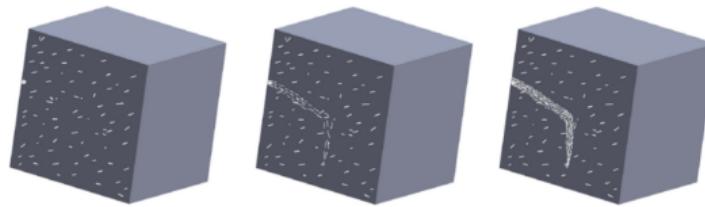
4 数值结果

5 总结与展望

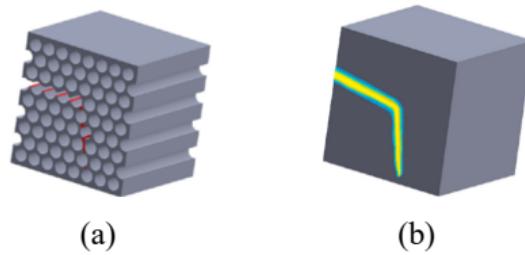
- 材料的断裂行为取决于材料的微结构。微结构对宏观断裂的影响是重要的、具有挑战性的基础科学问题。



- 微裂纹是脆性材料中最典型的微结构。



如何在损伤断裂模拟中充分考虑细观尺度微结构分布形态？



- 直接数值模拟：分析每一个微结构受力断裂情况。**网格剖分复杂，计算量大。**
- 均匀化宏观损伤力学方法模拟：等效为均匀材料，用内部损伤变量 d 来描述材料局部状态。
 - ①: 如何得到依赖于内部微结构变量 d 的本构参数 $\mathbf{C}(d)$?
 - ②: 建立包含微结构形态的断裂准则或损伤演化方程。

本工作针对包含大量微裂纹的脆性材料的宏观断裂行为开展多尺度建模研究，并回答上述两个问题。

1 研究背景

2 双尺度渐进展开方法简介

3 模型推导

4 数值结果

5 总结与展望



- 含微结构分布形态的连续介质力学方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijk}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_h} \right) \right] = f_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \dots, n) \\ \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

- 双尺度渐近展开解(Lions et al., 1960s):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{<\alpha>=l} \mathbf{N}_{\alpha}(\mathbf{y}) D_{\alpha}^l \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{\alpha_1=1}^n \mathbf{N}_{\alpha_1}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}^0(\mathbf{x})}{\partial x_{\alpha_1}} + \varepsilon^2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^n \mathbf{N}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^0(\mathbf{x})}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} + \dots \end{aligned}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ 表示细观坐标 (物质点在参考周期单胞中的位置) ;

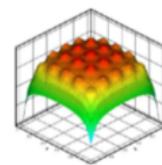
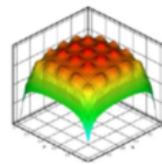
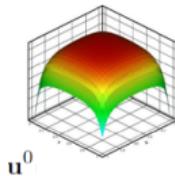
$\mathbf{N}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ 为定义在周期单胞 Y 上 PDE 的解 (又称为单胞函数) ;

\mathbf{u}^0 是宏观均匀化问题的解。

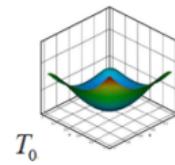
- 基于双尺度渐近展开理论的双尺度有限元方法（崔俊芝等）

宏观上求解均匀化方程得到 \mathbf{u}^0 , 细观上求解单胞方程并进行一阶或二阶修正¹。

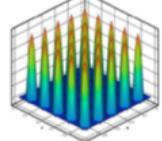
位移场:



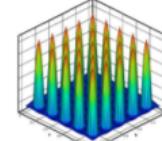
温度场:



均匀化解



Two-scale FE (崔等)



Single-scale FE

二阶多尺度修正解的引入使得应力误差控制在 $O(\varepsilon)$ 量级, 计算精度接近细尺度直接有限元计算, 计算量与均匀材料的宏观有限元计算相当。

¹杨自豪, 西北工业大学博士论文, 2014.

1 研究背景

2 双尺度渐进展开方法简介

3 模型推导

4 数值结果

5 总结与展望

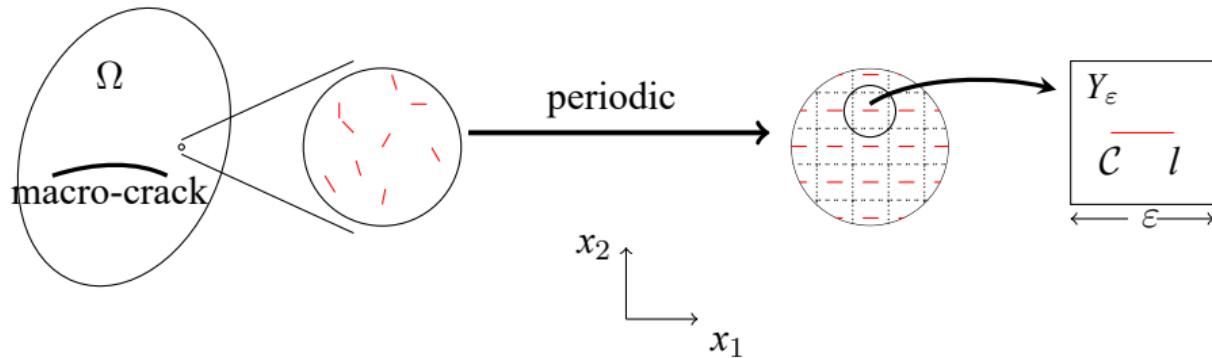


图 1: locally periodic microstructure.

简化: 周期分布的长度为 l 的微裂纹在 I 型加载下失稳扩展。

思想: 宏观物质点用微观无穷大周期性代表体积单元表征。

假设: 裂纹均为双向等速率扩展, 且扩展方向与裂纹原始方向保持一致。

两个参数表征微结构分布形态: 单胞的边长 ε 、归一化裂纹长度 $d = l/\varepsilon$ 。

微裂纹的失稳满足 **Griffith** 准则: $G = G_c(v)$ (G 为能量释放率)。

模型推导

周期性代表体积单元上的弹性力学方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \mathcal{C}. \end{cases}$$

其中 $\vec{\mathbf{n}}$ 为裂纹面的单位外法向。 a_{ijkl} 为对称的弹性张量，它由下式确定：(λ, μ 为拉梅常数)

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

如果在上述方程中忽略惯性效应 (可令 $\rho = 0$)，则退化为静态方程。

下文中，我们用 $\langle \cdot \rangle$ 来表示单胞 Y_ε 上的积分平均：

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y_\varepsilon|} \int_{Y_\varepsilon} \cdot \, d\mathbf{x},$$

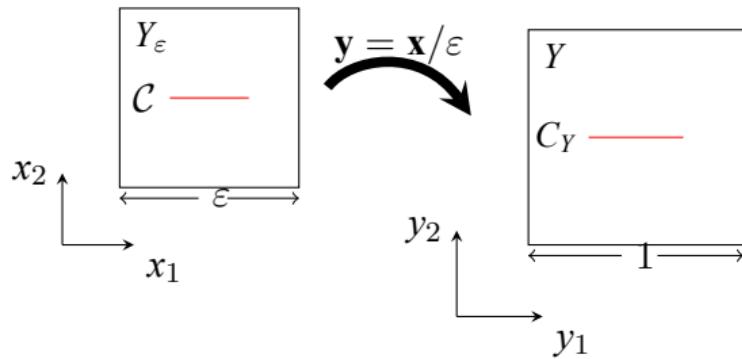


图 2: Scale transformation.

