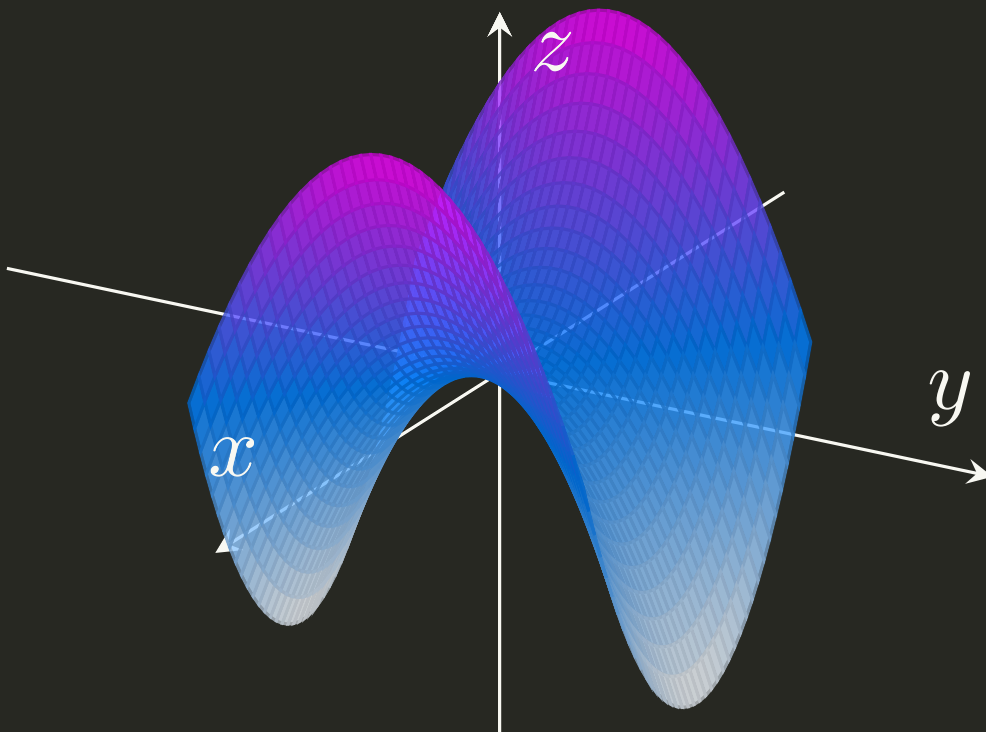
大学数学征解题集



作　者：饶一鹏
邮　箱：raoyipeng@qq.com

北京大学长沙计算与数字经济研究院

2025 年 9 月 11 日

目录

1 大学数学征解题集

题 1 (北京大学-杨家忠). 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ 依次为方程 $2020\tan x = 2021x$ 的所有正根，试计算级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^2}$$

的值。

解. 令 $c = \dfrac{2020}{2021}$，则方程变为

$$c\frac{\sin x}{x} - \cos x = 0$$

令 $f(x) = c\dfrac{\sin x}{x} - \cos x$，则易知 $f(x)$ 为偶函数，而 $f(0^+) = c - 1$，我们将 $f(x)$ 展开为无穷乘积

$$f(x) = (c-1)\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{x_i^2}\right) = (c-1)\left(1 - \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{x_i^2}x^2 + O(x^4)\right)$$

再根据泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处展开为无穷级数

$$\begin{aligned} f(x) =& c\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} \\ =& \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{c}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right)x^{2k} \end{aligned}$$

比较上述两式 x^2 系数得到 (令 $k = 1$):

$$-(c-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2} = (-1)\left(\frac{c}{3!} - \frac{1}{2!}\right) \implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2} = \frac{c-3}{6(c-1)} = \frac{4043}{6}$$

题 2 (南京大学-梅加强). 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，如果对每一个 x，均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h} f(x+t)t\,\mathrm{d}t = 0$$

证明：f 为常值函数。

证明. 根据题设有

$$\frac{1}{h^3}\int_0^h (f(x+t) - f(x-t))t\,\mathrm{d}t \to 0$$

引入函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，只需证明 $F(x)$ 必为一次多项式，由上式得到

$$\frac{1}{h^3}\left((F(x+h) + F(x-h))h - \int_0^h (F(x+t) + F(x-t))\,\mathrm{d}t\right) \to 0$$

在任意的闭区间 $[a,b]$ 上，引入 $G(x)$ 如下

$$G_\varepsilon(x)=F(x)-F(a)-\underbrace{\frac{F(b)-F(a)}{b-a}}_{s}(x-a)+\varepsilon(x-a)(b-x)$$

不难得到 $G_\varepsilon(a)=G_\varepsilon(b)=0$，若 $\max\limits_{x\in[a,b]}\{G_\varepsilon(x)\}=G_\varepsilon(c)>0$，考虑偶函数 $u(h)=G_\varepsilon(c-h)+G_\varepsilon(c+h)$，则存在 $h_1>0$，使得 $h=0$ 为 $u(h)$ 在 $[0,h_1]$ 的最大值点，记 $h_1'>0$ 为 $u(h)$ 在 $[0,h_1]$ 的最小值点，依次定义 $h_{k+1}=\dfrac{h_k}{2}$ 以及 $h_{k+1}'>0$ 为 $u(h)$ 在 $[0,h_{k+1}]$ 的最小值点，于是有 $h_k'\to 0$ 且有

$$(G_\varepsilon(c+h_k')+G_\varepsilon(c-h_k'))h_k'-\int_0^{h_k'}(G_\varepsilon(c+t)+G_\varepsilon(c-t))\,\mathrm{d}t=u(h_k')h_k'-\int_0^{h_k'}u(t)\,\mathrm{d}t\le 0$$

另一方面，直接计算得到

$$\begin{aligned}&(F(c+h)+F(c-h))h-\int_0^h(F(c+t)+F(c-t))\,\mathrm{d}t\\=&u(h)h-\int_0^h u(t)\,\mathrm{d}t+2sch+2\varepsilon(c^2+h^2)h-2sch-\int_0^h 2\varepsilon(c^2+t^2)\,\mathrm{d}t\\=&u(h)h-\int_0^h u(t)\,\mathrm{d}t+\frac{4}{3}\varepsilon h^3\end{aligned}$$

这就得到

$$\frac{1}{h^3}\left(u(h)h-\int_0^h u(t)\,\mathrm{d}t\right)\to-\frac{4}{3}\varepsilon$$

取 $\varepsilon<0$，这与前面的 $u(h_k')h_k'-\int_0^{h_k'}u(t)\,\mathrm{d}t\le 0$ 矛盾！故 $G_\varepsilon(x)\le 0$ 恒成立，令 $\varepsilon\to 0^-$ 得 $G_0(x)\le 0$；取 $\varepsilon>0$ 可证 $G_0(x)\ge 0$，故 $G_0(x)\equiv 0$。由区间 $[a,b]$ 的任意性，这说明 $F'(x)$ 恒为常数，得证。 □

注. 本题的证明思路来源浙江大学数学科学学院 2018 级本科生-王尉。

一些额外思考

一、若 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在其上的每个点均为极值点，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必为常数。

证明. 反证法，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒为常数，则存在两个点 a_0,b_0，使得 $f(a_0)\ne f(b_0)$，不妨设 $a_0=0,b_0=1$，且 $f(a_0)<f(b_0)$，根据连续函数的介值定理，必存在一点 $c_0\in(a_0,b_0)$ 使得 $f(c_0)=\dfrac{f(a_0)+f(b_0)}{2}$，因区间 $[a_0,c_0]$，$[c_0,b_0]$ 必有一个长度不大于 $\dfrac{b_0-a_0}{2}$，将此区间记为 $[a_1,b_1]$，依次这样递归构造，我们得到一个非减数列 $\{a_n\}$、一个非增数列 $\{b_n\}$ 以及一个数列 $\{c_n\}$，满足 $b_n>c_n>a_n$，$b_n-a_n\to 0$ 以及 $f(b_n)>f(c_n)=\dfrac{f(b_n)+f(a_n)}{2}>f(a_n)$。考虑到 a_n，b_n，c_n 必有极限点记为 c，且 c 也为一个极值点，故存在 $\delta>0$ 使得在 $(c-\delta,c+\delta)$ 上恒有 $f(x)\ge f(c)$ 或 $f(x)\le f(c)$，又知道 $f(a_n)<f(c)<f(b_n)$ 对一切 n 恒成立，则当 n 足够大时就有 $(a_n,b_n)\subset(c-\delta,c+\delta)$，这与 c 为极值点矛盾！ □

二、设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，如果对每一个 x，均有

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h f(x+t)-f(x)\,\mathrm{d}t=0$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h f(x+t)-f(x-t)\,\mathrm{d}t=0$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^3}\displaystyle\int_0^h f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\,\mathrm{d}t=0$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^4}\displaystyle\int_0^h f(x+2t)-2f(x+t)+2f(x-t)-f(x-2t)\,\mathrm{d}t=0$

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^5}\displaystyle\int_0^h f(x+2t)-4f(x+t)+6f(x)-4f(x-t)+f(x-2t)\,\mathrm{d}t=0$

请考虑如下结论是不是成立，若不成立，请给出一个反例。

(1) $f^{(1)}(x)\equiv 0$

(2) $f^{(1)}(x)\equiv 0$

(3) $f^{(2)}(x)\equiv 0$

(4) $f^{(3)}(x)\equiv 0$

(5) $f^{(4)}(x)\equiv 0$

证明. (1) 引入函数 $g_\varepsilon(x)=f(x)-\varepsilon x$，已知对任意的 x，有

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h f(x+t)-f(x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h^2}\int_0^h g_\varepsilon(x+t)-g_\varepsilon(x)+\varepsilon t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h^2}\int_0^h g_\varepsilon(x+t)-g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}$$

故得到

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h g_\varepsilon(x+t)-g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}t\to -\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

对于任意区间 $[a,b]$，记 $\max\limits_{x\in[a,b]}\{g_\varepsilon(x)\}=g_\varepsilon(c_1)$，$\min\limits_{x\in[a,b]}\{g_\varepsilon(x)\}=g_\varepsilon(c_2)$，其中 $c_1,c_2\in[a,b]$。

对于 $\varepsilon<0$ 我们证明必有 $c_1=b$，若不然，对任意的 $h<b-c_1$ 就有

$$\int_0^h g_\varepsilon(c_1+t)-g_\varepsilon(c_1)\,\mathrm{d}t\le 0$$

注意到 $\varepsilon<0$，这与(1)矛盾！故有

$$g_\varepsilon(x)\le g_\varepsilon(b)\implies f(x)-\varepsilon x\le f(b)-\varepsilon b$$

上式令 $\varepsilon\to 0^-$ 得到 $f(x)\le f(b)$ 对 $x\in[a,b]$ 恒成立。同样地，对于 $\varepsilon>0$，可证 $f(x)\ge f(b)$ 对 $x\in[a,b]$ 恒成立。这就得到在 $[a,b]$ 上有 $f(x)=f(b)$，由区间 $[a,b]$ 的任意性，证完。

(2) 引入函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，只需证明 $F(x)$ 必为一次多项式，则有

$$\frac{1}{h^2}(F(x+h)+F(x-h)-2F(x))\to 0$$

在闭区间 $[a,b]$ 上引入

$$\begin{aligned}G_\varepsilon(x)&=F(x)-\frac{F(b)}{b-a}(x-a)+\varepsilon(x-a)(b-x)\\ \Longrightarrow \frac{1}{h^2}&(G_\varepsilon(x+h)+G_\varepsilon(x-h)-2G_\varepsilon(x))\to -2\varepsilon\end{aligned}$$

易知 $G_\varepsilon(a)=G_\varepsilon(b)=0$，对 $\varepsilon<0$，证明 $G_\varepsilon(x)\le 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立；对 $\varepsilon>0$，证明 $G_\varepsilon(x)\ge 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立，之后令 $\varepsilon\to 0$ 得证。

(3) 在任意区间 $[a,b]$ 上引入

$$g_\varepsilon(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\varepsilon(x-a)(b-x)$$

则

$$\frac{1}{h^3}\int_0^h g_\varepsilon(x+t)-2g_\varepsilon(x)+g_\varepsilon(x-t)\,\mathrm{d}t\to -\frac{2}{3}\varepsilon$$

对 $\varepsilon<0$，证明 $g_\varepsilon(x)\le 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立；对 $\varepsilon>0$，证明 $g_\varepsilon(x)\ge 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立，之后令 $\varepsilon\to 0$ 得证。

(4) 考虑函数 $f(x)=|x|$ 并不是二次多项式：

- $x\ne 0$，当 h 足够小时可知 $x+2t,x+t,x-t,x-2t$ 同号，此时题设成立；
- $x=0$，直接计算得到 $f(2t)-2f(t)+2f(-t)-f(-2t)=|2t|-|2t|+|2t|-|2t|=0$，此时题设成立；

是一个反例。

(5) 考虑函数 $f(x)=|x|x$ 并不是三次多项式：

- $x\ne 0$，当 h 足够小时可知 $x+2t,x+t,x,x-t,x-2t$ 同号，此时题设成立；
- $x=0$，直接计算得到 $f(2t)-4f(t)+6f(0)-4f(-t)+f(-2t)=4t^2-4t^2+4t^2-4t^2=0$ 此时题设成立；

是一个反例。

$\square$

题 3 (厦门大学-林亚南). *(1) 证明：对于数域 F 上任意的 n 阶矩阵 A，存在可逆矩阵 P 使得 $B\equiv PA$ 是对称矩阵。*

(2) 设计一个算法，实现 (1) 的任务，即输入一个 n 阶矩阵 A，输出相应的对称矩阵 B。

证明. (1) 对于矩阵 A，设其秩为 r，我们对其作初等行变换和列变换，存在 S, U 使得

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad A = S \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = S \begin{pmatrix} U_1 \\ O \end{pmatrix}$$

我们可以令 $P = U^T S^{-1}$，则 PA 表示为

$$PA = U^T S^{-1} S \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = U^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} U = U_1^T U_1$$

不难看出其为对称矩阵。

(2) 我们对 A 作高斯消去，算法流程如下：

Algorithm 1 矩阵对称化算法

Require: 矩阵 $A = \{a_{ij}\}$

Ensure: $B = PA = \{b_{ij}\}$，$b_{ij} = b_{ji}$

初始化 $U \leftarrow A$，令 $r = n$ ▷ 复制原始矩阵
for $k \leftarrow 1$ to $n-1$ **do** ▷ 主元列循环
    令 $k_0 = k$，选主元 p 使得 $|u_{pk}| = \max_{i \geq k} |u_{ik}|$ ▷ 部分选主元
    if $u_{pk} = 0$ **then**
        if $k < n$ **then**
            令 $k = k + 1$，返回到前面选主元操作继续。
        else
            令 $r = k_0$，**Break** ▷ 已经得到上三角矩阵
        end if
    end if
    if $p \neq k$ **then**
        交换第 k 行与第 p 行 ▷ 数值稳定性保证
    end if
    for $i \leftarrow k+1$ to n **do** ▷ 消去行循环
        $\mu \leftarrow u_{ik}/u_{kk}$ ▷ 计算乘子
        $u_{ik} \leftarrow 0$ ▷ 显式置零
        for $j \leftarrow k+1$ to n **do** ▷ 列更新
            $u_{ij} \leftarrow u_{ij} - \mu \cdot u_{kj}$
        end for
    end for
end for
得到的矩阵 U 及秩 r，选取 U 的前 r 行组成矩阵 U_r
return $U_r^T U_r$

□

题 4 (复旦大学-谢启鸿、厉若). 设 n 阶复方阵 A 满足：对任意的正整数 k，$|A^k+I_n|=1$。证明：A 是幂零矩阵。

牛顿公式

引理 1. **设**

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

引入根的幂和 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k=0,1,2,\cdots)$ **则成立如下等式：**

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n;$$

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0,\quad k>n.$$

证明. 分如下两种情况：

- 对于 $k>n$ 的情况：

  $$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$$

  已知

  $$x_i^n-\sigma_1x_i^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0\qquad i=1,2,\ldots,n$$

  每个等式两边同乘上 x_i^{k-n}，即得

  $$x_i^k-\sigma_1x_i^{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nx_i^{k-n}=0\qquad i=1,2,\ldots,n$$

  将 n 个等式相加即证.

- 对于 $k\leq n$ 的情况：

  $$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$$

  我们先用两种方法证明如下(2)式：(其中 $\deg(g)<n$)

  $$x^{k+1}f'(x)=\left(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k\right)f(x)+g(x),\tag{2}$$

  - 方法一：我们取 $x>\max\{|x_i|\}(i=1,2,\cdots,n)$，根据 $f(x)$ 的形式不难的得到

  $$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)=&x^kf(x)\sum_{i=1}^n\frac{1}{1-\frac{x_i}{x}}\\=&x^kf(x)\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^k\left(\frac{x_i}{x}\right)^j+x^kf(x)\sum_{i=1}^n\sum_{j=k+1}^{+\infty}\left(\frac{x_i}{x}\right)^j\\=&f(x)\sum_{j=0}^k\sum_{i=1}^nx^{k-j}x_i^j+\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+j}}{x^j}f(x)\\=&f(x)\sum_{j=1}^kx^{k-j}s_j+\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{t=0}^n(-1)^t\sigma_tx_i^{k+j}x^{n-t-j}\\=&f(x)\sum_{j=1}^kx^{k-j}s_j+\sum_{s=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{t=0}^{\min(s-1,n)}(-1)^t\sigma_tx_i^{k+s-t}x^{n-s}\end{aligned}$$

对于任意固定的 $s>n$，考虑上式第二项 x^{n-s} 的系数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=0}^{n}(-1)^t\sigma_t x_i^{k+s-t}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)x_i^{k+s-n}=0$$

– 方法二：

$$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)=&f(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}+f(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}\\=&f(x)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}x_i^j x^{k-j}+x_i^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}\\=&f(x)\sum_{j=0}^{k}s_j x^{k-j}+g(x)\end{aligned}$$

故(2)式得证。

有了上述结果，我们重写 $f(x)$，$f'(x)$ 如下

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j x^{n-j}\qquad f'(x)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sigma_j(n-j)x^{n-j-1}$$

则有

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\sigma_t(n-t)x^{n+k-t}$$

$$\sum_{i=0}^{k}s_i x^{k-i}\cdot\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j x^{n-j}=\sum_{t=0}^{n+k}\sum_{j=\max(0,t-k)}^{t}(-1)^j\sigma_j s_{t-j}x^{n+k-t}$$

比较(2)式两侧 x^n 的系数，取 $t=k$，并注意到 $s_0=n$，$\sigma_0=1$，则得到：

$$(-1)^k\sigma_k(n-k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sigma_j s_{k-j}\implies(-1)^k\sigma_k(-k)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\sigma_j s_{k-j}$$

证毕。

□

证明. 记 A 的 n 个特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，只需证明它们均为 0。

对任意的 $k\in\mathbb{N}$，考虑 A 的若当标准型不难得到

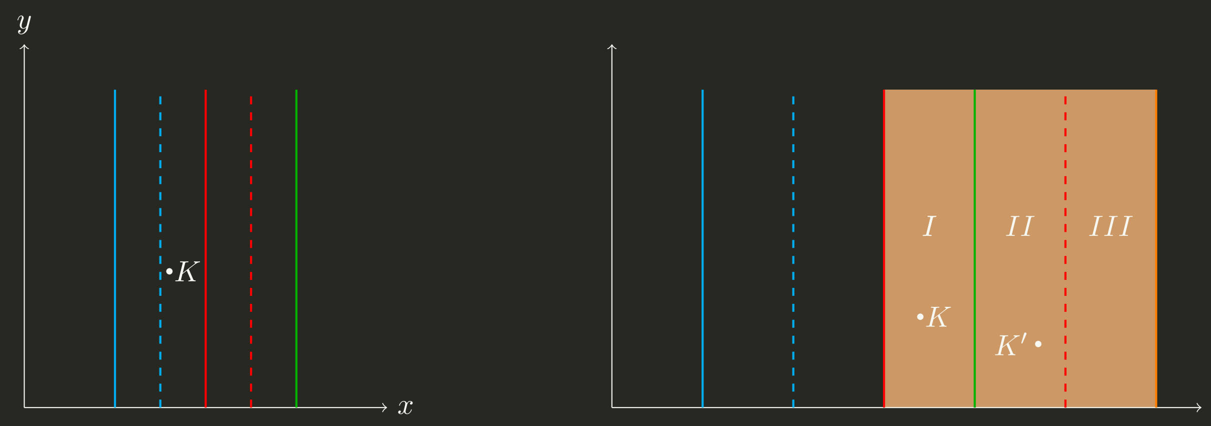
$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^k+1)=1\implies\underbrace{\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k+\lambda_1^k\lambda_2^k+\cdots+\lambda_{n-1}^k\lambda_n^k+\cdots+\lambda_1^k\lambda_2^k\cdots\lambda_n^k}_{\text{共}2^n-1\text{项}}=0$$

对于 $k=1$ 的每一项，我们记为 $x_1,x_2,\ldots,x_{2^n-1}$ 是一个 2^n-1 次方程的根，且所有的根幂和均为 0。根据引理 1，2^n-1 次方程只有最高次的系数不为 1，故得到 $x_1,x_2,\ldots,x_{2^n-1}$ 满足方程 $x^{2^n-1}=0$，这得到 $x_i=0,(i=1,2,\ldots,2^n-1)$，而 $\lambda_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，故得到所有的 λ_i 均为 0，证毕。 □

题 5 (复旦大学-应坚刚). 向平面随机地投掷一根长为 $l=2$ 的针。求:

(1) 针仅与平行线 $\{x=n:n\in\mathbb{Z}\}$ 之一相交的概率;

(2) 针与平行线 $\{x=3n,x=3n+1:n\in\mathbb{Z}\}$ 相交的概率。



(a) 第一组平行线　　(b) 第二组平行线

图 1: 两组平行于 y 轴的直线示例

解. (1) 如图 (a), 取针的中点 K, 平行线间距为 $d=1$, 设针与 y 方向的夹角为 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 则半针在 x 方向投影长度为 $\frac{l}{2}\sin\theta$, K 点必在某一个实线和虚线之间, 若 $\frac{l}{2}\sin\theta\ge\frac{d}{2}$, 此时必相交, 此时 $\theta\ge\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)=\frac{\pi}{6}$, 故相交的概率为

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{l\sin\theta}{d}\,\mathrm{d}\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}\theta=\frac{6(2-\sqrt{3})+2\pi}{3\pi}$$

(2) 如图 (b), 考虑阴影区域, 则针的中点 K 落在每个区域的概率为 $\frac{1}{3}$,

- 对于 I 区域, 针相交的概率记为 P_1, 此时根据 (1) 的结果, 得到

$$P_1=\frac{6(2-\sqrt{3})+2\pi}{3\pi}$$

- 对于 I、II, 针相交的概率记为 P_2, 此时可视为平行线间距 $d=2$, 若 $\theta\ge\arcsin\left(\frac{d}{l}\right)=\frac{\pi}{2}$ 此时必相交, 则根据 (1) 的思想得到

$$P_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l\sin\theta}{d}\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}$$

从而总相交概率为

$$P=\frac{1}{3}\times\frac{6(2-\sqrt{3})+2\pi}{3\pi}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{\pi}=\frac{24-6\sqrt{3}+2\pi}{9\pi}$$

题 6 (浙江大学-张立新). 设 X 和 Y 是相互独立的非退化随机变量，a 为实数。假设 $X+Y$ 与 aX 同分布。证明：

(1) $|a|>1$。

(2) X 是正态随机变量当且仅当 Y 是正态随机变量。

(3) 设 Y 服从两点分布。证明 X 服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布 $U[-1,1]$ 的充分必要条件是 $|a|=2$ 且 $P(Y=1)=P(Y=-1)=\dfrac{1}{2}$。

证明. (1) 设 $\varphi_X(t)$ 与 $\varphi_Y(t)$ 分别为 X,Y 的特征函数，则有

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\varphi_X(at)$$

由于 Y 非退化，则存在 t_0 使得 $|\varphi_X(t_0)|<1$。

- 若 $|a|<1$，则

$$|\varphi_X(at_0)|\le|\varphi_X(t_0)| \implies |\varphi_X(a^nt_0)|\le|\varphi_X(t_0)|$$

根据 $|\varphi_X(a^nt_0)|\to 1$，知道 $|\varphi_X(t_0)|\ge 1$，矛盾！

- 若 $|a|=1$，则有 $\varphi_Y(t)=1$ 恒成立，这说明 $Y\equiv 0$ 是退化的，矛盾！

(2) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 是正态分布，则有 $\varphi_X(t)=e^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，代入方程得到

$$e^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\varphi_Y(t)=e^{\mathrm{i}\mu at-\frac{\sigma^2a^2t^2}{2}} \implies \varphi_Y(t)=e^{\mathrm{i}\mu(a-1)t-\frac{\sigma^2(a^2-1)t^2}{2}}$$

