

交流研究生工作总结报告

基于双尺度渐近展开的断裂模型研究

报告人：饶一鹏

专业：计算数学

指导老师：崔俊芝研究员

向美珍副研究员

北京应用物理与计算数学研究所
中国科学院计算数学与科学工程计算研究所

2023 年 6 月 25 日

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

研究背景-断裂事故

- 材料及其结构的断裂破坏问题是武器装备、航空航天、防护工程等领域的重要基础科学问题。



(a)



(b)

图 1.1: 断裂事故: (a) 比利时哈塞尔特大桥在 1938 年 3 月发生断裂事故; (b) 二战时期, 美国海军断裂的自由轮。

研究背景-断裂的多尺度行为

- 宏观断裂破坏行为源于材料微损伤（微裂纹或孔洞）的跨尺度演化，并受到材料制备或库存过程中形成的初始微观结构影响，是典型多尺度耦合的挑战性问题。

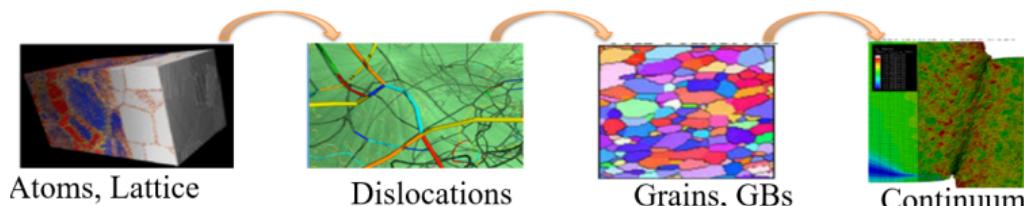


图 1.2: 不同尺度下的固体材料结构。

- 微裂纹是脆性材料中最典型的微结构，宏观脆断源自于微裂纹的萌生、传播与贯通。

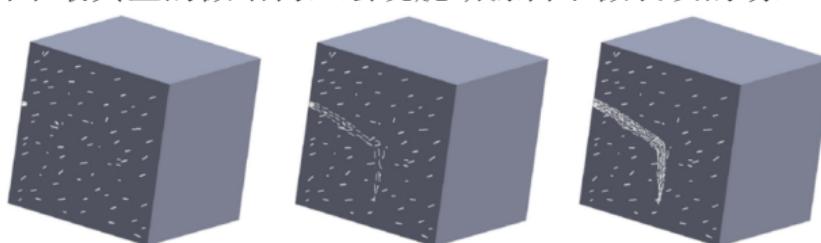


图 1.3: 微裂纹的聚结与宏观损伤。

研究意义

如何在损伤断裂模拟中充分考虑细观尺度微结构分布形态？

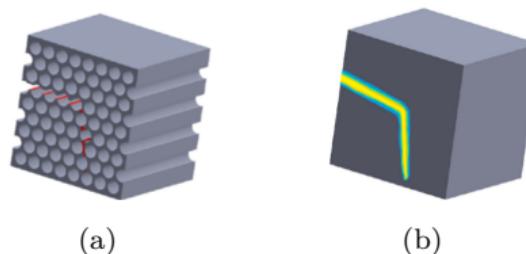


图 1.4: (a) 结构断裂, (b) 等效损伤模型。

- 直接数值模拟：计算中显式分辨每个微结构。网格剖分复杂，计算量大，很难在实际工程问题中应用。
- 均匀化宏观损伤力学方法模拟：等效为均匀材料，用内部损伤变量描述材料局部状态。此方法需解决以下科学问题：
 - ①: 依赖于内部微结构变量的本构模型及参数；
 - ②: 不同宏观加载条件下，建立微损伤的动态演化模型。

本工作将借助双尺度渐近展开方法来回答上述关键科学问题。

双尺度渐近展开方法简介



- 含微结构分布形态的连续介质力学方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijk}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\mathbf{x})}{\partial x_h} \right) \right] = f_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \dots, n) \\ \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

- 双尺度渐近展开解(Lions et al., 1960s):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{<\alpha>=l} \mathbf{N}_{\alpha}(\mathbf{y}) \partial_{\alpha}^l \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{\alpha_1=1}^n \mathbf{N}_{\alpha_1}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_{\alpha_1}} + \varepsilon^2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^n \mathbf{N}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} + \dots \end{aligned}$$

- $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ 表示细观坐标 (物质点在参考周期单胞中的位置)。
- $\mathbf{N}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ 为定义在周期单胞 Y 上单胞方程的解 (又称为矩阵型单胞函数)。
- $\mathbf{u}^{(0)}$ 是宏观均匀化问题的解。

双尺度渐近展开方法简介

- 基于双尺度渐近展开理论的双尺度有限元方法（崔、曹等）

宏观上求解均匀化方程得到 $\mathbf{u}^{(0)}$, 细观上求解单胞方程并进行一阶或二阶多尺度修正。

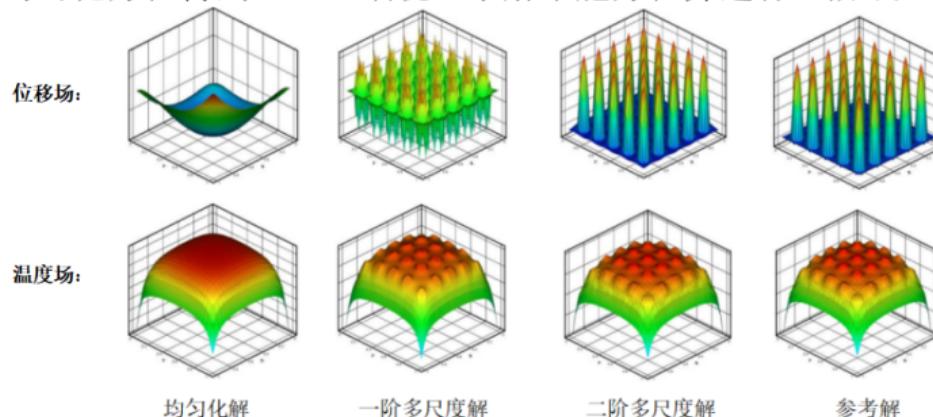


图 1.5: 热力耦合问题的双尺度解¹。

计算精度接近细尺度直接有限元计算，计算量与均匀材料的宏观有限元计算相当。

本工作将双尺度渐近展开方法应用到包含大量微裂纹材料的脆性断裂多尺度建模中。

¹杨自豪, 西北工业大学博士论文, 2014.

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

问题描述-基本物理假设

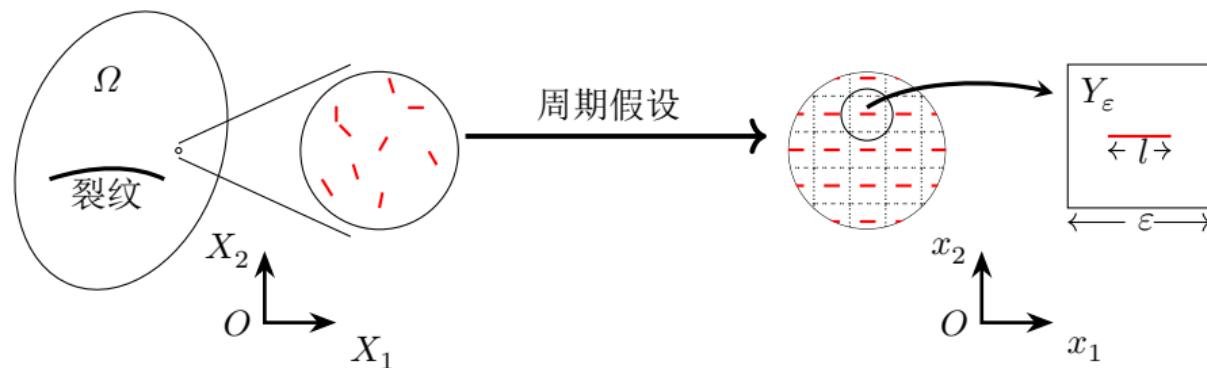


图 2.1: 微裂纹分布及小周期假设。

宏细观双尺度框架: 宏观局部材料点（有限元中的 Gauss 点）的力学响应由包含细观微裂纹的代表体积元（RVE）表征。

局部周期假设: RVE 微裂纹的分布具有周期性，周期单胞边长为 ε ，代表相邻微裂纹之间的距离。

微裂纹失稳 Griffith 准则: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ 。

其它假设: 定义 $d = l/\varepsilon \in [0, 1]$ 为损伤变量，表示局部损伤程度；微裂纹均为双向等速率扩展，且扩展方向与裂纹原始方向保持一致。

问题描述-宏观观控制方程

- 在宏观结构体 Ω 上, 考虑如下平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial X_j} = 0 & \text{in } \Omega \\ \Sigma_{ij} = C_{ijkl} \mathcal{E}_{kl} \\ \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{U} 为位移场, $\boldsymbol{\Sigma}$ 为应力场, \mathcal{E} 为应变场, \mathbf{X} 为宏观构型的笛卡尔坐标。

- 在微裂纹呈小周期分布的 RVE 构型上 (C 为所有微裂纹的集合, $B_s = \mathbb{R}^2 \setminus C$ 为固体部分), 考虑如下平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = 0 & \text{in } B_s \\ \sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right), \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 a_{ijkl} 为弹性模量张量, 对于各向同性材料由下式确定: (这里的 λ, μ 为拉梅常数)

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.3)$$

\mathbf{u}^ε 为位移场, $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ 为应力场, \mathbf{e}^ε 为应变场, δ 为 Kronecker 张量。

问题描述-尺度变换

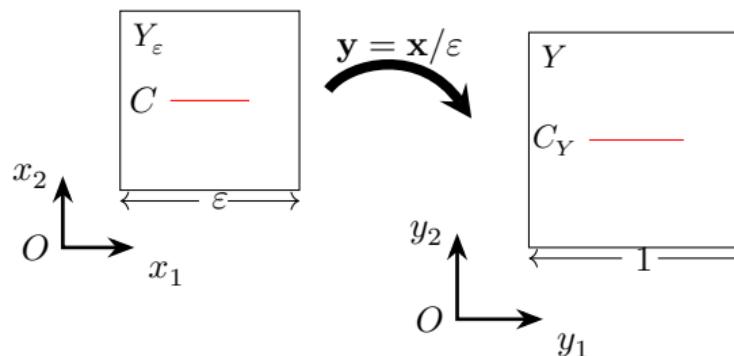


图 2.2: 尺度变换。

将参考单胞 Y 中的裂纹记为 C_Y , 取 $Y_s = Y \setminus C_Y$ 为固体部分。

令 $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ 为细观尺度变量, 对位移 $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$, 考虑如下双尺度渐近展开:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ &= \mathbf{u}^{(0)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \dots\end{aligned}\tag{2.4}$$