取 $Y_s = Y \setminus C_Y$ 并引入如下函数空间:

$$\mathcal{D}(Y_s) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H_{per}^1(Y_s)]^2, \mathbf{u} \text{ is } Y\text{-periodic}, \int_{Y_s} \mathbf{u} \, d\mathbf{y} = 0 \right\}.$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ 为微尺度变量。对于位移 $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, 考虑如下双尺度渐进展开²:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots, \\ \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}. \end{cases}$$

²Cioranescu, D., Donato, P., 1999. An introduction to homogenization. Oxford University Press.

将双尺度展开式代入方程，通过比较 ε 不同次幂便得到如下方程：

$$(1) \varepsilon^{-2} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0, & \text{in } Y_s, \\ a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}) n_j = 0, & \text{on } C_Y^\pm; \end{cases}$$

$$(2) \varepsilon^{-1} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}))) = 0, & \text{in } Y_s, \\ a_{ijkl} (e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) n_j = 0, & \text{on } C_Y^\pm; \end{cases}$$

$$(3) \varepsilon^0 \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) + \frac{\partial}{\partial y_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}, & \text{in } Y_s, \\ a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})) n_j = 0, & \text{on } C_Y^\pm. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$$

考虑 $\mathbf{u}^{(1)}$ 如下分离变量形式解：

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) e_{x^{pq}}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))$$

其中， $\mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}(Y_s)$ 。

$$\xrightarrow{(2)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq}) = 0, & \text{in } Y_s, \\ (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq}) n_j = 0, & \text{on } C_Y^\pm. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}, \\ C_{ijkl} = \int_{Y_s} a_{ijkl} + a_{ijmn} e_{ymn}(\mathbf{N}^{kl}) \, d\mathbf{y}. \end{cases}$$

C_{ijkl} 的定义式揭示了微结构变量 d 对均匀化本构参数的影响。

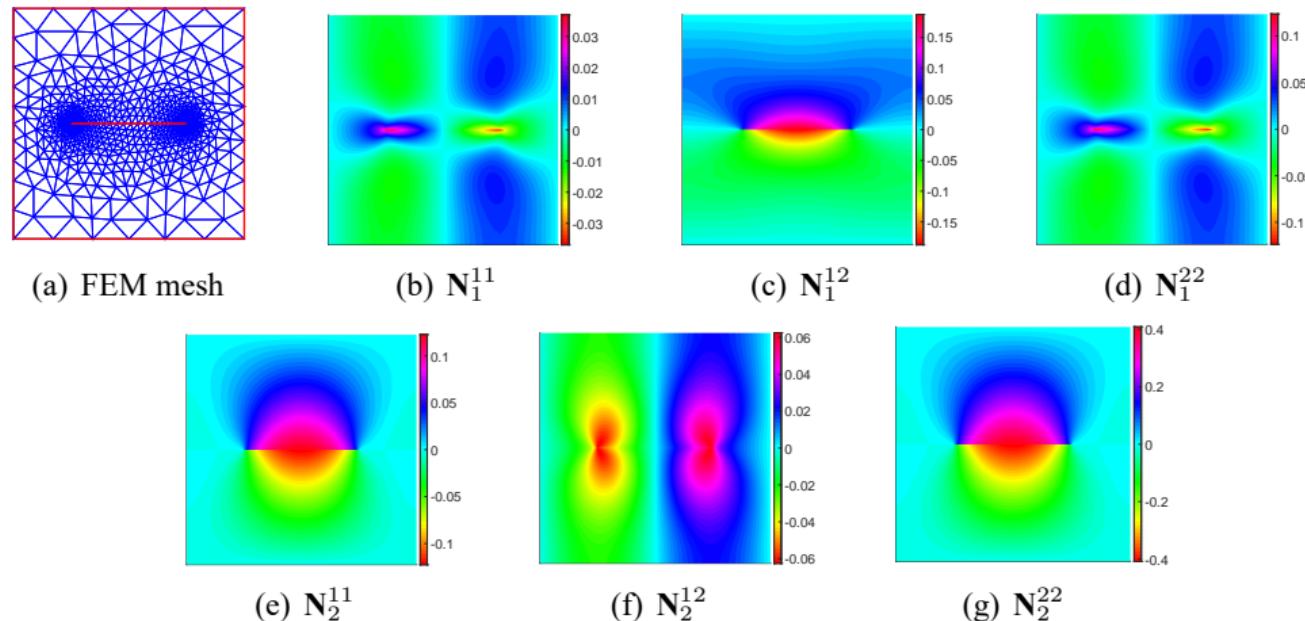


图 3: FEM mesh and First-order cell functions.

RVE 的应变能密度:

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e} = \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon).$$

对双尺度展开取一阶截断带入上式:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{xij}(\mathbf{u}^0) e_{xkl}(\mathbf{u}^0) + \frac{1}{2} a_{ijkl} \mathbf{N}_{i,j}^{pq} \mathbf{N}_{k,l}^{mn} e_{xpq}(\mathbf{u}^0) e_{xmn}(\mathbf{u}^0) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{ijkl} \mathbf{N}_i^{pq} \mathbf{N}_k^{mn} \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_l} + a_{ijkl} \mathbf{N}_{i,j}^{pq} e_{xpq}(\mathbf{u}^0) e_{xkl}(\mathbf{u}^0) \\ &\quad + \varepsilon a_{ijkl} \left(e_{xij}(\mathbf{u}^0) + \mathbf{N}_{i,j}^{pq} e_{xpq}(\mathbf{u}^0) \right) \mathbf{N}_k^{mn} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_l} \end{aligned}$$

引入 $D_{pqjml} = \int_{Y_s} a_{ijkl} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_k^{mn}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, 得到单胞应变能:

$$W = \int_{Y_\varepsilon} E d\mathbf{x} = \frac{\varepsilon^2}{2} C_{pqkl} \langle e_{xpq}(\mathbf{u}^0) \rangle \langle e_{xkl}(\mathbf{u}^0) \rangle + \frac{\varepsilon^4}{2} D_{pqjml} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_l} \right\rangle$$

