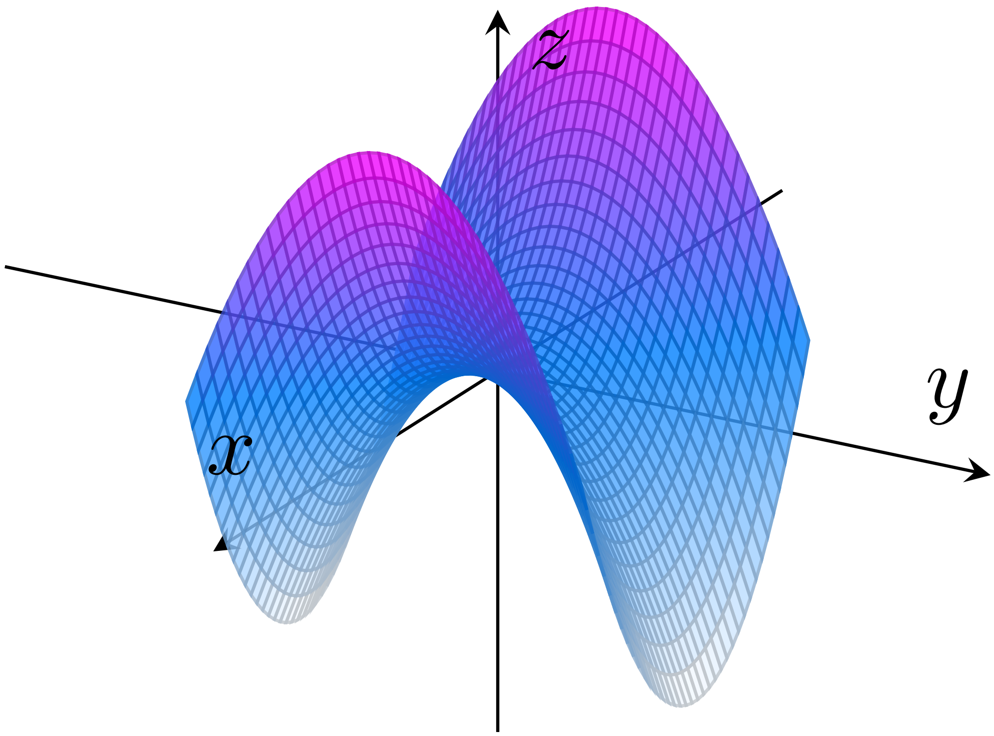
# 解析几何习题集

## 代数思想在解析几何中的应用





作　者：饶一鹏

邮　箱：raoyipeng@qq.com

中国科学院数学与系统科学研究院


2020 年 8 月 20 日

**题 1** (第五章第 9 题)**.** 设二阶曲面 $\Sigma$ 与平面 $\pi$ 相交，交线为圆，则用与 $\pi$ 平行的平面来截二阶曲面 $\Sigma$，截口一定也是圆（包含点圆和虚圆）。

证明. 设平面 $\pi$ 的方程为:

$$mx + ny + kz + t = 0$$

其法向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (m,\ n,\ k)$。

先取向量 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$，使 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$，再作 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的叉积 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$。将 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 单位化记为 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$，我们用 $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 作为新的正交基向量，此时三个向量仍构成右手系成为坐标系 $Ox'y'z'$.

设二阶曲面的方程 (二次项系数矩阵记为 $A$，一次项矩阵记为 $B$) 为:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0 \tag{1}$$

且存在正交阵 $Q$ 使得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\beta}} & \bar{\boldsymbol{\gamma}} & \bar{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} Q$，由此得到 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$，代入(1)式得:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} QAQ^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + BQ^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c = 0 \tag{2}$$

我们记 $QAQ^T = M(m_{ij})\ (i,\ j = 1,2,3)$， $BA^T = N(n_i)\ (i = 1,2,3)$，写明白即为:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c = 0 \tag{3}$$

此时，平面 $\pi$ 平行于 $x'Oy'$ 平面，$\pi$ 方程即为 $z' = p$（常值），要使其截面为圆（含虚圆、点圆）的充要条件是:

$$m_{11} = m_{22} \neq 0,\ m_{12} = m_{21} = 0$$

而此时与 $\pi$ 平行的平面也必定与 $x'Oy'$ 平面平行，所以方程仍为 $z' = p$ 的形式。将 $z' = p$ 带入后最终方程中系数 $m_{11}$, $m_{22}$, $m_{12}$, $m_{21}$ 显然不受影响。若截面存在则为圆，若截面仅有一点则退化为点圆，若无交点则为虚圆，证完。 □

**推论 1.** 若二次曲面 $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ 的二次项系数完全相同，且平面 $\pi$ 与 $\Sigma_1$ 的交线为圆，则 $\pi$ 与 $\Sigma_2$ 的交线也为圆（包含点圆与虚圆）。

证明. 因为 $\Sigma_1$ 与 $\pi$ 交线为圆，则按上述相同的证明过程，得到二次型的系数

$$m_{11} = m_{22} \neq 0,\ m_{12} = m_{21} = 0$$

而 $\Sigma_2$ 与 $\Sigma_1$ 有相同的二次项系数，故二次项系数矩阵 $A$ 不变，又正交矩阵 $Q$ 由平面 $\pi$ 决定，故在新坐标系下对 $\Sigma_2$ 其方程系数仍有上述关系，从而结论成立。 □

下面用 题 1 的思想来求解第三章习题 26，27，28。

**题 2** (第三章第 26 题)**.** 求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a>b>c>0)$ 上的圆截口。

**解.** 设满足条件的平面 $\pi: mx+ny+kz+t=0$，若 $z$ 轴与该平面平行，此时截线显然不封闭，故不可能为圆。

记 $S=\sqrt{m^2+n^2+k^2}$，$(k\neq 0)$，$\boldsymbol{\alpha}=\left(\dfrac{m}{S},\ \dfrac{n}{S},\ \dfrac{k}{S}\right)$，取 $\boldsymbol{\beta}=\left(\dfrac{1}{L},\ 0,\ -\dfrac{m}{kL}\right)$，其中 $L=\sqrt{1+\dfrac{m^2}{k^2}}$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\left(-\dfrac{mn}{kSL},\ \dfrac{k^2+m^2}{kSL},\ -\dfrac{n}{SL}\right)$。