双尺度分析-单胞方程与均匀化方程

将双尺度展开式代入 RVE 上的平衡方程，比较 ε 的不同次幂得到控制方程 (1)-(3)：

$$(1) \quad \varepsilon^{-2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0 \quad \text{in } Y_s.$$

$$(2) \quad \varepsilon^{-1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}))) = 0 \quad \text{in } Y_s.$$

$$(3) \quad \varepsilon^0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) + \frac{\partial}{\partial y_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})) = 0 \quad \text{in } Y_s.$$

$$(1) \implies \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}).$$

$$\left. \begin{aligned} & (2) \\ & \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial (a_{ijkl} e_{ykl} (\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})}{\partial y_j} = 0 \quad \text{in } Y_s.$$

$$(3) \implies \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0.$$

其中等效弹性模量 $C_{ijkl} = \frac{1}{|Y_s|} \int_{Y_s} a_{ijkl} + a_{ijmn} e_{ymn}(\mathbf{N}^{kl}) \, d\mathbf{y}$ 。

双尺度分析-单胞方程边界条件

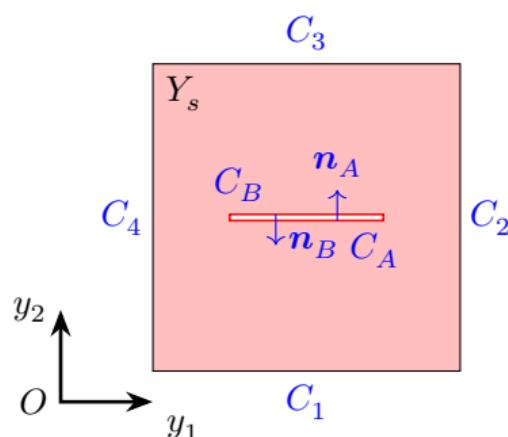


图 2.3: 参考单胞中的微裂纹构型。

记 $\mathbf{n} = \{n_i\}$, $\mathbf{t} = \{t_i\}$ 为裂纹面的单位外法向及单位切向 (二者构成右手系)。记 C_A , C_B 为两个裂纹面, 记 C_1 , C_2 , C_3 , C_4 为单胞构型的外边界, 单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 在外边界 C_1 与 C_3 、 C_2 与 C_4 上分别满足周期性边界条件。

双尺度分析-单胞方程边界条件

- 张开裂纹面边界条件下，单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 满足如下裂纹面边界条件：

$$(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j = 0 \quad \text{on } C_A, C_B.$$

- 接触无摩擦裂纹面边界条件下，单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 满足如下裂纹面边界条件：

$$\begin{cases} t_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j = 0 & \text{on } C_A, C_B \\ \llbracket (a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j \rrbracket = 0 & \text{on } C_A, C_B. \end{cases}$$

- Coulomb 滑动摩擦裂纹面边界条件下，单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 满足如下裂纹面边界条件：

$$|t_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j| = -\mu n_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j \quad \text{on } C_A, C_B.$$

- Coulomb 静摩擦裂纹面边界条件下，单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 满足如下裂纹面边界条件：

$$|t_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j| < -\mu n_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq})n_j \quad \text{on } C_A, C_B.$$

对于裂纹面接触条件 $\llbracket \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0$ ，可以得到：

$$\llbracket \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0 \implies \llbracket e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \quad (2.5)$$

对单胞函数考虑边界条件 $\llbracket \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0$ ，使用 Lagrange 乘子来实现此条件。

双尺度分析-单胞方程的弱形式

引入函数空间:

$$\mathcal{D}^I(Y_s) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H_{\text{per}}^1(Y_s)]^2, \int_{Y_s} \mathbf{u} \, d\mathbf{y} = \mathbf{0} \right\},$$

$$\mathcal{D}^{II}(Y_s) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{D}^I(Y_s), [\![\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]\!] = 0 \text{ on } C_Y \right\},$$

$$\mathcal{D}^{III}(Y_s) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{D}^{II}(Y_s), [\![\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}]\!] = 0 \text{ on } C_Y \right\}.$$

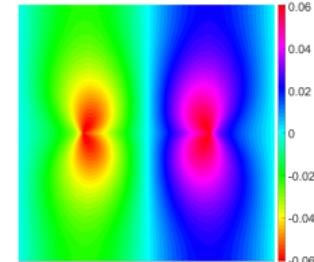


图 2.4: 单胞函数 N_2^{12} 数值解。

记 $\tilde{\sigma}_{ij}^{pq} = a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq}$ 为单胞函数 \mathbf{N}^{pq} 的“形式应力”。

对于张开、接触无摩擦、带 Coulomb 静摩擦的裂纹面边界条件，可得到如下弱形式：

$$\int_{Y_s} \tilde{\sigma}_{ij}^{pq} e_{yij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}^M(Y_s) \quad (M = I \text{ or } II \text{ or } III). \quad (2.6)$$

对于带 Coulomb 滑动摩擦的裂纹面边界条件， $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}^{II}(Y_s)$ ，可得到相应的弱形式：

$$\int_{Y_s} \tilde{\sigma}_{ij}^{pq} e_{yij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{y} = \pm \left(\int_{C_A} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{t}_A) \mu \mathbf{n}_A \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_A^{pq} \cdot \mathbf{n}_A \, ds + \int_{C_B} (\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{t}_B) \mu \mathbf{n}_B \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_B^{pq} \cdot \mathbf{n}_B \, ds \right). \quad (2.7)$$

单胞能量分析

RVE 单胞上局部应变能密度:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon : \mathbf{e}^\varepsilon = \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon). \quad (2.8)$$

取 \mathbf{u}^ε 的一阶双尺度近似, 带入上式:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + \frac{1}{2} a_{ijkl} \mathbf{N}_{i,j}^{pq} \mathbf{N}_{k,l}^{mn} e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{ijkl} \mathbf{N}_i^{pq} \mathbf{N}_k^{mn} \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_j} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_l} + a_{ijkl} \mathbf{N}_{i,j}^{pq} e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \\ & + \varepsilon a_{ijkl} \left(e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathbf{N}_{i,j}^{pq} e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) \mathbf{N}_k^{mn} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

得到单胞总应变能:

$$W = \int_{Y_\varepsilon} U \, d\mathbf{x} = \frac{\varepsilon^2}{2} C_{pqkl} \langle e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \rangle \langle e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \rangle + \frac{\varepsilon^4}{2} D_{pqjmln} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_l} \right\rangle. \quad (2.10)$$

其中等效应变梯度模量 $D_{pqjmln} = \int_{Y_s} a_{ijkl} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_k^{mn}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$ 。

准静态能量释放率

- 准静态能量释放率:

$$\mathcal{G} = -\frac{dW}{dl} \xrightarrow{l=\varepsilon d} -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dW}{dd}. \quad (2.11)$$

- 宏观应变及应变梯度记号:

$$\mathcal{E}_{ij} = \langle e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) \rangle, \quad \mathcal{E}_{ij,k} = \left\langle \frac{\partial e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (2.12)$$

- 准静态能量释放率的双尺度形式:

$$\mathcal{G} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} - \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{dD_{pqjmln}(d)}{dd} \mathcal{E}_{pq,j} \mathcal{E}_{mn,l}. \quad (2.13)$$

双尺度脆性断裂准则

- Griffith 断裂准则:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c. \quad (2.14)$$

- 微裂纹断裂准则:

$$\mathcal{G} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \underbrace{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl}}_{\text{应变}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{dD_{pqjmnkl}(d)}{dd} \underbrace{\mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{应变梯度}} = \mathcal{G}_c. \quad (2.15)$$

其中 \mathcal{G}_c 为临界断裂能。

双尺度准静态断裂准则的特点

- 断裂准则不含任何唯象参数。
- 微结构尺寸、宏观应变、应变梯度耦合于断裂准则。
- 应变项、应变梯度项的系数分别与张量 \mathbf{C} , \mathbf{D} 对损伤变量 d 的导数相关联。

张量 \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 的构造（张开型裂纹面边界条件）

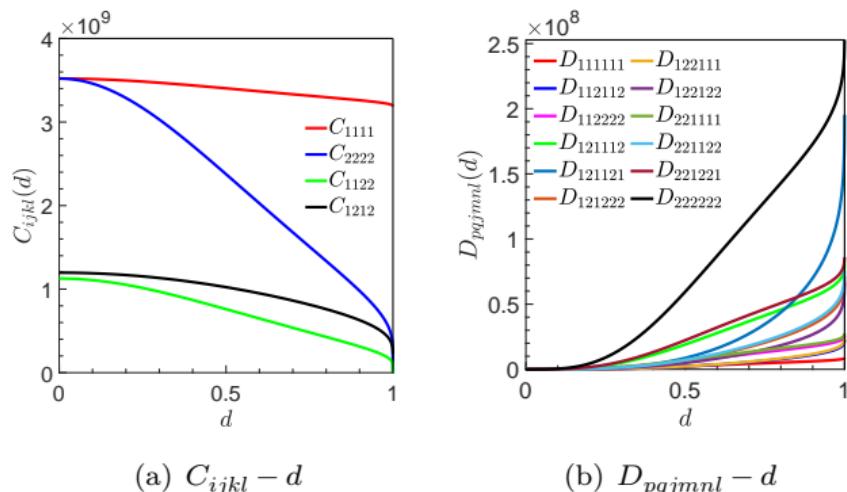


图 2.5: 张开型裂纹面边界条件。

在 d 的取值区间 $[0, 1]$ 上取离散点 $d = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99, 0.991, \dots, 0.999$ 处求单胞函数数值解，进而得到张量 $\mathbf{C}(d)$ 和 $\mathbf{D}(d)$ 的离散数据，再用三次样条插值方法给出 $\mathbf{C}(d)$, $\mathbf{D}(d)$ 及其导数 $\mathbf{C}'(d)$, $\mathbf{D}'(d)$ 的连续函数。

张量 \mathbf{C} 与 \mathbf{D} 的构造 (接触型无摩擦裂纹面边界条件)

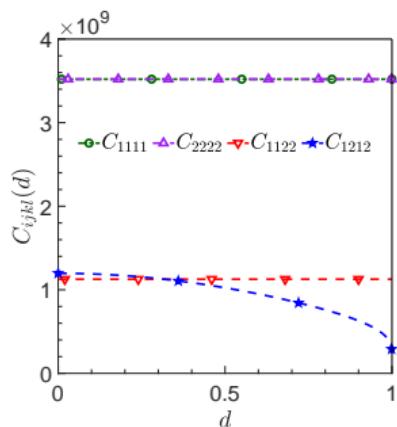
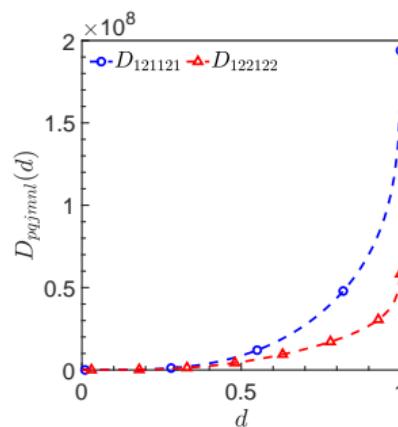
(a) $C_{ijkl} - d$ (b) $D_{pqjml} - d$

图 2.6: 接触型无摩擦裂纹面条件。

- \mathbf{C} 的非零独立分量仅有 C_{1212} 为 d 的递减函数。
- \mathbf{D} 的分量仅展示主导分量 D_{121121} 、 D_{122122} ，它们与单胞函数 $N^{12}(\mathbf{y})$ 相关。

数值算例-模型求解算法及有限元程序集成

将双尺度断裂模型嵌入到宏观有限元程序中，以分析材料及结构的断裂行为。

有限元计算采用三角形网格剖分，对位移 \mathbf{U} 使用 P_2 拉格朗日元，对损伤场 d 使用 P_0 （分片常数）元，损伤更新见如下算法。

算法 1 准静态加载下局部损伤的更新算法。

- 1: 令 $d^{n+1}(\mathbf{x}) = d^n(\mathbf{x})$;
- 2: 计算 $\mathcal{G}^{\text{stat}}(d^n) = -\frac{\varepsilon}{2} C'_{ijkl}(d^n) \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} - \frac{\varepsilon^3}{2} D'_{pqjml}(d^n) \mathcal{E}_{pq,j} \mathcal{E}_{mn,l}$, 其中 $\mathbf{C}'(d^n), \mathbf{D}'(d^n)$ 通过三次样条函数由离散数据点插值获得;
- 3: 对所有网格单元遍历计算 $\mathcal{G}^{\text{stat}}(d(\mathbf{x}_k))$ (\mathbf{x}_k 为三角形单元 \mathcal{T}_k 的重心坐标), 如果某一单元满足 $\mathcal{G}^{\text{stat}}(d(\mathbf{x}_k')) > \mathcal{G}_c$: 更新 $d^{n+1}(\mathbf{x}_{k'}) = 1$;
- 4: 返回 $d^{n+1}(\mathbf{x})$.