模型推导

RVE 单胞上的动能

RVE 的动能密度:

$$T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}$$

对双尺度展开取一阶截断带入上式:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial (\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)))}{\partial t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{N}^{mn} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)))}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} + \varepsilon \rho \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} \cdot \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \rho \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{N}^{mn} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

引入 $F_{pqmn} = \int_{Y_s} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_i^{mn}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$, 得到单胞动能:

$$K = \int_{Y_\varepsilon} T \, d\mathbf{x} = \frac{\varepsilon^2}{2} \rho \left\langle \frac{\partial u_i^0}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u_i^0}{\partial t} \right\rangle + \frac{\varepsilon^4}{2} \rho F_{pqmn} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle$$

Griffith 断裂准则:

$$G = G_c(v)$$

能量释放率:

$$G = -\frac{d(W+K)}{dl} \xlongequal{l=\varepsilon d} -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d(W+K)}{dd}.$$

引入记号

$$\mathcal{E}_{ij} = \langle e_{xij}(\mathbf{u}^0) \rangle, \quad \mathcal{E}_{ij,k} = \left\langle \frac{\partial e_{xij}(\mathbf{u}^0)}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \dot{\mathcal{E}}_{ij} = \left\langle \frac{\partial e_{xij}(\mathbf{u}^0)}{\partial t} \right\rangle.$$

得到包含微结构效应的裂纹扩展方程:

$$G = -\frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{dC_{ijkl}(d)}{dd}}_{\text{应变}} \underbrace{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl}}_{\text{}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \underbrace{\frac{dD_{pqjmnl}(d)}{dd}}_{\text{}} \underbrace{\mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{应变梯度}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \underbrace{\frac{dF_{pqmn}(d)}{dd}}_{\text{}} \underbrace{\dot{\mathcal{E}}_{pq}\dot{\mathcal{E}}_{mn}}_{\text{应变率}} = G_c(v).$$

其中 $G_c(v)$ 为临界断裂能, v 是 I-型裂纹的扩展速度。

RVE位移场、速度场的双尺度一阶近似解

RVE局部应变能密度、动能密度表达式

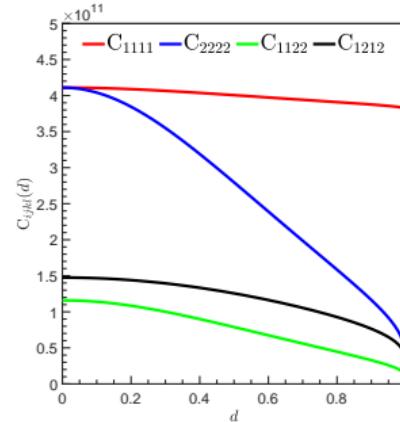
RVE单胞总应变能W、总动能K

微裂纹扩展的动态能量释放率

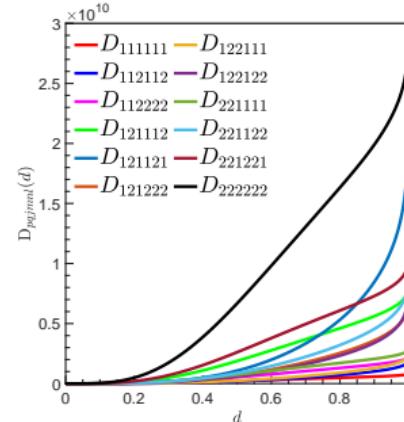
$$G = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \underbrace{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl}}_{\text{应变}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{dD_{pqjmn}(d)}{dd} \underbrace{\mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{应变梯度}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \frac{dF_{pqmn}(d)}{dd} \underbrace{\dot{\mathcal{E}}_{pq}\dot{\mathcal{E}}_{mn}}_{\text{应变率}} = G_c(v).$$

$$\begin{cases} C_{ijkl} &= \int_{Y_s} a_{ijkl} + a_{ijmn} e_{ymn}(\mathbf{N}^{kl}) \, dy \\ D_{pqjmn} &= \int_{Y_s} a_{ijkl} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_k^{mn}(\mathbf{y}) \, dy \\ F_{pqmn} &= \int_{Y_s} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_i^{mn}(\mathbf{y}) \, dy \end{cases}$$

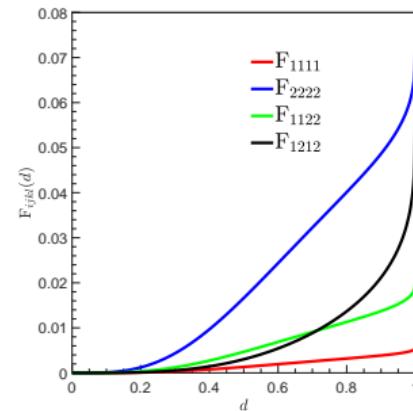
模型没有引入任何一个宏观唯象可调参数!



(a)



(b)



(c)

图 4: (a) $C_{ijkl} - d$ curve; (b) $D_{pqjmln} - d$ curve; (c) $F_{ijkl} - d$ curve.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klji}$$

$$D_{pqjmln} = D_{qpjmnl} = D_{mnlpqj}$$

$$F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{klji}.$$

如图 5, 材料的临界断裂能 G_c (又称临界能量释放率) 依赖于裂纹扩展速度 v 。

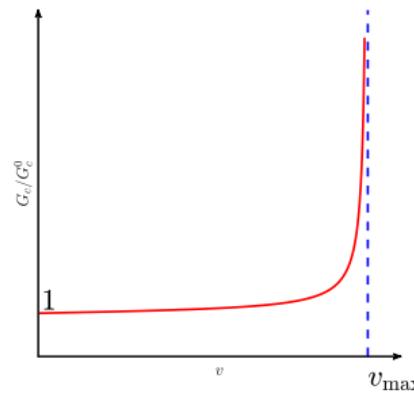


图 5: Typical dependence of fracture resistance on crack-tip speed³.

在裂纹低速扩展时, $G_c(v)$ 随着裂纹速度增大而缓慢增加。
当 v 足够大并靠近极限速度 v_{\max} 时, $G_c(v)$ 急剧增加。

³Gross, D., Seelig, T., 2017. Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics. Springer.