仍记二次项系数矩阵为 $A$，由 题 1. 中的证明过程，我们有：

$$Q^T=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L} & -\dfrac{mn}{kSL} & \dfrac{m}{S}\\ 0 & -\dfrac{k^2+m^2}{kSL} & \dfrac{n}{S}\\ -\dfrac{m}{kL} & -\dfrac{n}{SL} & \dfrac{k}{S}\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{c^2}\end{pmatrix}\tag{4}$$

我们延用题 1. 证明过程中的记号，代入得：

$$\begin{aligned}m_{11}&=\frac{1}{a^2L^2}-\frac{m^2}{c^2k^2L^2},\\ m_{22}&=\frac{m^2n^2}{a^2k^2S^2L^2}+\frac{(k^2+m^2)^2}{b^2k^2S^2L^2}-\frac{n^2}{c^2S^2L^2},\\ m_{12}&=m_{21}=-\frac{mn(a^2+c^2)}{kSL^2a^2c^2}\end{aligned}\tag{5}$$

则必有 $mn=0$。

- 若 $n=0$，由 $a>b>c>0$ 及 $m_{11}=m_{22}$ 可导出矛盾！
- 若 $m=0$，则有：

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)n^2=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)k^2\implies\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}n=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}k$$

从而得平面方程 $\pi: y=\pm\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{a^2-b^2}}z+h$（其中 $h$ 为常数）满足条件。

**题 3** (第三章第 27 题)**.** 求双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,(a>b>c>0)$ 上的圆截口.

**解.** 此双叶双曲面与题 2中单叶双曲面二次项系数完全相同，由 推论 1知，此时满足条件的平面 $\pi$ 方程为 $y=\pm\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{a^2-b^2}}z+h$。(其中 $h$ 为常数。)

**题 4** (第三章第 28 题)**.** 求椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z\ (a>b>0)$ 上的圆截口.

**解.** 同样地，我们设满足条件的平面 $\pi: mx+ny+kz+t=0$，（很显然 $k\neq 0$，否则截线无界不可能为圆)，此时有同样的正交矩阵 $A$，不同的是二次项系数矩阵变为：

$$A_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

我们仍用题 2的证明过程中的记号，代入得：

$$\begin{aligned} m_{11}&=\frac{1}{a^2L^2},\\ m_{22}&=\frac{m^2n^2}{a^2k^2S^2L^2}+\frac{(k^2+m^2)^2}{b^2k^2S^2L^2},\\ m_{12}&=m_{21}=-\frac{mn}{ka^2SL^2}\end{aligned} \tag{7}$$

则必有 $mn=0$。

- 若 $n=0$，由 $a>b>0$ 及 $m_{11}=m_{22}$ 可导出矛盾!
- 若 $m=0$，则得到：$\frac{n^2}{k^2}=\frac{a^2-b^2}{b^2}$，即 $\frac{n}{k}=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，从而得平面方程 $\pi: y=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}z+h$.（其中，$h$ 为常数）满足条件。

**题 5** (第四章第 28 题)**.** 证明：对于二阶中心曲面，也只有二阶中心曲面，每一方向与它们共轭的径平面之间一一对应。

即有：

- 每一方向有唯一的与之共轭的径平面；
- 每一个过中心的平面也有唯一的与之共轭的方向.

证明. 对于二阶中心曲面，把其二次项系数矩阵记为 $A$，它无奇异方向，故下面方程仅有零解.

$$\begin{cases}\Phi_1(X,\ Y,\ Z)=0\\ \Phi_2(X,\ Y,\ Z)=0\\ \Phi_3(X,\ Y,\ Z)=0\end{cases}$$

这得到 $A$ 为满秩，故每个方向有与之共轭的径平面 (准确说是径平面一次项系数不全为 0，所以存在).

唯一性：对于确定的二阶曲面，对 $\forall\boldsymbol{\alpha}=(X,\ Y,\ Z)$ 的共轭径平面是确定的，可写为:

$$\Phi_1(X,Y,Z)x+\Phi_2(X,Y,Z)y+\Phi_3(X,Y,Z)z+b_1X+b_2Y+b_3Z=0$$

若另有方向 $\boldsymbol{\beta}=(X',\ Y',\ Z')$，其共轭径平面与上述平面相同，则对比一次项系数就有：

$$A\begin{pmatrix}X-kX' & Y-kY' & Z-kZ'\end{pmatrix}^T=\mathbf{0}$$

又 $A$ 满秩，即得：$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$（$k\neq 0$ 为常数），即这两个方向共线，从而唯一性成立。

对于中心二阶曲面，其二次项系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

为满秩实对称矩阵。

对于每个过中心的平面 $\pi: ax+by+cz+d=0$，设中心为 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则由 $A$ 满秩可知如下方程

$$A\begin{pmatrix}X & Y & Z\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}^T$$

有唯一解 $M=\begin{pmatrix}X_0 & Y_0 & Z_0\end{pmatrix}^T$，只需说明 $\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}M=d$ 就得到此方向即为唯一共轭方向 (共线的视为同一方向)。

由于 $P$ 为中心及 $\pi$ 过 $P$ 点则有：

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T&=\mathbf{0}\\ \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}^T+d&=0\end{aligned}\tag{8}$$

则由 (8) 及 $A$ 对称性得：

$$\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}M=-\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}AM=-\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}^T=d$$