数值算例-局部力学响应

选取 PMMA 材料作为数值实验样品，其物理参数为密度 $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E = 3.16 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.32$ ，静态临界断裂能 $\mathcal{G}_c^0 = 350 \text{ J/m}^2$ 。

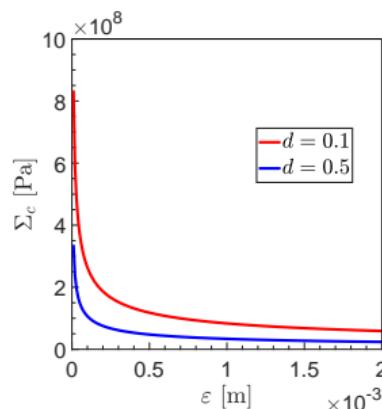
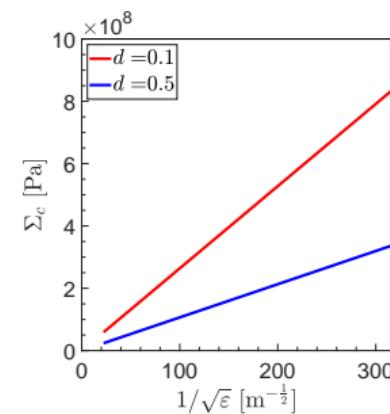
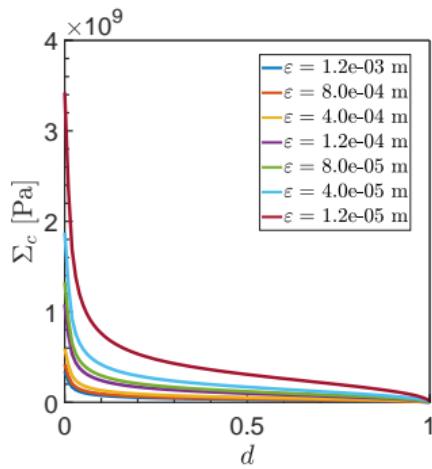
(a) $\Sigma_c - \varepsilon$ (b) $\Sigma_c - 1/\sqrt{\varepsilon}$

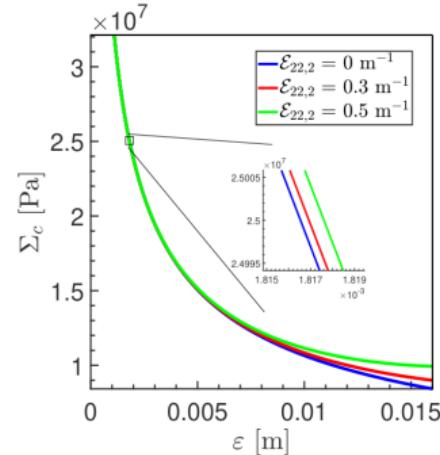
图 2.7: 初始损伤 $d = 0.1$ 、 $d = 0.5$ 时，断裂强度随微结构尺寸变化的曲线。

断裂强度与微结构参数 $\varepsilon^{-1/2}$ 呈线性变化关系，这与经典的 Hall-Petch 关系相吻合。

数值算例-局部力学响应



(a)



(b)

图 2.8: (a) 微结构尺寸对 $\Sigma_c - d$ 曲线的影响; (b) $d = 0.5$ 时, 应变梯度对 $\Sigma_c - \varepsilon$ 曲线的影响。

- 断裂强度随着初始损伤的增大而减小;
- 应变梯度效应随着微结构尺寸的增大而逐渐显著。

数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 准静态拉伸)

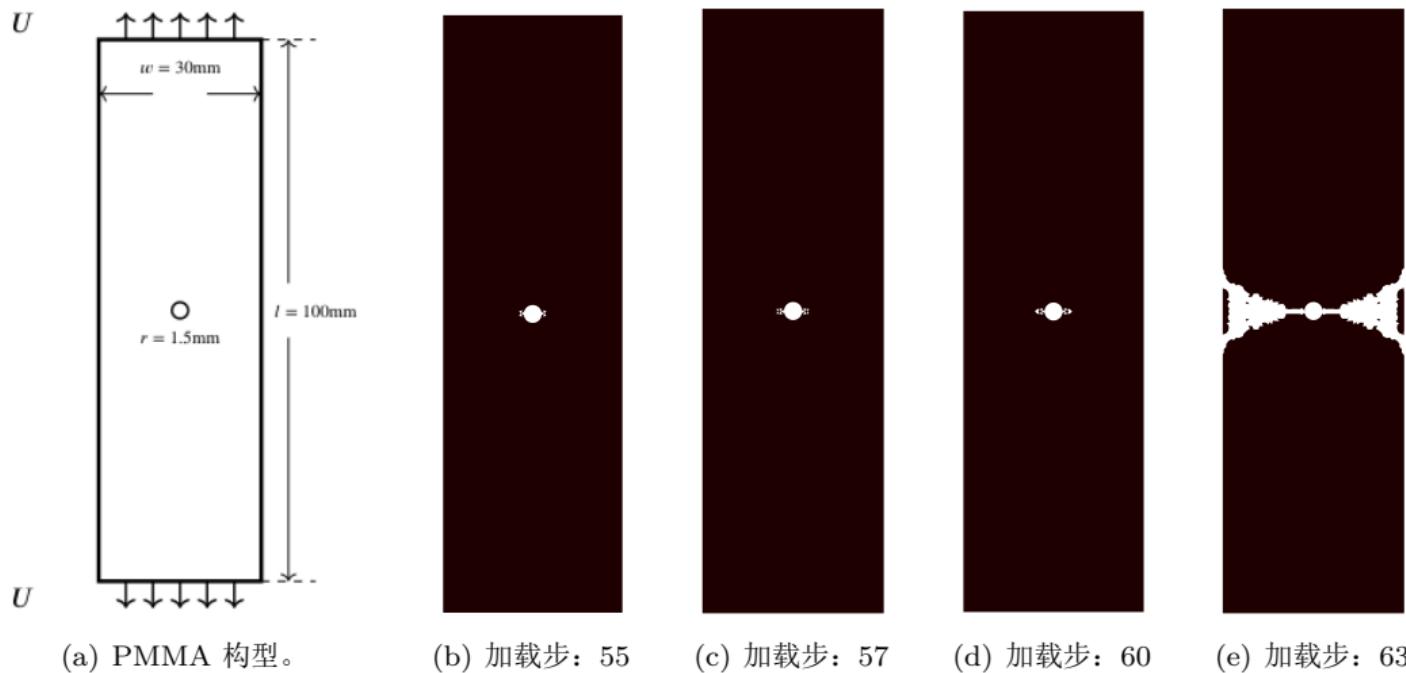


图 2.9: 含孔 PMMA 板在准静态单轴拉伸下的损伤过程。

数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 准静态拉伸)

表 2.1: 不同网格剖分下计算的断裂强度

$\mathcal{T}_h^{27,90,20}$ (4976 个单元)	$\mathcal{T}_h^{36,120,24}$ (9336 个单元)	$\mathcal{T}_h^{54,180,40}$ (21248 个单元)
$\Sigma_c^* [\text{MPa}]$	18.7	18.2
$\Sigma_c [\text{MPa}]$	27.0	26.0

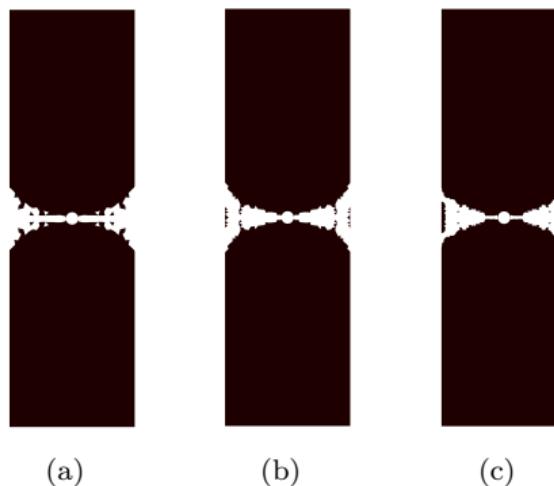


图 2.10: 三种网格下的断裂区: (a) $\mathcal{T}_h^{27,90,20}$; (b) $\mathcal{T}_h^{36,120,24}$; (c) $\mathcal{T}_h^{54,180,40}$ 。

不同网格的数值计算结果表明: 应变梯度项的引入削弱了数值结果的网格依赖性。

数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 准静态拉伸)

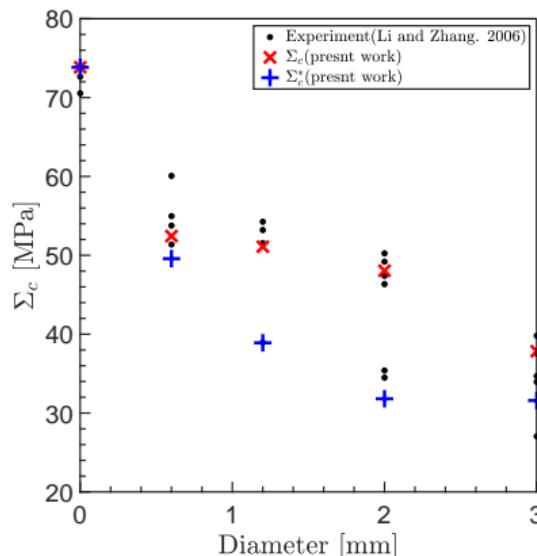


图 2.11: 不同孔洞半径材料的断裂强度数值结果与实验结果的对比。

忽略应变梯度效应将低估材料的抗拉强度。

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

问题描述-宏观观控制方程

基本建模框架和物理假设与准静态情况相同，不同的是需要考虑惯性项。

- 在宏观结构体 Ω 上，考虑如下平衡方程：

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial X_j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