1 研究背景

2 双尺度渐进展开方法简介

3 模型推导

4 数值结果

5 总结与展望

为了拟合 Gross 等人在文献中的结果，我们用 $G_c/G_c^0 = 1 + \lambda \tan(\pi v / 2C_R)$ 来描述临界能量释放率随裂纹速度的变化关系。这里 G_c^0 为材料的静态临界断裂能， C_R 为 Rayleigh 波速，它是 I-型裂纹扩展的极限速度且有如下近似⁴：

$$C_R = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}$$

注意到 $v = \frac{\varepsilon}{2}\dot{d}$ ，于是有

$$\frac{G_c}{G_c^0} = 1 + \lambda \tan\left(\frac{\pi\varepsilon}{4C_R}\dot{d}\right)$$

其中 λ 为可变参数，它反映了极限断裂能对裂纹扩展速度的敏感性： λ 越小，敏感性越弱。在以下的数值模拟中，我们取 $\lambda = 0.1$ 。

⁴Freund, L.B., 1998. Dynamic fracture mechanics. Cambridge university press.

Algorithm 1 Numerical algorithm for macroscopic dynamic damage evolution

- 1: **Inputs:** u^n, v^n, d^n .
- 2: **Update** macroscale configuration: $\mathcal{E}_{ij}^n, \mathcal{E}_{ij,k}^n, \dot{\mathcal{E}}_{ij}^n = (\mathcal{E}_{ij}^n - \mathcal{E}_{ij}^{n-1})/\Delta t$.
- 3: **Update** G at Gauss points.
- 4: **for** $s = 1 : \text{nelem}$ **do**
- 5: **if** ($G_s > G_c^0$) **then**
- 6: **Solve** $G_s = G_c \left(\frac{\varepsilon}{2} \dot{d} \right)$ to obtain \dot{d} .
- 7: **Update** $d_s^{n+1} > d_s^n$ by explicit integration formula and force $d_s^{n+1} = 1$ if $d_s^{n+1} > 1$.
- 8: **else**
- 9: **Set** $d_s^{n+1} = d_s^n$ unchanged.
- 10: **end if**
- 11: **end for**
- 12: **Update** $C_{ijkl}(d^{n+1}), F_{ijkl}(d^{n+1}), D_{pqjmnl}(d^{n+1})$.
- 13: **Solve** equilibrium equation to obtain u^{n+1}, v^{n+1} .
- 14: **Outputs:** $u^{n+1}, v^{n+1}, d^{n+1}$.

取材料参数 $E = 2 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $G_c = 1 \text{ J/m}^2$

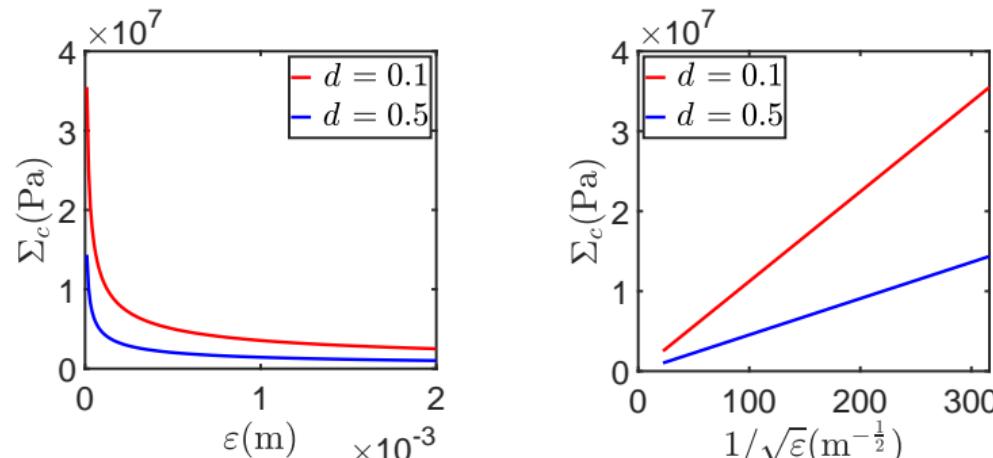


图 6: 极限应力随 $\varepsilon(1/\sqrt{\varepsilon})$ 的变化曲线。

图像符合已知的 Hall-Petch⁵效应

⁵大量实验证实：多晶体的屈服强度 σ^* 与其晶粒大小 d 满足关系: $\sigma^* = \sigma_0 + kd^{-\frac{1}{2}}$

数值结果 (准静态) 断裂强度的应变梯度效应

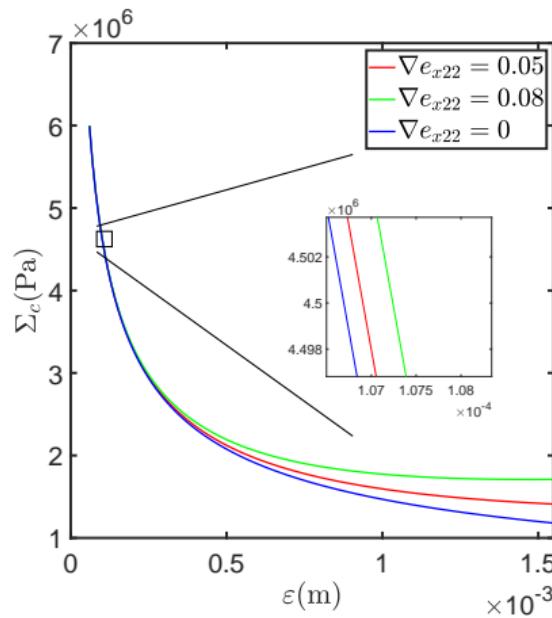
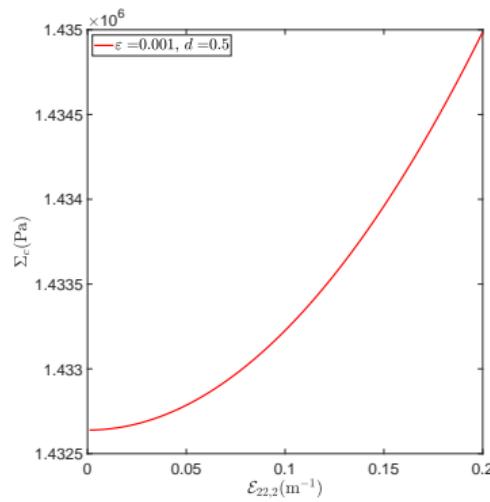
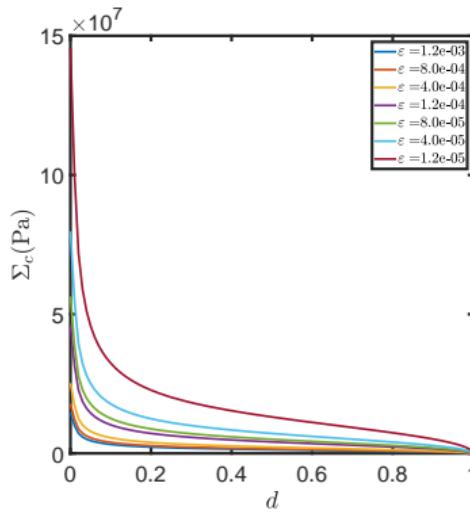


图 7: Critical stress as a function of ε , for different strain gradient with damage $d = 0.5$.