若二阶曲面有中心，则它不能有奇异方向，否则对于奇异方向其共轭的径平面不存在，所以只能是中心二阶曲面；若二阶曲面无中心，此时二次项系数矩阵 $A$ 也必为降秩的，则方程 $AX^T=0$ 此时必有非零解，此解即为一个奇异方向，即此时必存在奇异方向，同样不满足题意。

综上，命题得证。 □

**题 6** (第四章第 29 题)**.** *如果对于二阶曲面 $\Sigma$，平面 $\pi$ 上有三个不同的渐近方向 (共线的视为同一渐进方向)，则平面 $\pi$ 上的每一个方向都是渐进方向。进一步证明：二阶曲面 $\Sigma$ 一定存在奇异方向.*

证明. 我们延用 题 1 中二次项系数矩阵的记号 $A$。

设三个方向为 $\boldsymbol{\alpha}_i=(X_i,\ Y_i,\ Z_i),(i=1,2,3)$，则有：

$$(X_i\quad Y_i\quad Z_i)A(X_i\quad Y_i\quad Z_i)^T=0$$

因为三个方向不同，则其中两个方向 (不妨就为 $i=1,\ i=2$) 可以线性表出另一个，由此得到 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 互相共轭，又平面 $\pi$ 上每一个方向 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\mu\boldsymbol{\alpha}_2$. (即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出)，不难验证 $\boldsymbol{\beta}$ 为渐进方向，再由 $\boldsymbol{\beta}$ 的任意性知命题第一部分成立.

对于命题第二部分，我们仅需说明二次项系数矩阵 $A$ 是降秩的。

由于它为实对称矩阵，倘若它是满秩，其特征值不可能全为正或全为负 (否则它为正定或负定矩阵，与存在渐进方向矛盾！)，由第一部分我们知道，方程 $XAX^T=0$ 的解包含一个平面，若它满秩，则其必有形式：$ax^2+by^2-cz^2=0\ \ (a,\ b,\ c>0)$，很显然，这是一个顶点在原点的锥面（非平面)，它不可能包含某个平面，矛盾！

故 $A$ 为降秩矩阵，从而方程 $AX^T=0$ 有非零解 $X_0^T$，即二阶曲面有奇异方向 $X_0^T$，证完. □

**题 7** (第四章第 30 题)**.** 如果二阶曲面 $\Sigma$ 仅有一个渐进方向，则它一定也是奇异方向。

证明. 考虑方程

$$XAX^T = 0$$

则知该方程仅有一个线性无关解，因为 $A$ 为对称的实矩阵，作正交变换 $X = YP$($P$ 为正交阵)，使 $PAP^T$ 为对角型

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}$$

则 $Y\Lambda Y^T = 0$ 有且仅有一个线性无关解，现来说明 $\Lambda$有且仅有一个特征值为 0，而另外两个特征值同号。若不然，若其特征值全不为 0：

- 若三个特征值同号，则无渐进方向，矛盾！
- 若有两个特征值异号，渐进方向不唯一，矛盾！

故其必有特征值 0，

- 若 0 为重特征值，则渐进方向不唯一，矛盾！
- 所以 0（不妨设为 $\lambda_1$）必为单特征根，另两个特征值必同号.

由 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0 \implies y_2 = y_3 = 0$，得其非零解为 $Y_0 = (k \quad 0 \quad 0)(k \neq 0)$，此时

$$AX_0^T = P^T PAP^T Y_0^T = P^T \Lambda Y_0^T = P^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

即 $X_0^T = P^T Y_0^T \neq \mathbf{0}$ 为奇异方向. □

**题 8** (第四章第 31 题)**.** 如果二阶曲面 $\Sigma$ 是线心曲面，则过中心直线的每一平面都是径平面.

证明. 仍然延用 题 2 中的记号，由于 $\Sigma$ 为线心曲面，故其仅有一个奇异方向，从而得到二次项系数矩阵 $A$ 的秩为 2。

设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为该曲面的一个中心，$\overrightarrow{n} = (X_0,\ Y_0,\ Z_0)$ 为其奇异方向，则中心直线 $l$ 的方程为

$$\frac{x - x_0}{X_0} = \frac{y - y_0}{Y_0} = \frac{z - z_0}{Z_0}$$

设经过直线 $l$ 的平面方程为 $\pi : ax + by + cz + d = 0$，我们仅需找到一个方向 $\overrightarrow{n_1} = (X \quad Y \quad Z)$，使得该方向共轭的径平面为 $\pi$ 即可。

我们仅需说明在如下条件成立时：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}^T + d = 0 \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{pmatrix}^T = 0 \tag{10}$$

$$A \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T = \mathbf{0} \tag{11}$$

$$A \begin{pmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \end{pmatrix}^T = \mathbf{0} \tag{12}$$

如下方程有非零解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{13}$$

先来考虑方程:

$$A \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T \tag{14}$$

由 (10), (12) 式以及 $r(A) = 2$，得如下方程组有非零解 $(X_0 \quad Y_0 \quad Z_0)^T$。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

记其系数矩阵为 $K$，则有 $3 - r(K) \geq 1 \implies r(K) \leq 2$，又 $r(K) \geq r(A) = 2$，故矩阵 $K$ 的秩为 2，再由 $A$ 的对称性知，$K$ 即为 (14) 的增广矩阵的转置，故 (14) 的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩，它有非零解 $(X_1 \quad Y_1 \quad Z_1)^T$，再由 (11) 及 $A$ 为实对称矩阵得到 $(b_1 \quad b_2 \quad b_3) = -(x_0 \quad y_0 \quad z_0)A$，则有:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \overset{(14)}{=\!=} -\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{(9)}{=\!=} d$$

即 (14) 的解 $(X_1 \quad Y_1 \quad Z_1)^T$ 也为 (13) 的解，即方程 (13) 有解，证完。 □

**题 9** (第五章第 10 题)**.** 二阶曲面 $\Sigma$（不是平面），如果 $\Sigma$ 由两族直线组成，则其必为单叶双曲面或双曲抛物面。

证明. 由于任何二阶曲面可以化为标准型，故我们不妨直接考虑标准型。下面仅对二次项系数矩阵 $A$ 的特征值情况来说明如下:

- 若 $A$ 的特征值（设为 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$）全不为零。
  - 若三个特征值同号，则此时二阶曲面为椭球面是有界的曲面，故它不可能由两族直线组成。
  - 若三个特征值不同号，方程必可化为 $ax^2 + by^2 - cz^2 = d$ $(a,\ b,\ c > 0)$
    - 若 $d = 0$，此时它为一个顶点在原点的锥面，此时 $\Sigma$ 由一族直线组成，矛盾!
    - 若 $d < 0$，此时它为双叶双曲面，若它包含一个直线，则该直线必在它的一支上，这是不可能的!
    - 若 $d > 0$，此时它为单叶双曲面，满足题意。

- 若 $A$ 有零特征值，则零特征值不可能为三重。(否则退化为平面)

– 若有两个特征值为 0(不妨为 $\lambda_2=\lambda_3=0$)，方程必可化为 $ax^2+by=d$，$(a\neq 0)$。

  * 若 $b=0$，此时它退化为平面，矛盾！
  * 若 $b\neq 0$，此时它为抛物柱面，它是由一条直线沿一条抛物线平移形成，不能由两族直线组成！

– 若仅有一个特征值为 0（不妨为 $\lambda_3=0$），方程必可化为 $ax^2+by^2+cz=d,(a>0,b\neq 0)$

  * 若 $c=0$，$b>0$，此时曲面不存在或为椭圆柱面或退化为一点，不满足题意！
  * 若 $c=0$，$b<0$，此时曲面为两个相交的平面或双曲柱面，不满足题意！
  * 若 $c\neq 0$，$b>0$，此时曲面为椭圆抛物面，它不可能包含直线！
  * 若 $c\neq 0$，$b<0$，此时曲面为双曲抛物面，满足题意。

综上，即得到命题结论。 □

**注**

设二次曲面 $\Sigma$ 二次项系数矩阵为 $A$，则两方向 $\overrightarrow{n_1}=(X_1,Y_1,Z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(X_2,Y_2,Z_2)$ 互相共轭写成矩阵形式即为：

$$\begin{pmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}X_2\\ Y_2\\ Z_2\end{pmatrix}=0$$

这在以下题 10，题 11证明过程中不再赘述。

**题 10** (第四章第 26 题)**.** 证明：空间中椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,\ b,\ c>0)$ 的三个相互共轭的半径的平方和是常数。

证明. 我们仅需说明从原点引出三条相互共轭的半径，交椭球面于 $A$，$B$，$C$ 三点，则 $|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2$ 为常数. 设其坐标分别为 $(x_i,\ y_i,\ z_i)$，$(i=1,\ 2,\ 3)$，则有：

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}=E$$

由矩阵逆的性质 不难得到：

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2}\end{pmatrix}=E$$

再对比对角元得：

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= a^2\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2 &= b^2\\ z_1^2+z_2^2+z_3^2 &= c^2\end{cases}\tag{15}$$

将上述三个等式相加即得：$|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2=a^2+b^2+c^2$. □

**题 11** (第四章第 27 题)**.** 在空间中单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a,\ b,\ c>0)$ 上取两点 $P_1$，$P_2$，而在双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 上取一点 $P_3$，使 $OP_1$，$OP_2$，$OP_3$ 相互共轭（也称为是三个相互共轭的半径），则：

$$|OP_1|^2+|OP_2|^2-|OP_3|^2=a^2+b^2-c^2$$

证明. 设 $P_i$ 的坐标为 $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $(i=1,\ 2,\ 3)$，则有：

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

在 (16) 式两端右乘矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则得到：

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & -y_3 \\ z_1 & z_2 & -z_3 \end{pmatrix}=E$$

同样，由矩阵逆的性质 得到：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_2 & -y_3 \\ z_1 & z_2 & -z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}=E$$

再对比对角元素得：

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_3^2 & =a^2 \\ y_1^2+y_2^2-y_3^2 & =b^2 \\ z_1^2+z_2^2-z_3^2 & =-c^2 \end{cases}$$

将上述三个等式相加即得：$|OP_1|^2+|OP_2|^2-|OP_3|^2=a^2+b^2-c^2$ □

**题 12** (数学专业竞赛)**.** 证明：与曲面 $\Sigma: ax^2+by^2+cz^2=1$，$(abc\neq 0)$ 相切的三个互相垂直的平面的交点在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 上。

证明. 设 $\pi_1$，$\pi_2$，$\pi_3$ 为满足题设的三个平面，三个平面与曲面 $\Sigma$ 切于三点 $P_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $(i=1,\ 2,\ 3)$，三个平面垂直交于一点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$，过 $P_i$ 的切平面为 $ax_i(x-x_i)+by_i(y-y_i)+cz_i(z-z_i)=0$，又 $P$ 在这三个切平面上以及 $P_i$ 在曲面 $\Sigma$ 上，则得到：

$$ax_ix_0+by_iy_0+cz_iz_0=ax_i^2+by_i^2+cz_i^2=1\quad(i=1,2,3) \tag{17}$$

记此曲面二次项系数矩阵为 $A$，令 $B=\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}$，由 (17) 得到：

$$BA\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \tag{18}$$

又三个平面对应的法向量为 $\boldsymbol{n_i}=(ax_i,\ by_i,\ cz_i)$，由三个平面相互垂直知这三个法向量相互正交，就有：

$$BAAB^T=\begin{pmatrix}a^2x_1^2+b^2y_1^2+c^2z_1^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2x_2^2+b^2y_2^2+c^2z_2^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2x_3^2+b^2y_3^2+c^2z_3^2\end{pmatrix} \tag{19}$$