这得到 $Y\sim N(\mu(a-1),\sigma^2(a^2-1))$ 为正态分布。

反过来，若 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 是正态分布，则有

$$\begin{aligned}
&\varphi_X(t)e^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=\varphi_X(at)\\
\implies &\frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/a)}=e^{\mathrm{i}\mu\frac{t}{a}-\frac{\sigma^2t^2}{2a^2}}\\
\implies &\frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/a^n)}=\exp\left(\sum_{k=1}^n\mathrm{i}\mu t\frac{1}{a^k}-\sum_{k=1}^n\sigma^2t^2\frac{1}{2a^{2k}}\right)\\
\implies &\varphi_X(t)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}\mu t}{a-1}-\frac{\sigma^2t^2}{2(a^2-1)}\right)
\end{aligned}$$

这说明 $X\sim N\left(\dfrac{\mu}{a-1},\dfrac{\sigma^2}{a^2-1}\right)$ 为正态分布。

(3) 设 Y 取值为 α,β 概率为 $p,1-p$，则 $\varphi_Y(t)=pe^{i\alpha t}+(1-p)e^{i\beta t}$；若 $X\sim U[-1,1]$，则 $\varphi_X(t)=\frac{\sin t}{t}$

必要性：此时 $\varphi_Y(t)=\dfrac{1}{2}e^{\mathrm{i}t}+\dfrac{1}{2}e^{-\mathrm{i}t}=\cos t$，不妨设 $a=2$，则由

$$\begin{aligned}
&\varphi_X(t)\cos t=\varphi_X(2t)\\
\implies &\frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(t/2^n)}=\prod_{k=1}^n\cos\frac{t}{2^k}=\frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}\\
\implies &\frac{t\varphi_X(t)}{\sin t}=\frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\frac{t}{2^n}}\varphi_X(t/2^n)
\end{aligned}$$

上式令 $n\to+\infty$ 得到 $\dfrac{t\varphi_X(t)}{\sin t}=1$。对 $a=-2$ 可类似证明，必要性证毕。

充分性：此时有

$$\frac{\sin t}{t}(pe^{i\alpha t}+(1-p)e^{i\beta t})=\frac{\sin at}{at}$$

对比虚部得到 $p\sin(\alpha t)+(1-p)\sin(\beta t)=0$ 对一切 $t\in\mathbb{R}$ 成立，这说明 $\sin(\alpha t)$ 与 $\sin(\beta t)$ 线性相关，故有 $\alpha=\pm\beta$，且 $p=\dfrac{1}{2}$，又 $\alpha\neq\beta$ 知 $\alpha=-\beta$。再计算实部得到

$$\frac{\sin t}{t}\cos(\alpha t)=\frac{\sin at}{at}\implies a\cos(\alpha t)\sin t=\sin at$$

根据积化和差公式，对任意的 $t\in\mathbb{R}$ 有：(其中 $|a|>1$)

$$a(\sin((1+\alpha)t)+\sin((1-\alpha)t))=2\sin at$$

这说明 $\sin((1+\alpha)t)$，$\sin((1-\alpha)t)$，$\sin at$ 线性相关，这得到

- 若 $\alpha=0$，则 $a=\pm1$ 与 $|a|>1$ 矛盾!
- 若 $1-\alpha=0$，则 $a\sin 2t=2\sin at$，得到 $a=\pm2$。
- 若 $1+\alpha=0$，则 $a\sin 2t=2\sin at$，得到 $a=\pm2$。

故有 $p=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=-\beta=\pm1$，$|a|=2$，证毕。

$\square$

题 7 (吉林大学-李辉来). 求级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k-3)!!!}{2^k(3k-1)!!!}$$

的和。

解. 引入幂级数 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3k+2}a_kx^{3k+2}$，其中 $a_k=\dfrac{(3k-3)!!!}{2^k(3k-1)!!!}$，易得 $a_1=\dfrac{1}{4}$，且有如下递推关系：

$$a_{k+1}=\frac{3k}{2(3k+2)}a_k=\frac{3k+2-2}{2(3k+2)}a_k=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3k+2}\right)a_k$$

两边同乘以 x^{3k+2}，并对 k 从 $1\to+\infty$ 求和得到

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_{k+1}x^{3k+2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}a_kx^{3k+2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3k+2}a_kx^{3k+2}$$

考虑到 $f(x)$ 的表达式，求导得到 $f'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_kx^{3k+1}$，我们只需求 $f'(1)$ 的值，首先有

$$\frac{f'(x)-a_1x^4}{x^2}=\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)\implies x^2f(x)+\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)f'(x)=\frac{1}{4}x^4$$

对于 $x\in[0,\ 1]$，引入 $g(x)$ 满足 $g(1)=0$，且有

$$g(x)=\int_1^x\frac{t^2}{1-\frac12t^3}\,\mathrm{d}t=-\frac23\ln(2-x^3)$$

通过直接计算便得到

$$\begin{aligned}
&[e^{g(x)}f(x)]'=e^{g(x)}[g'(x)f(x)+f'(x)]=e^{g(x)}\frac{\frac14x^4}{1-\frac12x^3}=\frac12x^4(2-x^3)^{-\frac53}\\
\Longrightarrow\ & e^{g(x)}f(x)=\int_0^x\frac12t^4(2-t^3)^{-\frac53}\,\mathrm{d}t\\
\Longrightarrow\ & e^{g(1)}f(1)=\int_0^1\frac12t^4(2-t^3)^{-\frac53}\,\mathrm{d}t\xlongequal{t=\left(\frac{2m}{1+m}\right)^{\frac13}}\frac16\int_0^1\frac{m^{\frac23}}{1+m}\,\mathrm{d}m\xlongequal{m=u^3}\frac12\int_0^1\frac{u^4}{1+u^3}\,\mathrm{d}u\\
\Longrightarrow\ & f(1)=\frac12\int_0^1\frac{u^4+u-u}{1+u^3}\,\mathrm{d}u=\frac12\int_0^1u\,\mathrm{d}u-\int_0^1\frac{u}{(1+u)(u^2-u+1)}\,\mathrm{d}u=\frac14+\frac{\ln2}{6}-\frac{\pi}{6\sqrt3}
\end{aligned}$$

于是得到 $f'(1)$：

$$f'(1)=2\left(\frac14-f(1)\right)=\frac{\pi}{3\sqrt3}-\frac{\ln2}{3}$$

题 8 (浙江大学-王梦). 对于 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{\frac1p}, & 1\le p<\infty,\\ \displaystyle\max_{1\le k\le n}|x_k|, & p=\infty.\end{cases}$$

现设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且有常数 $M>0$ 满足

$$\|Ax\|_\infty\le\|x\|_\infty,\quad \|Ax\|_1\le M\|x\|_1,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

证明：对于任何 $p\in(1,+\infty)$，存在仅与 M,p 有关（与 n 无关的）常数 M_p 使得

$$\|Ax\|_p\le M_p\|x\|_p,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

证明. 设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$，根据题设可得对于任意的 $1\le k\le n$，有

$$\begin{cases}\|Ax\|_\infty\le\|x\|_\infty\ \Longrightarrow\ \displaystyle\sum_{j=1}^n|a_{kj}|\le1\\ \|Ax\|_1\le M\|x\|_1\ \Longrightarrow\ \displaystyle\sum_{i=1}^n|a_{ik}|\le M\end{cases}$$

对于任意的 $p>1$ 及任意的 $\|x\|_p=1$，令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，根据 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_p^p=&\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right|^p\\
\leq&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^{\frac{1}{p}}|a_{kj}|^{\frac{1}{q}}|x_j|\right)^p\\
\leq&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}||x_j|^p\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\right)^{\frac{p}{q}}\\
\leq&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}||x_j|^p\right)\\
=&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|\right)|x_j|^p\\
\leq&M
\end{aligned}$$

令 $M_p=M^{\frac{1}{p}}$，故得到 $\|Ax\|_p\leq M_p\|x\|_p$ □

题 9 (东南大学-陈建龙). *设 A 为 3 阶实对称矩阵，它的 3 个特征值为 λ_i，满足 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量。证明 A 由 λ_1,λ_3 和 α_1,α_2 唯一确定。*

证明. 不妨设 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$，且都为单位向量，否则，我们令 $s=-\frac{(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_2)}$，并将 $\alpha_1+s\alpha_2$ 单位化后记为 α_2 即可。作 α_1,α_2 的叉积 $\alpha_3=\alpha_1\times\alpha_2$，此时必有 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，作 $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，则有

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\Longrightarrow A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$$

证毕。 □

题 10 (湖南交通工程学院高科技研究院-冯良贵). *设 $R=\{1,0,-1\}$，$\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵全体，证明：集合*

$$S_n=\{\det(A)\mid A\in\mathbb{R}^{n\times n},\text{且}A\text{ 的元素属于}R\}$$

必包含闭区间 $[-2^{n-1},2^{n-1}]$ 内的一切整数。

进一步，我们提出如下开放问题：S 是否由闭区间 $[-2^{n-1},2^{n-1}]$ 内的一切整数所构成？

证明. 我们对行列式某一行加个负号，即得到行列式的相反数，故只需考虑 $[0,2^{n-1}]$ 的情况。引入记号 $H_n=\{A\mid A\in\mathbb{R}^{n\times n},\text{且}A\text{ 的元素属于}R\}$，$K_n=\{k\mid k\in\mathbb{Z}\text{ 且}k\in[-2^{n-1},2^{n-1}]\}$。当 $n=1$ 时，显然 $S_1=\{-1,0,1\}$，下面考虑 $n>1$ 的情况。

对于任意的整数 $k \in [0, 2^{n-1}]$，构造 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

对于 $k(< 2^{n-1})$，我们可以将其表示为二进制计数 $\underline{a_{n-2} \dots a_1 a_0}$，其中 $a_i \in \{0, 1\}$，写明白即为：

$$k = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_{n-2} 2^{n-2}$$

- 对于 $k = 2^{n-1}$，我们令 $a_i = 1$，前 $n-1$ 行乘以 $-a_i$ 加到最后一行得到右下角元素为 $2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) = 1$，则最后一行每个元素均在 R 中，再对第 $2 - (n-1)$ 行反序逐步实行此操作；
- $k \in [0, 2^{n-1})$，我们使用 $k = \underline{a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ 的 a_i，将第 i 行乘以 $-a_i$ 加到最后一行，则最后一行每个元素均在 R 中，再对第 $2 - (n-1)$ 行反序逐步实行同 $k = 2^{n-1}$ 情况的操作。

最后得到的矩阵 A_n 属于 H_n，且 $\det(A_n) = k$，这就得到了 $K_n \subset S_n$。

下面说明对于 $n < 4$，S_n 中的最大值 2^{n-1}，但当 $n \geq 4$ 时，不成立。

- $n = 1$ 时是显然的；
- $n = 2$ 时，$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq 2$，取 $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 1$，$a_{21} = -1$ 即可。
- $n = 3$ 时，对第一列作高斯消去法得到

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

  其中 $a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。

  - 若某个 $i_0, j_0 (i_0, j_0 = 2, 3)$ 使得 $|a_{i_0 j_0}| = 2$，则同行另一个元素若不为零，则必定同号，这就说明若存在 $|a_{i_0 j_0}| = 2$，必有 $\det(A) \leq 2 \times 2 = 4$，
  - 若所有的 $i, j (i, j = 2, 3)$ 都有 $|a_{ij}| < 2$，根据 $n = 2$ 的结果 $\det(A) \leq 2$。

- $n = 4$ 我们构造

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  直接计算得到 $\det(A_4) = 16 > 2^{4-1} = 8$。

若对于 $n \geq 4$，我们已经构造了 A_n，使得 $\det(A_n) > 2^{n-1}$，则对于 $n+1$，构造如下矩阵 A_{n+1}

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & \alpha \\ \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = (1\ 0\ \cdots\ 0)^T$ 为仅第一个元素为 1，其余为 0 的列向量。则 $\det(A_{n+1}) = 2\det(A_n) > 2^n$，且把第一行乘以 -1 加到最后一行，易知 $A_{n+1} \in H_{n+1}$，至此构造完毕。

综合以上论证，结论证毕。 $\square$

题 11 (复旦大学-严金海). 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的非线性连续函数，称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的严格凹支撑点，若存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) > f(x_0) + k(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

类似地，称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的严格凸支撑点，若存在 $k \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) < f(x_0) + k(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

设 f 有两条斜渐近线 $y = k_i x + b_i$ （$k_i, b_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, 2$）：

$$\lim_{(-1)^i x \to +\infty} (f(x) - k_i x - b_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

问两条渐近线满足什么条件时，f 必有严格凹支撑点或严格凸支撑点？为什么？

解. 我们分以下情况来说明：

- 若 $k_2 > k_1$，f 必存在严格凹支撑点，无严格凸支撑点。令 $g_k(x) = f(x) - kx$。

  对任意的 $k_2 > k > k_1$, 易得到

  $$\lim_{x \to +\infty} g_k(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_2 x - b_2 + (k_2 - k)x + b_2) = \lim_{x \to +\infty} (k_2 - k)x + b_2 = +\infty$$
  $$\lim_{x \to -\infty} g_k(x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_1 x - b_1 + (k_1 - k)x + b_1) = \lim_{x \to -\infty} (k_1 - k)x + b_1 = +\infty$$

  这说明 $g_k(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值点 x_0，下面说明存在 $k \in (k_1, k_2)$ 使得 $g_k(x)$ 有唯一的最小值点。

  若不然，对任意 $k \in (k_1, k_2)$，必然存在两点 $x_1 < x_2$ 使得 $g_k(x_1) = g_k(x_2) \leq g_k(x)$，即

  $$f(x_2) - kx_2 \leq f(x) - kx$$

  取 $k' = k + s < k_2 (s > 0)$，则存在两点 $x_1' < x_2'$ 使得 $g_{k'}(x_1') = g_{k'}(x_2') \leq g_{k'}(x)$，则有

  $$f(x_1') - kx_1' \leq f(x) - (k+s)x + sx_1' \leq f(x_2) - kx_2 + s(x_1' - x_2) \leq f(x_1') - kx_1' + s(x_1' - x_2)$$

  这说明 $x_1' > x_2$，故得到 $(x_1, x_2), (x_1', x_2')$ 不交。考虑 (k_1, k_2) 是不可数集，而对于每个 $k \in (k_1, k_2)$，都存在区间 (x_{k1}, x_{k2}) 及有理数 $r_k \in (x_{k1}, x_{k2})$，所以我们得到有理数集至少为不可数集，矛盾！

  若 f 有严格凸支撑点 x_0，则存在 k 使得 $g_k(x)$ 有上界。若 $k > k_2$，知道 $\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x) = +\infty$；若 $k > k_2$，知道 $\lim\limits_{x \to +\infty} g_k(x) = +\infty$；二者皆与 $g_k(x)$ 有上界矛盾。

- 若 $k_2 < k_1$，f 必存在严格凸支撑点，无严格凹支撑点。将 $-f(x)$ 仍记为 $f(x)$，直接使用上述结论即可。

- 若 $k_2 = k_1$，都可能发生。列出例子如下

  - 无严格凹凸支撑点：
$$f(x) = kx + \arctan x$$
  - 有严格凸支撑点 0，无严格凹支撑点：
$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ kx + \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
  - 有严格凹支撑点 0，无严格凸支撑点：
$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ kx - \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
  - 有严格凹支撑点 $-\dfrac{\pi}{2}$，严格凸支撑点 $\dfrac{\pi}{2}$：
$$f(x) = \begin{cases} kx, & |x| > \pi \\ kx + \sin x, & |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

注. 本题的证明思路来源合肥工业大学张神星副研究员。

题 12 (国防科技大学-王银坤). 证明：对于 $n \geq 1$ 且 n 为整数，等式
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$
成立。

证明. 引入函数
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k$$
易知 $f_n(0) = 0$，求导后不难得到
$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{k-1}$$
进一步我们有：
$$1 + (-x) f_n'(x) = (1-x)^n$$

待证等式右端即为 $f_n(1)$，可以表示如下

$$\begin{aligned}
f_n(1) &= \int_0^1 f_n'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n-1}(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= f_{n-1}(1) + \int_0^1 (1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= f_{n-1}(1) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

又 $f_1(1)=1$，故得到

$$f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

证毕。 □

题 13 (北京大学-冯荣权, 北京国际数学中心-许地生). 对 n 阶实矩阵 A, 定义其范数为 $\|A\| = \sup\limits_{\|v\|=1} \|Av\|$, 其中 $\|v\|$ 表示 n 维向量 v 的范数。若 A 的元素都是整数，则称 A 为整矩阵。证明：若 A 为整矩阵且 $\|A\| \le 1$，则存在整矩阵 P 和正整数 m 使得 $\det(P) \neq 0$ 且

$$PA^mP^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A^m)$。

证明. 我们逐步证明结果：

- 证明 A 的元素绝对值最大为 1。

  若不然，设 $|a_{ij}| = s > 1$，则取向量 v 使得

  $$v_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j \\ 0 & \text{if } k \neq j \end{cases}$$

  则 $|(Av)_i| = |a_{ij}v_j| = s > 1$，故 $\|A\| \ge s > 1$ 矛盾!

- 证明同一行或者同一列，只能有一个元素 1 或者 -1，其余的全为 0。

  若不然，

  - 对于同一行设 $|a_{ij_1}| = |a_{ij_2}| = 1$，则取向量 v 使得

    $$v_k = \begin{cases} \dfrac{a_{ik}}{\sqrt{2}|a_{ik}|} & \text{if } k = j_1, j_2 \\ 0 & \text{if } k \neq j_1, j_2 \end{cases}$$

    则 $(Av)_i = \sqrt{2} > 1$，故 $\|A\| \ge \sqrt{2} > 1$ 矛盾!

– 对于同一列设 $|a_{i_1j}| = |a_{i_2j}| = 1$，则取向量 v 使得

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j \\ 0 & \text{if } k \neq j \end{cases}$$

则 $(Av)_{i_1}^2 + (Av)_{i_2}^2 = 1 + 1 = 2 > 1$，故 $\|A\| \geq \sqrt{2} > 1$ 矛盾！

- 记 A 所满足的矩阵集合记为 M_n，则不难得到 M_n 中的元素只有有限个（记为 N），且其关于矩阵乘法是封闭的。对于矩阵列 $\{A^k\}, k \in \mathbb{N}$，根据秩不等式得到 $0 \leq r(A^{k+1}) \leq r(A^k)$，则数列 $a_k = r(A^k)$ 必有极限 $r_0 \geq 0$。

  – 若 $r_0 = 0$，则存在 $s > 0$ 使得 $A^s = O$，取 $P = I_n$ 得证。

  – 若 $r_0 > 0$, 则存在 $s > 0$, 使得 $r(A^k) = r_0$ 对所有的 $k \geq s$ 成立, 考虑矩阵列 $\{A^{ks}\}(k = 1, 2, \ldots)$, 则我们取其中 $N + 1$ 个，由容斥原理知必存在两个 $k_1 > k_2$ 使得 $A^{k_1 s} = A^{k_2 s}$，即得到

$$A^{k_2 s}(A^{(k_1 - k_2)s} - I_n) = O$$

已知 $r(A^{k_2 s}) = r_0 > 0$, 存在 r_0 个线性无关整向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i = 1, 2, \ldots, \alpha_{r_0})$, 使得 $\boldsymbol{\beta}_i = \alpha_i A^{k_2 s} \neq \mathbf{0}$, 且 $\boldsymbol{\beta}_i(i = 1, 2, \ldots, \alpha_{r_0})$ 也线性无关。

此时就有

$$\boldsymbol{\beta}_i A^{(k_1 - k_2)s} = \boldsymbol{\beta}_i$$

考虑到 $r(A^{(k_1 - k_2)s}) = r_0$，取方程 $\boldsymbol{x} A^{(k_1 - k_2)s} = \mathbf{0}$ 的整向量构成的基础解系 $\boldsymbol{\beta}_{r_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$。

令 $m = (k_1 - k_2)s$，并引入如下整矩阵 P

$$P = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n)$$

即得到要证结论。

证毕。 □

题 14 (中国科技大学-李平). 设 $a > 0$，求出所有 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数 f 使得 $f(x) - a\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ 为常数。

解. 首先引入集合 $S = \{u(x)\}$ 是满足如下条件的非负连续函数集

$$C = u(x) - a\int_x^{x+1} u(t)\,\mathrm{d}t \quad (C \leq 0)$$

易知 S 中的每个元素无穷可导，我们来考虑 S 中函数的性质。

考虑

$$u'(x) = au(x+1) - au(x) \implies [\mathrm{e}^{ax}u(x)]' = a\mathrm{e}^{ax}u(x+1) \geq 0$$

若 $e^{sx}u(x)$ 单调增，我们有

$$u(x) \leq \int_x^{x+1} ae^{st}u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{x+1} ae^{s(1+x)}u(1+x)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{e^s - 1}{s}(u'(x) + au(x))$$

这就得到

$$u'(x) + \left(a - \frac{s}{e^s - 1}\right) u(x) \geq 0$$

记 $g(x) = a - \dfrac{x}{e^x - 1}$，引入数列 $a_0 = a$，$a_{n+1} = g(a_n)$，则对任意的 n 就有 $e^{a_n x} f(x)$ 单调增。注意到 $g'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}$，令 $g_1(x) = xe^x - e^x + 1$，且有 $g_1'(x) = xe^x$，故得到 $g_1(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 $\downarrow$，在 $(0, +\infty,)$ 上 $\uparrow$，但 $g_1(0) = 0$，故得到 $g(x)$ 为单调增函数。根据 $a_1 < a$，得到 $a_2 = g(a_1) < g(a) = a_1$，故 a_n 单调递减。引入 $h(x) = g(x) - x = a - \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$，直接计算得到 $h'(x) = -\dfrac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$，故 $h(x)$ 单调减，且 $h(+\infty) = -\infty$，$h(-\infty) = +\infty$，故 $h(x)$ 有唯一的一个零点 x_a。

从 $h(a_0) = h(a) < 0 = h(x_a)$ 立刻得到 $a_0 > x_a$，所以就有

$$g(a_0) > g(x_a) \implies a_1 > x_a \implies g(a_1) > g(x_a) \implies a_2 > x_a \quad \cdots \quad a_n > x_a$$

故 a_n 有下界，令 $n \to +\infty$，知道 $a_n \downarrow x_a$，从而就有 $e^{x_a x} u(x)$ 单调增。

- 若 $0 < a \leq 1$，则 $h(0) \leq 0$，此时 $x_a \leq 0$。注意到

  $$e^{x_a x} u'(x) = ae^{-x_a} e^{x_a(x+1)} u(x+1) - ae^{x_a x} u(x) \geq ae^{x_a x} u(x)(e^{-x_a} - 1)$$

  这就得到 $u'(x) \geq au(x)(e^{-x_a} - 1) \geq 0$，且 $u'(x)$ 满足

  $$0 = u'(x) - a \int_x^{x+1} u'(t) \, \mathrm{d}t$$

  这说明 $u'(x) \in S$，对 $u^{(n)}(x)(n \geq 1)$ 递推使用完全一样的推导，即得到 $u^{(n)}(x) \in S$ 且 $u^{(n)}(x) \geq 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。于是根据泰勒展开就知道

  $$u'(x) = au(x+1) - au(x) \geq au'(x) + \frac{a}{2} u''(x)$$

  - 若 $a = 1$，则有 $u''(x) = 0$，这说明 $u(x) = c_1 x + c_2$，根据 S 的定义 $u(x)$ 为非负函数，必有 $c_1 = 0$，$c_2 \geq 0$。
  - 若 $a < 1$，则有

    $$u''(x) + \frac{2(a-1)}{a} u'(x) \leq 0$$

    假设 $e^{sx} u'(x)$ 单调减，就有

    $$u'(x) = a \int_x^{x+1} e^{-st} e^{st} u'(t) \, \mathrm{d}t \geq ae^{s(x+1)} u'(x+1) \int_x^{x+1} e^{-st} \, \mathrm{d}t = \frac{e^s - 1}{s} (au'(x) + u''(x))$$

    这即为

    $$u''(x) + \left(a - \frac{s}{e^s - 1}\right) u'(x) \leq 0$$

    引入数列 $b_0 = \dfrac{2(a-1)}{a}$，$b_{n+1} = g(b_n)$，则对任意的 n 就有 $e^{b_n x} u'(x)$ 单调减，且有

    $$b_1 = a + \frac{b_0}{1 - e^{b_0}} > a + b_0 \implies b_2 = g(b_1) > g(b_0) = b_1 \implies \cdots \implies b_{n+1} > b_n$$

    且 $h(b_0) > a > 0 = h(x_a)$，这说明 $b_0 < x_a$，进而 $b_n < x_a$ 有上界，令 $n \to +\infty$ 得到 $e^{x_a x} u'(x)$ 单调减，考虑到 $u'(x) \in S$，不难得到 $e^{x_a x} u'(x)$ 单调增，故得到

    $$e^{x_a x} u'(x) = c \implies u(x) = c_1 e^{-x_a x} + c_2 (c_1, c_2 \geq 0)$$

- 若 $a>1$，则 $h(0)>0$，此时 $x_a>0$，令 $v(x)=e^{x_a x}u(x)$，则 $v(x)$ 单调增，且有

$$C=e^{-x_a x}v(x)-a\int_x^{x+1}e^{-x_a t}v(t)\,\mathrm{d}t$$

注意到 $ae^{-x_a}=a-x_a$，求导得到

$$v'(x)=(a-x_a)(v(x+1)-v(x))\implies 0=v'(x)-(a-x_a)\int_x^{x+1}v'(t)\,\mathrm{d}t$$