其中 ρ 为材料密度， \mathbf{U} 为位移场， $\boldsymbol{\Sigma}$ 为应力场， \mathbf{X} 为宏观构型的笛卡尔坐标。

- 细观 RVE 上的裂纹记为 C ，在 RVE 的固体区域 $B_s = \mathbb{R}^2 \setminus C$ 上考虑如下平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{in } B_s, \quad (3.2)$$

对位移 $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ 进行如下双尺度形式展开：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \\ &= \mathbf{u}^{(0)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

将上面展开式代入平衡方程及边界条件，对比 ε 的不同次幂的系数，便可得到函数 $\mathbf{u}^{(0)}$ 、 $\mathbf{u}^{(1)}$ 、 $\mathbf{u}^{(2)}$ 的控制方程和边界条件。

双尺度展开-单胞方程与均匀化方程

- 对于 $\mathbf{u}^{(1)}$, 考虑如下的尺度分离形式解:

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)). \quad (3.4)$$

- 对于 $\mathbf{u}^{(2)}$, 在平衡方程中比对两端 ε^0 项系数, 得到:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) + \frac{\partial}{\partial y_j} a_{ijkl} (e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2} \quad \text{in } Y_s. \quad (3.5)$$

将上式关于细尺度变量 \mathbf{y} 在单胞 Y_s 上积分后便得到如下均匀化方程:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)})) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

- 在动态断裂问题中, 均匀化方程的右端被引入了惯性项。
- 单胞函数不依赖于时间 t , 因此单胞方程与准静态情况的分析结果完全一致。

单胞能量分析

- RVE 单胞上应变能的推导过程及其表达式与准静态情况完全一致。
- RVE 单胞上动能密度：

$$T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t}. \quad (3.7)$$

取位移 \mathbf{u}^ε 的一阶双尺度近似，带入上式：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial (\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)))}{\partial t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{N}^{mn} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)))}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon \rho \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \rho \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \mathbf{N}^{pq} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{N}^{mn} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

将 T 在 Y_ε 积分，得到单胞上的动能如下：

$$K = \frac{\varepsilon^2}{2} \rho \left\langle \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} \right\rangle + \frac{\varepsilon^4}{2} \rho F_{pqmn} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.9)$$

其中等效惯性模量 $F_{pqmn} = \int_{Y_s} \mathbf{N}_i^{pq}(\mathbf{y}) \mathbf{N}_i^{mn}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ 。

动态能量释放率

- 动态能量释放率 \mathcal{G}^{dy} :

$$\mathcal{G}^{\text{dy}} = -\frac{d(W + K)}{dl} \xrightarrow{l=\varepsilon d} -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d(W + K)}{dd}. \quad (3.10)$$

- 宏观应变率记号:

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij} = \left\langle \frac{\partial e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial t} \right\rangle. \quad (3.11)$$

- 动态能量释放率的双尺度形式:

$$\mathcal{G}^{\text{dy}} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} - \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{dD_{pqjmln}(d)}{dd} \mathcal{E}_{pq,j} \mathcal{E}_{mn,l} - \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \frac{dF_{pqmn}(d)}{dd} \dot{\mathcal{E}}_{pq} \dot{\mathcal{E}}_{mn}. \quad (3.12)$$

损伤动态演化方程

- Griffith 断裂准则:

$$\mathcal{G}^{\text{dy}} = \mathcal{G}_c(v). \quad (3.13)$$

- 微裂纹动态演化方程:

$$\mathcal{G} = -\frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl}}_{\text{应变}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \underbrace{\frac{dD_{pqjmnl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{应变梯度}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \underbrace{\frac{dF_{pqmn}(d)}{dd} \dot{\mathcal{E}}_{pq}\dot{\mathcal{E}}_{mn}}_{\text{应变率}} = \mathcal{G}_c(v). \quad (3.14)$$

其中 $\mathcal{G}_c(v)$ 为临界断裂能, v 是 Mode-I 裂纹的扩展速度。

双尺度动态演化方程的特点

- 损伤演化方程不含任何唯象参数。
- 同时刻画微结构尺寸、宏观应变、应变梯度、应变率效应及其耦合。
- 宏观应变项、应变梯度项、应变率项的系数分别与张量 \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{F} 对损伤变量 d 的导数相关联。

临界断裂能

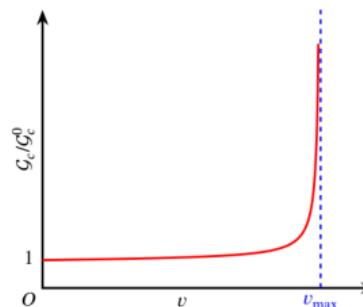


图 3.1: 临界断裂能 \mathcal{G}_c 与裂纹扩展速度 v 的经典依赖关系²。

Freund³给出 Mode-I 裂纹扩展的极限速度-Rayleigh 波速 C_R 的如下近似计算式:

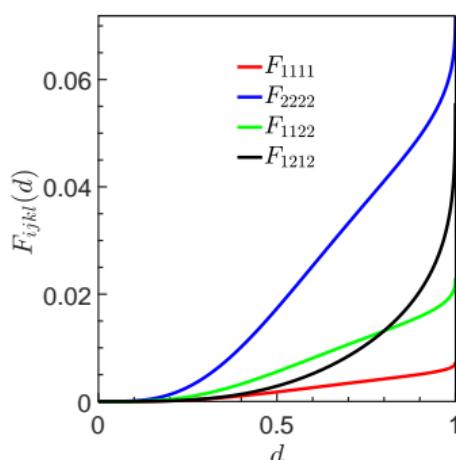
$$C_R \approx \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}, \quad (3.15)$$

为了拟合 \mathcal{G}_c 与 v 的依赖关系, 选取 $\mathcal{G}_c(v)$ 的如下形式:

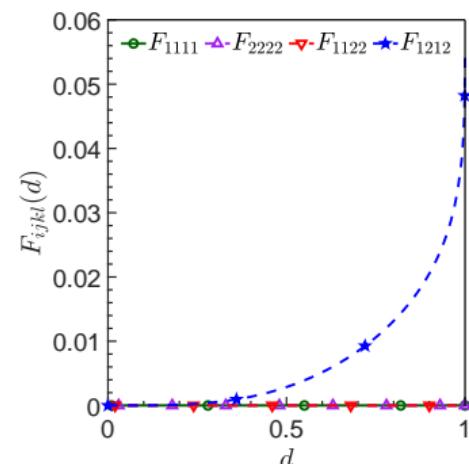
$$\mathcal{G}_c(v) = \mathcal{G}_c^0 \left(1 + \lambda \tan \left(\frac{\pi v}{2C_R} \right) \right). \quad (3.16)$$

²Gross D, Seelig T. Fracture mechanics: with an introduction to micromechanics [M]. Springer,2017.

³Freund L B. Dynamic fracture mechanics [M]. Cambridge university press, 1998.

F(d)

(a) 张开型裂纹面边界条件



(b) 接触型无摩擦裂纹面边界条件

图 3.2: $F_{ijkl} - d$ 曲线。

- 在张开型裂纹面边界条件下，**F** 的所有非零分量均随着 d 的增加而增加；
- 在接触型无摩擦裂纹面边界条件下，**F** 的分量 F_{1212} 与其余分量相比占有主导作用。

数值算例-模型求解算法及有限元程序集成

关于宏观动力学平衡方程的求解，我们对时间变量使用蛙跳格式进行离散，在空间上使用有限元离散。在 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ 时刻，根据已知位移 U_i^{n+1} 、应变 \mathcal{E}_{ij}^{n+1} 、应变梯度 $\mathcal{E}_{ij,k}^n$ ，先在每个单元的重心处通过向后欧拉格式计算应变速率 $\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{n+1} = \frac{\mathcal{E}_{ij}^{n+1} - \mathcal{E}_{ij}^n}{\Delta t}$ ，再求得 $n+1$ 时刻的损伤场 d^{n+1} 。

算法 2 求解 d^{n+1} 的数值算法。

- 1: 令 $d = d^n$;
- 2: 计算 $\mathcal{G}^{\text{dy}}(d) = -\frac{\varepsilon}{2}C'_{ijkl}(d)\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} - \frac{\varepsilon^3}{2}D'_{pqjmn}(d)\mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l} - \frac{\varepsilon^3}{2}\rho F'_{pqmn}(d)\dot{\mathcal{E}}_{pq}\dot{\mathcal{E}}_{mn}$, 其中 $\mathbf{C}'(d)$, $\mathbf{D}'(d)$, $\mathbf{F}'(d)$ 通过三次样条函数由离散数据点插值获得;
- 3: 如果 $\mathcal{G}^{\text{dy}} > \mathcal{G}_c(0)$, 利用牛顿迭代法求解关于 d 的非线性代数方程, 即 $\mathcal{G}_c\left(\frac{\varepsilon(d - d^n)}{2\Delta t}\right) = \mathcal{G}^{\text{dy}}(d)$, 获得 d ;
- 4: 更新 $d^{n+1} = d$;
- 5: 返回 d^{n+1} .

数值算例-局部力学响应

选取氧化铝材料作为数值实验样品，其物理参数为密度 $\rho = 3890 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E = 360 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.22$ ，静态临界断裂能 $\mathcal{G}_c^0 = 50.752 \text{ J/m}^2$ 。

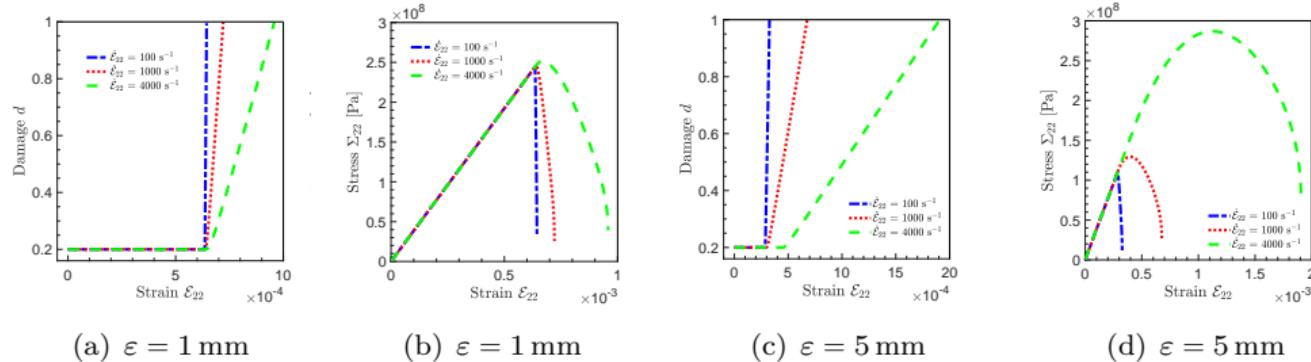
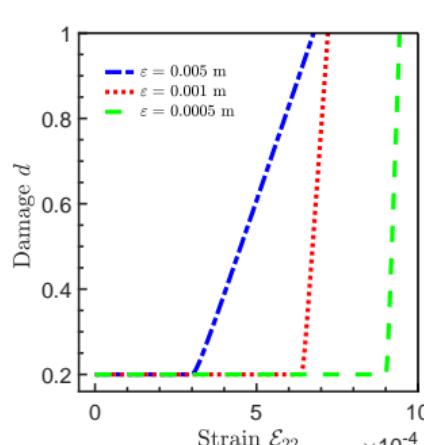