令 $K_i=\sqrt{a^2x_i^2+b^2y_i^2+c^2z_i^2}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$，由 (19) 式不难得到 $\underline{A,\ B\text{ 均为可逆的}}$，从而由 (18) 式得：

$$\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}^T=A^{-1}B^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \tag{20}$$

对 (19) 式取逆得到：

$$(B^{-1})^TA^{-1}A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{K_1^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{K_2^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{K_3^2}\end{pmatrix} \tag{21}$$

由 (20) 式及 $A^{-1}$ 的对称性得：

$$\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}(B^{-1})^TA^{-1}A^{-1}B^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$

再将 (21) 代入上式得：

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}+\frac{1}{K_3^2} \tag{22}$$

下面我们将矩阵 $B_1\triangleq BA$ 的行向量单位化仍记为 $B_1$：

$$B_1=\begin{pmatrix}\dfrac{ax_1}{K_1} & \dfrac{by_1}{K_1} & \dfrac{cz_1}{K_1}\\ \dfrac{ax_2}{K_2} & \dfrac{by_2}{K_2} & \dfrac{cz_2}{K_2}\\ \dfrac{ax_3}{K_3} & \dfrac{by_3}{K_3} & \dfrac{cz_3}{K_3}\end{pmatrix}$$

由 (19) 得到：$B_1B_1^T=E$（单位矩阵），故 $B_1$ 为正交矩阵，当然有：$B_1^TB_1=E$，再对比对角元得：

$$\begin{cases}\dfrac{ax_1^2}{K_1^2}+\dfrac{ax_2^2}{K_2^2}+\dfrac{ax_3^2}{K_3^2} &=\dfrac{1}{a}\\ \dfrac{by_1^2}{K_1^2}+\dfrac{by_2^2}{K_2^2}+\dfrac{by_3^2}{K_3^2} &=\dfrac{1}{b}\\ \dfrac{cz_1^2}{K_1^2}+\dfrac{cz_2^2}{K_2^2}+\dfrac{cz_3^2}{K_3^2} &=\frac{1}{c}\end{cases} \tag{23}$$

由 (17)，(22) 并将(23)三个等式相加即得：$x_0^2+y_0^2+z_0^2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$，再由平面 $\pi_1$，$\pi_2$，$\pi_3$ 的任意性得到 $P$ 的任意性，命题得证。 $\square$

**题 13** (第九届全国大学生数学竞赛预赛（数学类）第一题)**.** 空间直角坐标系中，设单叶双曲面 $\Gamma$ 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$，$P$ 为空间中的平面，它交 $\Gamma$ 于一抛物线 $C$，求该平面 $P$ 的法线与 $z$ -轴的夹角。

**解.** 设平面 $P: mx+ny+kz+t=0$。若 $k=0$ 此时 $z$ 轴与平面 $P$ 平行，根据 $\Gamma$ 绕 $z$ 轴的旋转不变性，直接考虑平面 $y=p$:

- 若 $p\neq\pm1$，很显然截线为双曲线。
- 若 $p=\pm1$ ，则交线为两个相交的直线。

故此情况下交线不可能为一个抛物线，必有 $k\neq 0$。

我们仍然用 题 2中的旋转变换坐标系，二次项系数矩阵为 $A$。记 $S=\sqrt{m^2+n^2+k^2}$，此时有：

$$Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{L} & -\frac{mn}{kSL} & \frac{m}{S}\\ 0 & -\frac{k^2+m^2}{kSL} & \frac{n}{S}\\ -\frac{m}{kL} & -\frac{n}{SL} & \frac{k}{S}\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

在新坐标系下平面 $P$ 平行于平面 $x'Oy'$，方程为 $z'=p$（$p$ 为常数），要使交线为抛物线，用题 1 中的记号：$M_1=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}$ 必有一个零特征值（设其特征值为 $\lambda_1$，$\lambda_2$），且为单根，即：

$$\lambda_1+\lambda_2=m_{11}+m_{22}\neq 0 \tag{24}$$

$$\lambda_1\lambda_2=|Q|=m_{11}m_{22}-m_{12}^2=0 \tag{25}$$

将 $Q^T$，$A$ 代入得：

$$\begin{aligned}m_{11}=&\frac{k^2-m^2}{k^2L^2},\\ m_{22}=&\frac{m^2n^2+(k^2+m^2)^2-n^2k^2}{k^2S^2L^2},\\ m_{12}=&m_{21}=-\frac{2mn}{kSL^2}\end{aligned} \tag{26}$$

再将上式代入(25)式可得：$\dfrac{(k^2+m^2)^2(k^2-m^2-n^2)}{k^4S^2L^4}=0$，

- 若 $k^2+m^2=0\Longrightarrow k=0$，矛盾！
- 若 $k^2-m^2-n^2=0$，根据前面的记号：

$$k^2+m^2+n^2=S^2 \tag{27}$$

这时有：

$$m_{11}+m_{22}=\frac{n^2}{k^2L^2}+\frac{(k^2+m^2-n^2)(k^2+m^2+n^2)}{k^2L^2S^2}=\frac{n^2}{k^2L^2}+\frac{k^2+m^2-n^2}{k^2L^2}=1\neq 0$$

根据 $k^2=m^2+n^2$ 和(27)就得到:

$$k^2=\frac{1}{2}S^2\Longrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}S$$

又 $z$-轴方向 $\boldsymbol{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$，记 $\theta$ 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{e_3}$ 的夹角，则得到

$$\cos\theta=\frac{\langle \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e_3}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{e_3}\|}=\frac{k}{S}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

**注**

这个题的官方解答需要熟悉抛物线的参数方程，技巧性较强，不易想！但通过旋转坐标系可以轻松解决，但这时并不能像处理圆截口那样轻松地直接考虑二次项系数，这是由于圆在平面直角坐标系中旋转、平移后其方程始终有形式：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。但抛物线在旋转后就不能保持方程标准形式，故此时要考虑其二次项系数矩阵的特征值，以此来得到交线为抛物线的必要条件（该条件不充分，它还与一次项系数有关，这会在下面说明），由题设已知截线为一抛物线，所以由此必要条件得到的即为原问题答案。