下面我们证明 $0<a-x_a<1$，进而得到 $v'(x)\in S$

$$a-x_a-1=\frac{x_a e^{x_a}}{e^{x_a}-1}-x_a-1=\frac{1+x_a-e^{x_a}}{e^{x_a}-1}<0\quad a-x_a=\frac{x_a}{e^{x_a}-1}>0$$

根据前面 $0<a<1$ 的结果，我们得到 $v(x)=c_1e^{-x_v x}+c_2(c_1,c_2\geq 0)$，其中 x_v 是以下方程的唯一实根

$$a-x_a=\frac{x_v e^{x_v}}{e^{x_v}-1}$$

另外，我们注意到

$$a-x_a=\frac{x_a e^{x_a}}{e^{x_a}-1}-x_a=\frac{x_a}{e^{x_a}-1}=\frac{(-x_a)e^{(-x_a)}}{e^{(-x_a)}-1}$$

故得到 $x_v=-x_a$，进而得到 $u(x)=e^{-x_a x}v(x)=c_1+c_2e^{-x_a x}$

根据题设不妨设 $f(x)$ 的下确界为 $m\geq 0$，将 $f(x)-m$ 仍记为 $f(x)$，则有 $f(x)$ 下确界为 0 且

$$C=f(x)-a\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(x)$$

两边同时取下确界，得到 $C\leq 0$，故 $f(x)\in S$。从而得到，对于 $a>0$，满足题意的 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}c_1 & 若\ a=1\\ c_1e^{-x_a x}+c_2 & 若\ a\neq 1\end{cases}$$

其中 x_a 是方程 $a=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ 的唯一实根，且 $c_1,c_2\geq 0$。

注. 本题的 $0<a<1$ 情况的证明思想来源于清疏数学，对于 $a>1$ 的情况，转化为此类情况讨论是额外的技巧。

题 15 (南京大学-梅加强). 对于 $[0,+\infty)$ 上的函数 f_0，当 $n\geq 0$ 时，递归地定义一列函数如下：

$$f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 f_n(tx)\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in(0,+\infty).$$

试就以下两种情形分别研究函数列 $\{f_n\}$ 的极限：

(1) $f_0(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调函数。

(2) $f_0(x)=\sin\dfrac{1}{x}(x\in(0,+\infty))$。

Dini 引理

引理 2. 对于逐点递减的可积函数列 $\{g_n(t)\}$ 满足 $g_n(t)\to 0$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t=0$$

证明. 对任一固定 n 及 $\varepsilon=\dfrac{1}{2n}$，根据 $g_n(t)$ 可积，存在一个剖分 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ 使得

$$\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})<\varepsilon$$

取阶梯函数 $\varphi_n(t)=\sum\limits_{i=1}^{k}m_i\chi_{(t_i,t_{i+1})}$，则在每个区间 (t_i,t_{i+1}) 上就有 $f(t)-\varphi(t)\le M_i-m_i$。在每个区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 上，令 $m_0=m_{k+1}=\max\limits_{t\in[0,1]}g_n(t)$，构造如下 $h_n(t)$（其中 c 待定）:

$$h_n(t)=\begin{cases} m_i & \text{若 } t\in[t_i+c,t_{i+1}-c]\\ \begin{cases} m_i & \text{若 } m_{i-1}\ge m_i\\ \dfrac{m_i-m_{i-1}}{c}(t-t_i)+m_{i-1} & \text{若 } m_{i-1}<m_i\end{cases} & \text{若 } t\in[t_i,t_i+c]\\ \begin{cases} m_i & \text{若 } m_{i+1}\ge m_i\\ \dfrac{m_{i+1}-m_i}{c}(t-t_{i+1})+m_{i+1} & \text{若 } m_{i+1}<m_i\end{cases} & \text{若 } t\in[t_{i+1}-c,t_{i+1}]\end{cases}$$

不难得到 $h_n(t)$ 为连续函数且 $\varphi_n(t)\ge h_n(t)$，取 $c<\min\left\{\dfrac{1}{2kn(M-m)},\dfrac{t_{i+1}-t_i}{2}\right\}$，就有

$$\int_0^1\varphi_n(t)-h_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_n(t)-h_n(t)\,\mathrm{d}t\le 2\cdot\frac{k}{2}c(M-m)<\frac{1}{2n}$$

于是我们构造出逐点递减的连续函数列 $\{h_n(t)\}(n\ge 1)$ 满足 $g_n(t)\ge h_n(t)\ge 0$，且有

$$\int_0^1 g_n(t)-h_n(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^1 g_n(t)-\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1\varphi_n(t)-h_n(t)\,\mathrm{d}t<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$$

根据 $\{h_n(t)\}$ 逐点递减，记 $a_n=\max\limits_{t\in[0,1]}\{h_n(t)\}$，则存在 $t_n\in[0,1]$ 使得 $h_n(t_n)=a_n$，由于 $\{t_n\}$ 有收敛子列不妨仍记为 t_n，使得 $t_n\to t_0$，则存在 N_1，使得 $n>N_1$ 时就有 $h_n(t_0)<\varepsilon$，再根据 $h_n(t)$ 的连续性，存在 N_2，当 $k>\max\{n,N_2\}$ 时就有 $a_k=h_k(t_k)<h_n(t_k)<\varepsilon$，考虑到 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，这说明 $a_n\to 0$，故 $h_n(t)\rightrightarrows 0$，这得到当 n 足够大时，有

$$\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g_n(t)-h_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t<\frac{1}{n}+\varepsilon$$

□

证明. 对两种情况分别说明。

(1) 我们不妨设 $f_0(x)$ 单调增，否则将 $-f(x)$ 仍记为 f 即可。对任意的 $n>0$，我们定义 $f_n(0)=f_0(0)$。

若已经得到 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增，对于 $x_1>x_2\geq 0$，我们得到：

$$f_{n+1}(x_1)-f_{n+1}(x_2)=\frac{1}{2}\int_0^1 (f_n(tx_1)-f_n(tx_2))\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t\geq 0$$

所以 $f_{n+1}(x)$ 也是单调增的，这说明 $f_n(x)$ 对任意 $n\geq 0$，均为单调增函数。

另一方面，根据递推关系有：

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 (f_n(tx)-f_n(x))\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t\leq 0$$

故 $\{f_n(x)\}$ 为逐点递减的函数列，且有 $f_n(x)\geq f_n(0)=f_0(0)$ 有下界，这就得到逐点收敛关系 $f_n(x)\to f(x)$，且 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，也为单调增函数。

令 $g_n(t)=f_n(tx)\ln^2(1-t)$，将 $g_n(t)-f(tx)\ln^2(1-t)$ 代入引理 2，在递推式中令 $n\to+\infty$ 就得到

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(tx)\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t=f(x)$$

考虑 $f(x)$ 是增函数，故对任意的 $t\in(0,1)$，恒有 $f(tx)=f(x)$。否则，若存在 $t_0\in(0,t)$ 使得 $f(t_0x)<f(x)$ 则得到

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^{t_0} f(tx)\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{t_0}^1 f(tx)\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t<f(x)$$

矛盾！这说明 $f(x)$ 在任何开区间 $(0,s)$ 上为常值函数 $f(x)=c\geq f_0(0)$，考虑到 $f_n(x)$ 为增函数，故对任意的 $t\in(0,x)$，就有

$$f_n(t)-c\leq f_n(x)-c\to 0$$

这说明 $f_n(x)\rightrightarrows c$ 在任何闭区间上成立。特别地，若 $f_0(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，就有 $c=f_0(0)$。

(2) 若 $f_0(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，直接计算得

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n\text{个}}\sin\left(\frac{1}{t_1t_2\cdots t_nx}\right)\ln^2(1-t_1)\cdots\ln^2(1-t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$$

考虑定义在 $(0,1)$ 上的独立同分布(i.i.d)的随机变量 $X_k(k=1,2,\dots)$ 以及随机变量 $Y_n=X_1X_2\cdots X_n$，每个变量的概率密度函数为 $f_k(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2(1-x)$。注意到 $\ln Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$，分别计算 $\ln X_i$ 的均值及方差如下

$$\mathbb{E}[\ln X_i]=\frac{1}{2}\int_0^1\ln t\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t=\mu\ (0>\mu>-\infty)$$
$$\mathrm{Var}(\ln X_i)=\mathbb{E}[\ln^2 X_i]-\mathbb{E}[\ln X_i]^2=\frac{1}{2}\int_0^1\ln^2 t\ln^2(1-t)\,\mathrm{d}t-\mu^2=\sigma^2\ (0<\sigma<+\infty)$$

再引入 $Z_n=\dfrac{\ln Y_n}{n}$，根据中心极限定理得到

$$\frac{Z_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\xrightarrow{d}N(0,1)\qquad \ln Y_n\sim N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$$

设 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 的分布函数为 $F_n(x)$，则有

$$F_n(x) = \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \qquad \text{其中 } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

则 Y_n 的分布函数为 $F_{Y_n}(t)(t>0)$ 为

$$F_{Y_n}(t) = P\{Y_n < t\} = P\{\ln Y_n < \ln t\} \sim F_n(\ln t) = \Phi\left(\frac{\ln t - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

记 $y = \dfrac{1}{x}$，下面计算

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sin\left(\frac{1}{Y_n x}\right)\right] &= \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{tx}\right)\mathrm{d}F_{Y_n}(t) \\
&\sim \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma t}\exp\left(-\frac{(\ln t - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right)\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{v=(\ln\frac{1}{t}+n\mu)/\sqrt{2n}\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ye^{-n\mu}e^{\sqrt{2n}\sigma v}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}v}_{I_n}
\end{aligned}$$

注意到 $\mu<0$，则 $e^{-n\mu}\to+\infty(n\to+\infty)$。

引入 $A_n \coloneqq e^{-n\mu} = e^{n|\mu|}$，$\alpha_n \coloneqq \sqrt{2n}\sigma$，并设

$$Z_n(v) = A_n e^{\alpha_n v} \qquad\qquad \varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
I_n &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A_n\alpha_n e^{\alpha_n v}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\cos(Z_n(v))\varphi(v)\,\mathrm{d}v \\
&= -\left[\frac{\cos(Z_n(v))\varphi(v)}{A_n\alpha_n e^{\alpha_n v}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\cos(Z_n(v))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{\varphi(v)}{A_n\alpha_n e^{\alpha_n v}}\right)\mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{A_n}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(Z_n(v))\varphi(v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{A_n\alpha_n}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(Z_n(v))\varphi'(v)e^{-\alpha_n v}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

注意到三角函数的有界性及 φ, φ' 的可积性，得到

$$\begin{aligned}
|I_n| \le& \frac{1}{A_n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{A_n\alpha_n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(v)e^{-\alpha_n v}\,\mathrm{d}v \\
\le& \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n\alpha_n} + \int_0^{+\infty}\frac{2v}{A_n\alpha_n\sqrt{\pi}}e^{-v^2+\alpha_n v}\,\mathrm{d}v \\
\le& \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n\alpha_n} + \frac{e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n\alpha_n\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\alpha_n}{2}}^{+\infty} 2\left(u+\frac{\alpha_n}{2}\right)e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
\le& \frac{C}{A_n} + \frac{C}{A_n\alpha_n} + \frac{e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n\alpha_n\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha_n}{2}}^{+\infty} 2ue^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{Ce^{\frac{\alpha_n^2}{4}}}{A_n\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

考虑到 $\dfrac{\alpha_n^2}{4} = \dfrac{2n\sigma^2}{4} = \dfrac{\sigma^2}{2}n$，下面只需说明 $\sigma^2 < 2|\mu|$，这样就有 $e^{\frac{\alpha_n^2}{4}}/A_n \to 0$。。。。

□

题 16 (复旦大学-严金海). 实数集 $\mathbb{R}$ 上是否有满足如下条件的函数？若有请给出例子，若没有请给出证明：$\forall x_0 \in \mathbb{R}$，成立 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$。

证明. 不存在满足题设的函数，使用反证法：

若不然，对于任意固定的 $M > 0$，考虑集合 $A_M = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M\}$，则 A_M 里面没有聚点，否则，存在聚点 $c \in A_M$ 及一列 $x_n (\in A_M) \to c$，则根据题设，对于 $M+1$，存在 N，当 $n > N$ 时就有 $|f(x_n)| > M+1$，这与 $x_n \in A_M$ 矛盾！这说明 A_M 的元素均为离散点，所以 A_M 至多是可数集。

另一方面，考虑到 $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，其中 $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq n\}$ 均为可数集，因可数个可数集的并集也为可数集，这说明 $\mathbb{R}$ 是可数的，这与实数集的不可数性矛盾！ □

题 17 (北京大学-杨家忠). 对于 $x \in (0,\pi)$，定义 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}$，其中 $f(\frac{\pi}{2})$ 定义为 $\dfrac{2}{\pi}$。证明：f 的 k 阶导数 $(k \geq 0)$ 均在 $(0,\pi)$ 内恒正。

$\tan x$ 的导数恒正

$f(x) = \tan x$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的各阶导数均为正的。

首先求导得到

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + f^2(x) \geq 1 > 0$$

我们归纳证明，若 $f^{(k)}(x) = g_k(f(x))$，其中 $g_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k+1} a_{k,i}x^i$ 是一个每项系数 $a_{k,i} \geq 0$ 的 $k+1$ 次多项式，若 k 已经证明，则对于 $k+1$：

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) =& g_k'(f(x))f'(x) \\
=& \sum_{i=1}^{k+1} i a_{k,i} f^{i-1}(x)(1+f^2(x)) \\
=& \sum_{i=0}^{k}(i+1)a_{k,i+1}f^i(x) + \sum_{i=2}^{k+2}(i-1)a_{k,i-1}f^i(x) \\
=& a_{k,1} + 2a_{k,2}f(x) + \sum_{i=2}^{k}\underbrace{((i+1)a_{k,i+1} + (i-1)a_{k,i-1})}_{a_{k+1,i}}f^i(x) \\
& + k a_{k,k} f^{k+1}(x) + (k+1)a_{k,k+1}f^{k+2}(x)
\end{aligned}$$

令

$$a_{k+1,i}=\begin{cases} a_{k,1} & 若\ i=0 \\ 2a_{k,2} & 若\ i=1 \\ (i+1)a_{k,i+1}+(i-1)a_{k,i-1} & 若\ 1<i<k+1 \\ ka_{k,k} & 若\ i=k+1 \\ (k+1)a_{k,k+1} & 若\ i=k+2 \end{cases}$$

或者写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,0} \\ a_{k+1,1} \\ \vdots \\ a_{k+1,k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-1 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}_{(k+3)\times(k+3)} \begin{pmatrix} a_{k,0} \\ a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \\ a_{k,k+2} \end{pmatrix}$$

令 $g_{k+1}(x)=\sum_{i=0}^{k+2} a_{k+1,i}x^i$，则 $f^{(k+1)}(x)=g_{k+1}(f(x))>0$。
实际上，对于奇偶阶导数有

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases} \sum_{m=0}^{n} a_{2n,2m+1}f^{2m+1}(x) & 若\ k=2n \\ \sum_{m=-1}^{n} a_{2n+1,2m+2}f^{2m+2}(x) & 若\ k=2n+1 \end{cases}$$

证明. 根据题设易得 $f(x)=\frac{1}{x}-\cot x$，考虑到 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数，则有如下等式成立：

$$\begin{aligned} &\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \\ \Longrightarrow\ &\ln(\sin x)=\ln x+\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \\ \Longrightarrow\ &\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-\frac{2x}{k^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}}=\frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{k^2\pi^2}\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^s\right)=\frac{1}{x}-\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2s+2}}\right)\frac{2x^{2s+1}}{\pi^{2s+2}} \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$f(x)=\sum_{s=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2s}}\right)\frac{2x^{2s-1}}{\pi^{2s}}=\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{2\zeta(2s)x^{2s-1}}{\pi^{2s}}$$

其中 $\zeta(n)$ 为黎曼 zeta 函数。

不难看出 $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[2n-1]{\dfrac{2\zeta(2n)}{\pi^{2n}}} = \dfrac{1}{\pi}$，故得到级数的收敛半径为 $r=\pi$，根据每个系数 $\dfrac{2\zeta(2s)}{\pi^{2s}} > 0$ 立得 $f^{(k)}(x) > 0$ 对任意 $x \in (0,\pi)$ 成立。 $\square$

题 18 (北京大学-冯荣权，北京国际数学中心-许地生)**.** 用 $M_n(\mathbb{R})$ 表示所有 n 阶实方阵构成的集合，则在矩阵加法和数乘下，$M_n(\mathbb{R})$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n^2 维线性空间。证明：$M_n(\mathbb{R})$ 的任一超平面（即 n^2-1 维子空间）中都存在正交矩阵。

证明. 考虑到 n^2 维线性空间 $b_{ij}(1 \le i,j \le n)$ 的 n^2-1 维子空间是某一个线性方程组 $a_{ij}b_{ij}=0$ 的解空间，其中 a_{ij} 不全为零。记 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，对于任意的 A，我们只需构造满足 $\mathrm{tr}(A^TB)=0$ 正交矩阵 B，即证明结论。

设 A^T 的奇异值分解为 $A^T = P\Lambda Q$，其中 P,Q 为正交矩阵，Λ 为对角阵，我们取 $B = Q^TSP^T$，其中 S 也为正交阵，可表示为

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \text{满足 } SS^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ I_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = I_n$$

对于 ΛS 的对角元 $c_{ii} = \lambda_i s_{ii} = 0$，即得到 $\mathrm{tr}(\Lambda S)=0$，证毕。 $\square$

注. 本题的证明思想来源于复旦大学-江辰老师。

题 19 (复旦大学-张奇)**.** 甲与乙下棋获胜的概率是 40%，但甲想不停地与乙下棋直到净胜乙五局就结束，他有可能做到这一点吗？如果有可能，请给出做到这一点的概率是多少；如果不可能，请说明原因。

证明. 设 P_m 为从净胜局数 m 开始，最终达到甲净胜局数 $+5$ 的概率，则有如下递推 $(m<5)$

$$P_m = p\cdot P_{m+1} + (1-p)\cdot P_{m-1} \implies P_{m+1} = \frac{1}{p}P_m - \frac{1-p}{p}P_{m-1}$$

得到特征方程

$$x^2 = \frac{1}{p}x - \frac{1-p}{p} = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \implies (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$$

得到 $P_m = a_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^m + a_2$。

令 $m\to-\infty$，有 $P_{-\infty}=0$，又知道 $P_5=1$，则得到 $a_2=0$，$a_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 = 1$，$a_1 = \dfrac{32}{243}$，故有

$$P_m = \frac{32}{243}\left(\frac{3}{2}\right)^m$$

于是 $P_0 = \dfrac{32}{243}$，即得到答案。 $\square$

注. 此题若改为：甲与乙下棋获胜的概率是 40%，若比赛规定，谁第一个先连赢对方 m 局，游戏就结束，甲有可能做到这一点吗？如果有，请求出甲获胜的概率？

证明. 答案是肯定的，我们把题目转化为一列无穷二值点列

$$1,0,1,1,\dots,0,1,0,0,\dots$$

对于上述点列，记 $P_{m,k}$ 为刚好到第 k 个数字，第一次出现连续 m 个 0 的概率；$Q_{m,k}$ 为刚好到第 k 个数字，第一次出现连续 m 个 1 的概率。每个数为 0 的概率为 $p=0.4$，为 1 的概率为 $1-p=0.6$。记 $P_m(0)$ 为会出现连续 m 个数字是 0 的概率，$P_m(1)$ 为会出现连续 m 个数字是 1 的概率

先考虑 $m=2$，则有

$$\begin{cases} P_{2,2k} &= (1-p)^{k-1}p^{k-1}p^2 = (1-p)^{k-1}p^{k+1} \\ P_{2,2k+1} &= (1-p)^k p^k p = (1-p)^k p^{k+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{2,2k} &= p^{k-1}(1-p)^{k+1} \\ Q_{2,2k+1} &= p^k(1-p)^{k+1} \end{cases}$$

则得到

$$\begin{aligned} P_2(0) =& \sum_{k=1}^{+\infty}(P_{2,2k}+P_{2,2k+1}) = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(p-p^2)^{k-1} + p\sum_{k=1}^{+\infty}(p-p^2)^k = \frac{2p^2-p^3}{1-p+p^2} \\ P_2(1) =& \frac{2(1-p)^2-(1-p)^3}{1-(1-p)+(1-p)^2} = \frac{1-p-p^2+p^3}{1-p+p^2} \end{aligned}$$

下面我们使用递推来考虑一般的 m，首先考虑 $P_{m,k}(k\geq m)$，当 $k=m$，则此时全部的都均为 0；当 $k>m$，此时的序列应有如下形式：

$$\underbrace{1,0,1,1,\dots,0}_{\text{共}k-m-1\text{个}},1,\underbrace{0,0,\dots,0,0}_{\text{共}m\text{个}},\dots$$

其中，前 $k-m$ 个必没有连续的 m 个 “0” 或 “1”，我们来求其反面：记前 $k-m$ 个存在连续的 m 个 “0” 或 “1” 的概率为 P_k^m。当 $k-m<m$ 时，必然没有连续的 m 个 “0” 或者 “1”，当 $k-m=m$ 时，若出现的话，只能是连续的 m 个 “1”，故得到

$$P_k^m = \begin{cases} P_{m,m}+\cdots+P_{m,k-m-1}+Q_{m,m}+\cdots+Q_{m,k-m-2}+Q_{m-1,k-m-1}, & k\geq 2m+2 \\ P_{m,m}+Q_{m-1,m}, & k=2m+1 \\ Q_{m-1,m-1}, & k=2m \\ 0, & k<2m \end{cases}$$

则有

$$P_{m,k} = \begin{cases} 0, & k<m \\ p^m, & k=m \\ (1-P_k^m)(1-p)\cdot p^m, & k>m \end{cases}$$

当求得 $P_{m,k}$ 后，使用 $1-p$ 替换 p 即得到 $Q_{m,k}$。至此，我们得到了递推关系。

对于 $m=3$，

$$
\begin{aligned}
P_{3,3} =& p^3 \\
P_{3,4} =& (1-p)p^3 \\
P_{3,5} =& (1-p)p^3 \\
P_{3,6} =& (1-Q_{2,2})(1-p)p^3 = (1-p)p^3 - (1-p)^3p^3 \\
P_{3,7} =& (1-P_{3,3}-Q_{2,3})(1-p)p^3 = (1-p^3-p(1-p)^2)(1-p)p^3
\end{aligned}
$$

□

题 20 (吉林大学-周鸣君). *设 B 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ 中的单位开球，非负函数 u 在 B 内二阶连续可导，$u(0)=0$ 且 u 在 B 内不恒为 0。试证明：对于任意的 $\alpha > 0$，都存在 $\xi \in B$，使得*

$$\Delta u(\xi) > \alpha u(\xi),$$

其中 $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

证明. 反证法，若存在一个 $\alpha_0 > 0$，使得对任意的 $x \in B$，都有 $\Delta u - \alpha_0 u \leq 0$。考虑到 u 是非负函数，则 $x=0$ 是 u 的一个最小值点。

我们考虑 $v=-u$，则 $\Delta v - \alpha_0 v \geq 0$。其中 $x=0$ 是 v 的一个最大值点。由强最大值原理，v 要么只能在 ∂B 上取到其非负最大值，要么在整个区域 B 上是常值。皆导出矛盾！ □

题 21 (复旦大学-江辰). *设 A 是一个 n 阶复矩阵且 A 的所有特征值都为 1。*

记

$$P_A(m) = \det\left(\sum_{k=0}^{m-1} (A^*)^k A^k\right)$$

其中 A^* 是 A 的共轭转置。

(a) 证明：$P_A(m)$ 是以 m 为变量的多项式；

(b) 证明：$P_A(m)$ 的阶数 $\deg P_A(m)$ 是 A 的相似不变量；

(c) 计算 $\deg P_A(m)$，用 A 的若当块的阶数表示。

正整数的自然数次幂求和

对于 $l \in \mathbb{N}$，计算

$$F(l,m) = \sum_{i=1}^{m-1} i^l$$

对于 $l=0$

$$F(0,m)=\sum_{i=1}^{m-1}1=m-1=a_{01}m+a_{00}\qquad(a_{01}=1;a_{00}=-1)$$

对于 $l=1$

$$F(1,m)=\sum_{i=1}^{m-1}i=\frac{m(m-1)}{2}=a_{12}m^2+a_{11}m+a_{10}\qquad(a_{12}=\frac{1}{2};a_{11}=-\frac{1}{2};a_{10}=0)$$