随着微结构特征尺度增加，应变梯度影响越来越明显，与已知物理规律相符合。

数值结果（准静态）

裂纹长度、应变梯度对断裂强度的影响



微裂纹长度越小，断裂强度对微裂纹长度的敏感性越强；
应变梯度越大，断裂强度对应变梯度的敏感性越强。

数值结果 (准静态)

宏观断裂破坏行为模拟-中心孔洞平板准静态拉伸

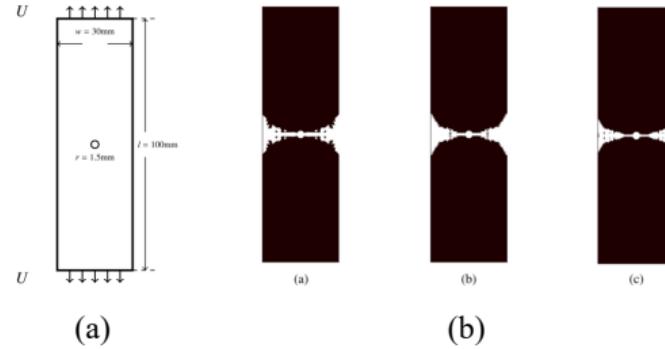


图 8: 单轴拉伸构型及不同网格下计算的断裂区域

表 1: Critical loading stress (GPa), with $\varepsilon = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$ ($r = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$).

	4976 elements	9336 elements	21248 elements
Σ_c^*	18.7	17.0	14.7
Σ_c	27.1	26.0	25.9

引入应变梯度削弱了网格依赖性。

模型的准静态计算结果与实验结果⁶的对比，该结果进一步显示出了模型的有效性。

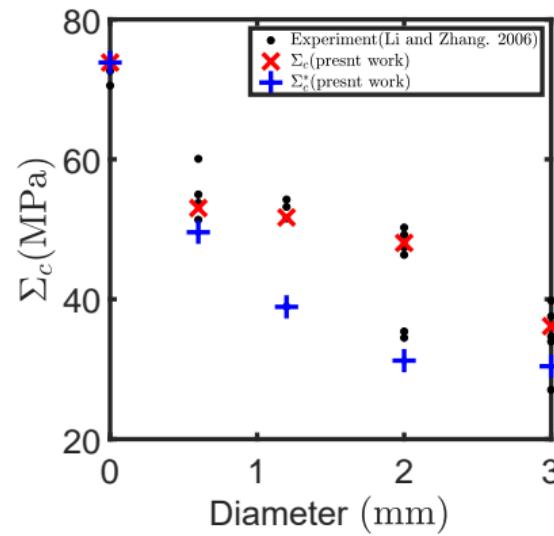


图 9: Comparison between predicted strength and experimental data when $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ m.

⁶Li J , Zhang X B . A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasi-brittle materials[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2006, 73(4):505-523.

数值结果 (动态)

局部动态响应

取氧化铝陶瓷作数值试验材料, 材料参数为: 密度 $\rho = 3890 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 360 \text{ GPa}$ 、泊松比 $\nu = 0.22$ 、静态临界断裂能 $G_c^0 = 50.752 \text{ J/m}^2$ 。

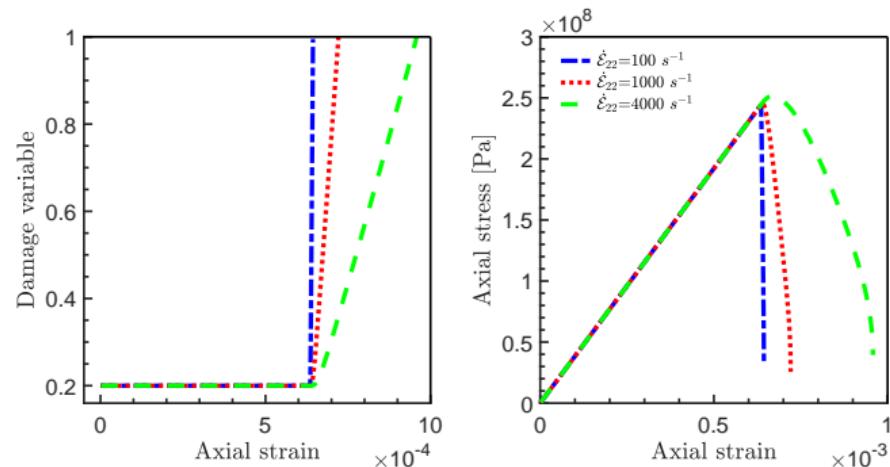


图 10: 损伤变量 d 、单轴应力 σ_{22} 随单轴应变 \mathcal{E}_{22} 的变化曲线 (应变率 $\dot{\mathcal{E}}_{22}$ 的影响) .

考虑单轴加载情况, 令 $\mathcal{E}_{11} = \mathcal{E}_{12} = 0, \mathcal{E}_{22} \neq 0$ 。得到应变率 $\dot{\mathcal{E}}_{22}$ 的影响曲线如图 10。

数值结果 (动态)

局部动态响应

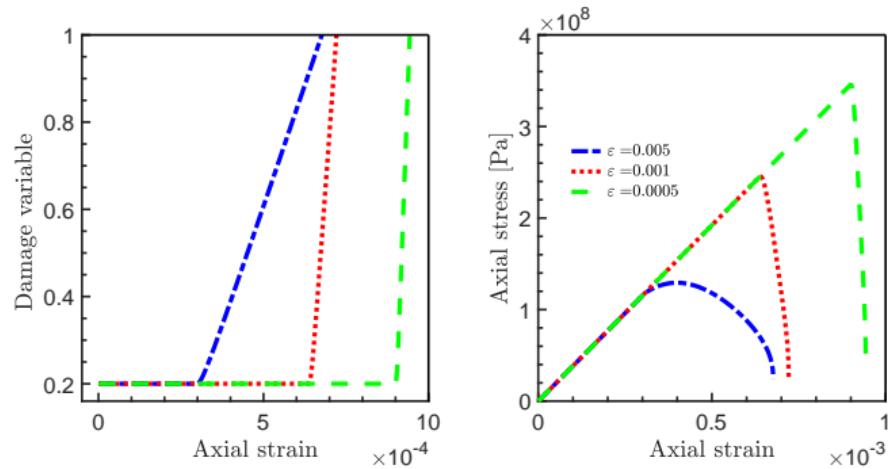


图 11: 损伤变量 d 、单轴应力 σ_{22} 随单轴应变 ε_{22} 的变化曲线（微尺度 ε 的影响）。

图 11 展示了微尺度 ε 的影响。随着 ε 减少，材料将变得越来越“均匀”。

考虑氧化铝陶瓷的冲击层裂问题⁷的局部分析结果。

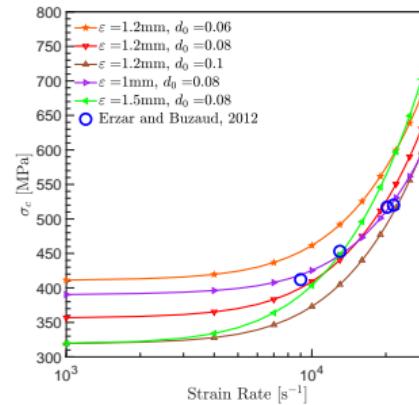


图 12: 应变率对拉伸强度的影响: 与层裂实验的对比.