现在讨论一下二阶直纹面：单叶双曲面及双曲抛物面的一些结论。

**定理 1.** 对于单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,\ b,\ c>0)$ 可由两族直线构成，且同一族中两条直线都是相错直线，不同族中两条直线必定相交或平行。

证明. 将单叶双曲面方程改写成

$$(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=(1+\frac{y}{b})(1-\frac{y}{b}) \tag{28}$$

引入参数 $t$，考虑如下两组直线：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c} &= t(1+\dfrac{y}{b})\\ t(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}) &= 1-\dfrac{y}{b}\end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c} &= t(1-\dfrac{y}{b})\\ t(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}) &= 1+\dfrac{y}{b}\end{cases} \tag{30}$$

不难验证对于单叶双曲面上任一点 $P$，必存在唯一的 $t_0$，使 $P$ 在 (29) 中的一条直线上；反过来，对任一固定 $t_0$，取 (29) 中该条直线任一点，它必然满足 (28) 式。于是得到直线族 (29) 完全构成了单叶双曲面。同样地，直线族 (30) 也构成此单叶双曲面。

下面证明定理第二部分：这里对同族直线仅考虑 (29), (30) 同理即得，不再赘述。

任取 (29) 中两束直线，对应的参数分别为 $t_1,t_2(t_1\neq t_2)$，故不妨设 $t_1\neq 0$，联立两方程写出增广矩阵

$K$ 如下：

$$K=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{t_1}{b} & \frac{1}{c} & \vdots & t_1\\ \frac{t_1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{t_1}{c} & \vdots & 1\\ \frac{1}{a} & -\frac{t_2}{b} & \frac{1}{c} & \vdots & t_2\\ \frac{t_2}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{t_2}{c} & \vdots & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} & \vdots & 0\\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} & \vdots & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & \vdots & 1\\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & \vdots & -1\end{pmatrix}$$

显然 $r(K)=4$，故两直线无交点。记联立后方程系数矩阵为 $K_1$，则其 3 个列向量必线性无关，故秩必为 3。注意到系数矩阵行向量即为平面的法向量。若这两个直线平行，则直线的方向向量 $\boldsymbol{n}$ 为方程 $K_1X=0$ 的非零解，这与 $r(K_1)=3$ 矛盾！故两直线必定相错。

对于不同族里的两条直线，参数仍分别记为 $t_1,t_2$，联立两直线方程，记增广矩阵为 $K_1$，则这两条直线异面的充要条件为 $\det(K_1)\neq 0$。为此，我们来考虑 $K_1$ 的行列式：

$$|K_1|=\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{t_1}{b} & \frac{1}{c} & t_1\\ \frac{t_1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{t_1}{c} & 1\\ \frac{1}{a} & \frac{t_2}{b} & \frac{1}{c} & t_2\\ \frac{t_2}{a} & -\frac{1}{b} & -\frac{t_2}{c} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}1 & -t_1 & 1 & t_1\\ t_1 & 1 & -t_1 & 1\\ 1 & t_2 & 1 & t_2\\ t_2 & -1 & -t_2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\times 0=0$$

这也就得到这两个直线必共面，也即平行或相交，证毕。 □

**定理 2.** 对于双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ (a,\ b>0)$ 可由两族直线构成，且同一族中任意两条直线相错，但都与一固定平面平行；不同族中的两条直线一定相交。

证明. 将双曲抛物面方程改写成

$$(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=2z$$

引入参数 $t$，考虑如下两组直线：

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b} & =2t\\ t(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}) & =z\end{cases}\tag{31}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b} & =2t\\ t(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) & =z\end{cases}\tag{32}$$

易验证任一族直线束均构成该双曲抛物面。对于命题第二部分仍然只考虑直线族(31)。

任取(31)中两束直线，对应的参数分别为 $t_1$，$t_2(t_1\neq t_2)$，故不妨设 $t_1\neq 0$，联立两方程写出增广矩阵 $K$ 如下：

$$K=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & \vdots & 2t_1\\ \frac{t_1}{a} & -\frac{t_1}{b} & -1 & \vdots & 0\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & \vdots & 2t_2\\ \frac{t_2}{a} & -\frac{t_2}{b} & -1 & \vdots & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & \vdots & 2t_1\\ \frac{t_1}{a} & -\frac{t_1}{b} & -1 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & \frac{1}{t_1} & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

显然 $r(K)=4$，这说明该对直线相错且易知 (31) 中的直线均与方向向量 $\boldsymbol{n_1}=(1/a,\ 1/b,\ 0)$ 垂直，即平行于固定平面。对于 (32)中的直线，它们均与向量 $\boldsymbol{n_2}=(1/a,\ -1/b,\ 0)$ 垂直，也平行于一个固定平面。

对于不同族里的两条直线，参数仍分别记为 $t_1$，$t_2$，联立两直线方程，记增广矩阵为 $K_1$，则这两条直线异面的充要条件为 $\det(K_1)\neq 0$，为此，我们来考虑 $K_1$ 的行列式：

$$|K_1|=\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & 2t_1\\ \frac{t_1}{a} & -\frac{t_1}{b} & -1 & 0\\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & 2t_2\\ \frac{t_2}{a} & \frac{t_2}{b} & -1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{ab}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 2t_1\\ t_1 & -t_1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2t_2\\ t_2 & t_2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{ab}\times 0=0$$

在系数矩阵中，观察前三列、前三行构成的 $3\times 3$ 子矩阵的行列式为：

$$\frac{1}{ab}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ t_1 & -t_1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{2}{ab}\neq 0$$