使用归纳不难得到 $F(l,m)$ 是关于 m 的 $l+1$ 次多项式，有如下表达

$$F(l,m)=\sum_{k=0}^{l+1}a_{lk}m^k$$

其中 a_{lk} 为常数，可以由 l 递推得到。

证明. 直接考虑 A 的若当标准型，设可逆矩阵 P 使得

$$A=P(I+J)P^{-1}\qquad J=\begin{pmatrix}J_1&O&\cdots&O\\O&J_2&\dots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\dots&J_q\end{pmatrix}\qquad J_i=\begin{pmatrix}\tilde{J}_i&O&\cdots&O\\O&\tilde{J}_i&\dots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\dots&\tilde{J}_i\end{pmatrix}_{u_i\times\tilde{n}_i}$$

设所有不同的若当块为 $\tilde{J}_i(1\le i\le q)$ 共 q 个，每个阶数为 $\tilde{n}_i$ 且重复的数量为 u_i，引入 $\tilde{n}_0=0$，并记 $N=\tilde{n}_q$。

根据多项式二项展开得到

$$A^k=P(I+J)^kP^{-1}=\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}PJ^tP^{-1},\quad(A^*)^k=\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}(P^*)^{-1}(J^T)^tP^*,$$

记 $Q=P^*P$，则 Q 为正定矩阵，记 $K=\min\{m,N\}-1\le N-1$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}(A^*)^kA^k&=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(P^*)^{-1}(J^*)^iP^*\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}PJ^jP^{-1}\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{k}{j}(P^*)^{-1}(J^T)^iQJ^jP^{-1}\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\underbrace{\sum_{k=\max\{i,j\}}^{m-1}\binom{k}{i}\binom{k}{j}}_{f(m,i,j)}(P^*)^{-1}(J^T)^iQJ^jP^{-1}\\&=\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}f(m,i,j)(P^*)^{-1}(J^T)^iQJ^jP^{-1}\end{aligned}$$

注意到

$$\binom{k}{i}=\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}=\sum_{s=0}^{i}c_s(i)k^s$$

是关于 k 的 i 次多项式，故 $\binom{k}{i}\binom{k}{j}$ 是关于 k 的 $i+j$ 次多项式 $p_{i+j}(k)$，表示如下

$$p_{i+j}(k)=\sum_{s=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}c_l(i)c_s(j)k^{l+s}=\sum_{l=0}^{i+j}\sum_{s=\max\{l-j,0\}}^{l}c_s(j)c_{l-s}(i)k^l=\sum_{l=0}^{i+j}d_l(i,j)k^l$$

考虑到 $i,j<N$ 有上界，则一个 $i+j$ 次关于 k 的多项式求和仍为一个多项式，记 $m(i,j)=\max\{i,j\}$

$$\begin{aligned}
f(m,i,j)=\sum_{k=\max\{i,j\}}^{m-1}p_{i+j}(k)&=\sum_{k=\max\{i,j\}}^{m-1}\sum_{l=0}^{i+j}d_l(i,j)k^l=\sum_{l=0}^{i+j}\left(d_l(i,j)F(l,m)-d_l(i,j)F(l,m(i,j))\right)\\
&=\sum_{l=0}^{i+j}\left(d_l(i,j)\sum_{r=0}^{l+1}a_{lr}m^r-d_l(i,j)\sum_{r=0}^{l+1}a_{lr}m^r(i,j)\right)\\
&=\sum_{r=0}^{i+j+1}\underbrace{\sum_{l=r-1}^{i+j}d_l(i,j)a_{lr}}_{e_r(i,j)}(m^r-m^r(i,j))=\sum_{r=0}^{i+j+1}\left(e_r(i,j)m^r-f_r(i,j)\right)
\end{aligned}$$

将 Q 进行 J 同结构分块，对于任何的 i,j

$$(J^T)^iQJ^j=\begin{pmatrix}(J_1^T)^i & O & \cdots & O\\ O & (J_2^T)^i & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & (J_k^T)^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k}\\ Q_{12}^T & Q_{22} & \dots & Q_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Q_{1k}^T & Q_{2k}^T & \cdots & Q_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1^j & O & \cdots & O\\ O & J_2^j & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & J_k^j\end{pmatrix}$$

计算得到

$$(J^T)^iQJ^j=\begin{pmatrix}(J_1^T)^iQ_{11}J_1^j & (J_1^T)^iQ_{12}J_2^j & \cdots & (J_1^T)^iQ_{1k}J_k^j\\ (J_2^T)^iQ_{12}^TJ_1^j & (J_2^T)^iQ_{22}J_2^j & \dots & (J_2^T)^iQ_{2k}J_k^j\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (J_k^T)^iQ_{1k}^TJ_1^j & (J_k^T)^iQ_{2k}^TJ_2^j & \cdots & (J_k^T)^iQ_{kk}J_k^j\end{pmatrix}$$

下面考虑

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1}(A^*)^kA^k&=\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\sum_{r=0}^{i+j+1}(e_r(i,j)m^r-f_r(i,j))(J^T)^iQJ^j\\
&=\sum_{r=0}^{2K+1}\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\mathbf{1}_{\{i+j\geq r-1\}}\left(e_r(i,j)m^r-f_r(i,j)\right)(J^T)^iQJ^j\\
&=\sum_{r=0}^{2K+1}A_rm^r
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1}_{\{i+j\geq r-1\}}$ 是指示函数，当 $i+j\geq r-1$ 时为 1，否则为 0。显然上式是关于 m 的多项式，则取行列式 $P_A(m)$ 仍然为 m 的行列式。另外由于我们直接考虑 A 的若当标准型，而相似的矩阵有相同的若当标准型，所以 $\deg P_A(m)$ 的阶数是不变的。

我们下面计算每个元素的 m 最高次幂，考虑每一个分块

$$\sum_{r=0}^{2K+1}\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\mathbf{1}_{\{i+j\geq r-1\}}\left(e_r(i,j)m^r-f_r(i,j)\right)(\tilde{J}_q^T)^i\tilde{Q}_{qq}\tilde{J}_q^j$$

对于 $N = \tilde{n}_q < m$，得到

$$\deg P_A(m) = \sum_{p=1}^{q} u_p \sum_{k=1}^{\tilde{n}_p} (2k-1) = \sum_{p=1}^{q} u_p \tilde{n}_p^2$$

对于 $\tilde{n}_i \le m < \tilde{n}_{i+1}$，记 $m_p = \tilde{n}_p - m (p \ge i+1)$，得到

$$\begin{aligned}\deg P_A(m) &= \sum_{p=1}^{i} u_p \sum_{k=1}^{\tilde{n}_p} (2k-1) + \sum_{p=i}^{q} \left(m_p(2m-1) + u_p \sum_{k=1}^{m} (2k-1) \right) \\ &= \sum_{p=1}^{i} u_p \tilde{n}_p^2 + (2m-1) \sum_{p=i}^{q} m_p + m^2 \sum_{p=i}^{q} u_p\end{aligned}$$

□

题 22 (吉林大学-周鸣君). 设 $n \ge 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c,$$

其中 $A = \left(a_{ij}\right)$ 是 $n \times n$ 阶实矩阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 是 n 维列向量，c 是常数。若 $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$，且在 $\partial\Omega$ 上有 $p \le 0$ 成立。证明：在 Ω 内恒有 $p \le 0$。

证明. 若不然，则存在 Ω 里面一点 $\mathbf{x}_0$，使得 $p(\mathbf{x}_0) > 0$ 记 $g(t) = p(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$，易知 $g(0) > 0$。A 的 2 阶顺序子矩阵记为 A_2，记 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$，将 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处进行泰勒展开，便得到：

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 = g(0) + (\mathbf{y}^T A \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T A \mathbf{y} + \mathbf{b}^T \mathbf{y})t + \mathbf{y}^T A \mathbf{y} t^2$$

因为 Ω 为有界区域，故可选取 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0)$，即只有前两个分量不恒为零，于是 t^2 的系数就变为

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{y} = (y_1 \quad y_2) A_2 (y_1 \quad y_2)^T = a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{21}y_1y_2 + a_{22}y_2^2$$

直接计算判断式为：

$$\Delta = (a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22} \ge 4a_{12}a_{21} - 4a_{11}a_{22} > 0$$

所以可以取 $\mathbf{y}_0$ 使得 $\mathbf{y}_0^T A \mathbf{y}_0 = 0$。记 $s = \mathbf{y}_0^T A \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T A \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}^T \mathbf{y}_0$，下面分情况来考虑：

- $s = 0$，则 $g(t) = g(0) > 0$，此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 上均有 $p > 0$，这与 $\partial\Omega$ 上 $p(x) \le 0$ 矛盾！
- $s > 0$，则取 $t > 0$，此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 与 $\partial\Omega$ 的一个交点处有 $p(x) > 0$，矛盾！
- $s < 0$，则取 $t < 0$，此时直线 $\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 与 $\partial\Omega$ 的一个交点处有 $p(x) > 0$，矛盾！

综上，假设不成立，即在 Ω 内恒有 $p \le 0$。 □

题 23 (复旦大学-严金海). 设 $a \in (0,1)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$。证明：存在常数 A, B 使得

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{A}{x^{1-a}} - B \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1-a} f(x) - A - x^{1-a} B}{x^{2-a}} = 0.$$

一些额外的思考

根据求和公式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k\cos(k\theta) =& \frac{1-a\cos\theta-a^{n+1}\cos((n+1)\theta)+a^{n+2}\cos(n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\\ \sum_{k=1}^{n} a^k\sin(k\theta) =& \frac{a\sin\theta-a^{n+1}\sin((n+1)\theta)+a^{n+2}\sin(n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{-1+\cos\theta-\cos((n+1)\theta)+\cos(n\theta)}{2-2\cos\theta} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) = \frac{\sin\theta-\sin((n+1)\theta)+\sin(n\theta)}{2-2\cos\theta} = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

一、计算下面的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

对于 $|a|<1$，引入如下函数

$$f(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}a^n \implies f'(a)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos nx\ a^{n-1}$$

直接计算 $f'(a)$ 得到

$$f'(a)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}(ae^{ix})^n\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{a}ae^{ix}\frac{1}{1-ae^{ix}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1-ae^{ix}}\right)=\frac{\cos x-a}{1-2a\cos x+a^2}$$

注意到 $f(0)=0$，则得到

$$f(t)=\int_0^t f'(a)\,\mathrm{d}a=\int_0^t\frac{\cos x-a}{1-2a\cos x+a^2}\,\mathrm{d}a=-\frac{1}{2}\ln(t^2-2t\cos x+1)$$

注意到 $f(t)$ 在 $t=1$ 处收敛，记 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos kx$，则 $|S_n(x)|<\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$。

对 $0<t<1$ 考虑

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}(1-t^n) =& \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}(1-t)\sum_{k=0}^{n-1}t^k\\ =&(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}\cos nx\underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{n-1}t^k}{n}}_{b_n(t)}\\ =&(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n(x)-S_{n-1}(x))b_n(t)\\ =&(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}S_n(x)(b_n(t)-b_{n+1}(t))-(1-t)S_0(x)b_1(t)\end{aligned}$$

考虑到 $b_n>0$ 且单调递减，则有

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}-f(t)\right|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}(1-t^n)\right|\le(1-t)b_1(t)\left(\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}+S_0(x)\right)=(1-t)\left(\frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}+1\right)$$

令 $t\to1^-$ 得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

二、证明

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a}\sin^a x\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

证明. 引入

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a x\,\mathrm{d}x$$

则有

$$\begin{aligned}I(n+2)=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,\mathrm{d}x\\=&\sin^{n+1}x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\sin^n x(1-\sin^2x)\,\mathrm{d}x\\=&(n+1)I(n)-(n+1)I(n+2)\\\Longrightarrow&(n+2)I(n+2)I(n+1)=(n+1)I(n+1)I(n)=\cdots=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

注意到 $I(a)$ 为单调减，则有

$$\frac{n}{n+1}(n+1)I(n)I(n+1)<nI^2(n)<nI(n)I(n-1)$$

上式令 $n\to+\infty$，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}I(n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。对于任意的 $a>0$，就有

$$\sqrt{\frac{[a]}{[a]+1}}\sqrt{[a]+1}I([a]+1)=\sqrt{[a]}I([a]+1)<\sqrt{a}I(a)<\sqrt{[a]+1}I([a])=\sqrt{\frac{[a]+1}{[a]}}\sqrt{[a]}I([a])$$

上式令 $a\to+\infty$，得证。 □

证明. 注意到恒等式

$$\int_0^{+\infty}e^{-nt^{\frac{1}{a}}}\,\mathrm{d}t\xlongequal{s=nt^{\frac{1}{a}}}\frac{a}{n^a}\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{a-1}\,\mathrm{d}s=\frac{a}{n^a}\Gamma(a)$$

对于 $|z|<1$，考虑如下级数：

$$\begin{aligned}F(z)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^a}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{a\Gamma(a)}(ze^{-t^{\frac{1}{a}}})^n\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{ze^{-t^{\frac{1}{a}}}}{1-ze^{-t^{\frac{1}{a}}}}\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{s=t^{\frac{1}{a}}}\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{ze^{-s}s^{a-1}}{1-ze^{-s}}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

将 $z=re^{ix}(0<r<1)$ 代入上式，得到：

$$\begin{aligned}F(re^{ix})=&\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}s^{a-1}e^{-s}\underbrace{\frac{r\cos x-r^2e^{-s}}{1-2re^{-s}\cos x+r^2e^{-2s}}}_{g(r,x)}\,\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}s^{a-1}e^{-s}\underbrace{\frac{r\sin x}{1-2re^{-s}\cos x+r^2e^{-2s}}}_{h(r,x)}\,\mathrm{d}s\ i\end{aligned}$$

对于 $g(r,x)$，我们估计其关于 r 的导数

$$\begin{aligned}|g'(r,x)|=&\left|\frac{(\cos x-2re^{-s})(1-2re^{-s}\cos x+r^2e^{-2s})-(r\cos x-r^2e^{-s})(-2e^{-s}\cos x+2re^{-2s})}{(1-2re^{-s}\cos x+r^2e^{-2s})^2}\right|\\\le&\frac{(1+2)(1+2+1)+(1+1)(2+2)}{(\sin^2x+(\cos x-re^{-s})^2)^2}\\\le&\begin{cases}\frac{20}{\sin^4 x}&\text{if }x\ne k\pi\\20&\text{if }x=(2k+1)\pi\end{cases}\end{aligned}$$

对于任意的 $x\ne 2k\pi,(k\in\mathbb{Z})$，就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}s^{a-1}e^{-s}(g(r,x)-g(1,x))\,\mathrm{d}s\right|\le&\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}s^{a-1}e^{-s}|g'(\xi,x)|(1-r)\,\mathrm{d}s\\\le&20(1-r)M\to0(\text{当}r\to1^-)\end{aligned}$$

对于实部，我们有 $\Gamma(a)f(x)$：

$$\Gamma(a)f(x)=\int_0^{+\infty}s^{a-1}e^{-s}\frac{\cos x-e^{-s}}{1-2e^{-s}\cos x+e^{-2s}}\,\mathrm{d}s\xlongequal{s=xu}x^a\int_0^{+\infty}u^{a-1}\frac{\cos x-e^{-xu}}{e^{xu}+e^{-xu}-2\cos x}\,\mathrm{d}u$$

考虑到 $e^{xu}+e^{-xu}-2\cos x\ge2(1-\cos x)\ge0$ 及 $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$，有如下估计：

$$x\int_0^{+\infty}u^{a-1}\frac{1-e^{-xu}-\frac{1}{2}x^2}{e^{xu}+e^{-xu}-2\cos x}\,\mathrm{d}u\le x^{1-a}\Gamma(a)f(x)\le x\int_0^{+\infty}u^{a-1}\frac{1-e^{-xu}}{e^{xu}+e^{-xu}-2\cos x}\,\mathrm{d}u$$

考虑到

$$x\int_0^{+\infty}u^{a-1}\frac{x^2}{e^{xu}+e^{-xu}-2\cos x}\,\mathrm{d}u=x\int_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n-2}u^{2n}}\,\mathrm{d}u\le x\int_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{1-\frac{1}{12}x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{1-\frac{1}{12}x^2}t}x\left(1-\frac{1}{12}x^2\right)^{\frac{a}{2}-1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\to 0(x\to 0^+)$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2-\frac{1}{12}x^4)}-\frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2)}\,\mathrm{d}u\\=&\int_0^{+\infty}\frac{1}{12}\frac{x^5u^{a-1}(1-e^{-xu})}{(e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2-\frac{1}{12}x^4)(e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2)}\,\mathrm{d}u\to 0\end{aligned}$$

我们只需求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^{+\infty}\frac{xu^{a-1}(1-e^{-xu})}{e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2}\,\mathrm{d}u$ 即可。

首先有

$$\begin{aligned}\frac{u^a}{(u^2+1)}-\frac{u^a\frac{1-e^{-xu}}{xu}}{\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}+1}=&\frac{u^a\left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}+(1+u^2-u^2)-(u^2+1)\frac{1-e^{-xu}}{xu}\right)}{(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}+1)(u^2+1)}\\=&\underbrace{\frac{u^a\left(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}-u^2\right)}{(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}+1)(u^2+1)}}_{S_1(u,x)>0}+\underbrace{\frac{u^a\left(\frac{e^{-xu}-1}{xu}+1\right)}{(\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}+1)}}_{S_2(u,x)>0}\end{aligned}$$

下面估计 $S_1(u,x),S_2(u,x)$ 的积分：

$$\int_0^{+\infty}S_1(u,x)\,\mathrm{d}u\xlongequal{t=xu}x^{1-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty}S_2(u,x)\,\mathrm{d}u\xlongequal{t=xu}x^{1-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{(e^t+e^{-t}-2+x^2)}\,\mathrm{d}t$$

对于 $S_1(u,x)$ 的 $x=0$ 附近主项，首先在 $t\to 0^+$ 时，下式成立

$$\begin{aligned}&x^{1-a}\int_0^{\delta}\left(\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{t^2(e^t+e^{-t}-2)}-\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)}\right)\mathrm{d}t\\=&x^{1-a}\int_0^{\delta}\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)((e^t+e^{-t}-2+t^2)x^2+x^4)}{t^2(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\\sim&x^{3-a}\int_0^{\delta}\frac{t^a((e^t+e^{-t}-2)^2-t^4)}{t^2(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\\sim&x^{3-a}\int_0^{\delta}\frac{t^{a+6}}{t^2(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\\sim&x^{3-a}\int_0^{\delta}\frac{t^{2+a}}{(t^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}t\\\sim&x^2\int_0^{\frac{\delta}{x}}\frac{u^{2+a}}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

对于 $S_2(u,x)$ 的 $x=0$ 附近主项，首先在 $t\to 0^+$ 时，下式成立

$$
\begin{aligned}
&x^{1-a}\int_0^{\delta}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{e^t+e^{-t}-2}-\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{e^t+e^{-t}-2+x^2}\,\mathrm{d}t\\
=&x^{3-a}\int_0^{\delta}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\
\sim&\frac{x^{3-a}}{2}\int_0^{\delta}\frac{t^{a-1}}{(t^2+x^2)}\,\mathrm{d}t\\
\sim&\frac{x}{2}\int_0^{\frac{\delta}{x}}\frac{u^{a-1}}{(1+u^2)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

考虑到

$$
\begin{aligned}
&x^{1-a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{t^2(e^t+e^{-t}-2)}-\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)}\right)\mathrm{d}t\\
=&x^{1-a}\left(\int_0^M+\int_M^{+\infty}\frac{t^a(e^t+e^{-t}-2-t^2)((e^t+e^{-t}-2+t^2)x^2+x^4)}{t^2(t^2+x^2)(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\right)\\
\le&O(x^2)+O(x^{3-a})\int_M^{+\infty}\frac{t^a}{t^2(t^2+x^2)}\,\mathrm{d}t\\
\le&O(x^2)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&x^{1-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)x^2}{(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\
=&x^{3-a}\int_0^M+\int_M^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{(e^t+e^{-t}-2+x^2)(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\
\le&O(x)+x^{3-a}\int_M^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{(e^t+e^{-t}-2)^2}\,\mathrm{d}t\\
\le&O(x)
\end{aligned}
$$

下面来计算各个主项值：

- 令 $A=\dfrac{1}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^a}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{u^a}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\xlongequal{t=\frac{1}{u^2+1}}&\frac{1}{2\Gamma(a)}\int_0^1(1-t)^{\frac{a-1}{2}}t^{-\frac{a+1}{2}}\,\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{2\Gamma(a)}\mathrm{B}\left(\frac{a+1}{2},\frac{1-a}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2\Gamma(a)}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma(1)}\\
\xlongequal{\text{余元公式}}&\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\pi}{2\sin\left(\pi\frac{a+1}{2}\right)}\\
=&\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{\pi\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{\sin(\pi a)}=\Gamma(1-a)\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- 令 $B_1=\dfrac{1}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-2}(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t$
- 令 $B_2=\dfrac{1}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^{-t}-1+t)}{(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t$

故有 $A=\Gamma(1-a)\sin\left(\dfrac{a\pi}{2}\right)$，$B=B_1+B_2$，满足

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1-a}f(x)-A-x^{1-a}B}{x^b}=0(b<1)$$

□

题 24 (复旦大学-楼红卫、严金海). 试对以下各函数建立类似于问题 23 的结果。

(i) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^a}$，其中 $a\in(0,1)$。

(ii) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$。

(iii) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$。

证明. 我们同样用上题的思路计算:

(i) 对于 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^a}$，我们根据上式结果

$$\Gamma(a)x^{1-a}f(x)\sim\int_0^{+\infty}\frac{x^2u^{a-1}}{e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2}\,\mathrm{d}u$$

我们同样作差

$$\frac{u^{a-1}}{1+u^2}-\frac{x^2u^{a-1}}{e^{xu}+e^{-xu}-2+x^2}=\underbrace{u^{a-1}\frac{\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2}-u^2}{(1+u^2)(1+\frac{e^{xu}+e^{-xu}-2}{x^2})}}_{S(u,x)}>0$$

下面估计 $S(u,x)$ 的积分

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}S(u,x)\,\mathrm{d}u\\
\xlongequal{t=xu}&x^{2-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{(x^2+t^2)(x^2+e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\
=&x^{2-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{t^2(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t\\
&-x^{2-a}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{t^{a-1}(e^t+e^{-t}-2-t^2)((e^t+e^{-t}-2+t^2)x^2+x^4)}{t^2(x^2+t^2)(e^t+e^{-t}-2)(x^2+e^t+e^{-t}-2)}}_{T(t,x)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

对于 $T(t,x)$ 的主项，首先在 $t\to 0^+$ 时，下式成立

$$\int_0^\delta T(t,x)\,\mathrm{d}t \sim \int_0^\delta \frac{1}{6}\frac{x^2t^{a+5}}{t^4(t^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{\frac{\delta}{x}} \frac{x^a}{6}\frac{u^{1+a}}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \le O(x^a)$$

于是得到：

$$x^{2-a}\int_0^{+\infty} T(t,x)\,\mathrm{d}t \le x^{2-a}\int_0^M + \int_M^{+\infty} T(t,x)\,\mathrm{d}t \sim O(x^2) + x^{4-a}\int_M^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{t^2(t^2+x^2)}\,\mathrm{d}t = O(x^2)$$

若我们引入 A,B 如下：

$$A = \int_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},1-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)} = \pi\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\frac{1}{\sin\pi a} = \Gamma(a)\Gamma(1-a)\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)$$

$$B = \int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}(e^t+e^{-t}-2-t^2)}{t^2(e^t+e^{-t}-2)}\,\mathrm{d}t$$

故有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{A - x^{1-a}\Gamma(a)f(x) - x^{2-a}B}{x^b} \to 0.(b<2)$$

(ii) 注意到恒等式

$$\int_0^{+\infty} n^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t(\ln n)}\,\mathrm{d}t \xlongequal{s=(\ln n)t} \frac{1}{\ln n}\int_0^{+\infty} e^{-s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\ln n}$$

对于 $|z|<1$，我们考虑如下级数

$$\begin{aligned}
F(z) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^n}{\ln n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{z^n}{n^t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^{+\infty} z^n\frac{1}{t\Gamma(t)}\int_0^{+\infty} e^{-ns^{\frac{1}{t}}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t\Gamma(t)}\sum_{n=2}^{+\infty}(ze^{-s^{\frac{1}{t}}})^n\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t\Gamma(t)}\frac{z^2e^{-2s^{\frac{1}{t}}}}{1-ze^{-s^{\frac{1}{t}}}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{s=u^t} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)}\frac{z^2e^{-2u}}{1-ze^{-u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

将 $z=re^{ix}(0<r<1)$ 代入上式，得到：

$$\begin{aligned}
F(re^{ix}) = &\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)}\frac{r^2e^{-2u}(\cos 2x - re^{-u}\cos x)}{1-2re^{-u}\cos x + r^2e^{-2u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)}\frac{r^2e^{-2u}(\sin 2x - re^{-u}\sin x)}{1-2re^{-u}\cos x + r^2e^{-2u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\ i
\end{aligned}$$

取实部，得到

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)}\frac{e^{-2u}(\cos 2x - e^{-u}\cos x)}{1-2e^{-u}\cos x + e^{-2u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

同样的分析得到

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{t-1}}{\Gamma(t)} \frac{e^{-u}(1-e^{-u})}{e^{-u}+e^{u}-2+x^2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}t$$