我们发现当 $\varepsilon = 1 \text{ mm}, d = 0.08$ 时, 模型计算结果与实验可以较好地吻合。

⁷Erzar, B., Buzaud, E., 2012. Shockless spalling damage of alumina ceramic. The European Physical Journal Special Topics 206, 71–77.

数值结果 (动态)

PMMA 板单轴拉伸

对图 13 所示密度为 $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$ 的 PMMA 板考虑平面应变问题，其力学参数为：杨氏模量 $E = 3.16 \text{ GPa}$ 、泊松比 $\nu = 0.32$ 、临界能量释放率 $G_c^0 = 350 \text{ J/m}^2$ ，微尺度参数 $\varepsilon = 0.001 \text{ m}$ 。

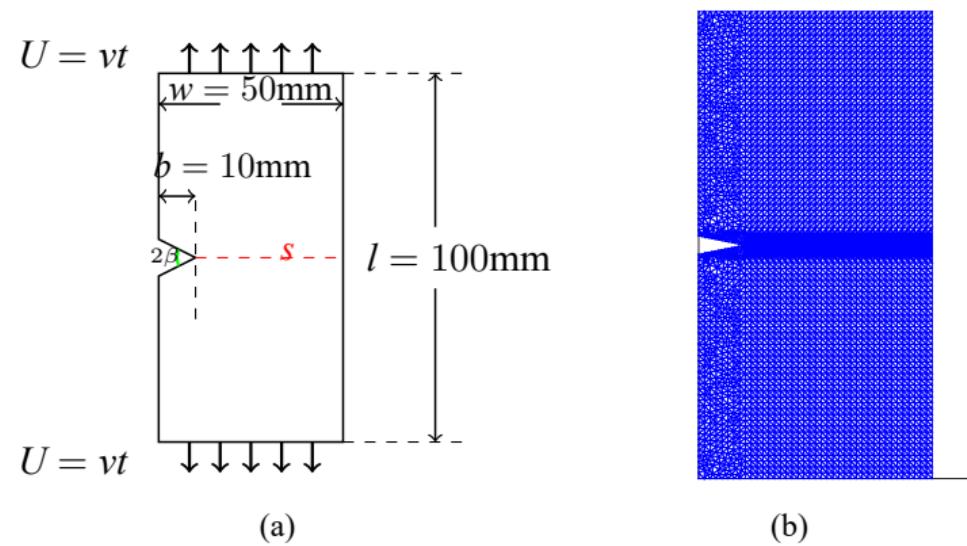


图 13: Tensile simulation for a V-notch plate: (a) geometry and boundary conditions; (b) FEM mesh.

数值结果 (动态)

PMMA 板单轴拉伸

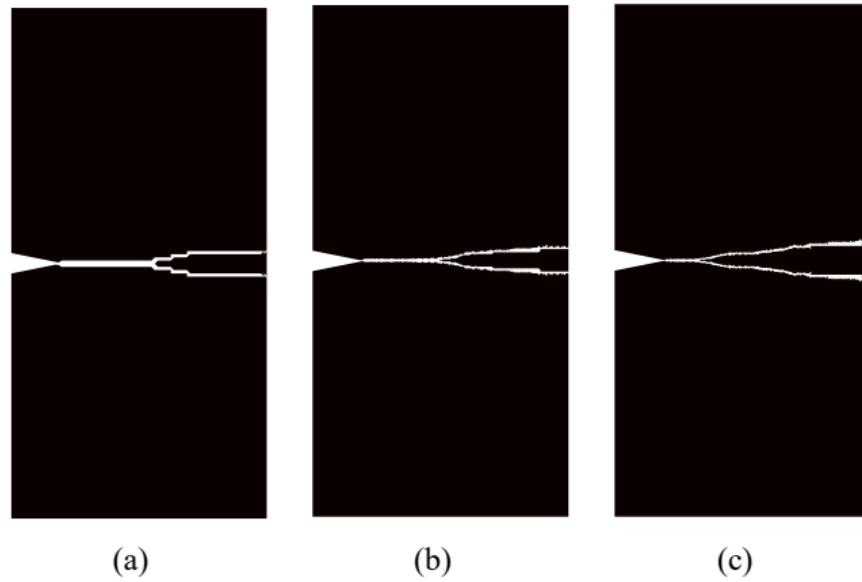
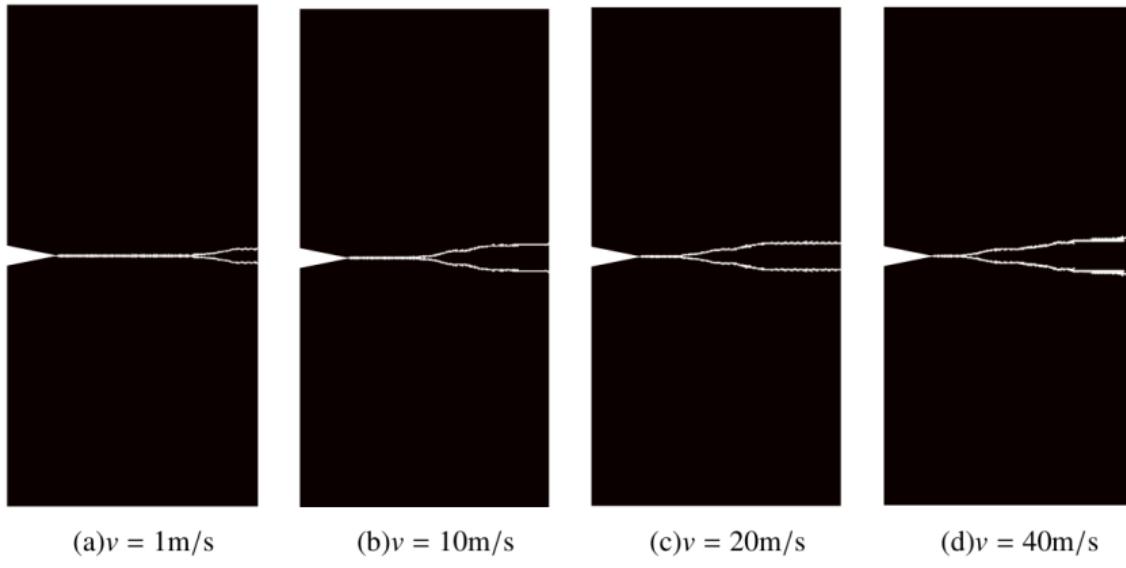


图 14: 不同网格下的断裂区 ($v = 40 \text{ m/s}$) 分布 (a) $h = 0.47 \text{ mm}$; (b) $h = 0.31 \text{ mm}$; (c) $h = 0.12 \text{ mm}$.