即得到系数矩阵与增广矩阵的秩均为 3，则得到不同族两直线必相交。 $\square$

**题 14.** 对于一般的二阶曲面 $\Sigma$，当存在平面与其交线为抛物线时，我们来讨论一下 $\Sigma$ 可能是什么类型的曲面.

仍用题 1 中的记号。设这个平面为 $\pi$，旋转坐标系 $Oxyz$ 变为 $Ox'y'z'$，平面 $\pi$ 平行于平面 $x'Oy'$，再把坐标系 $Ox'y'z'$ 绕 $z'$ 轴旋转得到新坐标系 $Ox''y''z''$，使得平面 $\pi$ 所截的抛物线的对称轴与 $y''$ 轴平行。

下面把 $\Sigma$ 在坐标系 $Ox'y'z'$ 的方程具体写出来，如下：

$$\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n_1 & n_2 & n_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+c=0 \tag{33}$$

再做正交变换

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{2\times 2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}$$

其中 $L$ 为二阶正交阵，记 $\begin{pmatrix}n_1' & n_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & n_2\end{pmatrix}L$，且满足：

$$\begin{pmatrix}L_{2\times 2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_{2\times 2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0 & m_{13}'\\ 0 & 0 & m_{23}'\\ m_{31}' & m_{32}' & m_{33}\end{pmatrix}(a\neq 0)$$

代入 (33) 式就得到：

$$\begin{pmatrix}x'' & y''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2z''m_{13}'+n_1' & 2z''m_{23}'+n_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}+m_{33}z''^2+n_3z''+c=0 \tag{34}$$

此时平面 $\pi$ 的方程为 $z''=p$（常数），代入上式即得到在新坐标系 $Ox''y''z''$ 下截线方程有如下形式：

$$ax''^2+bx''+dy''+c=0$$

其中 $a$ 为 $M$ 的一个非零特征值，$M$ 同(13)题，$d=2pm'_{23}+n'_2$，将 $m_{33}p^2+n_3p+c$ 仍记为 $c$。

若使交线为抛物线，则必有 $d\neq 0$。由 $M$ 必有特征值 0 且其行列式为二次项系数矩阵的一个顺序主子式，故 $\Sigma$ 不可能为椭球面，否则顺序主子式不为零，与 $M$ 有零特征值矛盾！

- 若 $m'_{23}=0$，则必有 $n'_2\neq 0$，此时 $\Sigma$ 在 $Ox''y''z''$ 下的二次项系数矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & m'_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m'_{31} & 0 & m_{33} \end{pmatrix}$$

  - 若 $r(A)=2$，两个非零特征值同号，$\Sigma$ 为椭圆抛物面；两个非零特征值反号，$\Sigma$ 为双曲抛物面.
  - 若 $r(A)=1$，仅有一个非零特征值，$\Sigma$ 为抛物柱面。

- 若 $m'_{23}\neq 0$，这时 $\Sigma$ 的二次项系数矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & m'_{13} \\ 0 & 0 & m'_{23} \\ m'_{31} & m'_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

  且 $\det(A)=-a{m'_{23}}^2\neq 0$，这时 $\Sigma$ 为单叶双曲面或双叶双曲面或二阶锥面。

综上：$\Sigma$ 为椭圆抛物面、双曲抛物面、抛物柱面、单叶双曲面、双叶双曲面或二阶锥面。

若二阶曲面 $\Sigma$ 与平面 $\pi$ 相交，交线为一抛物线，则用与 $\pi$ 平行的平面来截 $\Sigma$，交线会是什么呢?

这可以总结为如下定理：

**定理 3.** 设二阶曲面 $\Sigma$ 与平面 $\pi$ 相交，交线为一抛物线，则用与 $\pi$ 平行的平面来截 $\Sigma$：

- 若 $\Sigma$ 为单叶双曲面，则交线为抛物线或两条平行直线（不含重合情况），且交线为两平行直线的平面仅有一个；
- 若 $\Sigma$ 为双叶双曲面，则交线为抛物线或两条平行虚直线（不含重合情况），且交线为两平行虚直线的平面仅有一个；
- 若 $\Sigma$ 为二阶锥面，则交线为抛物线或一条直线，且交线为一条直线的平面仅有一个；
- 若 $\Sigma$ 为椭圆抛物面、双曲抛物面、抛物柱面，则交线必为抛物线。

证明. 考虑上题证明过程中（$a$，$b$，$c$ 添加下标 0 以区分）$a_0x''^2+b_0x''+dy''+c_0=0,(a_0\neq 0)$

- 若 $\Sigma$ 为椭圆抛物面、双曲抛物面、抛物柱面，改变 $z''$ 的值不影响 $y''$ 的系数 $d$，所以平移后平面与 $\Sigma$ 的交线始终为一条抛物线。

- 若 $\Sigma$ 为单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,\ b,\ c>0)$

  - 若 $d=0,\ \Delta=b_0^2-4a_0c_0<0$，此时交线不存在，对于单叶双曲面这是不可能的！

    这是因为单叶双曲面可由一个直线（不与 $z$ 轴垂直、平行）绕 $z$ 轴沿 $xOy$ 平面上的椭圆轨迹 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 旋转一周得到。设旋转中直线的方向向量为 $\bar{\boldsymbol{n}}=(p,\ q,\ r)$，根据定理 1中的 (29) 式可得到曲线族的方向为：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{n}}&=\left(\frac{1}{a},\ -\frac{t}{b},\ \frac{1}{c}\right)\times\left(\frac{t}{a},\ \frac{1}{b},\ -\frac{t}{c}\right)\\&=\left(\frac{t^2-1}{bc},\ \frac{2t}{ac},\ \frac{t^2+1}{ab}\right)\\&\Longrightarrow\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=\frac{r^2}{c^2}\end{aligned}$$

    考虑 $\bar{\boldsymbol{n}}$ 中的如下三个向量：

$$\boldsymbol{n_1}=(0,\ -b,\ c),\ \boldsymbol{n_2}=(-a,\ 0,\ c),\ \boldsymbol{n_3}=(0,\ b,\ c)$$