革命尚未成功，同志仍需努力。。。。。。

$\square$

题 25 (华东师范大学-庞学诚). 设 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0) \neq f(1)$。若对于 $\forall c \in f([0,1])$，$f(x)=c$ 至多只有有限个解。证明：存在 $c_0 \in f([0,1])$，使得 $f(x)=c_0$ 恰好有奇数个解。

证明. 采用反证法，不妨设 $f(0)<f(1)$，否则将 $-f(x)$ 仍记为 $f(x)$ 进行证明即可。

取 $c_0 \in [f(0), f(1)]$，我们考虑有限集合 $\{x|f(x)=c_0,\ x \in (0,1)\}$，其 n 个元素从小到大排列为 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n}$，记 $x_0=0$，$x_{2n+1}=1$，根据连续函数的介值定理，在 $2n+1$ 个区间的任一个 (x_i, x_{i+1}) 上必有 $f(x)-c_0>0$ 或 $f(x)-c_0<0$ 恒成立，且因为 $2n+1$ 是奇数，必有一个要更多一些，不妨设 $f(x)-c_0>0$ 的区间更多有 $m \geq n+1$ 个。

记每个区间 (x_i, x_{i+1}) 上 $|f(x)-c_0|$ 的最大值为 $\delta_i=|f(x_i')-c_0|>0$，$i=0,1,\cdots,2n$，取 $\delta=\min\limits_{0 \leq i \leq 2n}\left\{\frac{\delta_i}{2}\right\}$，考虑函数 $g(x)=f(x)-(c_0+\delta)$，对于 $f(x)-c_0>0$ 的非端点区间 (x_i, x_{i+1})（共 $m-1$ 个），有 $g(x_i)<0$，$g(x_{i+1})<0$，$g(x_i')>0$，则在 (x_i, x_{i+1}) 上必有两个根，又因 (x_{2n}, x_{2n+1}) 上有 $g(x_{2n})<0$，$g(x_{2n+1})>0$，故在 (x_{2n}, x_{2n+1}) 上 $g(x)$ 有一个根，所以 $g(x)$ 在 $[x_0, x_{2n+1}]$ 上根至少有 $2(m-1)+1=2m-1 \geq 2n+2-1=2n+1$ 个，又知 $g(x)$ 有偶数个根，则其根至少有 $2n+2$ 个。

下面我们记 $c_1=c_0+\delta$，重复上述过程，我们得到数列 $\{c_n\}$ 满足 $f(x)-c_k$ 的根至少有 $2n+2k$ 个，考虑到 $f(0) \leq c_n \leq f(1)$ 是有界的，故其必有收敛子列不妨仍记为 $c_n \to c$，则不难得到 $f(x)-c$ 有无穷多个根，这与题设矛盾！ $\square$

注. 此题的反证思想来源于 柯西永远爱你 ，里面还有推广版本的描述及证明。

另外，若 $f(0)=f(1)$，此题结论并不成立，下面是一个反例：

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{若 } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{若 } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right] \\ (2^{k+3}-2)\left(x-1+\frac{1}{2^{2k+1}}\right)+1-\frac{1}{2^{k-1}} & \text{若 } x \in \left[1-\frac{1}{2^{2k+1}}, 1-\frac{1}{2^{2k+2}}\right] (k \geq 1) \\ -(2^{k+2}-4)\left(x-1+\frac{1}{2^{2k+1}}\right)+1-\frac{1}{2^{k-1}} & \text{若 } x \in \left[1-\frac{1}{2^{2k}}, 1-\frac{1}{2^{2k+1}}\right] (k \geq 1) \\ 1 & \text{若 } x=1 \end{cases}$$

不难得到 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=c$ 的根的数量只能为 $0,2,4$，均为偶数个根。

题 26 (南京大学-石亚龙). 假设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵 $(n \geq 2)$，满足 $a_{ii}=0 (i=1,2,\ldots,n)$，并且对任何 n 元置换 σ 都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

证明：存在实数 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 使得对任何 $1 \leq i, j \leq n$，都有 $b_i-b_j \leq a_{ij}$。

证明. 考虑平面上 n 个互不相同的点 $s_i(i=1,2,\dots,n)$，不同点连线路径 $s_i\to s_j$ 给予权重 a_{ij}，对于任一个圈 $s_{i_1}\to s_{i_2}\to\cdots\to s_{i_k}\to s_{i_1}$，记 $i_{k+1}=i_1$，取如下置换

$$\begin{cases}\sigma(i_j)=i_{j+1} & \text{对 } j=1,2,\dots,k\\ \sigma(i)=i & \text{若 } i\neq i_j(j=1,2,\dots,k)\end{cases}$$

由 $a_{ii}=0$ 得到 $a_{i_1i_2}+a_{i_2i_3}+\cdots+a_{i_ki_1}\geq 0$，即圈路径的权重和是非负的。

定义 b_i 是 s_i 经过不同点到 s_1 路径权重和的最小值，易知 $b_1=0$，写明白即为:

$$b_i=\min_{\{i_k\}}\{a_{ii_1}+a_{i_1i_2}+\cdots+a_{i_k1}\}$$

注意到任何闭合路径（即圈）的权重和是非负，因为点是有限的，故从 s_i 经过不同点到 s_1 不包含圈的路径数量也是有限的，故上述定义是有意义的。

根据 $\{b_k\}(k=1,2,\dots,n)$ 的定义，在计算 s_i 经过不同点到 s_1 的权重和最小值 b_i 时，其必不大于先到 s_j 点，再从 s_j 点到 s_1 点的最小路径权重和 b_j，这得到

$$b_i\leq a_{ij}+b_j\implies b_i-b_j\leq a_{ij}$$

证毕。 □

题 27 (中国科学技术大学-任广斌). 设 $k_1,k_2,\dots,k_n,m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$。计算

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left((x-\alpha_1)^{-k_1}(x-\alpha_2)^{-k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{-k_n}\right).$$

解. 对于任意的 $k,i\in\mathbb{N}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(x-\alpha)^{-k}=(-k)(-k-1)\cdots(-k-(i-1))(x-\alpha)^{-(k+i)}=(-1)^i\prod_{j=0}^{i-1}(k+j)(x-\alpha)^{-(k+i)}$$

对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 及无穷可微函数 $h_i(x)(1\leq i\leq n)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(h_1)=&h_1^{(i)}(x)\\ \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(h_1h_2)=&\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}h_1^{(j)}h_2^{(i-j)}=i!\sum_{j=0}^{i}\frac{h_1^{(j)}}{j!}\frac{h_2^{(i-j)}}{(i-j)!}\\ \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(h_1h_2h_3)=&i!\sum_{j=0}^{i}\frac{h_1^{(j)}}{j!}\frac{(h_2h_3)^{(i-j)}}{(i-j)!}=i!\sum_{j=0}^{i}\frac{h_1^{(j)}}{j!}\frac{1}{(i-j)!}(i-j)!\sum_{l=0}^{i-j}\frac{h_2^{(l)}}{l!}\frac{h_3^{(i-j-l)}}{(i-j-l)!}\\ =&i!\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{i-j}\frac{h_1^{(j)}}{j!}\frac{h_2^{(l)}}{l!}\frac{h_3^{(i-j-l)}}{(i-j-l)!}\end{aligned}$$

对于 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$，由归纳法不难得到

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(h_1h_2\cdots h_n)=i!\sum_{|\beta|=i}\prod_{k=1}^{n}\frac{h_k^{(\beta_k)}}{\beta_k!}$$

其中 $|\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。

约定 $(-1)! = 1$，令 $h_j = (x-\alpha_j)^{-k_j}$，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left((x-\alpha_1)^{-k_1}(x-\alpha_2)^{-k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{-k_n}\right) &= m! \sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\frac{h_j^{(\beta_j)}}{\beta_j!} \\
&= m! \sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_j!}(-1)^{\beta_j}\prod_{i=0}^{\beta_j-1}(k_j+i)(x-\alpha_j)^{-(k_j+\beta_j)} \\
&= m! \sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{\beta_j}}{\beta_j!}(x-\alpha_j)^{-(k_j+\beta_j)}\prod_{i=0}^{\beta_j-1}(k_j+i) \\
&= m! \sum_{|\beta|=m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{\beta_j}(k_j+\beta_j-1)!}{\beta_j!(k_j-1)!}(x-\alpha_j)^{-(k_j+\beta_j)}
\end{aligned}
$$

题 28 (南开大学-黄利兵)**.** 设 $f \in C(\mathbb{R})$，且

$$\int_0^{2\pi} f(r\cos t)\,\mathrm{d}t$$

与 r 无关。证明或否定：

$$f(x) + f(-x) = 2f(0)\ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

证明. 作变量代换 $x = r\cos t$，则得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(r\cos t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} f(r\cos t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(-r\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_r^{-r} f(-x) + f(x)\,\mathrm{d}\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \\
&= \int_{-r}^{r} \frac{f(-x)+f(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

记 $g(x) = f(x) + f(-x)$，则 $g(x)$ 为偶函数，不妨设 $g(0) = 0$，否则将 $g(x) - g(0)$ 替代 $g(x)$ 即可。

于是对于 $\forall r > 0$，成立

$$0 = \int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

对于任意的 $y > 0$，根据上式不难得到：

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^y \frac{r}{\sqrt{y^2-r^2}}\int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^y g(x)\int_x^y \frac{r}{\sqrt{(y^2-r^2)(r^2-x^2)}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u=\frac{r^2-x^2}{y^2-x^2}} \frac{1}{2}\int_0^y g(x)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u)u}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^y g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

这就得到 $g(x) \equiv 0$，证毕。 $\square$

注. 此题的证明技巧来源于清疏数学，本质是求解了积分方程。

题 29 (四川大学博士研究生-王周哲). 设凸区域 $V\subseteq\mathbb{R}^n$，$f:V\to\mathbb{R}$ 是 V 上的上半连续函数。如果对任何的 $\mathrm{x}\in V$，$\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，都存在 $h\in(0,\delta)$，使得

$$f(\mathrm{x})\le\frac{f(\mathrm{x}+h\mathrm{y})+f(\mathrm{x}-h\mathrm{y})}{2}.$$

证明：f 是 V 上的凸函数。

引理

引理 3. 对于闭区间 $[a,b]$ 的上半连续函数 $f(x)$，其必在 $[a,b]$ 上取到最大值。

证明. 首先证明 $f(x)$ 有上界，根据上半连续的定义，对任意的 $x_i\in[a,b]$，取 $\varepsilon=1$，则存在 δ_i，使得 $x\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\bigcap[a,b]$ 时，就有 $f(x)<f(x_i)+1$，易知 $(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，根据有限覆盖定理，必存在整数 N 使得 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}(x_{i_k}-\delta_{i_k},x_{i_k}+\delta_{i_k})$。取 $M=\max\limits_{1\le k\le N}\{f(x_{i_k})\}+1$，则得到 $f(x)<M$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立。
记 $\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)=L<+\infty$，使用反证法：若对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)<L$。考虑函数 $g(x)=\dfrac{1}{L-f(x)}$，对于任意一点 x_0，记 $\varepsilon_0=L-f(x_0)$，取 $\varepsilon<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，存在 $\delta_0>0$ 使得 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ 对任意的 $x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 成立，这说明

$$L-f(x)>L-f(x_0)-\varepsilon\implies\frac{1}{L-f(x)}<\frac{1}{L-f(x_0)-\varepsilon}<\frac{1}{L-f(x_0)}+\varepsilon'$$

其中 $\varepsilon'=\dfrac{2}{\varepsilon_0^2}\varepsilon$，这说明 $g(x)$ 也为上半连续函数，故 $g(x)$ 有上界。另一方面，由上确界定义知存在一列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)\to L^-$，这与 $g(x_n)$ 有上界矛盾！故 $f(x)$ 必在某一点取到最大值，证毕。 □

证明. 使用反证法。若存在 $\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0\in V$ 及 $\lambda_0\in(0,1)$ 使得

$$f(\lambda_0\mathrm{x}_0+(1-\lambda_0)\mathrm{y}_0)>\lambda_0f(\mathrm{x}_0)+(1-\lambda_0)f(\mathrm{y}_0)$$

考虑到 V 是凸区域，故在 $[0,1]$ 上可以引入处处有定义的函数

$$g(\lambda)=f(\lambda\mathrm{x}_0+(1-\lambda)\mathrm{y}_0)-\lambda f(\mathrm{x}_0)-(1-\lambda)f(\mathrm{y}_0)=f(\mathrm{y}_0+\lambda(\mathrm{x}_0-\mathrm{y}_0))-\lambda(f(\mathrm{x}_0)-f(\mathrm{y}_0))-f(\mathrm{y}_0)$$

对任意的 $\lambda\in[0,1]$，及 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 足够小，使得当 $t\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\bigcap[0,1]$ 时，就有

$$f(\mathrm{y}_0+t(\mathrm{x}_0-\mathrm{y}_0))<f(\mathrm{y}_0+\lambda(\mathrm{x}_0-\mathrm{y}_0))+\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta_1=\min\left\{\delta,\dfrac{\varepsilon}{2|f(\mathrm{x}_0)-f(\mathrm{y}_0)|}\right\}$，当 $t\in(\lambda-\delta_1,\lambda+\delta_1)\bigcap[0,1]$ 时就有

$$g(t)<g(\lambda)+\frac{\varepsilon}{2}+\delta_1|f(\mathrm{x}_0)-f(\mathrm{y}_0)|<g(\lambda)+\varepsilon$$

这说明 $g(\lambda)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的上半连续函数，由引理 3知 $g(\lambda)$ 必可以在某点 λ_c 处取到最大值。

注意到

$$g(0)=g(1)=0 \qquad g(\lambda_0)>0$$

这说明 $\lambda_c\in(0,1)$，且 $g(\lambda_c)\geq g(\lambda_0)$。

记 $\alpha=\mathrm{y}_0+\lambda_c(\mathrm{x}_0-\mathrm{y}_0)$，$\beta=\mathrm{x}_0-\mathrm{y}_0$，根据题设令 $\mathbf{x}=\alpha$，$\mathbf{y}=\beta$，得到：对任意的 $t\in(0,1)$ 及 $0<\delta<1-\lambda_c$，存在 $h\in(0,\delta)$ 使得

$$f(\alpha)\leq\frac{f(\alpha+h\beta)+f(\alpha-h\beta)}{2}\implies g(t)\leq g(\lambda_c)\leq\frac{g(\lambda_c+h)+g(\lambda_c-h)}{2}$$

这说明存在一列 $h_n(>0)\to0^+$ 使得 $g(\lambda_c+h_n)=g(\lambda_c-h_n)=g(\lambda_c)$，对于任一个 h_k，对最大值点 $\lambda=\lambda_c+h_k$ 重复上述推导得到每个最大值都是一个聚点。不妨设 $\lambda_c\geq\dfrac{1}{2}$，记 $h_c=\sup\limits_{h\in(\lambda_c,1)}\{h|g(h)=g(\lambda_c)\}$，则必有 $g(h_c)=g(\lambda_c)$，这是因为 $g(\lambda_c)\leq\limsup\limits_{k\to+\infty}g(h_{t_k})\leq g(h_c)\leq g(\lambda_c)$。且有 $h_c=1$，若不然，可以构造 $g(h_c+h_{c_k})=g(\lambda_c)$ 且 h_{c_k} 单调增，这与 h_c 的定义矛盾。所以必可以找出一列 $\{h_{t_k}\}$ 使得 $g(h_{t_k})=g(\lambda_c)\geq g(\lambda_0)$，另一方面，由上半连续函数的定义，有

$$0<g(\lambda_0)\leq\limsup_{k\to+\infty}g(h_{t_k})\leq g(1)=0$$

矛盾！故原命题得证。 □

注. 考虑到上半连续和凸函数的“不常见”性，我们列出这两个定义：

定义 1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，函数 $f:E\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 在点 $x_0\in E$ 处是**上半连续的**，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon \quad \text{对所有 } x\in B(x_0,\delta)\cap E$$

成立。如果 f 在 E 的每一点都上半连续，则称 f 在 E 上是上半连续的。

定义 2. 函数 $f:V\to\mathbb{R}$ 是**凸函数**，如果对任意 $x,y\in V$ 和任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

题 30 (江苏师范大学本科生-尤永皓)**.** 设 $n\geq1$，证明：

$$0<\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}{\sqrt{k+1}}<1.$$

证明. 注意到

$$\int_0^{+\infty}e^{-(k+1)x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{y=\sqrt{k+1}x}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k+1}}$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}{\sqrt{k+1}}&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k e^{-kx^2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^n\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

不难得到

$$0<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^n\,\mathrm{d}x<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=1$$

□

题 31 (南京大学-梅加强). 计算积分

$$\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2-x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解. 首先分部积分

$$\begin{aligned}A=\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{2-x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{t=\sqrt{2-x^2}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t\arctan t}{(3-t^2)\sqrt{2-t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=\arctan\sqrt{2-x^2}\arctan x\Big|_0^1+\underbrace{\int_0^1\frac{x\arctan x}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\text{记为}B}\end{aligned}$$

下面来计算 $A+B=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x\arctan x}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x$。定义函数 $I(a)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x\arctan ax}{(3-x^2)\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x$，求导:

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{(3-x^2)(1+a^2x^2)\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2\theta}{(3-2\sin^2\theta)(1+2a^2\sin^2\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\theta=\arctan t}\int_0^{+\infty}\frac{2\frac{t^2}{1+t^2}}{(3-2\frac{t^2}{1+t^2})(1+2a^2\frac{t^2}{1+t^2})(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(3+t^2)(1+(1+2a^2)t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2(1+3a^2)}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{1+2a^2}}\right)\end{aligned}$$

注意到 $I(0)=0$，则我们要求的 $I(1)$ 可以写为

$$\begin{aligned}I(1)=\int_0^1I'(a)\,\mathrm{d}a&=\int_0^1\frac{\pi}{2(1+3a^2)}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{1+2a^2}}\right)\mathrm{d}a\\&=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+3a^2)\sqrt{1+2a^2}}\,\mathrm{d}a\\&\xlongequal{\sqrt{2}a=\tan\theta}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\arctan\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&\xlongequal{\sqrt{2}u=\sin\theta}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

所以我们得到

$$\begin{cases} A-B = & \dfrac{\pi^2}{16} \\ A+B = & \dfrac{\pi^2}{12} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{7\pi^2}{96} \\ B = \dfrac{\pi^2}{96} \end{cases}$$

故得到原积分的值即为 A。

题 32 (复旦大学-严金海). 设 k 为正整数，f 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，g 在 $[0,+\infty)$ 上任意次可导且 $g(0)=0$。问对于什么样的 g，函数 f 在 0 点的右导数存在等价于

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(g(x))}{x^k}$$

存在？

解. 根据泰勒展开，有 $g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots$，分如下情况来考虑：

- $k=1$，另外引入条件：$g'(0)\neq 1$。

  " $\Longrightarrow$ "：若 $f'_+(0)$ 存在，则

  $$\frac{f(x)-f(g(x))}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{f(g(x))-f(0)}{g(x)}\frac{g(x)-g(0)}{x} \to f'_+(0)(1-g'_+(0))$$

  " $\Longleftarrow$ "：若 $\dfrac{f(x)-f(g(x))}{x}\to A$，则 $x-g(x)\sim(1-g'(0))x$，这说明 $\dfrac{f(x)-f(g(x))}{x-g(x)}\to\dfrac{A}{1-g'(0)}$，根据**题** 52即证。(若 $g'(0)<1$ 直接证明，若 $g'(0)>1$ 考虑反函数 $g^{-1}(x)$ 在 0 处的性质。)

- $k>1$，我们说明不存在 $g(x)$ 满足题设条件。

  " $\Longrightarrow$ "：若 $f'_+(0)$ 存在，我们考虑如下函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$

  $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{若 } x>0 \\ 0 & \text{若 } x=0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & \text{若 } x>0 \\ 0 & \text{若 } x=0 \end{cases}$$

  直接计算得到

  $$f(x)-f(g(x)) = f'(\xi)(x-g(x)) = f'(\xi)\left((1-g'(0))x-\sum_{i=2}^{k}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^k)\right)$$

  考虑到 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，则必须有 $g'(0)=1$，$g^{(i)}(0)=0(i=2,\ldots,k)$。

  " $\Longleftarrow$ "：若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(g(x))}{x^k}=A$，设 $x-g(x)=cx^{k+m}+o(x^{k+m})$，$(c\neq 0, m\geq 1)$。我们考虑如下函数 $f(x)$

  $$f(x)=\begin{cases} x\sin(\ln x) & \text{若 } x>0 \\ 0 & \text{若 } x=0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} \sin(\ln x)+\cos(\ln x) & \text{若 } x>0 \\ \text{不存在} & \text{若 } x=0 \end{cases}$$

  直接计算

  $$f(x)-f(g(x)) = f'(\xi)(x-g(x)) = cf'(\xi)x^{k+m}+o(x^{k+m})$$

  这得到 $\dfrac{f(x)-f(g(x))}{x^k}\to 0$，但 $f'_+(0)$ 不存在。

题 33 (北京大学-杨家忠). 证明:

$$\lim_{a\to0^+} a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos ax-\cos a}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

证明. 根据和差化积公式

$$\cos ax-\cos a=2\sin\left(\frac{1+x}{2}a\right)\sin\left(\frac{1-x}{2}a\right)$$

记

$$I(a,x)=\frac{a}{\sqrt{\cos ax-\cos a}}=\frac{a}{\sqrt{2\sin\left(\frac{1+x}{2}a\right)\sin\left(\frac{1-x}{2}a\right)}}$$

当 $a>0$ 足够小时 $(a<\delta)$，就有

$$\begin{aligned}I(a,x)<&\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{2}a\right)\left(\frac{1-x}{2}a\right)}}\\=&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

而 $\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x<+\infty$，故 $\int_0^1 I(a,x)\,\mathrm{d}x$ 关于 a 在 $[0,\delta]$ 上一致收敛。

此时就有

$$\lim_{a\to0^+} a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos ax-\cos a}}=\int_0^1 I(0^+,x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

□

题 34 (复旦大学-严金海). 设 n 为正整数，$0\le k\le n-1$，$P(x)$ 为 $2n-1$ 次多项式，$x=0$ 是 $P(x)$ 的 n 重根，而 $x=1$ 是 $P(x)-\frac{(x-1)^k}{k!}$ 的 n 重根。证明:

$$\frac{1}{(n-1)!}\le\frac{|P^{(2n-1)}(x)|}{(2n-1)!}\le\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}$$

证明. 根据题设记 $P^{(2n-1)}(x)=a$，且对 $i=0,1,\dots,n-1$，在 $x=0$ 处有 $P^{(i)}(0)=0$，在 $x=1$ 处有 $P^{(k)}(1)=1$，$P^{(i)}(1)=0(i\ne k)$。

引入函数 $g(x)=x^{n-1}(1-x)^{n-1}$，考虑分部积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 P^{(2n-1)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x=&(-1)^{n-1}\int_0^1 P^{(n)}(x)g^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x\\=&(-1)^k g^{(2n-k-2)}(1)+\int_0^1 P(x)g^{(2n-1)}(x)\,\mathrm{d}x\\=&(-1)^k g^{(2n-k-2)}(1)\end{aligned}$$

上式左侧用 Beta 函数表示为

$$a\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{B}(n,n)=a\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

注意到

$$g(x)=x^{n-1}(1-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}(x-1+1)^{n-1}(x-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(x-1)^{i+n-1}$$

以及 $2n-k-2\in[n-1,2n-2]$，根据 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开得到

$$|g^{(2n-k-2)}(1)|=\binom{n-1}{n-1-k}(2n-k-2)!=(n-1)!\underbrace{\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-1-k)!}}_{a_k}$$

考虑 a_k 的单调性（$0<k\le n-1$）

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}-1=\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-1-k)!}\frac{(k-1)!(n-k)!}{(2n-k-1)!}-1=\frac{n+k^2-2nk}{k(2n-k-1)}=\frac{(n-k)^2-n(n-1)}{k(2n-k-1)}<0$$

这得到 a_k 为递减的，所以有

$$(n-1)!\le|a|\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}\le(2n-2)!$$

证毕。 □

题 35 (北京大学-杨家忠). 设 f 是 $[0,1]$ 上的函数，定义如下：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\{10^kx\},$$

其中 $\{x\}:=x-[x]$，即 x 的小数部分。试计算

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明. 根据 $\{x\}$ 函数的周期性，引入如下各项：

$$A_k=\int_0^1\frac{1}{2^k}\{10^kx\}\,\mathrm{d}x \xlongequal{y=10^kx}\int_0^{10^k}\frac{1}{20^k}\{y\}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2^k}\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2^{k+1}}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上一致收敛，故得到：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}A_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

□

题 36 (北京理工大学-赵鲁涛). 设 $a<\dfrac{1}{2}$, $\{X_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，且 $P\{X_k=\pm k^a\}=\dfrac{1}{3}$, $(k=1,2,\cdots)$。证明：$\{X_k\}$ 服从大数定律。