数值结果（准静态）

PMMA 板单轴拉伸



上图展示了不同的加载速度下，最终的损伤区域的分布。

数值结果（动态）

PMMA 板单轴拉伸

下面来比较不同网格下的加载位移-平均应力曲线，可以发现随着网格的加细，结果也趋于稳定。

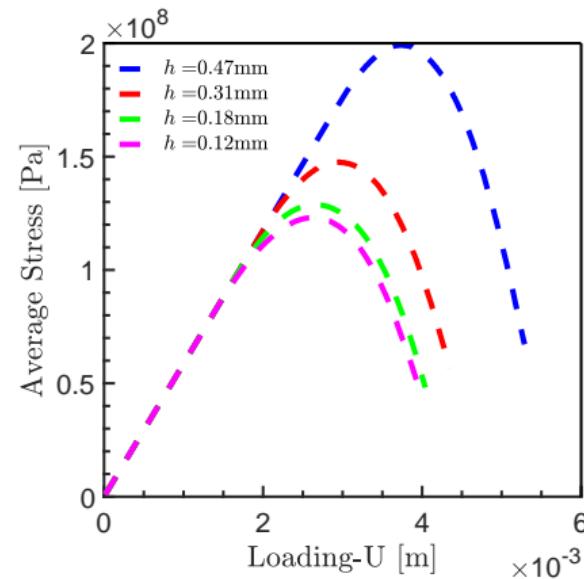


图 15: Stress-Displacement curve of $v = 40 \text{ m/s}$ for different meshes.

图 16 显示了加载速率 v 对应力-位移曲线的影响。随着 v 的增大，材料的延展性得到增强，材料的极限应力增大，这与之前在局部单元的应变率的影响结果保持一致。

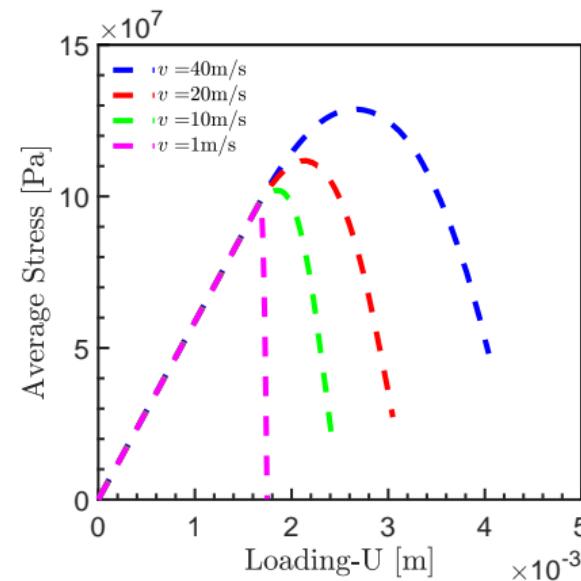


图 16: Stress-Displacement curve for different loading speeds.

数值结果 (动态)

氧化铝陶瓷冲击层裂

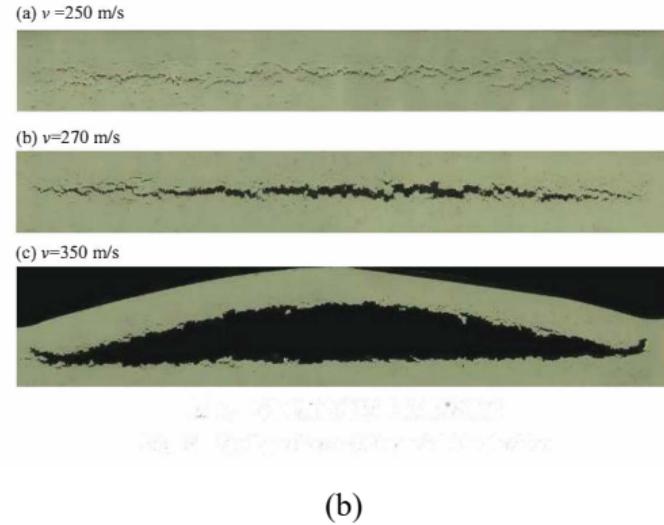


图 17: (a) 经典层裂现象; (b) 层裂损伤区域⁸。

⁸SHI Tongya, LIU Dongsheng, CHEN Wei, XIE Puchu, WANG Xiaofeng, WANG Yonggang. Dynamic tensile behavior and spall fracture of GP1 stainless steel processed by selective laser melting[J]. Explosion And Shock Waves, 2019, 39(7): 073101

为了说明高应变率对材料脆性断裂的影响，考虑下图 18 所示的冲击层裂实验。仍取氧化铝陶瓷材料⁹：密度 $\rho = 3890 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E = 360 \text{ GPa}$ 、泊松比 $\nu = 0.22$ 、临界静态断裂能 $G_c^0 = 50.752 \text{ J/m}^2$ 。

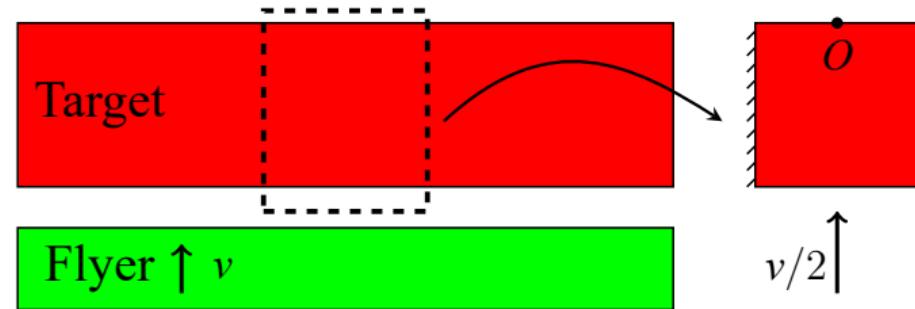


图 18：冲击层裂简化模型.