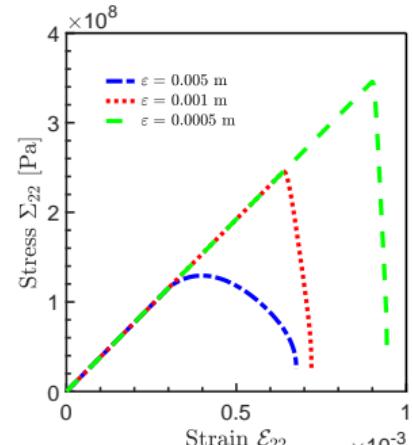
图 3.3: 初始损伤 $d_0 = 0.2$ 情形下, 应变率 $\dot{\mathcal{E}}_{22}$ 的影响。

当应变率逐渐增大时, 材料的延展性及断裂强度均得到增强。

数值算例-局部力学响应



(a) 损伤-应变曲线

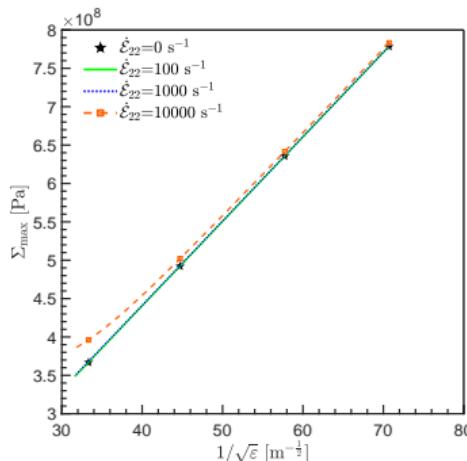


(b) 应力-应变曲线

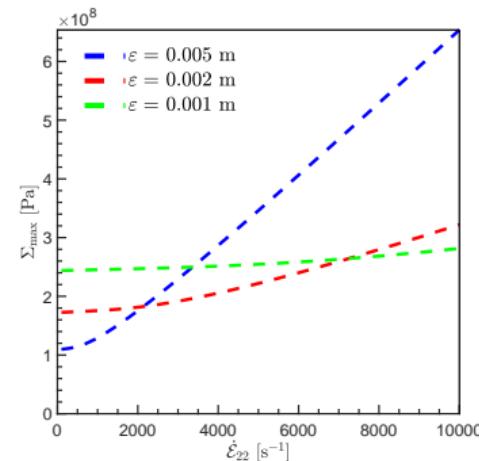
图 3.4: 应变速率 $\dot{\mathcal{E}}_{22} = 1 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 、初始损伤 $d_0 = 0.2$ 情形下，微结构尺寸 ε 的影响。

随着 ε 的增大，材料的断裂强度降低，材料延展性增强。

数值算例-局部力学响应



(a) 断裂强度-微结构尺寸曲线



(b) 断裂强度-应变率曲线

图 3.5: 初始损伤 $d_0 = 0.2$ 时, 断裂强度 Σ_{\max} 随 ε 、 $\dot{\varepsilon}_{22}$ 的变化曲线。

- 断裂强度与微结构尺寸 $\varepsilon^{-1/2}$ 近似为线性变化关系, 符合 Hall-Petch 关系。
- 随着微结构尺寸增大, 断裂强度的应变率敏感性逐渐增强。

数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 动态拉伸)

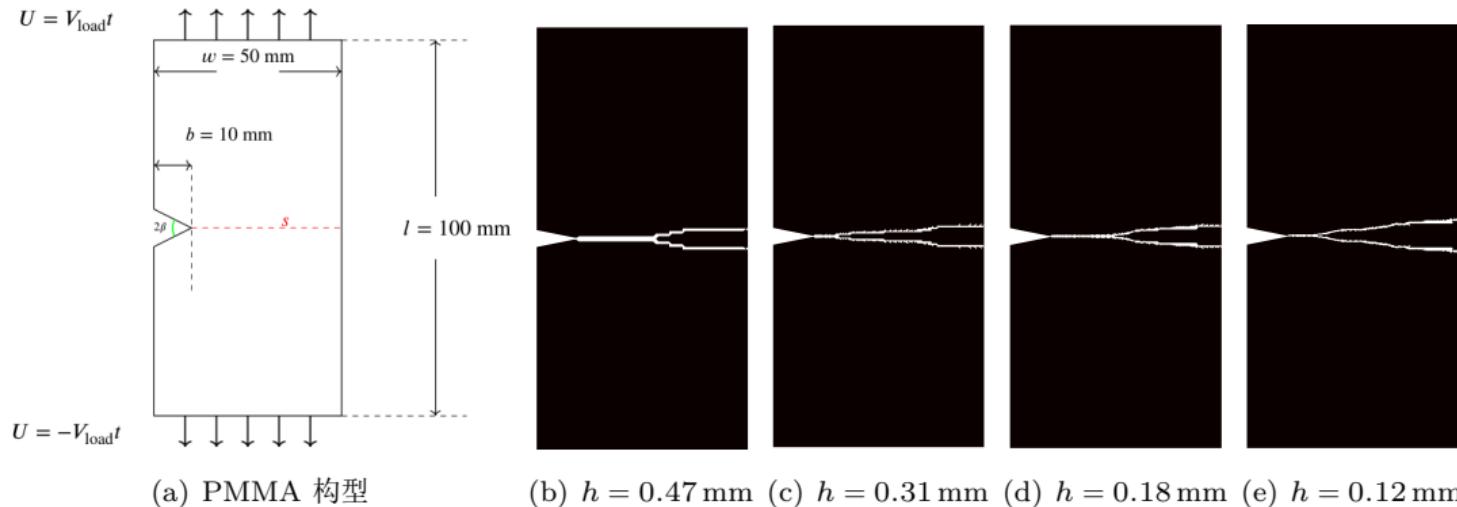


图 3.6: 加载速度 $V_{\text{load}} = 40 \text{ m/s}$ 下不同网格 PMMA 板的损伤区域。

不同的网格均观察到裂纹的分叉行为。

数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 动态拉伸)

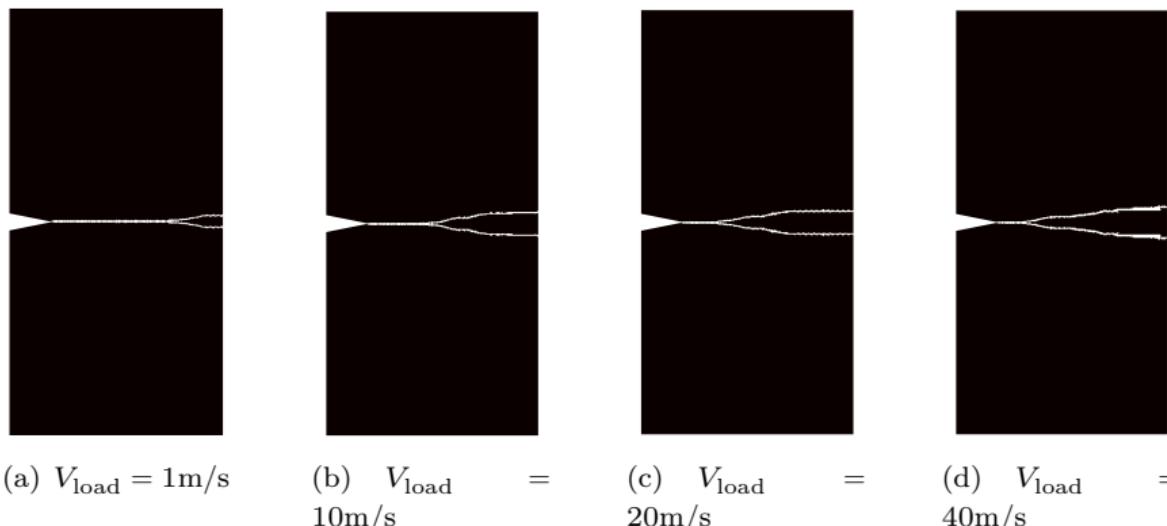
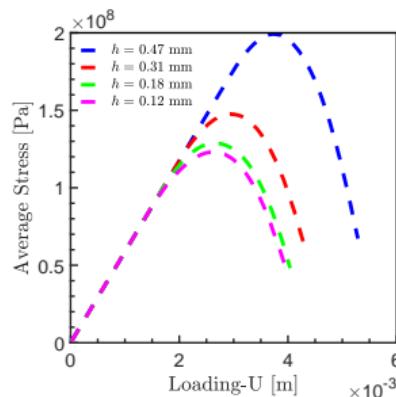


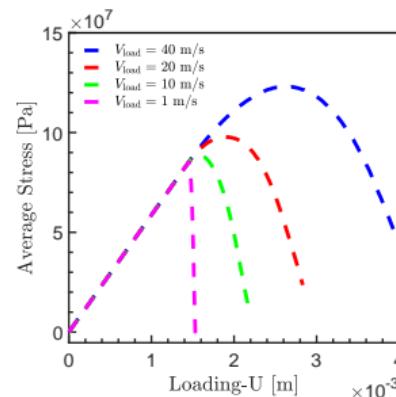
图 3.7: 不同加载速度的最终损伤区域。

加载速度的增大使得裂纹的分叉行为变得显著。

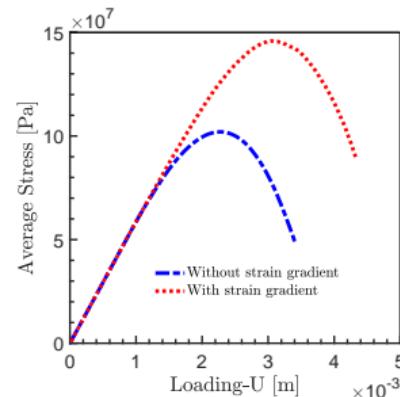
数值算例-宏观结构模拟 (PMMA 动态拉伸)