证明. 对任一个随机变量 X_k，除了 $\pm k^a$ 不妨设它的其余取值为 $X_{ki}(i=1,2,\dots)$，相应的概率为 p_{ki}，根据概率测度为 1，得到：

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki} = \frac{1}{3}$$

直接计算 X_k 的均值及方差

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k] =& \frac{1}{3}\cdot k^a + \frac{1}{3}\cdot(-k^a) + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki} \\
\mathbb{E}[X_k^2] =& \frac{2}{3}k^{2a} + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 \\
\mathrm{Var}(X_k) =& \mathbb{E}[X_k^2] - (\mathbb{E}[X_k])^2 = \frac{2}{3}k^{2a} + \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}\right)^2
\end{aligned}$$

考虑部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，则有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki} \\
\mathrm{Var}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}k^{2a} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}\right)^2
\end{aligned}$$

根据柯西不等式，得到

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}|X_{ki}|\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{p_{ki}}\sqrt{p_{ki}}|X_{ki}|\right)^2 \le \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 \tag{3}$$

下面给出两种情况说明大数定律成立需要额外条件：

- 若 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2 = o(n)$，由(3)得到

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| =& \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}\right| \\
\le& \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}|X_{ki}| \\
\le& \frac{1}{\sqrt{3}n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2} \\
\le& \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ki}X_{ki}^2} \sim o(1)
\end{aligned}$$

这说明 $\frac{S_n}{n}$ 收敛于 0。另一方面，根据切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\right| \ge \delta\right) \le \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^{2a+1} + o(n)\right) \to 0$$

满足大数定律。

- 考虑 X_k 如下分布：

$$X_k=\begin{cases} k^a & \text{概率}1/3 \\ -k^a & \text{概率}1/3 \\ k^2 & \text{概率}1/3 \end{cases}$$

直接计算得到

$$\mathbb{E}[X_k]=\frac{1}{3}k^2$$

从而部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的期望是

$$\mathbb{E}[S_n]=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(2n+1)(n+1)}{18}\sim\frac{n^3}{9}\implies\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\sim\frac{n^2}{9}\to+\infty$$

这说明 $\frac{S_n}{n}$ 不收敛于任何有限常数，故大数定律不成立。

□

题 37 (复旦大学-楼红卫)**.** 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的可微函数，在 $[0,2\pi]$ 上绝对可积。若 f' 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 A，问是否有 $A=f'(x_0)$？

证明. 记 $S_n(h;x)$，$\sigma_n(h;x)$ 分别为函数 h 的 Fourier 级数的部分和以及 Cesáro 和。以下不妨设 $x_0=0$，$f(0)=f'(0)=0$（否则，将 $f(x)-f(0)\cos x-f'(0)\sin x$ 仍记为 $f(x)$ 进行论证），根据题设可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n\left(f';0\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n\left(f';0\right)=A$$

另一方面，引入如下函数 $g(x)$：

$$g(x):=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\sin\frac{x}{2}}, & x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi], \\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，且在 0 点处连续，根据 Fejér 积分的性质，得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t)}{\sin\frac{t}{2}}\right|\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(0;|g|)=|g(0)|=0.$$

进而由夹逼准则得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

再运用分部积分得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin nt}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{n\sin nt}{2\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\,\mathrm{d}t=A.\end{aligned} \tag{5}$$

从而由 Stolz 公式得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=A$$

根据(4),(5)得到

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}\sin\frac{nt}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^3\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+\frac{\sin nt}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t=0.$$

这证明了结论。 □

注. 此解答来源于供题者楼红卫教授。该题的条件可以大大减弱，Fatou 曾经给出如下结果：

设以 2π 为周期的周期函数 f 在 $[0,2]$ 上绝对可积，在 x_0 处可导。其 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则有

$$\lim_{r\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}nr^n\left(-a_n\sin nx+b_n\cos nx\right)=f'\left(x_0\right)$$

即 f 的 Fourier 级数求导后的级数在 x_0 处的 Abel 和为 $f'(x_0)$。

题 38 (许昌学院数学学院本科生-韩万龙)**.** 设 $k\geq1$，f 在 $[0,1]$ 上 $k+1$ 阶可导，对于 $0\leq j\leq k$，$j\neq1$，有 $f^{(j)}(0)=0$。而 $f'(0)=1$，$f^{(k+1)}(0)=A\neq0$。又对于 $x\in(0,1]$，有 $0<f'(x)<1$。取 $x_1\in(0,1]$，对于 $n\geq1$，依次定义 $x_{n+1}=f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)$。试计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[k]{\ln n}\,x_n$$

解. 先来说明 x_n 单调递减，已知 $x_2=f(x_1)$，则有

$$x_2-x_1=f(x_1)-x_1=f(x_1)-f(0)-x_1\xlongequal{\xi_1\in(0,x_1)}(f'(\xi_1)-1)x_1<0$$

故 $x_2<x_1$。

另一方面有

$$x_2=f(x_1)=f(0)+f'(\xi_1)x_1=f'(\xi_1)x_1>0$$

故得到 $0<x_2<x_1\leq1$。

若对 n 已经证明，下面用归纳法证明 $0<x_{n+1}<x_n$。首先引入数列 $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-x_n=&f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)-f\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\right)\\
=&f'(\xi)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j-\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\right)\\
=&f'(\xi)\left(\frac{(n-1)s_{n-1}+x_n}{n}-s_{n-1}\right)\\
<&f'(\xi)\left(\frac{(n-1)s_{n-1}+s_{n-1}}{n}-s_{n-1}\right)\\
=&0
\end{aligned}$$

且有

$$x_{n+1}=f(s_n)-f(0)\xlongequal{\eta\in(0,s_n)}f'(\eta)s_n>0$$

则 x_n 必有极限 $a(1>a\geq 0)$，且 $a=f(a)$，若 $a>0$，则有

$$a=f(a)-f(0)\xlongequal{\theta\in(0,a)}f'(\theta)a<a$$

矛盾！故必有 $a=0$。

根据题设递推公式，我们使用 $\{s_n\}$ 来代替 $\{x_n\}$ 数列，则有 s_n 递推公式如下：

$$(n+1)s_{n+1}-ns_n=f(s_n)\implies s_n-s_{n+1}=\frac{s_n-f(s_n)}{n+1}$$

先来证明 $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\to 1$，即证明 $\dfrac{f(s_{n+1})-f(s_n)}{f(s_n)}\to 0$。直接计算得到

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(s_n-\dfrac{s_n-f(s_n)}{n+1}\right)-f(s_n)}{f(s_n)}=&-f'(\xi_1)\frac{s_n-f(s_n)}{(n+1)f(s_n)}\\
=&-f'(\xi_1)\frac{s_n}{(1+n)(f(s_n)-f(0))}+f'(\xi_1)\frac{1}{n+1}\\
=&-f'(\xi_1)\frac{1}{(1+n)f'(\xi_2)}+f'(\xi_1)\frac{1}{n+1}\\
\to&0
\end{aligned}$$

设待求的极限为 L，我们使用 stolz 公式来求解 L^k，

$$\begin{aligned}
L^k &= \ln n\, x_n^k \\
&= \frac{\ln(1+1+n)-\ln(1+n)}{\dfrac{1}{x_{n+2}^k}-\dfrac{1}{x_{n+1}^k}} \\
&\sim \frac{1}{1+n}\cdot\frac{x_{n+1}^k x_{n+2}^k}{(x_{n+1}-x_{n+2})(x_{n+1}^{k-1}+\cdots+x_{n+2}^{k-1})} \\
&\sim \frac{s_n-s_{n+1}}{s_n-f(s_n)}\cdot\frac{x_{n+1}^{2k}}{(f(s_n)-f(s_{n+1}))kx_{n+1}^{k-1}} \\
&\sim \frac{f(s_n)^{k+1}}{kf'(\xi_n)}\cdot\frac{1}{s_n-f(0)-f'(0)s_n-\cdots-\frac{f^{k+1}(\eta_n)}{(k+1)!}s_n^{k+1}} \\
&\sim \frac{-(k+1)!}{kf'(\xi_n)f^{k+1}(\eta_n)}\cdot\left(\frac{f(s_n)-f(0)}{s_n}\right)^{k+1} \\
&\to -\frac{(k+1)!}{kA}
\end{aligned}$$

这就得到要求极限为

$$L=\left(-\frac{(k+1)!}{kA}\right)^{\frac{1}{k}}$$

题 39 (南开大学-李军). 设 $a_0,a_1\in\mathbb{R}$，定义数列：

$$a_{n+1}=\frac{1}{n}a_n+a_{n-1},\quad n=1,2,\ldots$$

证明：数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 收敛，并求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

证明. 由递推式可以得到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1-n}{n}\left(\frac{1}{n-1}a_{n-1}+a_{n-2}\right)+a_{n-1}=\frac{n-1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

记 $F_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 对奇偶分情况得到

$$\begin{cases}
a_{2n}-a_{2n-1}= & \dfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\dfrac{2n-4}{2n-3}\cdots\dfrac{2}{3}(a_2-a_1)=\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}a_0=\dfrac{1}{2nF_n}a_0 \\
a_{2n+1}-a_{2n}= & \dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdots\dfrac{1}{2}(a_1-a_0)=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(a_1-a_0)=F_n(a_1-a_0)
\end{cases}$$

再根据 $a_n=n(a_{n+1}-a_{n-1})$ 得到

$$\begin{cases}
a_{2n} & =2n(a_{2n+1}-a_{2n}+a_{2n}-a_{2n-1})=2n\left(F_n(a_1-a_0)+\dfrac{1}{2nF_n}a_0\right) \\
a_{2n+1} & =(2n+1)(a_{2n+2}-a_{2n+1}+a_{2n+1}-a_{2n})=(2n+1)\left(\dfrac{1}{(2n+2)F_{n+1}}a_0+F_n(a_1-a_0)\right)
\end{cases}$$

下面使用 Wallis 公式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{F_n\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

故得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{2n}}{\sqrt{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n}F_n(a_1-a_0)+\frac{1}{\sqrt{2n}F_n}a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(a_1-a_0)+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}a_0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{(2n+2)F_{n+1}}a_0+\sqrt{2n+1}F_n(a_1-a_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(a_1-a_0)+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}a_0$$

这即为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}a_1-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}a_0$$

□

题 40 (江南大学-沈莞蕾，陈海伟). 在平面上，已知两圆 C_1,C_2，圆心分别为 A,B，半径分别为 R,r，且 A,B 之间的距离为 d（$R,r,d>0$）。P,Q 分别为圆 C_1,C_2（包括圆周）上的动点，C 为经过 P 和 Q 的动圆（见图 2），求 C 的圆心 S 在该平面上可能出现的区域。

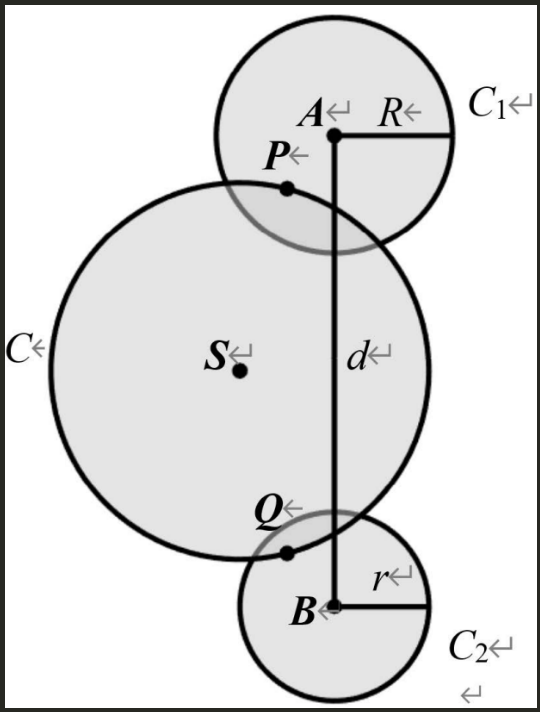


图 2: 问题 40 图示

解. 根据对称性不妨设 $R\geq r$，以 AB 中垂线为 x 轴，AB 为 y 轴建立平面直角坐标系。设坐标 $A\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$，$B\left(0,-\dfrac{d}{2}\right)$，设 $P(x_p,y_p)$，$Q(x_q,y_q)$，则圆心 S 所在的 PQ 中垂线方程：

$$(x_q-x_p)x+(y_q-y_p)y=\frac{x_q^2+y_q^2-x_p^2-y_p^2}{2}\tag{6}$$

作参数变换（其中，$r_1 \leq R$，$r_2 \leq r$）

$$\begin{cases} x_p &= r_1\cos\alpha \\ y_p &= \dfrac{d}{2} + r_1\sin\alpha \\ x_q &= r_2\cos\beta \\ y_q &= -\dfrac{d}{2} + r_2\sin\beta \end{cases}$$

将上式带入(6)得到

$$(r_2\cos\beta - r_1\cos\alpha)x + (-d + r_2\sin\beta - r_1\sin\alpha)y = \frac{r_2^2 - r_1^2 - (r_2\sin\beta + r_1\sin\alpha)d}{2}$$

令 $a_1 = \dfrac{r_1}{d} \in \left[0, \dfrac{R}{d}\right]$，$a_2 = \dfrac{r_2}{d} \in \left[0, \dfrac{r}{d}\right]$，则上式化为

$$(a_2\cos\beta - a_1\cos\alpha)x + (-1 + a_2\sin\beta - a_1\sin\alpha)y = \frac{a_2^2 - a_1^2 - (a_2\sin\beta + a_1\sin\alpha)}{2}d$$

整理得到

$$\begin{aligned} &\left[a_2 x\cos\beta + \left(a_2 y + \frac{a_2 d}{2}\right)\sin\beta\right] + \left[(-a_1 x)\cos\alpha + \left(-a_1 y + \frac{a_1 d}{2}\right)\sin\alpha\right] = y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}d \\ \Longrightarrow &\sqrt{a_2^2x^2 + \left(a_2 y + \frac{a_2 d}{2}\right)^2}\sin(\beta + \theta_2) + \sqrt{a_1^2x^2 + \left(a_1 y - \frac{a_1 d}{2}\right)^2}\sin(\alpha + \theta_1) = y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}d \\ \Longrightarrow &\left|y + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}d\right| \leq a_2\underbrace{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}}_{S\text{到}B\text{的距离}} + a_1\underbrace{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}}_{S\text{到}A\text{的距离}} \end{aligned}$$

令 $z = y + \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{2}d$，我们考虑 $S' = (x, z)$ 的轨迹，则上式变为：

$$|z| \leq a_2\sqrt{x^2 + \left(z + (a_1^2 - a_2^2 + 1)\frac{d}{2}\right)^2} + a_1\sqrt{x^2 + \left(z + (a_1^2 - a_2^2 - 1)\frac{d}{2}\right)^2}$$

我们考虑 $z \geq 0$ 的区域，并将不等式取等。

记 $f(z) = z + (a_1^2 - a_2^2 + 1)\dfrac{d}{2}$，$g(z) = z + (a_1^2 - a_2^2 - 1)\dfrac{d}{2}$，得到

$$\begin{aligned} &z^2 + a_2^2\left[x^2 + f^2(z)\right] - 2za_2\sqrt{x^2 + f^2(z)} = a_1^2\left[x^2 + g^2(z)\right] \\ \Longrightarrow &\left(z^2 + a_2^2\left[x^2 + f^2(z)\right] - a_1^2\left[x^2 + g^2(z)\right]\right)^2 = 4z^2a_2^2\left(x^2 + f^2(z)\right) \\ \Longrightarrow &\left((a_2^2 - a_1^2)x^2 + k(z)\right)^2 = 4z^2a_2^2x^2 + 4z^2a_2^2f^2(z) \\ \Longrightarrow &(a_2^2 - a_1^2)^2x^4 + \left[2(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 4a_2^2z^2\right]x^2 + k^2(z) - 4a_2^2z^2f^2(z) = 0 \end{aligned}$$

其中 $k(z) = z^2 + a_2^2f^2(z) - a_1^2g^2(z)$，我们对 x^2 配方

$$\left[(a_2^2 - a_1^2)x^2 + \frac{(a_2^2 - a_1^2)k(z) - 2a_2^2z^2}{a_2^2 - a_1^2}\right]^2 = 4a_2^2z^2\left(f^2(z) - \frac{k(z)}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2^2z^2}{(a_2^2 - a_1^2)^2}\right)$$

将 $f(z), g(z), k(z)$ 带入右侧得到

$$\begin{aligned}
& f^2(z)-\frac{k(z)}{a_2^2-a_1^2}+\frac{a_2^2z^2}{(a_2^2-a_1^2)^2} \\
=& \frac{a_1^2z^2}{(a_2^2-a_1^2)^2}-\frac{2a_1^2dz}{a_2^2-a_1^2}+a_1^2d^2 \\
=& \left(\frac{a_1z}{a_2^2-a_1^2}-a_1d\right)^2
\end{aligned}$$

这就得到下面两式：

$$\begin{aligned}
\left((a_2^2-a_1^2)x^2+\frac{(a_2^2-a_1^2)k(z)-2a_2^2z^2}{a_2^2-a_1^2}+\frac{2a_1a_2z^2}{a_2^2-a_1^2}-2a_1a_2dz\right)=0 \\
\left((a_2^2-a_1^2)x^2+\frac{(a_2^2-a_1^2)k(z)-2a_2^2z^2}{a_2^2-a_1^2}-\frac{2a_1a_2z^2}{a_2^2-a_1^2}+2a_1a_2dz\right)=0
\end{aligned} \tag{7}$$

对上面(7)的第一式配方得到：

$$\begin{aligned}
& (a_2^2-a_1^2)^2x^2+[(a_2+a_1)^2-1](a_2-a_1)^2z^2+[1-(a_1+a_2)^2](a_2-a_1)^2(a_2^2-a_1^2)dz \\
&+\frac{d^2}{4}(a_2^2-a_1^2)^2\left[(a_2^2-a_1^2)^2-2(a_1^2+a_2^2)+1\right]=0 \\
\Longrightarrow & (a_2^2-a_1^2)^2x^2+[(a_2+a_1)^2-1](a_2-a_1)^2\left(z^2-(a_2^2-a_1^2)dz+\frac{(a_2^2-a_1^2)^2}{4}d^2\right) \\
&+\frac{d^2}{4}(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2(1-(a_1+a_2)^2)=0 \\
\Longrightarrow & (a_2-a_1)^2\left((a_2+a_1)^2x^2+[(a_2+a_1)^2-1]\left(z-\frac{a_2^2-a_1^2}{2}d\right)^2+\frac{d^2}{4}(a_2+a_1)^2(1-(a_1+a_2)^2)\right)=0
\end{aligned}$$

对上面(7)的第二式配方得到：

$$\begin{aligned}
& (a_2^2-a_1^2)^2x^2+[(a_2-a_1)^2-1](a_2+a_1)^2z^2+[1-(a_2-a_1)^2](a_2+a_1)^2(a_2^2-a_1^2)dz \\
&+\frac{d^2}{4}(a_2^2-a_1^2)^2\left[(a_2^2-a_1^2)^2-2(a_1^2+a_2^2)+1\right]=0 \\
\Longrightarrow & (a_2^2-a_1^2)^2x^2+[(a_2-a_1)^2-1](a_2+a_1)^2\left(z^2-(a_2^2-a_1^2)dz+\frac{(a_2^2-a_1^2)^2}{4}d^2\right) \\
&+\frac{d^2}{4}(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2(1-(a_2-a_1)^2)=0 \\
\Longrightarrow & (a_2+a_1)^2\left((a_2-a_1)^2x^2+[(a_2-a_1)^2-1]\left(z-\frac{a_2^2-a_1^2}{2}d\right)^2+\frac{d^2}{4}(a_2-a_1)^2(1-(a_2-a_1)^2)\right)=0
\end{aligned}$$

观察以上两个等式，可以发现等号成立满足方程（令 $s=a_1+a_2$ 或 $s=a_2-a_1$）

$$s^2x^2+(s^2-1)y^2=\frac{d^2}{4}s^2(s^2-1)\implies\frac{x^2}{\frac{(s^2-1)d^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{s^2d^2}{4}}=1$$

下面我们来分情况：

- 若 $s=0$，$y=0, x\in\mathbb{R}$;

- 若 $s=1$，$x=0, y\in\mathbb{R}$;
- 其余情况，$|y|\le \frac{sd}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{\frac{(s^2-1)d^2}{4}}}$，且

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R}, & \text{if} \quad s<1 \\ |x|<\dfrac{\sqrt{s^2-1}d}{2}, & \text{if} \quad s>1 \end{cases}$$

题 41 (复旦大学-江辰). 计算如下 $n\times n$ 矩阵 A 的特征值:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

解. 记 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 为 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则根据 $Ax=\lambda x$ 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1}+x_n \\ \vdots \\ x_1+\cdots+x_n \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ nx_n \end{pmatrix}$$

引入多项式函数 $f(x)=\sum_{k=1}^n x_k x^k$，则 $f(x)$ 必满足 $0<\deg(f)$，根据上述方程不难得到

$$\frac{\lambda(1-x)}{x^n}f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(1)$$

下面我们将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开为泰勒级数，即有 $f(x)-f(1)=\sum_{k=1}^n a_k(x-1)^k$，记 $t=x-1$，则上述函数方程变为:

$$\begin{aligned} 0 =&(1+t)^n\sum_{k=1}^n a_k\left(\frac{1}{1+t}-1\right)^k+\lambda t\sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \\ =&\sum_{k=1}^n a_k(-t)^k(1+t)^{n-k}+\lambda\sum_{k=1}^n k a_k t^k \\ =&\sum_{k=1}^n a_k(-t)^k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}t^i+\lambda\sum_{k=1}^n k a_k t^k \\ =&\sum_{m=1}^n\left(\sum_{k=1}^m a_k(-1)^k\binom{n-k}{m-k}+\lambda m a_m\right)t^m \end{aligned}$$

于是得到 a_n 的递推关系为:

$$\begin{cases}(\lambda-1)a_1=0 & m=1\\ \sum_{k=1}^{m-1} a_k(-1)^k\binom{n-k}{m-k}+\left((-1)^m+\lambda m\right)a_m=0 & m>1\end{cases}$$

- 若 $\lambda=(-1)^{m+1}\frac{1}{m}(1\le m\le n)$，则必有 $a_k=0(k=1,2,\dots,m-1)$，我们可以取 $a_m=1$，这时就有 $0<m\le\deg(f)$，就必有非零向量 x 为 A 的特征向量。
- 否则，从递推式不难得到 $a_k=0(k=1,2,\dots,n)$，这导出 $f(x)\equiv f(1)$，这与 $\deg(f)>0$ 矛盾!