    则上述三个向量线性无关。

    对三维空间中的任一平面 $\pi_0$，设其法向量为 $\boldsymbol{n}=(a_1,\ b_1,\ c_1)$，必存在向量 $\boldsymbol{n_i}$ $(i=1$ 或 $2$ 或 $3)$，使 $\boldsymbol{n_i}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$，故 $\boldsymbol{n_1}$ 对应的直线与平面 $\pi_0$ 相交，从而交线必存在。

  - 若 $d=0,\ \Delta=b_0^2-4a_0c_0\geq0$，此时交线为两条平行于 $y''$ 轴的直线 (当 $a=b=c$ 时，可以证明这两条平行直线间的距离是 $2a$ 为定值，这在下面会给出证明)；

    下面先说明 $\Delta=0$ 不可能成立，观察定理 1证明过程中 $K_1$ 的前三列系数矩阵 $A_1$。

    首先作初等变换：

$$\begin{pmatrix}1&-t_1&1\\t_1&1&-t_1\\1&t_2&1\\t_2&-1&-t_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-t_1&1\\t_1&1&-t_1\\0&t_1+t_2&0\\t_1+t_2&0&-(t_1+t_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-t_1&2\\t_1&1&0\\0&t_1+t_2&0\\t_1+t_2&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1\\t_1&1&0\\0&t_1+t_2&0\\t_1+t_2&0&0\end{pmatrix}$$

    要使不同族里两直线平行，其充要条件是：

$$r(A_1)=2\iff t_1+t_2=0\tag{35}$$

    将 (35) 式代入不同族的两条直线方程并令 $t_1=-t_2=t$，令 $z=0$ 求出两个直线与 $xOy$ 平面交点：

$$P_1(\frac{2at}{1+t^2},\ \frac{b(1-t^2)}{1+t^2},\ 0),\ P_2(-\frac{2at}{1+t^2},\ \frac{b(t^2-1)}{1+t^2},\ 0)$$

    这两个点关于原点对称，且均在椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\z=0\end{cases}$ 上，且这两个直线的方向为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{a},\ -\frac{t}{b},\ \frac{1}{c}\right)\times\left(\frac{t}{a},\ \frac{1}{b},\ -\frac{t}{c}\right)=\left(\frac{t^2-1}{bc},\ \frac{2t}{ac},\ \frac{1+t^2}{ab}\right)$$

而 $\overrightarrow{P_2P_1}=\left(\dfrac{4at}{1+t^2},\ \dfrac{2b(1-t^2)}{1+t^2},\ 0\right)$，令 $p=\max\{a,\ b,\ c\}$，$q=\min\{a,\ b,\ c\}$，设这两个平行直线的距离为 $h$，直接计算便得到：

$$h=\frac{|\overrightarrow{P_2P_1}\times\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=2abc\sqrt{\frac{\left(\frac{1-t^2}{a}\right)^2+\left(\frac{2t}{b}\right)^2+\left(\frac{1+t^2}{c}\right)^2}{a^2(t^2-1)^2+b^2(2t)^2+c^2(1+t^2)^2}}$$

易见 $0<\dfrac{2abc}{p^2}\leq h\leq\dfrac{2abc}{q^2}$（这也就得到：当 $a=b=c$ 时，这两条平行直线间距离是 $h=2a$ 为定值），$\Delta=0$ 可理解为两个平行直线重合变为一条，此时两平行直线间距离为 0，但此距离 $h$ 有下界 $\dfrac{2abc}{p^2}$，这说明两平行直线不重合，即 $\Delta>0$，这时交线为两条平行直线。

– 若 $d\neq0$，此时交线即为抛物线。

故对于 $\Sigma$ 为单叶双曲面，则交线为抛物线或两条平行直线.（不含重合情况）；

- 若 $\Sigma$ 为双叶双曲面，经过与单叶双曲面同样地讨论并注意到双叶双曲面上不可能含有直线，即得 $\Sigma$ 与平行平面交于一抛物线或无交线.（实际上，此时交线为两个平行的虚直线）

- 若 $\Sigma$ 为二阶锥面，当 $y''$ 的系数不为零，这时交线为抛物线，否则判别式 $\Delta=0$，若不然，交线为两条平行直线或无交线，设锥面方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$，它可由一条过原点的直线绕椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$ 旋转形成，则旋转中的直线有方向 $\boldsymbol{n}=(p,\ q,\ r)$（$c>0$，$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}=\dfrac{r^2}{c^2}$），与单叶双曲面证明过程类似：对任一平面，必有旋转直线与其相交从而交线存在，且其上不存在平行直线，这时交线为一条直线。

最后，对 $\Sigma$ 为单叶双曲面、双叶双曲面、二阶锥面的情形，令 $d=2z''m_{23}+n_2'=0$ 得唯一解 $z''=-\dfrac{n_2'}{2m_{23}}$，对应唯一的一个平面 $z''=-\dfrac{n_2}{2m_{23}}$，而这是交线不为抛物线的充要条件，此时交线只能为两平行直线（含虚直线）或一条直线。对于其它平行于 $\pi$ 的平面，其交线均为抛物线，证完。 □

# 后记

本人是郑州大学数学与统计学院 2014 级本科生，专业为信息与计算科学，于大一上学年（2014 年 9 月-2015 年 1 月）学习《解析几何》，5 学分，任课老师为齐学荣老师。所用的教材是学校教研室自编教材，后面也有《射影几何》（又称《高等几何》）的内容。编者为孙振祖、李志波老师。初学者可能在概念理解、几何关系上搞得晕头转向，我尝试将复杂的几何关系代数化，用代数的思想来考虑难度较大的几道题，所以有了本文的总结。

以上每题的解答未必正确，如有不严谨或错漏之处欢迎与我邮件联系！

饶一鹏　raoyipeng@qq.com

2020 年 8 月 20 日于河南周口