(a) 网格尺寸影响



(b) 加载速度影响

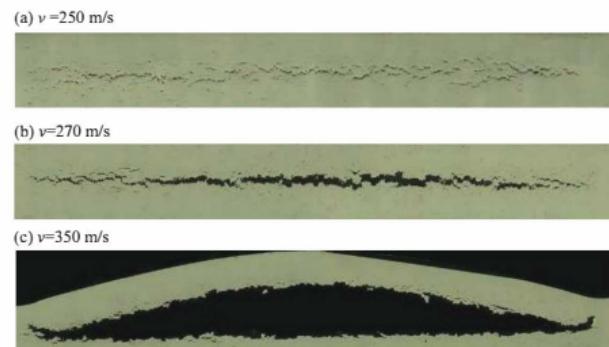


(c) 应变梯度影响

图 3.8: 应力位移曲线。

- 模型的计算结果随网格的加密呈收敛趋势；
- 加载速度的增大将增强材料的断裂强度及延展性；
- 应变梯度效应的引入增大了材料的断裂强度。

数值算例-宏观结构模拟（氧化铝层裂）



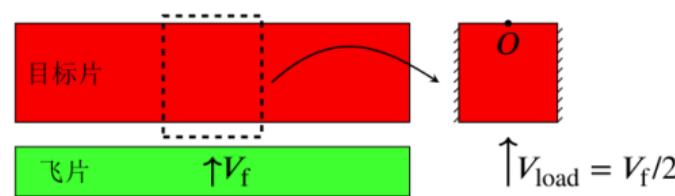
(a) 经典层裂现象。

(b) 层裂损伤区域⁴。

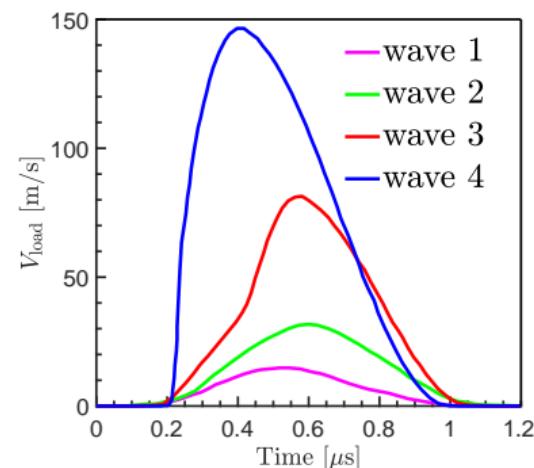
图 3.9: 层裂现象

⁴SHI Tongya, LIU Dongsheng, CHEN Wei, XIE Puchu, WANG Xiaofeng, WANG Yonggang. Dynamic tensile behavior and spall fracture of GP1 stainless steel processed by selective laser melting[J]. Explosion And Shock Waves, 2019, 39(7): 073101

数值算例-宏观结构模拟（氧化铝层裂）



(a) 平板冲击试验及简化模型: 单轴应变问题。



(b) 加载速度曲线。

图 3.10: 层裂简化模型及加载速度。

数值算例-宏观结构模拟（氧化铝层裂）

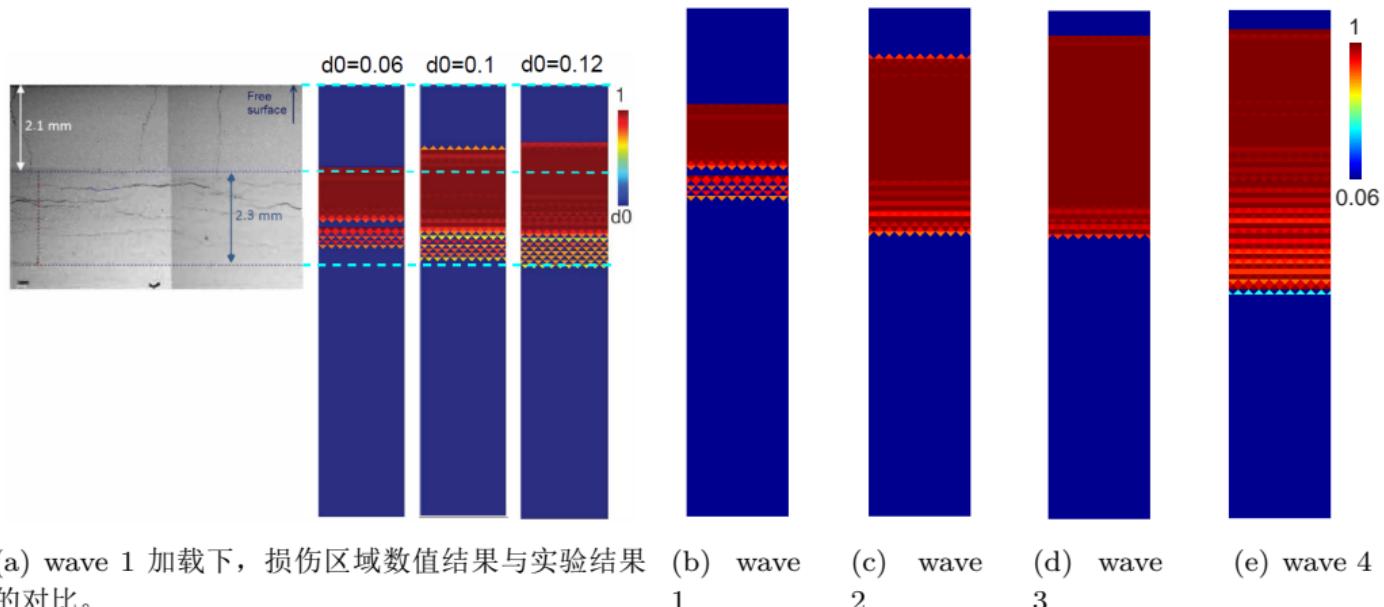
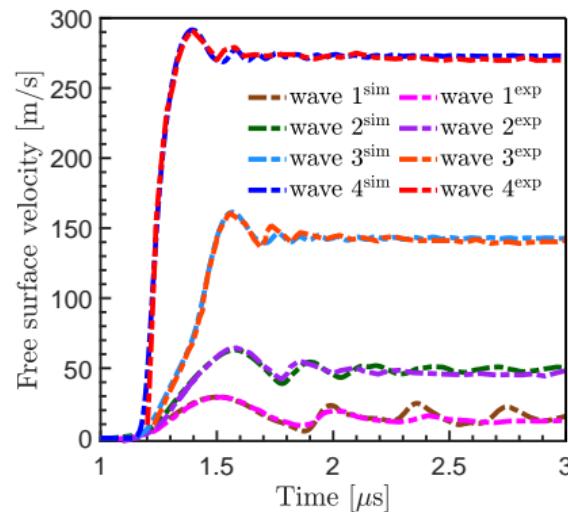


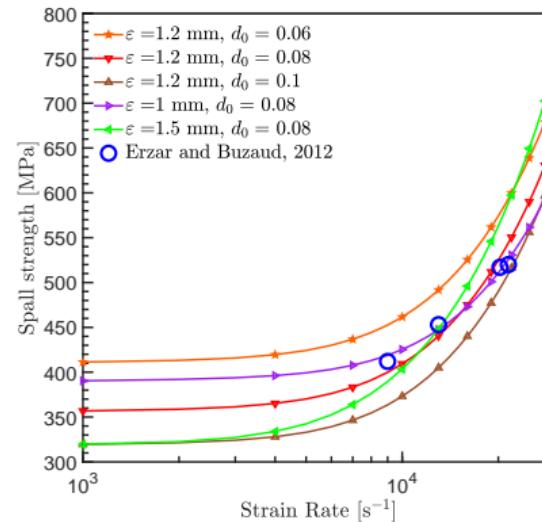
图 3.11: 不同加载波的层裂区域。

随着加载速度以及初始损伤的增大，最终的层裂区域逐渐增大。

数值算例-宏观结构模拟（氧化铝层裂）



(a) 自由面速度曲线的数值结果与实验结果对比。



(b) 层裂强度随应变率的变化关系。

图 3.12: 自由面速度曲线、层裂强度的数值结果与实验结果对比。

层裂强度的应变率敏感度随 ε 的增大而增大、随 d_0 变化不明显。

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

问题描述

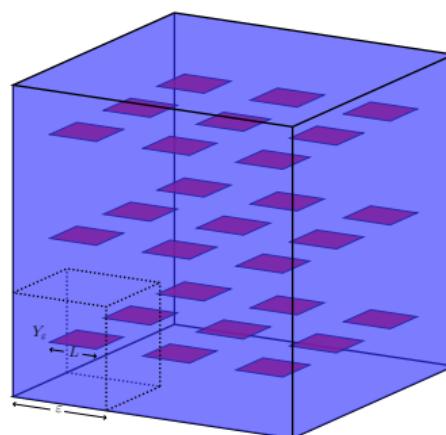


图 4.1: 三维 RVE 中, 周期分布的正方形微裂纹。

在三维情形下, 考虑微结构呈小周期正方形微裂纹分布的 RVE 构型, 用记号 C 表示所有微裂纹的集合, 则固体部分可以表示为 $B_s = \mathbb{R}^3 \setminus C$ 。考虑中心含有水平分布的正方形裂纹的正方体单胞 Y_ϵ , 裂纹面的边长记为 L , 则可计算出裂纹面的面积为 $S = L^2$ 。

双尺度分析

在细观周期 RVE 结构的固体区域 $B_s = \mathbb{R}^2 \setminus C$ 上考虑如下平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \quad \text{in } B_s, \quad (4.1)$$

引入函数空间：

$$\mathcal{D}(Y_s) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in [H_{\text{per}}^1(Y_s)]^3, \int_{Y_s} \mathbf{u} \, d\mathbf{y} = \mathbf{0} \right\}. \quad (4.2)$$

与二维情形类似，单胞函数 $\mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}(Y_s)$ 满足如下单胞方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkl} e_{ykl} (\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq}) = 0 & \text{in } Y_s \\ (a_{ijkl} e_{ykl} (\mathbf{N}^{pq}) + a_{ijpq}) n_j = 0 & \text{on } C_A, C_B. \end{cases} \quad (4.3)$$

宏观均匀化方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} e_{xkl} (\mathbf{u}^{(0)})) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

单胞能量分析

- 单胞应变能:

$$W = \frac{\varepsilon^3}{2} C_{pqkl} \langle e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}) \rangle \langle e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) \rangle + \frac{\varepsilon^5}{2} D_{pqjmnl} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_j} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_l} \right\rangle. \quad (4.5)$$

其中 **C**、**D** 分别为等效弹性模量、等效应变梯度模量。

- 单胞动能:

$$K = \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \left\langle \frac{\partial u_i^0}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial u_i^0}{\partial t} \right\rangle + \frac{\varepsilon^5}{2} \rho F_{pqmn} \left\langle \frac{\partial e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} \right\rangle. \quad (4.6)$$

其中 **F** 为等效惯性模量。

三维情形下计算的应变能与动能比二维的计算结果多乘了 ε^2 。

损伤动态演化方程

Griffith 断裂准则:

$$\mathcal{G}^{\text{dy}} = \mathcal{G}_c(v). \quad (4.7)$$

动态能量释放率 \mathcal{G}^{dy} :

$$\mathcal{G}^{\text{dy}} = -\frac{d(W + K)}{dS} \xrightarrow{S=\varepsilon^2 s} -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d(W + K)}{ds}. \quad (4.8)$$

微裂纹动态演化方程:

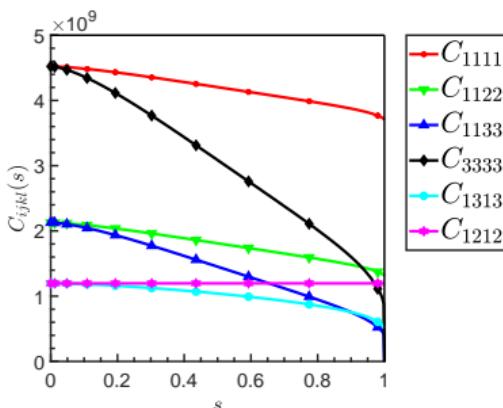
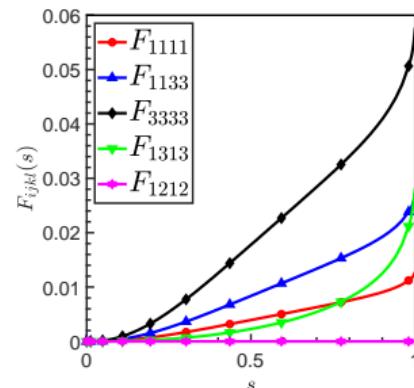
$$\mathcal{G} = -\frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{dC_{ijkl}(s)}{ds}}_{\text{应变}} \underbrace{\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl}}_{\text{应变}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \underbrace{\frac{dD_{pqjmnsl}(s)}{ds}}_{\text{应变梯度}} \underbrace{\mathcal{E}_{pq,j}\mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{应变梯度}} - \frac{\varepsilon^3}{2} \rho \underbrace{\frac{dF_{pqmn}(s)}{ds}}_{\text{应变率}} \underbrace{\dot{\mathcal{E}}_{pq}\dot{\mathcal{E}}_{mn}}_{\text{应变率}} = \mathcal{G}_c(v). \quad (4.9)$$