注. 本题还有一种构造思想，来源于 清疏数学，该思想使用组合数构造出可逆矩阵相似于一个上三角矩阵，具体如下:

约定 $C_j^i=0$，如果 $j<i$ 或 $j<0$。引入下三角矩阵 P

$$P:=\begin{pmatrix}C_0^0 & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}$$

证明

$$\left(P^{-1}AP\right)_{ij}=\begin{cases}\frac{(-1)^{i-1}}{i}C_{n-i}^{j-i}, & 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ 0, & 1\leqslant j<i\leqslant n\end{cases}$$

关于反对角矩阵的几个特征值问题

一、计算如下 n 阶矩阵 J_n 的特征值:

$$J_n=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解. 记 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ 为 J_n 对应于特征值为 λ 的特征向量，则根据 $J_nx=\lambda x$ 得到

$$x_k=\lambda x_{n+1-k},\ (k=1,2,\dots,n)\implies x_k=\lambda^2x_k,\ (k=1,2,\dots,n)$$

易知 $\lambda=\pm1$，记 I_n 为 n 阶单位阵，下面针对 $\lambda=1$ 和 $\lambda=-1$ 构建相应的特征向量。

- 若 $n=2k$，构建如下矩阵 P

$$P=\begin{pmatrix}I_k & I_k\\ J_k & -J_k\end{pmatrix}$$

- 若 $n=2k+1$，构建如下矩阵 P

$$P=\begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} & I_k \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ J_k & \mathbf{0} & -J_k \end{pmatrix}$$

则不难得到上述 P 是可逆矩阵，且满足

$$J_nP=P\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & -I_k \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} s=k, & \text{if } n=2k \\ s=k+1, & \text{if } n=2k+1 \end{cases}$$

这就得到 J_{2k} 的特征值为 k 个 1，k 个 -1；J_{2k+1} 的特征值为 $k+1$ 个 1，k 个 -1。

二、对于如下 n 阶矩阵

$$K_n=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_n=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明：

- K_n **的 n 个特征值为** $(k=1,2,\cdots,n)$**：**

$$\lambda_k=2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right)$$

- S_n **的 n 个特征值为** $(k=1,2,\cdots,n)$**：**

$$\begin{cases} \lambda_k=2\cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n+1}\right) & \textbf{if } n=2m+1 \\ \lambda_k=2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{2n+1}\right) & \textbf{if } n=2m \end{cases}$$

证明. 记 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 为 K_n 对应于特征值 λ 的特征向量，则根据 $K_nx=\lambda x$ 得到

$$x_{k-1}+x_k=\lambda x_{n+2-k},\ k=1,2,\ldots,n+1 \text{ 且 } x_{n+1}=0 \tag{8}$$

引入函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_kx^k$，首先根据方程(8)不难得到：

$$\begin{cases} (1+x)f(x) & =x_1x+\lambda x^{n+2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)f\left(\dfrac{1}{x}\right) & =x_1\left(\dfrac{1}{x}\right)+\lambda f(x)\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n+2} \end{cases} \implies f(x)=x_1\frac{\lambda x^{n+2}+x^2+x}{x^2+(2-\lambda^2)x+1}$$

下面只需说明对于任意的 λ_k $(k=1,2,\cdots,n)$，$f(x)$ 为 $\deg(f)\le n$ 的非零多项式即可。
令 $\lambda=2\cos\theta$，代入 $f(x)$ 得到

$$f(x)=x_1\frac{2\cos\theta x^{n+2}+x^2+x}{x^2+(2-4\cos^2\theta)x+1}=x_1\frac{2\cos\theta x^{n+2}+x^2+x}{x^2-2\cos2\theta x+1}$$

对于分母得到 $x^2-2\cos2\theta x+1=0$ 的两个根为 $t_{1,2}=\cos2\theta\pm|\sin2\theta|i=e^{\pm2\theta i}$，不妨设 $t_1=e^{2\theta i}$，$t_2=e^{-2\theta i}$，且 $|t_1|=|t_2|=1$。我们对 $f(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开（其中 $\deg(g(x))\le n$）：

$$\begin{aligned}
f(x)=&\frac{x_1}{t_1-t_2}\left(\frac{1}{t_2-x}-\frac{1}{t_1-x}\right)(2\cos\theta x^{n+2}+x^2+x)\\
=&\frac{x_1}{2\sin2\theta i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(t_2^{-(k+1)}-t_1^{-(k+1)}\right)x^k(2\cos\theta x^{n+2}+x^2+x)\\
=&\frac{x_1}{2\sin2\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}2\sin(2(k+1)\theta)x^k(2\cos\theta x^{n+2}+x^2+x)\\
=&g(x)+\frac{x_1}{\sin2\theta}\left(\sin(2n\theta)+\sin(2(n+1)\theta)\right)x^{n+1}\\
&+\frac{x_1}{2\sin2\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[4\sin((2k+2)\theta)\cos\theta+2\sin((2n+2k+2)\theta)+2\sin((2n+2k+4)\theta)\right]x^{n+2+k}\\
=&g(x)+\frac{2x_1}{\sin2\theta}\sin((2n+1)\theta)\cos\theta x^{n+1}\\
&+\frac{x_1}{2\sin2\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}8\cos\theta\sin\left(\left(2k+n+\frac{5}{2}\right)\theta\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)x^{n+2+k}
\end{aligned}$$

若我们取 $x_1\ne0$，对于 $\theta_k=\dfrac{(2k-1)\pi}{2n+1}$，$(k=1,2,\cdots,n)$，不难看出 $f(x)=g(x)$，且 $f(x)$ 的一次项的系数为 x_1，这就说明 $f(x)$ 是次数不超过 n 的非零多项式。
用同样的方法可以对 S_n 的特征值证明，其特征函数为：

$$f(x)=x_1\frac{\lambda x^{n+2}-x^2+x}{x^2-(2-\lambda^2)x+1}$$

□

题 42 (复旦大学-韩京俊). 设 n 是正整数，$x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1}\notin\mathbb{Q}$ 是 $2n-1$ 个互不相同的无理数。求证：存在 n 个互不相同的 $y_1,y_2,\ldots,y_n\in\{x_1,x_2,\ldots,x_{2n-1}\}$，使得 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 中任意多个（至少一个）数之和均是无理数。

证明. 我们将 $2n-1$ 个互不相同的无理数组成的集合为 $2n-1$ 元无理集记为 X_n。

对 n 作归纳法来证明本题。当 $n=1$ 时，$X_1=\{x_1\}$，则 $kx_1\notin\mathbb{Q}$ 显然成立。若对 n 已经证明，现在来证明 $n+1$ 的情形。

考虑 $X_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n+1}\}$，根据归纳假设，对于 $X_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n-1}\}$，存在 $y_1,y_2,\ldots,y_n\in X_n$ 使得 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 中任意多个（至少一个）数之和均是无理数，不妨就设 $y_i=x_i$。

若 $n+1$ 的命题不成立, 则任何一个 $x_{n+k}(k=1,2,\cdots,n+1)$ 加入集合后, 得到的 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+k}$ 不满足题设，则必有不全为零的 $0\le a_{ki}\in\mathbb{Q}$，使得

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+k}=r_k\in\mathbb{Q}\qquad k=1,2,\cdots,n+1$$

考虑集合 $\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n+1}\}$，存在不全为零的数 $0\le b_i\in\mathbb{Q}$，使得

$$b_1x_{n+1}+b_2x_{n+2}+\cdots+b_{n+1}x_{2n+1}=r\in\mathbb{Q}$$

于是我们就有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}b_k\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i+\sum_{k=1}^{n+1}b_kx_{n+k}=\sum_{k=1}^{n+1}b_kr_k\\ \Longrightarrow&\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1}b_ka_{ki}\right)}_{c_i}x_i=\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}b_kr_k-r}_{\in\mathbb{Q}}\end{aligned}$$

若 $c_i,(i=1,2,\cdots,n)$ 全为零，则有 $b_ka_{ki}=0$ 对所有 $1\le k\le n+1,1\le i\le n$ 成立，矛盾！故我们证明了 $n+1$ 的情况，命题得证。 □

题 43 (河南师范大学，华东师范大学-庞学诚). *是否存在正整数列 $\{m_n\}$ 使得以下条件蕴涵级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛？*

(i) $\{a_n\}$ 单调;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{n+m_n}a_k=0$。

解. 不妨设 a_n 单调递减，否则将 $-a_n$ 记为 a_n 来考虑。记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，根据第二个条件得到：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时就有 $|S_{n+m_n}-S_n|<\varepsilon$。我们分情况来考虑

- a_n 无界，则存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $a_n<-1$，于是 $|S_{n+m_n}-S_n|>|a_{n+1}|>1$，矛盾！
- a_n 趋于 $a>0$，则 $a_n\ge a$，于是 $|S_{n+m_n}-S_n|>|a_{n+1}|\ge a$，矛盾！
- a_n 趋于 $a<0$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时就有 $a_n<\frac{a}{2}$，于是 $|S_{n+m_n}-S_n|>|a_{n+1}|\ge\frac{|a|}{2}$，矛盾！
- a_n 趋于 0，则 a_n 为非负数列，考虑 $\{S_n\}$，根据上述分析不难得到 $S_n>0$ 且严格单调增。假如存在 $\{m_n\}$ 满足题设条件，那么必可以选择递增的 $\{m_n\}$ 满足条件。下面对任意递增的 $\{m_n\}$，我们构造 $\{S_n\}$，使得 $\{S_n\}$ 满足上述条件，但无界。

  取 $b_1=1$，定义 $b_{n+1}=b_n+m_{b_n}$，构造 $\{S_n\}$ 使得 $S_{b_{n+1}}-S_{b_n}=\frac{1}{n}$。这是可以做到的，因为 $\{m_n\}$ 是递增的，即 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是递增的，考虑到 $b_n+1\sim b_{n+1}$ 有 m_{b_n} 项。对 $0<i<b_{n+1}-b_n$，取 $S_{b_n+i}=S_{b_n}+\frac{i}{nm_{b_n}}$，则有

$$S_{b_{k+1}}-S_{b_1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$$

易知当 $k \to +\infty$ 时就有 $S_{b_{k+1}} \to +\infty$，所以构造的 $\{S_n\}$ 是无界的，故发散。

另一方面，对于任意的 n，由于 $\{b_k\}$ 是单调增的，所以存在 k 使得 $b_k \le n < b_{k+1}$，设 $n = b_k + j\ (0 \le j < b_{k+1} - b_k)$，则 $S_n = S_{b_k+j} = S_{b_k} + \dfrac{j}{km_{b_k}}$。考虑到 $b_k \le n < b_{k+1}$，则必有 $b_{k+1} = b_k + m_{b_k} \le n + m_n < b_{k+1} + m_{b_{k+1}} = b_{k+2}$，于是得到

$$S_{n+m_n} - S_n < S_{b_{k+2}} - S_{b_k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

这里根据 $b_k \le n < b_{k+1}$ 可知对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 k 使得 $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$，当 n 足够大时就可以满足 $S_{n+m_n} - S_n < \varepsilon$，故有 $S_{n+m_n} - S_n \to 0$。但此时 S_n 是发散的。

综合上述情况可得，满足题设的 $\{m_n\}$ 是不存在的。

题 44 (华东师范大学-李文侠). 设 $A \subseteq \mathbb{Z}_+$，定义 $S_n \equiv S_n(A) := \#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})$，其中 $\#(E)$ 表示集合 E 中元素的个数。若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} = \alpha < 1.$$

证明：$\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$ 收敛。

进一步，是否存在 A 使得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln S_n}{\ln n} = 1$ 且 $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$ 收敛？

证明. 首先引入数列

$$a_k = \frac{1}{k} \quad b_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k \in A \\ 0, & \text{if } k \notin A \end{cases}$$

根据题设知道 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$，且有 $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$。

- 若 $\alpha < 1$，选取 $\varepsilon = \dfrac{1-\alpha}{2}$，存在 N_0，当 $n > N_0$ 时就有 $S_n < n^{\alpha+\varepsilon} = n^{\frac{1+\alpha}{2}}$。

  取 $n > N_0$，记 $s = \dfrac{1+\alpha}{2} < 1$ 并考虑

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k =& \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0} a_k b_k}_{\text{记为}M} + \sum_{k=N_0+1}^{n} a_k (S_k - S_{k-1}) \\
=& M + a_n S_n + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} S_k (a_k - a_{k+1}) - a_{N_0+1} S_{N_0} \\
\le& M + a_n n^s + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} \frac{k^s}{k(k+1)} \\
\le& M + n^{s-1} + \sum_{k=N_0+1}^{n-1} \frac{1}{k^{2-s}} < +\infty
\end{aligned}$$

上式令 $n \to +\infty$，便得到 $\sum_{n\in A}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k b_k<+\infty$，证毕。

- 若 $\alpha=1$，我们来构造 A，令 $S_n=[n(\ln n)^{-2}](n>2)$，这里的 $[x]$ 为高斯函数，意为不超过 x 的最大整数。则有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=&\sum_{k=1}^{n}a_k(S_k-S_{k-1})\\
=&a_n S_n+\sum_{k=3}^{n-1}S_k(a_k-a_{k+1})+S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)\\
=&\frac{[n(\ln n)^{-2}]}{n}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{[k(\ln k)^{-2}]}{k(k+1)}+S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)\\
\le&\frac{1}{(\ln n)^2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{(\ln k)^2(k+1)}+S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)\\
<&\frac{1}{\ln n}+S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)+\int_2^n\frac{1}{(\ln x)^2 x}\,\mathrm{d}x\\
\xlongequal{t=\ln x}&\frac{1}{\ln n}+S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)+\int_{\ln 2}^{\ln n}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\
=&S_2(a_2-a_3)+S_1(a_1-a_2)+\frac{1}{\ln 2}<+\infty
\end{aligned}
$$

至此，我们根据 S_n 的构造就给出了满足条件的 A。

$\square$

题 45 (复旦大学-严金海). 对任意有界正数数列 $\{a_n\}$，定义映射

$$F(\{a_n\})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}},$$

并记集合

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x=F(\{a_n\}),a_n\in\{2,6\},n=1,2,3,\ldots\}.$$

证明 A 为 $\mathbb{R}$ 中的疏朗闭集。

证明. 首先引入

$$
\begin{aligned}
b_n=&\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}}}\\
x_n=&\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\quad(n\text{次根号})\\
y_n=&\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}\quad(n\text{次根号})
\end{aligned}
$$

不难得到

$$b_n < \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n+\sqrt{a_{n+1}}}}}} = b_{n+1}$$

这说明 b_n 单调增，且有

$$\sqrt{2} \le x_n(\to 2) \le b_n \le y_n(\to 3) < 3$$

这说明 b_n 有上界，故对任意满足题设的 $\{a_n\}$，$F(\{a_n\})$ 必存在。

现在设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{a'_n\}$ 且 $k \in \mathbb{N}$ 是第一个 $a_k \ne a'_k$ 的下标，不妨设 $a_k = 6$，$a'_k = 2$，则有

$$F(\{a_n\}) \ge \underbrace{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_k+2}}}}}_{s_{\{a_n\},k}} > \underbrace{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a'_k+3}}}}}_{S_{\{a'_n\},k}} \ge F(\{a'_n\})$$

其中 $s_{\{a_n\},k}$，表示对 $\{a_n\}$ 只截取到下标 k，后面项全设为 2，$S_{\{a_n\},k}$ 表示对 $\{a_n\}$ 只截取到下标 k，后面项全设为 6。实际上，根据 b_n 的上下界不难得到 $F(\{a_n\}) - F(\{a'_n\}) \in \left[\dfrac{3}{2^k 3^k}, \dfrac{5}{2^k 2^{\frac{k}{2}}}\right]$。

这说明 $F(\{a_n\})$，$F(\{a'_n\})$ 的大小取决于第一个 $a_k \ne a'_k$，且 $A \bigcap (S_{\{a'_n\},k}, s_{\{a_n\},k}) = \varnothing$。（若不然，存在 $s \in (S_{\{a'_n\},k}, s_{\{a_n\},k})$，且 $s = F(\{a''_n\})$。若前 $k-1$ 个指标有 $a_n \ne a''_n$，根据上述推导有 $s > s_{\{a_n\},k}$ 或 $s < S_{\{a'_n\},k}$，矛盾；若 $a''_k = a_k$，则 $s \ge s_{\{a_n\},k}$，矛盾；若 $a''_k = a'_k$，则 $s \le S_{\{a'_n\},k}$，矛盾！）

引入如下 $A \to [0,1]$ 的映射，对 A 中的元素 x 定义（非单射，如 $0.5 = \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$）

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2^n} \qquad \text{其中 } x = F(\{a_n\}),\ c_n = \begin{cases} 1 & \text{若 } a_n = 6 \\ 0 & \text{若 } a_n = 2 \end{cases}$$

下面说明 f 是连续的，对任意的 $\varepsilon > 0$，可以找到 N 使得 $\dfrac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$，取 $\delta > 0$ 待定，则当 $x, x' \in A$ 且 $0 < x - x' < \delta$ 时，存在 $\{a_n\}$，$\{a'_n\}$ 使得

$$\delta > x - x' = F(\{a_n\}) - F(\{a'_n\}) \ge \frac{3}{2^k 3^k}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ 是第一个 $a_k \ne a'_k$ 的下标。取 $\delta = \dfrac{3}{6^{N-1}}$，得到 $k \ge N$，进而有

$$0 \le f(x) - f(x') \le 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

故连续性得证。

现在我们对区间 $I = [2,3]$ 及 $J = [0,1]$ 作以下操作：

(1) 对 I 挖去区间 $I_{11} = (\sqrt{2+3}, \sqrt{6+2})$ 后仍记为 I；对 J 挖去点 $\dfrac{1}{2}$ 后仍记为 J；

(2) 对 I 挖去区间 $I_{21} = (\sqrt{2+\sqrt{2+3}}, \sqrt{2+\sqrt{6+2}})$，$I_{22}(\sqrt{6+\sqrt{2+3}}, \sqrt{6+\sqrt{6+2}})$ 后仍记为 I；对 J 挖去点 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$ 后仍记为 J；

(3) 第 m 次操作是对 I 挖去 m 个互不相交的开区间 $I_{mp}(p=1,2,\dots,m)$ 后仍记为 I；对 J 挖去点 $\dfrac{2p-1}{2^m}(p=1,2,\dots,m)$ 后仍记为 J；一直进行下去……

记 $E=\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{p=1}^{m}I_{mp}$ 是可数个互不相交开区间的并，不难证明 E 为开集，故得到 $A=[2,3]\setminus E$ 为闭集。另一方面，假设 A 不是疏朗集，由于 A 已经为闭集，则 A 必包含一个开区间 I_0，由于 f 在 A 上是连续函数，则 $f(I_0)$ 也为 $[0,1]$ 中的一个开区间，考虑到 m 次操作后，J 中区间的最大长度为 $\dfrac{1}{2^m}$。设 $f(I_0)$ 长度为 δ，则 $m>-\dfrac{\ln\delta}{\ln 2}$ 时，就有 $\dfrac{1}{2^m}<\delta$，矛盾！故 A 为疏朗闭集，证毕。 □

题 46 (复旦大学-江辰). 设 $A_k(1\le k\le m)$ 是 n 阶实对称半正定矩阵。证明：

$$\det\left(I_n+\sum_{k=1}^{m}A_k\right)\le\prod_{k=1}^{m}\det\left(I_n+A_k\right).$$

引理

引理 4. 对于每个特征值 $\lambda_i\le 1$ 的 n 阶正定矩阵 K，以及半正定矩阵 A，成立

$$\det\left(I_n+KA\right)\le\det\left(I_n+A\right)\tag{9}$$

证明. 先考虑正定矩阵 A，则存在正交矩阵 Q 与可逆矩阵 P 使得：

$$Q^TAQ=P^TP\qquad Q^TKQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

在(9)左乘 Q^T，右乘 Q 得到

$$\det(I_n+\Lambda P^TP)\le\det(I_n+P^TP)$$

再对上式左乘 P，右乘 P^{-1}，则我们只需证明：

$$\det(I_n+P\Lambda P^T)\le\det(I_n+PP^T)\tag{10}$$

记 $M_1=I_n+P\Lambda P^T$，$M_2=P(I_n-\Lambda)P^T$ 分别是正定、半正定矩阵，则存在可逆矩阵 P_1，使得 $P_1M_1P_1^T=I_n$，此时 $P_1M_2P_1^T$ 仍为半正定矩阵，设其特征值为 $\mu_i\ge 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，且有

$$1\le\prod_{i=1}^{n}(1+\mu_i)\implies\det(P_1M_1P_1^T)\le\det(P_1M_1P_1^T+P_1M_2P_1^T)\implies\det(M_1)\le\det(M_1+M_2)$$

故有(10)得证。对于 A 是半正定的情况，我们考虑 $A+\varepsilon I_n$，之后令 $\varepsilon\to 0^+$ 即可。 □

证明. 我们对 m 作归纳法。

- 对于 $m=1$，很显然此时左右两侧相等，命题成立。
- 若 $m \geq 1$，已经证明了命题。记 $K=\left(I_n+\sum_{k=1}^{m} A_k\right)^{-1}$，则 K 满足引理 4条件。

  考虑 $m+1$：

$$
\begin{aligned}
\det\left(I_n+\sum_{k=1}^{m} A_k+A_{m+1}\right) &= \det\left(I_n+\sum_{k=1}^{m} A_k\right)\det\left(I_n+KA_{m+1}\right)\\
&\leq \prod_{k=1}^{m}\det\left(I_n+A_k\right)\det\left(I_n+A_{m+1}\right).\\
&= \prod_{k=1}^{m+1}\det\left(I_n+A_k\right)
\end{aligned}
$$

□

题 47 (复旦大学-严金海). 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数且 $\sin f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也一致连续。

证明. 若不然，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及 $\mathbb{R}$ 上的两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足

$$
\begin{cases}
|a_n-b_n|<\dfrac{1}{n}\\
|f(a_n)-f(b_n)|>\varepsilon_0
\end{cases}
$$

考虑有界数列 $\{\sin(f(a_n))\}$，则必存在收敛子列仍记为 $\{\sin(f(a_n))\}$ 使得 $\sin(f(a_n))\to a\in[-1,1]$。再考虑有界数列 $\{\sin(f(b_n))\}$，则必存在收敛子列仍记为 $\{\sin(f(b_n))\}$ 使得 $\sin(f(b_n))\to b\in[-1,1]$。于是根据 $\sin f(x)$ 的一致连续得到

$$
\begin{cases}
|a_n-b_n|<\dfrac{1}{n}\\
|\sin(f(a_n))-\sin(f(b_n))|\to|a-b|
\end{cases}
\implies a=b
$$

不妨设 $a_n\geq b_n$，$f(a_n)=\pi a_{n1}+a_{n2}$，$f(b_n)=\pi b_{n1}+b_{n2}$，其中 $a_{n1}\geq b_{n1}$ 均为整数，$a_{n2},b_{n2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

则得到

$$
\sin(\pi a_{n1}+a_{n2})\to a
$$
$$
\sin(\pi b_{n1}+b_{n2})\to a
$$
$$
|\pi(a_{n1}-b_{n1})+a_{n2}-b_{n2}|>\varepsilon_0
$$

- 若 $a_{n1}-b_{n1}=0$ 有无穷多项，则此列 a_{n1} 必有无穷多个偶数（或奇数），不妨设为偶数，则必有收敛的子列不妨仍记为 $\{a_{n2}\}$，$\{b_{n2}\}$，使得

$$
a_{n2}\to a_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\quad b_{n2}\to b_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\quad \sin(a_2)=\sin(b_2)=a
$$

  根据 $|a_{n2}-b_{n2}|>\varepsilon_0$，知道 $|a_2-b_2|\geq\varepsilon_0$，这与 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调递增矛盾！

- 若 $a_{n1}-b_{n1}>1$ 有无穷多项，则 $|f(a_n)-f(b_n)|>\pi$，于是我们可以取两个值 $w,v\in(b_n,a_n)$，使得 $|\sin(f(w))-\sin(f(v))|>\frac{1}{2}$，这与 $\sin f(x)$ 一致连续矛盾！
- 若 $a_{n1}-b_{n1}=1$ 有无穷多项，则 $f(a_n)-f(b_n)=\pi+a_{n2}-b_{n2}$，知存在子列仍记为 a_{n2}，b_{n2}，使得 $a_{n2}\to a_2$，$b_{n2}\to b_2$，且 $a_2=-b_2$，
  - 若 $a_2=-\frac{\pi}{2}=-b_2$，则当 n 足够大时不成立 $|\pi+a_{n2}-b_{n2}|>\varepsilon_0$。
  - 若 $a_2>-\frac{\pi}{2}$，此时存在 $c>0$ 使得 $f(a_n)-f(b_n)>c$，于是有

$$|\sin(f(a_n))-\sin(f(b_n))|>c|\cos\xi_n|>c|\cos a_2|$$

    这同样与 $\sin f(x)$ 一致连续矛盾！

结合上述所有情况，证毕。 □

题 48 (复旦大学-江辰). *设 A 和 B 是 n 阶实方阵，满足如下条件：*

(a) A 是可逆对称矩阵，有且只有一个正特征值；

(b) $B-I_n$ 是幂零矩阵；

(c) $B^TAB=A$。

求 B 的 Jordan 标准型。

解. 我们证明，$B-I_n$ 的若当标准型是零矩阵或者仅有一个 3 阶非平凡若当块 $J_3(0)$。

根据 (b) 可知 $B=I_n+C$，这里 C 是幂零阵，根据 (a) 可知存在可逆矩阵 P 使得

$$A=P^TSP \qquad \text{其中 } S=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -I_{n-1}\end{pmatrix}$$

则 (c) 变为

$$(I_n+(PCP^{-1})^T)S(I_n+\underbrace{PCP^{-1}}_{D})=S$$

对 n 维向量 x,y，引入双线性函数 $f(x,y)=x^TSy$，则根据上式得到对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 成立

$$f(Dx,y)+f(x,Dy)+f(Dx,Dy)=0 \iff f(Dx,y)=-f(x,D(I_n+D)^{-1}y) \tag{11}$$

下面我们分三步来证明：

- 证明：D 最多只有一个非平凡的若当块。

  假设 D 有两个非平凡若当块，则存在两个向量组 $\{\alpha_i\}(1\le i\le p)$，$\{\beta_j\}(1\le j\le q)$ 使得

$$\begin{cases}D\alpha_p= & \mathbf{0}\\ D\alpha_i= & \alpha_{i+1}\quad(1\le i\le p-1)\end{cases}\qquad\begin{cases}D\beta_q= & \mathbf{0}\\ D\beta_j= & \beta_{j+1}\quad(1\le j\le q-1)\end{cases}$$

其中 $p,q>1$。分别取 $y=\alpha_p$，$y=\beta_q$，根据(11)得到对任意的 x 有

$$\begin{cases} f(Dx,\alpha_p)=0 \\ f(Dx,\beta_q)=0 \end{cases} \implies f(\alpha_p,\alpha_p)=f(\beta_q,\beta_q)=f(\alpha_p,\beta_q)=0$$

下面来导出矛盾，设 $\alpha_p=(a\ \ \alpha)$，$\beta_q=(b\ \ \beta)$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{n-1}$，则有

$$a^2=\|\alpha\|^2 \qquad b^2=\|\beta\|^2 \qquad ab=\alpha^T\beta$$

由柯西-施瓦茨不等式得到

$$a^2b^2=|\alpha^T\beta|^2\le\|\alpha\|^2\|\beta\|^2=a^2b^2$$

这说明不等式取等号，则存在 $\lambda\in\mathbb{R}\neq 0$ 使得 $\alpha=\lambda\beta$，于是有 $a^2=\lambda^2b^2$，$ab=\lambda b^2$。