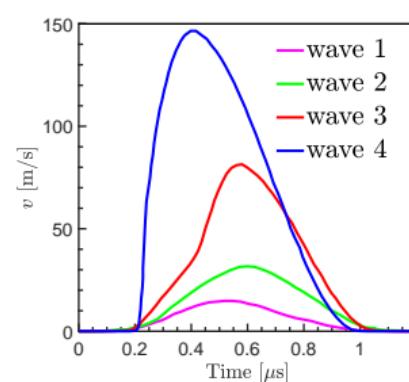
虚线部分的简化模型的两侧径向位移为零，上边界为自由面，下边界进行速度加载。

⁹Dynamic fragmentation of an alumina ceramic subjected to shockless spalling: An experimental and numerical study

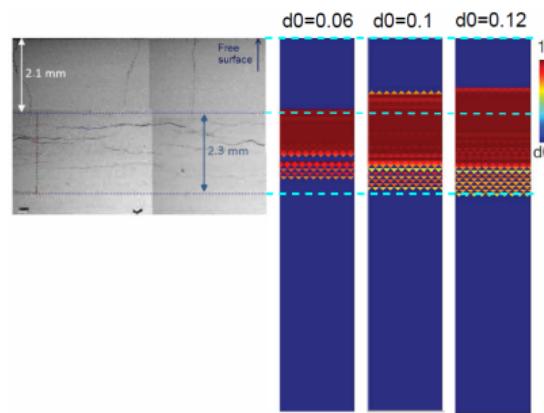
数值结果 (动态)

氧化铝陶瓷冲击层裂

选取 $\varepsilon = 0.8 \text{ mm}$ 以及不同的初始损伤 $d_0 = 0.06, d_0 = 0.1, d_0 = 0.12$, 我们给出数值结果与实验结果¹⁰的对比



(a)



(b)

图 19: (a).Applied velocity to induce a stress waves. (b).Comparing the fracture zone in the spall experiment and numerical results.

¹⁰Zinszner, J., Erzar, B., Forquin, P., Buzaud, E., 2015. Dynamic fragmentation of an alumina ceramic subjected to shockless spalling: an experimental and numerical study. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 85, 112–127.

图 20 给出了不同速度加载下损伤区的分布

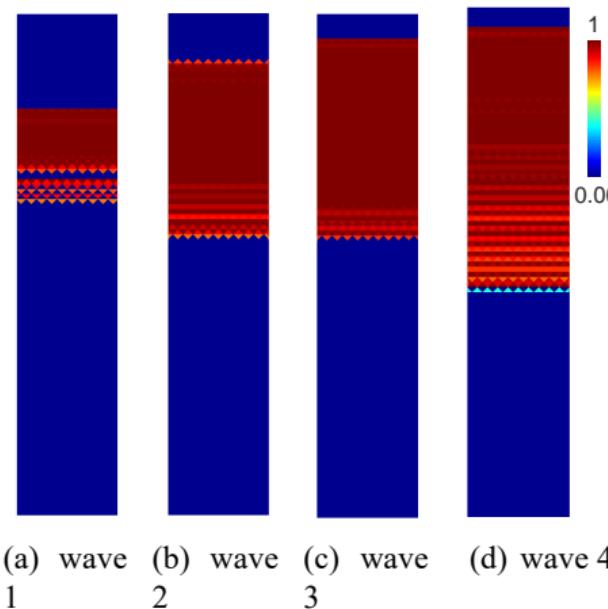


图 20: Fracture zone obtained by applying different stress waves with initial damage $d_0 = 0.06$.

图 21 给出了不同速度脉冲加载下，自由面速度曲线与实验结果¹¹的对比。

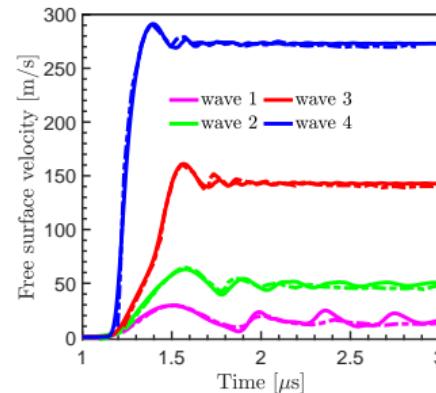


图 21: Comparisons between experimental and numerical results with initial damage $d = 0.06$ (wave1,wave 2), $d = 0.15$ (wave 3), $d = 0.12$ (wave 4) and $\varepsilon = 0.8 \text{ mm}$ (wave1,wave 2,wave 4), $\varepsilon = 0.8 \text{ mm}$ (wave 3) for free surface velocity profiles.

¹¹Zinszner, J., Erzar, B., Forquin, P., Buzaud, E., 2015. Dynamic fragmentation of an alumina ceramic subjected to shockless spalling: an experimental and numerical study. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 85, 112–127.

1 研究背景

2 双尺度渐进展开方法简介

3 模型推导

4 数值结果

5 总结与展望

总结：

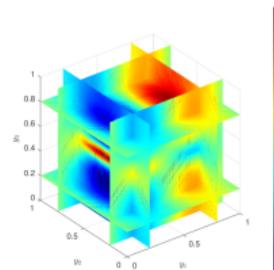
我们针对含有大量微裂纹材料的宏观断裂行为开展了双尺度建模，部分成果已发表¹²。

- 基于严格双尺度分析构建模型，没有引入任何的唯象参数；
- 自然地将材料的微结构参数 (ε)、应变梯度效应、应变率效应引入到失稳准则中，从而可直接分析微结构对宏观断裂行为的影响；
- 数值模拟结果与现有实验结果可以较好的相符。

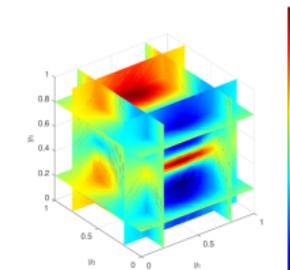
¹²Rao, Y., Xiang, M., Cui, J., 2022. A strain gradient brittle fracture model based on two-scale asymptotic analysis. Journal of the Mechanics and Physics of Solids , 104752.

展望：

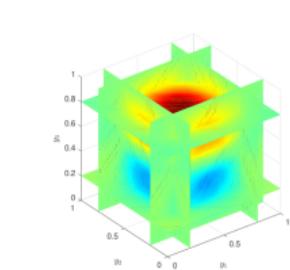
- 脆性材料扩展到韧性材料。
- 二维模型扩展到三维模型，该工作正在开展；
- 将微结构分布的随机性引入双尺度断裂模型中；
- 实际工程中，材料的断裂行为受温度影响，需要考虑热力耦合的断裂准则；
- 对于单胞中裂纹更复杂的分布形态和受力状态，需要建立混合型断裂准则；



(a). \mathbf{N}_1^{33}



(b). \mathbf{N}_2^{33}



(c). \mathbf{N}_3^{33}

谢谢大家!!