其中 $\mathcal{G}_c(v)$ 为临界断裂能, v 是 Mode-I 裂纹的扩展速度。

三维双尺度动态演化方程与二维的异同

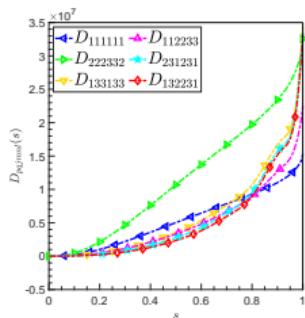
- 与二维情况下的动态演化方程在数学表达形式上是完全一致的。
- 损伤变量用归一化微裂纹面积 s 来刻画。

$\mathbf{C}(s)$ 与 $\mathbf{F}(s)$ (张开型裂纹面边界条件)

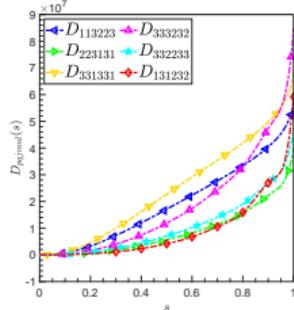
(a) $C_{ijkl} - s$ 曲线。(b) $F_{ijkl} - s$ 曲线。图 4.2: 张开型裂纹面条件, \mathbf{C} , \mathbf{F} 的非零独立分量随 s 的变化曲线。

- 除了 C_{1212} , \mathbf{C} 的各非零独立分量均为 s 的递减函数;
- 除了 F_{1212} , \mathbf{F} 的各非零独立分量均为 s 的递增函数。

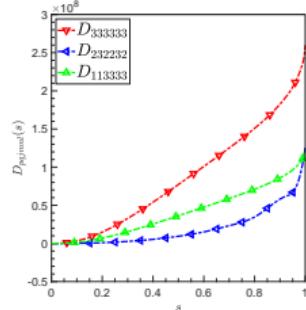
$D(s)$ (张开型裂纹面边界条件)



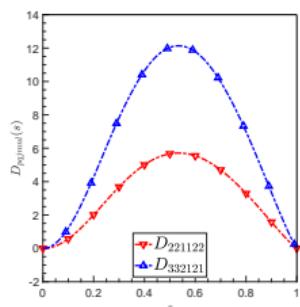
(a)



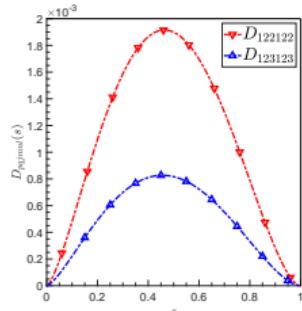
(b)



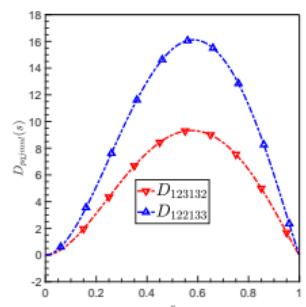
(c)



(d)



(e)



(f)

子图 (a),
(b), (c) 代
表张量 \mathbf{D}
的主导分
量。

子图 (d),
(e), (f) 代
表张量 \mathbf{D}
的次要分
量。

图 4.3: $D_{ijklmn} - s$ 曲线。

数值算例-局部力学响应

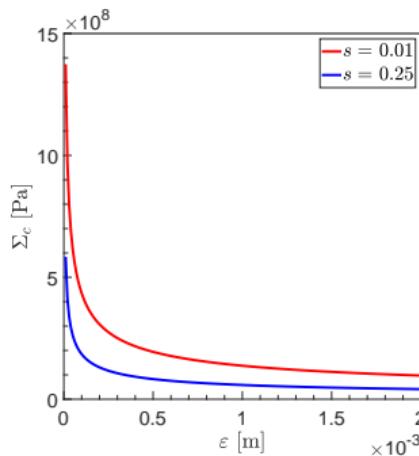
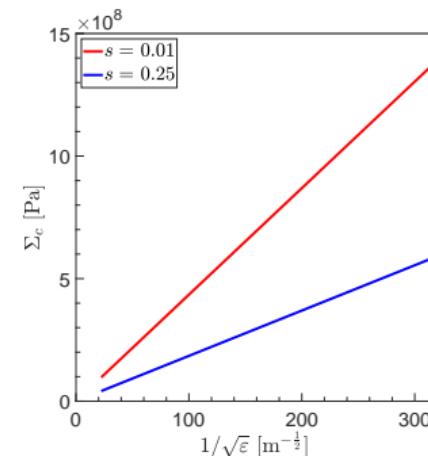
(a) $\Sigma_c - \varepsilon$ 曲线(b) $\Sigma_c - 1/\sqrt{\varepsilon}$ 曲线

图 4.4: 初始损伤 $s = 0.01$ 、 $s = 0.25$ 时，断裂强度随微结构尺寸变化的曲线。

断裂强度 Σ_c 与微结构参数 $\varepsilon^{-1/2}$ 满足 Hall-Petch 关系保持一致。

数值算例-局部力学响应

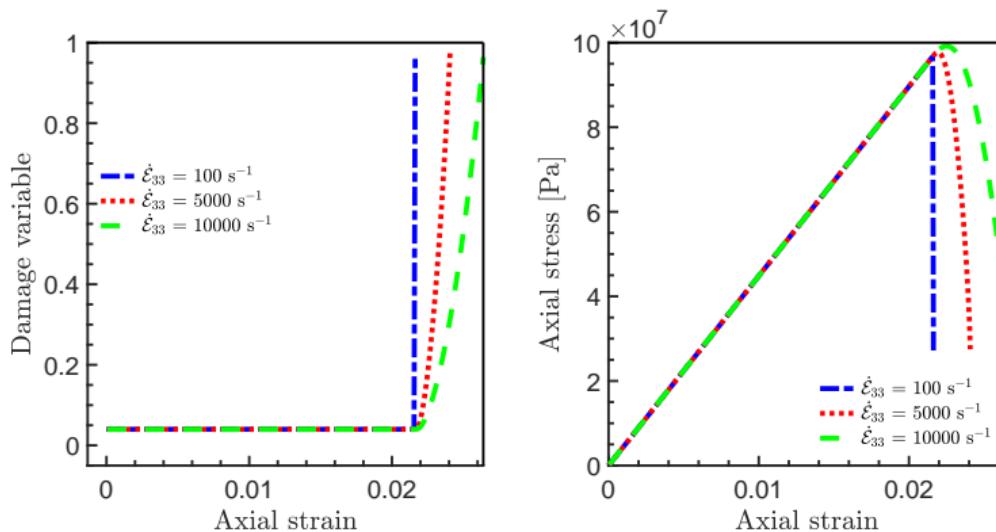


图 4.5: 微结构尺寸 $\varepsilon = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、初始损伤 $s_0 = 0.04$ 情形下，应变率 $\dot{\varepsilon}_{33}$ 的影响。

随着应变率的增大，材料的延展性及断裂强度均得到增强。

数值算例-局部力学响应

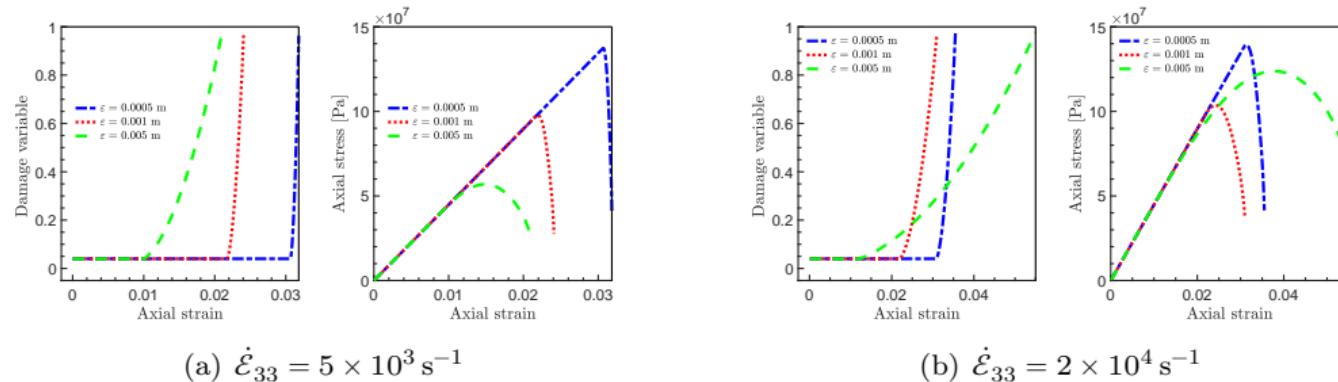


图 4.6: 初始损伤 $s_0 = 0.04$ 情形下, 微结构尺寸 ε 的影响。

- 低应变率下: 随着 ε 的增大, 材料的抗拉强度随之减小, 延展性得到增强;
- 高应变率下: 较大的 ε 使得材料的抗拉强度增强, 这是微结构尺寸与应变率对动态能量释放率的耦合作用结果。