- 若 $a=0$，则 $b=0$，此时 $\alpha=\beta=\mathbf{0}$，从而 α_p，β_q 均为零向量，矛盾！
- 若 $a\neq 0$，则 $b\neq 0$ 且有 $a=\lambda b$，这说明 $\alpha_p=\lambda\beta_q$，故有 α_p，β_q 是线性相关的，仍然矛盾！

这说明 D 的若当标准型最多只能有一个非平凡若当块。

- 证明：D 的非平凡若当块不可能是偶数阶。

  使用反证法。对于 $k>1$，引入函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^ix^i$。注意到 $f(x)$ 中最低是一次幂，故 $f^r(x)$ 的最低是 r 次幂，对应的系数为 $(-1)^r$。由(11)得到

  $$f(Dx,y)=f(x,f(D)y) \implies f(D^rx,y)=f(x,f^r(D)y)$$

  记 $1\le k=2m\le n$ 为满足 $D^k=O$ 的最小正整数。则对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$，有

  $$f(D^{2m-1}x,y)=f(x,f^{2m-1}(D)y)=-f(x,D^{2m-1}y) \implies (D^{2m-1})^TS=-SD^{2m-1}$$

  且 $(D^{2m-1})^2=D^{4m-2}=D^mD^{3m-2}=O$，由引理 5知，$D^{2m-1}$ 必为零矩阵，这与 $k=2m$ 是满足 $D^k=O$ 的最小正整数矛盾！

- 构造相似于 3 阶若当块 $J_3(0)$ 的 D 满足题设条件 $(I_3+D)^TS(I_3+D)=S$。证明对于相似于 $2m+1(m>1)$ 阶若当块 $J_{2m+1}(0)$ 的 D 不可能存在。

  根据引理 6，只需构造相似于 $J_{2m+1}(0)$ 的 N 满足 $N^TS+SN=O$ 即可。

  - $m=1$，考虑 3 阶矩阵情况。令 N 为

    $$N_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

    直接验证知道 $N^2\neq O$，$N^3=O$，满足题设条件。对维数高于 3 的矩阵（$m>1$），直接对 N 零扩展即可，即引入

    $$N_{2m+1}=\begin{pmatrix}N_3&O\\O&O_{2m-2}\end{pmatrix}$$

    直接可验证 N_{2m+1} 满足题设条件。

– $m>1$，我们证明不存在这样的 N。若不然，存在 P 使得 $N=PJ_{2m+1}(0)P^{-1}$，这得到

$$J_{2m+1}^T(0)\underbrace{P^TSP}_{U}+P^TSPJ_{2m+1}(0)=O$$

直接计算并根据 U 的对称性，不难得到 U 有如下形式：

$$\begin{pmatrix} s_0 & 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 & s_m \\ 0 & -s_1 & 0 & \iddots & 0 & -s_m & 0 \\ s_1 & 0 & \iddots & \iddots & s_m & 0 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & 0 & s_m & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & -s_m & 0 & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $s_m\neq 0$ 保证 U 的可逆，为了方便不妨直接令 $s_m=1$。下面说明当 $m>1$ 时，U 的正惯性指数不可能是 1 进而导出矛盾。

根据 U 的奇偶交错，我们可以对奇偶项解耦为如下两个二次型 U_1，U_2：

$$U_1=\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_1 & s_2 & \iddots & s_{m-1} & s_m & 0 \\ s_2 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & s_{m-1} & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ s_{m-1} & s_m & \iddots & \cdots & \iddots & 0 \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_2=\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_2 & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ s_{m-1} & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ s_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

记二次型 A 的正负惯性指数为 p_A, q_A, 考虑 m 维向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, 并令 $x_1=1$, $x_i=0(i=2,\dots,m-1)$，直接计算 $\mathbf{x}^TU_2\mathbf{x}$ 得到

$$\mathbf{x}^TU_2\mathbf{x}=s_1x_1^2+2x_1x_m=s_1+2x_m$$

显然 $\mathbf{x}^TU_2\mathbf{x}$ 可以根据 x_m 的取值可正可负，这说明 $p_{U_2}\geq 1$，$q_{U_2}\geq 1$，类似考虑 U_1 得到 $p_{U_1}\geq 1$，$q_{U_1}\geq 1$，从而得到 $p_U=p_{U_1}+q_{U_2}\geq 2>1$，与 $p_U=1$ 矛盾!

综合上述讨论，我们得到 B 的若当标准型为 I_n 或者 $J_3(1)\bigoplus I_{n-3}$。

引理

引理 5. 对于 n 阶实矩阵 D，满足 $D^2=O$，若

$$D^TS=-SD \qquad \textbf{其中 } S=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -I_{n-1}\end{pmatrix}$$

则 D 是零矩阵。

证明. 对 D 进行如下分块

$$D = \begin{pmatrix} d & \alpha^T \\ \beta & H \end{pmatrix}$$

根据 $D^T S = -SD$ 得到

$$\begin{pmatrix} 2d & \alpha^T - \beta^T \\ \alpha - \beta & -H - H^T \end{pmatrix} = O \implies d = 0,\ \alpha = \beta,\ H = -H^T$$

再根据 $D^2 = O$ 得到

$$\begin{pmatrix} d^2 + \alpha^T\beta & d\alpha^T + \alpha^T H \\ d\beta + H\beta & \beta\alpha^T + H^2 \end{pmatrix} = O \implies \alpha = \beta = \mathbf{0},\ H^2 = O$$

结合 $H = -H^T$ 知 $HH^T = O$，这说明 $\operatorname{tr}(HH^T) = 0$，即有 $H = O$，从而 D 为零矩阵。 □

引理 6. 对于 n 阶矩阵 S, N，其中 N 为幂零阵，设 $N^{k+1} = O$。引入如下定义

$$e^N \coloneqq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} N^i \qquad \ln(I_n + N) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} N^i$$

- **若 N 满足 $N^T S + SN = O$，则有 $(e^N)^T S e^N = S$。（N 无需幂零）**
- **若 N 满足 $(I_n + N)^T S (I_n + N) = S$，则有 $\ln^T(I_n + N) S + S \ln(I_n + N) = O$。**

证明. 分别证明如下：

- 考虑矩阵值函数 $F(t) = (e^{tN})^T S e^{tN}$，对其求导得到

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = (\dot{e^{tN}})^T S e^{tN} + (e^{tN})^T S \dot{e^{tN}} = (e^{tN})^T (N^T S + SN) e^{tN} = O$$

  这说明 $F(t)$ 为常矩阵，则 $(e^N)^T S e^N = F(1) = F(0) = S$。

- 首先由 $(I_n + N)^T S (I_n + N) = S$ 得到 $N^T S + SN + N^T SN = O$，即为 $N^T S = Sf(N)$，其中 $f(N)$ 如下定义：

$$f(N) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i N^i$$

  对于 $s \geq r$，根据恒等式

$$\sum_{p=r}^{s} \binom{p-1}{r-1} = \binom{s}{r}$$

  不难归纳得到

$$f^r(N) = \sum_{s=r}^{+\infty} \binom{s-1}{r-1} (-1)^s N^s \tag{12}$$

根据(12)并注意到 $(N^T)^i S = S f^i(N)$，直接计算得到

$$
\begin{aligned}
\ln^T(I_n+N)S + S\ln(I_n+N) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}(N^T)^i S + S\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i \\
&= S\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}f^i(N) + S\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i \\
&= S\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\sum_{s=i}^{k}\binom{s-1}{i-1}(-1)^s N^s + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i\right] \\
&= S\left[\sum_{s=1}^{k}(-1)^s N^s\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\binom{s-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i\right] \\
&= S\left[\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^{s+1}}{s}N^s\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\binom{s}{i} + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i\right] \\
&= S\left[\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^s}{s}N^s + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}N^i\right] \\
&= O
\end{aligned}
$$

证毕。 □

注. $n=3$ 时，有一个相似于 $J_3(0)$ 的矩阵例子：

$$
D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

下面再给出一个幂零矩阵的判定条件

定理 1 (中山大学-许锐航)**. 实数域上矩阵 A 是幂零矩阵的充要条件是：存在实矩阵 B 使得 $A = AB - BA$。**

证明. 此引理对复数域也成立。

- 充分性：归纳证明 $kA^k = A^k B - BA^k$。首先 $k=1$ 显然成立，若对 k 已证明，下面考虑 $k+1$。根据题设，有

$$
kA^{k+1} = A(A^k B - BA^k) = A^{k+1}B - (A+BA)A^k = A^{k+1}B - BA^{k+1} - A^{k+1}
$$

即对 $k+1$ 也成立，这得到对任意的 k，有 $\mathrm{tr}(A^k)=0$，根据牛顿公式知道 A 的所有特征值均为 0，故 A 为幂零矩阵。

- 必要性：根据若当标准型理论知道存在可逆的实矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$ 为若当标准型。先对 m 阶若当块 $J = J_m(0)$ 证明结论成立。我们只需找到 B 使得 $J = JB - BJ$，由于 $J = e_{i+1}\otimes e_i (1 \le i \le m-1)$，设 $B = b_{p,q}e_p \otimes e_q$，则有

$$
e_{i+1}\otimes e_i = b_{i,q}e_{i+1}\otimes e_q - b_{p,i+1}e_p\otimes e_i \implies b_{i,i} - b_{i+1,i+1} = 1
$$

取 B 为如下形式的矩阵即可：

$$Q = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对于一般情况，考虑

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_q \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} Q_1 & O & \cdots & O \\ O & Q_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & Q_q \end{pmatrix}$$

即证明了必要性。

证毕。 □

题 49 (南京大学-梅加强)**.** 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为有界数列。

(1) 若

$$a_n = \frac{1}{3}(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}), \quad \forall n \geq 0,$$

证明：$a_n \equiv a_0\ (\forall n \geq 0)$。

(2) 若

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a_n - \frac{1}{3}(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3})\right)$$

存在，是否有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

存在？

证明. 令 $a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} = 0$，引入数列 b_n，使得

$$b_{n+3} = (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - 3a_n (n \geq -3)$$

因为 a_n 有界，引入母函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$，$(|x| < 1)$，则有：

$$\begin{aligned} f(x) =& a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ xf(x) =& \quad\ \ + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots \\ x^2 f(x) =& \qquad\qquad\quad a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{13}$$

记 $p(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$，将(13)三个等式相加便得到:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)f(x)=&a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+(3a_0+b_3)x^3+(3a_1+b_4)x^4+\cdots\\=&b_0+b_1x+b_2x^2+(3a_0+b_3)x^3+(3a_1+b_4)x^4+\cdots\\=&3x^3f(x)+p(x)\end{aligned}$$

即为

$$f(x)=\frac{p(x)}{1+x+x^2-3x^3} \tag{14}$$

记 $A_{n+2}=3a_n+2a_{n+1}+a_{n+2}$，先证明 $b_n\to 0$，这是因为

$$\begin{aligned}b_{n+3}+3a_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}\implies A_{n+3}=&A_{n+2}+b_{n+3}\\=&A_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}\\=&\cdots\\=&A_0+\sum_{k=1}^{n+3}b_k\end{aligned}$$

根据 a_n 有界，必有 A_n 有界，根据 b_n 是收敛的，若其极限不为 0，从而 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 无界，故 A_n 也无界，矛盾！故 b_n 的极限必为 0。

考虑(14)式，将 $\frac{p(x)}{3}$ 仍记为 $p(x)$，则 $f(x)$ 可以写为:

$$f(x)=\frac{p(x)}{(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x+x^2)(1-x)}$$

设 x_1，x_2 是方程 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x+x^2=0$ 的两个根，注意到 $x_1x_2=\frac{1}{3}$，且 x_1,x_2 互为共轭，则得到 $|x_1|=|x_2|=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$，记 $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\theta i}$，$x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\theta i}$ 则得到:

$$\begin{aligned}(1-x)f(x)=&\frac{p(x)}{(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x+x^2)}\\=&\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x_2-x}-\frac{1}{x_1-x}\right)p(x)\\=&\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x_2}\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^s-\frac{1}{x_1}\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^s\right)\left(\sum_{t=0}^{+\infty}b_tx^t\right)\\=&c\sum_{s=0}^{+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{s+1}\sin((s+1)\theta)x^s\cdot\sum_{t=0}^{+\infty}b_tx^t\\=&c\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{3}\right)^{n-k+1}\sin((n-k+1)\theta)\cdot b_k\right)x^n\end{aligned} \tag{15}$$

(1) 若每个 $b_n=0(n\geq 3)$，$p(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$。

故根据(15)式知道，对于 $n>2$，$(1-x)f(x)$ 的展开式中 x^n 的系数为:

$$\begin{aligned}
&c\left(\sum_{k=0}^{2}(\sqrt{3})^{n-k+1}\sin((n-k+1)\theta)\cdot b_k\right)\\
=&c(\sqrt{3})^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin((n-1)\theta)b_2+(\sin n\theta)b_1+\sqrt{3}\sin((n+1)\theta)b_0\right)\\
=&c(\sqrt{3})^n\left(\left(\cos\theta\frac{b_2}{\sqrt{3}}+\cos\theta\sqrt{3}b_0+b_1\right)\sin(n\theta)+\left(\sin\theta\sqrt{3}b_0-\sin\theta\frac{b_2}{\sqrt{3}}\right)\cos(n\theta)\right)\\
=&c(\sqrt{3})^n\sqrt{\left(\cos\theta\frac{b_2}{\sqrt{3}}+\cos\theta\sqrt{3}b_0+b_1\right)^2+\left(\sin\theta\sqrt{3}b_0-\sin\theta\frac{b_2}{\sqrt{3}}\right)^2}\sin(n\theta+\alpha)
\end{aligned}$$

根据 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sin(n\theta+\alpha)=1$ 及 $\sqrt{3}>1$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故必有

$$\begin{cases}\cos\theta\dfrac{b_2}{\sqrt{3}}+\cos\theta\sqrt{3}b_0+b_1 & =0\\ \sin\theta\sqrt{3}b_0-\sin\theta\dfrac{b_2}{\sqrt{3}} & =0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-b_2-3b_0+3b_1 & =0\\ 3b_0-b_2 & =0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b_1 & =2b_0\\ b_2 & =3b_0\end{cases}$$

这直接推出 $a_k=a_0(k\geq 0)$，证毕。

(2) 下面考虑 b_n 的一般情况，结论是不一定，我们来给出一个反例如下:

考虑 $a_n=\sin(\ln n)$，易得 $|a_n|\leq 1$ 是有界的，下面计算 b_{n+3}:

$$\begin{aligned}
|b_{n+3}|=&|(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})-3a_n|\\
=&|\sin(\ln(n+1))+\sin(\ln(n+2))+\sin(\ln(n+3))-3\sin(\ln(n))|\\
=&|\sin(\ln(n+1))-\sin(\ln(n))+\sin(\ln(n+2))-\sin(\ln(n))+\sin(\ln(n+3))-\sin(\ln(n))|\\
\leq&2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)+2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)\\
\leq&\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}\\
\leq&\frac{6}{n}
\end{aligned}$$

故得到 $b_n\to 0$，但 $a_n=\sin(\ln n)$ 有界且不收敛。

□

题 50 (浙江大学-王梦，巴黎综合理工-林徐扬). 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上局部可积的非负函数，证明:

$$\liminf_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\leq\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\leq\limsup_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\leq\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

并进一步讨论严格不等号成立的可能性。

证明. 我们先来分两种情况证明最左侧的不等式:

- 若 $\liminf\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$，记 $g(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$，显然有 $g(0)=0$，则 $\liminf\limits_{T\to+\infty}\dfrac{g(T)}{T}=+\infty$。对于任意的 $\lambda>0$：

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\geq\lambda\int_0^{\frac{1}{\lambda}}e^{-\lambda t}g'(t)\,\mathrm{d}t=\lambda e^{-\lambda t}g(t)\Big|_0^{\frac{1}{\lambda}}+\lambda^2\int_0^{\frac{1}{\lambda}}e^{-\lambda t}g(t)\,\mathrm{d}t\geq e^{-1}\lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t\geq\liminf_{\lambda\to0^+}e^{-1}\lambda g\left(\frac{1}{\lambda}\right)=+\infty$$

$$\Longrightarrow\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$$

- 若 $\liminf\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=m<+\infty$，令 $g(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s-mt$，则 $\liminf\limits_{T\to+\infty}\dfrac{g(T)}{T}=0$。所以只需要证明如下不等式：

$$\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}(f(t)-m)\,\mathrm{d}t=\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}g'(t)\,\mathrm{d}t\geq0$$

我们使用反证法，若不然，则存在 $\varepsilon_0>0$，以及 $\{\lambda_k\}\to0^+$，使得 $\lambda_k\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\lambda_k t}g'(t)\,\mathrm{d}t<-\varepsilon_0$，根据 $\liminf\limits_{T\to+\infty}\dfrac{g(T)}{T}=0$ 知道，对 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，存在 $N_1>0$，使得 $\dfrac{g(t)}{t}>-\varepsilon_1$ 对任意的 $t>N_1$ 成立。取 $N>N_1$，考虑

$$\begin{aligned}\lambda_k\int_0^N e^{-\lambda_k t}g'(t)\,\mathrm{d}t=&\lambda_k e^{-\lambda_k t}g(t)\Big|_0^N+\lambda_k^2\int_0^N e^{-\lambda_k t}g(t)\,\mathrm{d}t\\=&\lambda_k Ne^{-\lambda_k N}\frac{g(N)}{N}+\underbrace{\lambda_k^2\int_0^{N_1}e^{-\lambda_k t}g(t)\,\mathrm{d}t}_{B(\lambda_k)}+\lambda_k^2\int_{N_1}^N e^{-\lambda_k t}g(t)\,\mathrm{d}t\\\geq&(-\varepsilon_1)\lambda_k Ne^{-\lambda_k N}+B(\lambda_k)+(-\varepsilon_1)\lambda_k^2\int_{N_1}^N e^{-\lambda_k t}t\,\mathrm{d}t\\=&(-\varepsilon_1)\lambda_k Ne^{-\lambda_k N}+B(\lambda_k)+(-\varepsilon_1)\left[(\lambda_k N_1+1)\,e^{-\lambda_k N_1}-(\lambda_k N+1)\,e^{-\lambda_k N}\right]\\=&B(\lambda_k)+(-\varepsilon_1)\,(\lambda_k N_1+1)\,e^{-\lambda_k N_1}+\varepsilon_1 e^{-\lambda_k N}\end{aligned}$$

上式令 $N\to+\infty$ 得到

$$-\varepsilon_0>\lambda_k\int_0^{+\infty}e^{-\lambda_k t}g'(t)\,\mathrm{d}t\geq B(\lambda_k)+(-\varepsilon_1)\,(\lambda_k N_1+1)\,e^{-\lambda_k N_1}$$

再令 $k\to+\infty$，得到 $-\varepsilon_0>-\varepsilon_1=-\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾！

对于上极限，若 $\limsup\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$，不等式显然成立。否则，$\limsup\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=M<+\infty$，记 $g(t)=M-f(t)$，则要证明的不等式变为

$$\limsup_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}(M-g(t))\,\mathrm{d}t\leq\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(M-g(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\Longleftrightarrow\liminf_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\leq\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}g(t)\,\mathrm{d}t$$

这就转化为了上面下极限的不等式结果，证毕。

对于严格不等式，考虑如下函数：

$$f(t)=\begin{cases}2^m & \text{若} t\in[2^m,2^m+1),\ m=0,1,2,\dots\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即函数在区间 $[2^m,2^m+1)$ 上取值为 2^m，其余部分为零。

- 当 $T=2^m$ 时：
$$\frac{1}{2^m}\int_0^{2^m} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m-1}2^k=1-2^{-m}\to 1$$

- 当 $T=2^m+1$ 时：
$$\frac{1}{2^m+1}\int_0^{2^m+1} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^m+1}\sum_{k=0}^{m}2^k=2\frac{2^m}{2^m+1}-\frac{1}{2^m+1}\to 2$$

所以得到

$$\liminf_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=1,\quad \limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=2$$

计算：

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^m}^{2^m+1}2^m e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=(1-e^{-\lambda})\sum_{m=0}^{\infty}2^m e^{-\lambda 2^m}$$

考虑函数 $g(x)=xe^{-\lambda x}$，求导得到 $g'(x)=(1-\lambda x)e^{-\lambda x}$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{\lambda}\right)$ 上单调增，$\left(\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$ 上单调减。所以对于固定的 $\lambda>0$，有

$$\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t=(1-e^{-\lambda})\sum_{m=0}^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}2^m e^{-\lambda 2^m}+(1-e^{-\lambda})\sum_{m=\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty}2^m e^{-\lambda 2^m}=A+B$$

其中

$$(1-e^{-\lambda})\int_0^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}2^x e^{-\lambda 2^x}\,\mathrm{d}x\le A\le(1-e^{-\lambda})\int_1^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}2^x e^{-\lambda 2^x}\,\mathrm{d}x+(1-e^{-\lambda})2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}e^{-\lambda 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]}}$$
$$(1-e^{-\lambda})\int_{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty}2^x e^{-\lambda 2^x}\,\mathrm{d}x\le B\le(1-e^{-\lambda})\int_{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}^{+\infty}2^x e^{-\lambda 2^x}\,\mathrm{d}x+(1-e^{-\lambda})2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}e^{-\lambda 2^{\left[\frac{1}{\lambda}\right]+1}}$$

从上式不难得到

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\to0^+}\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}f(t)\,\mathrm{d}t&=\liminf_{\lambda\to0^+}(1-e^{-\lambda})\int_0^{+\infty}2^x e^{-\lambda 2^x}\,\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=2^x}\liminf_{\lambda\to0^+}(1-e^{-\lambda})\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln 2}e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u\\&=\liminf_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\ln 2}\frac{e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}}{\lambda}\\&=\frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

故构造的函数满足：

$$\liminf_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 1 < \frac{1}{\ln 2} = \liminf_{\lambda\to 0^+}\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

□

题 51 (北京大学-杨家忠). 设 p,q,r 为两两互异的正数，证明：

$$\frac{p}{(p-q)(p-r)}\ln p + \frac{q}{(q-p)(q-r)}\ln q + \frac{r}{(r-p)(r-q)}\ln r > 0$$

证明. 根据 p,q,r 的循环性，不妨设 $p>q>r>0$，则要证不等式等价于

$$(q-r)p\ln p + (p-r)(-q)\ln q + (p-q)r\ln r > 0$$

进而转化为

$$(q-r)(p\ln p - q\ln q) > (p-q)(q\ln q - r\ln r)$$

引入函数 $f(x)=x\ln x$，求导得 $f'(x)=1+\ln x$，再求导得 $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$。根据微分中值定理，存在 $\xi_1\in(q,p)$，$\xi_2\in(r,q)$ 以及 $\eta\in(\xi_2,\xi_1)$，使得

$$\frac{p\ln p - q\ln q}{p-q} - \frac{q\ln q - r\ln r}{q-r} = f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = \frac{\xi_1-\xi_2}{\eta} > 0$$

证毕。 □

题 52 (苏州工学院-常建明). 是否存在在区间 $[0,1]$ 上连续的两个函数 f,g，使得 f 在 0 处右可导，且有

$$0<g(x)<x(0<x<1) \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(g(x))}{x-g(x)} = A \neq f'_+(0)$$

证明. 不存在，下面给出详细的说明。若不然，我们不妨设 $A=0$，否则将 $f(x)-Ax$ 仍记为 $f(x)$ 进行论证，下面我们只需证明 $f'_+(0)=0$ 即可。

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$ 使得当 $x\in(0,\delta)$ 时就有

$$-\varepsilon(x-g(x)) < f(x)-f(g(x)) < \varepsilon(x-g(x))$$

对任意的 $x\in(0,\delta)$，定义数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=x$，$a_{n+1}=g(a_n)$，不难得到 a_n 为单调递减数列且有下界 0，则 a_n 必有极限 $a\geq 0$，若 $a>0$，取极限得到 $a=g(a)<a$ 矛盾，故必有 $a=0$。且有

$$f(a_n)-f(a_{n+1}) < \varepsilon(a_n-a_{n+1}) \implies f(a_1)-f(a_n) < \varepsilon(a_1-a_n)$$
$$f(a_n)-f(a_{n+1}) > -\varepsilon(a_n-a_{n+1}) \implies f(a_1)-f(a_n) > -\varepsilon(a_1-a_n)$$

上面两式令 $n\to+\infty$，根据 f 的连续性得到

$$|f(x)-f(0)| < \varepsilon x$$

由 ε 的任意性，这得到 $f'_+(0)=0$，证毕。 □

2 后记

本习题集是杂志《大学数学》的“问题征解”一栏收录的习题。出于对数学的兴趣，我对其中的一部分进行了探索，对于一部分问题，我还加入了额外的思考拓展，以求让每个题目的思路不至于特别突兀。每题的解答未必正确，如有不严谨之处欢迎与我邮件联系！

饶一鹏 raoyipeng@qq.com

2025 年 9 月 11 日于湖南长沙尖山湖