数值算例-氧化铝层裂

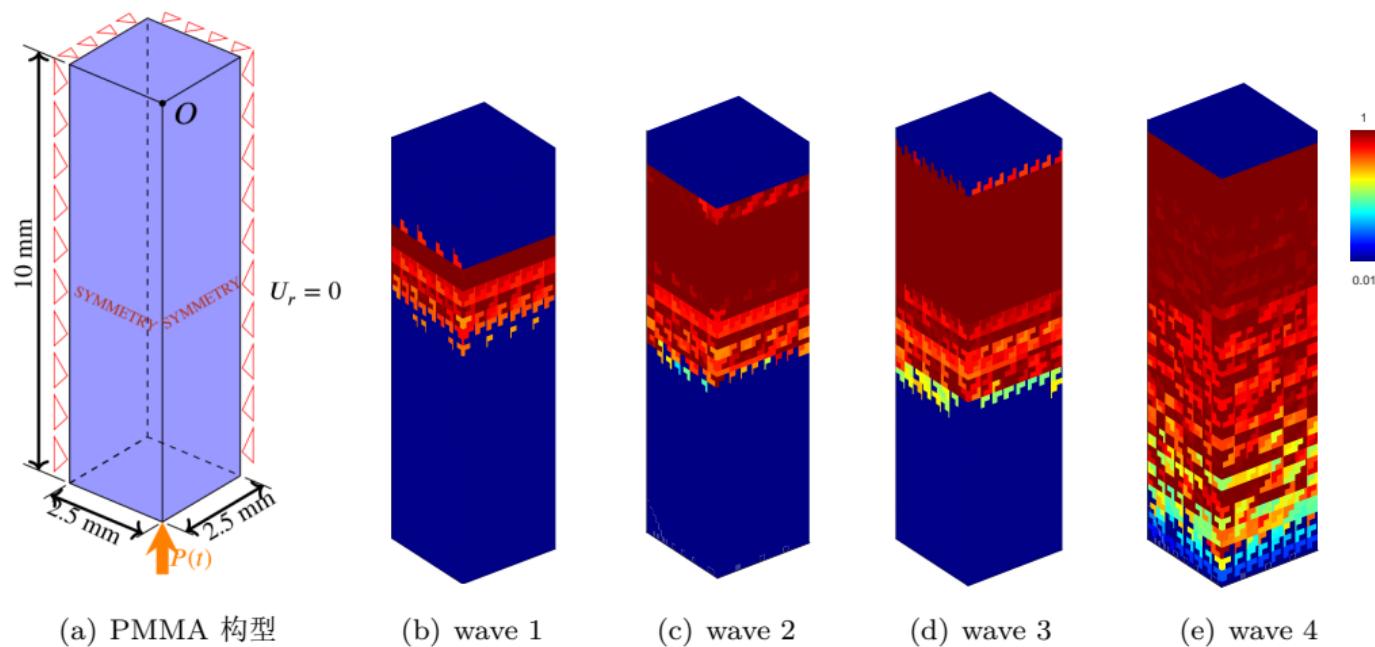


图 4.7: 四种冲击波加载下的最终损伤区 ($s_0 = 0.01$, $\varepsilon = 1 \text{ mm}$)。

数值算例-氧化铝层裂

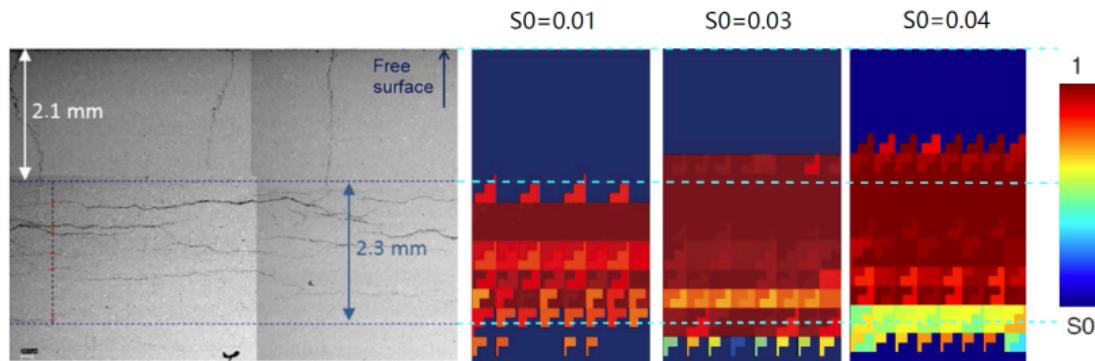
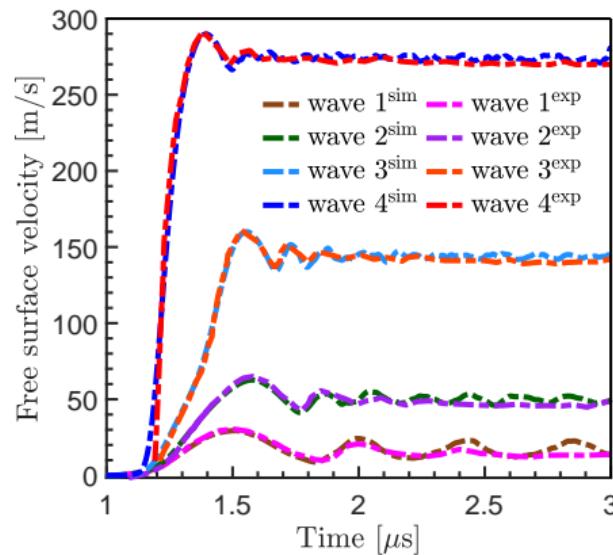


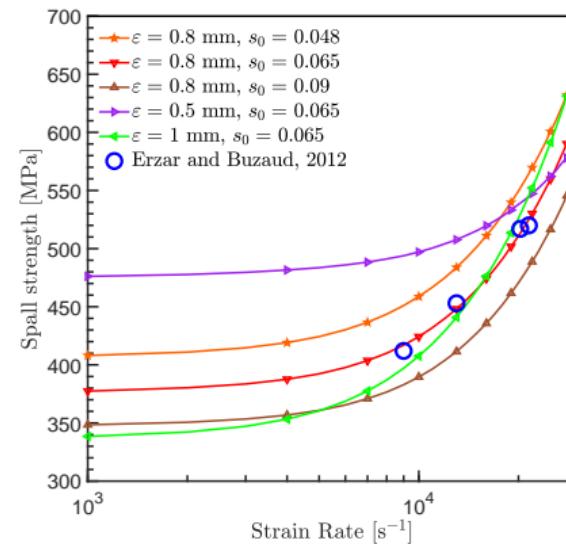
图 4.8: 损伤区域数值结果与实验结果的对比。

随着初始损伤 s_0 的增大，材料的损伤区域逐渐增大。

数值算例-氧化铝层裂



(a) 自由面速度曲线的数值结果与实验结果对比。



(b) 层裂强度随应变率的变化关系。

图 4.9: 自由面速度曲线、层裂强度的数值结果与实验结果对比。

自由面速度曲线、层裂强度的数值结果均与实验结果吻合良好。

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

二阶双尺度解及二阶单胞函数

前面的结果均基于位移解 \mathbf{u}^ε 的一阶多尺度近似得到, 下面考虑位移解 \mathbf{u}^ε 的二阶多尺度近似, 并给出相应的准静态断裂准则。

\mathbf{u}^ε 的二阶双尺度近似可表示为:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cdots \\ &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y}) e_{x_{pq}}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})) + \varepsilon^2 \mathbf{M}^{pwm}(\mathbf{y}) \frac{\partial e_{x_{pq}}(\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}))}{\partial x_m} + \cdots,\end{aligned}\quad (5.1)$$

其中 $\mathbf{N}^{pq}(\mathbf{y})$ 为一阶单胞函数、 $\mathbf{M}^{pwm}(\mathbf{y})$ 为二阶单胞函数。

二阶单胞函数 $\mathbf{M}^{pwm}(\mathbf{y}) \in \mathcal{D}^I(Y_s)$, 满足如下二阶单胞方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{M}^{pwm}(\mathbf{y})) + a_{ijkq} \mathbf{N}_k^{pm}(\mathbf{y}))}{\partial y_j} = C_{ipmq} - a_{ipmq} - a_{ipkj} e_{ykj}(\mathbf{N}^{qm}) \quad \text{in } Y_s \\ [a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{M}^{pwm}(\mathbf{y})) + a_{ijkq} \mathbf{N}_k^{pm}(\mathbf{y})] n_j = 0 \quad \text{on } C_A, C_B. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

准静态二阶双尺度断裂准则

将位移解 \mathbf{u}^ε 的二阶双尺度近似带入到局部 RVE 的应变能公式，便可得到应变能 W 的高阶双尺度表达式，再结合 Griffith 准则便可以给出如下准静态二阶双尺度断裂准则，这里对详细的推导过程不再赘述。

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-\frac{\varepsilon}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} - \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{dD_{pqjmnl}(d)}{dd} \mathcal{E}_{pq,j} \mathcal{E}_{mn,l}}_{\text{一阶多尺度结果}} \\
 & \underbrace{-\varepsilon^3 \left(\frac{dP_{jpmnrs}(d)}{dd} \mathcal{E}_{mn,pj} \mathcal{E}_{rs} + \frac{dH_{rsmnpq}(d)}{dd} \mathcal{E}_{mn,p} \mathcal{E}_{rs,q} \right)}_{\varepsilon^3 \text{的附加贡献}} \\
 & \underbrace{-\frac{\varepsilon^5}{2} \frac{dL_{jlrsmnpq}(d)}{dd} \mathcal{E}_{mn,pj} \mathcal{E}_{rs,ql}}_{\text{高阶贡献}} = \mathcal{G}_c.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中，宏观应变二重梯度记号定义如下：

$$\mathcal{E}_{ij,kl} = \left\langle \frac{\partial e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial x_k \partial x_l} \right\rangle. \tag{5.4}$$

从该准则可以发现，引入二阶多尺度修正解后， ε^3 对应的应变梯度贡献被完整地引入到断裂准则。

等效张量 \mathbf{H} , \mathbf{P} , \mathbf{L}

断裂准则中的六阶张量 \mathbf{H} , 六阶张量 \mathbf{P} , 八阶张量 \mathbf{L} 定义如下:

$$\begin{aligned} H_{rsmnpq} &= \int_{Y_s} a_{ijkq} e_{yij}(\mathbf{M}^{mnp}) \mathbf{N}_k^{rs} dy + \frac{1}{2} \int_{Y_s} a_{ijkl} e_{yij}(\mathbf{M}^{mnp}) e_{ykl}(\mathbf{M}^{rsq}) dy, \\ P_{jpmnrs} &= \int_{Y_s} (a_{ijrs} + a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{N}^{rs})) \mathbf{M}_i^{mnp} dy, \\ L_{jlrsmnpq} &= \int_{Y_s} a_{ijkl} \mathbf{M}_i^{mnp} \mathbf{M}_k^{rsq} dy. \end{aligned} \tag{5.5}$$

可以发现这些张量均依赖于归一化裂纹长度 d , 它们的构造仍需要在计算出离散点数据之后, 使用三次样条插值得到连续可导的函数 $H_{rsmnpq}(d)$, $P_{jpmnrs}(d)$ 及 $L_{jlrsmnpq}(d)$ 。

大纲

- ① 研究背景和意义
- ② 二维准静态脆性断裂双尺度模型
- ③ 二维动态脆性断裂双尺度模型
- ④ 三维脆性断裂双尺度模型
- ⑤ 基于二阶双尺度渐近展开的初步结果
- ⑥ 总结与展望

总结

- 基于微裂纹扩展的 Griffith 准则以及宏-细观双尺度渐近展开理论，建立了同时表征材料微结构尺寸、应变梯度和应变速率效应及三者耦合的二维及三维双尺度断裂力学模型，完成了数值模拟程序研制并开展了应用研究。
- 模型构建严格依赖于双尺度渐近展开理论，不依赖于唯象假设与可调参数；模型输入参数集仅包含最基本的物质参数，即密度、弹性模量和断裂能。
- 双尺度脆性断裂模型具有良好的预测性，能描述微结构尺寸效应、应变梯度效应和应变速率效应及三者耦合的复杂物理现象；应用于准静态加载下的结构断裂问题以及强冲击加载下的层断裂问题，均给出了经实验验证的数值模拟结果。

展望

- 考虑将双尺度渐近分析应用于 Mode-II, Mode-III 及混合模式的断裂问题。
- 扩展双尺度断裂模型，考虑弹塑性本构。
- 扩展双尺度断裂模型，引入热-力耦合效应。
- 扩展双尺度断裂模型，考虑微结构分布的随机性。

完

谢谢大家!!