คณิตศาสตร์พื้นฐาน
สำหรับ Options Trading

Part VI: Time Series, Numerical Methods & Stochastic Calculus

บทที่ 12-14: GARCH, IV Solver, Brownian Motion, Ito's Lemma, BS PDE

อ่านจบ → forecast volatility + เข้าใจที่มาของ Black-Scholes

บทที่ 12: Time Series & Volatility Forecasting

Volatility ไม่คงที่ — มันเปลี่ยนตลอดเวลา ถ้า forecast ได้ = ได้เปรียบในการเทรด Options

12.1 แนวคิด Time Series

ข้อมูลที่เรียงตามเวลา: ราคาหุ้นรายวัน, daily returns, implied volatility

- **Trend:** ทิศทางระยะยาว (ขึ้น/ลง/นิ่ง)
- **Stationarity:** สมบัติไม่เปลี่ยนตามเวลา (mean, variance คงที่)

> **สำคัญ**
>
> ราคาหุ้น = **non-stationary** (มี trend) แต่ **returns** = stationary (เฉลี่ย ≈ 0, variance ≈ คงที่)
> ดังนั้นเราวิเคราะห์ **returns** ไม่ใช่ราคา!

12.2 Autocorrelation — Volatility Clustering

Autocorrelation = correlation ของข้อมูลกับตัวเองที่ lag ก่อนหน้า

```
ρ(k) = Corr(rₜ, rₜ₋ₖ) = "return วันนี้สัมพันธ์กับ return k วันก่อนไหม?"
```

ข้อมูล	Autocorrelation	ความหมาย
returns (r_t)	≈ 0	ทำนายทิศทางไม่ได้ (Efficient Market)
|returns| หรือ r^2_t	**สูง!**	วันที่ผันผวนมากมักตามด้วยวันผันผวนมาก

> **เชื่อมกับ Options**
>
> **Volatility Clustering:** ความผันผวนมักมาเป็น "กลุ่ม" — ช่วงที่ตลาดกลัว σ สูงนาน
> นี่คือเหตุผลที่ GARCH model ทำงานได้ดี เพราะจำลอง clustering นี้

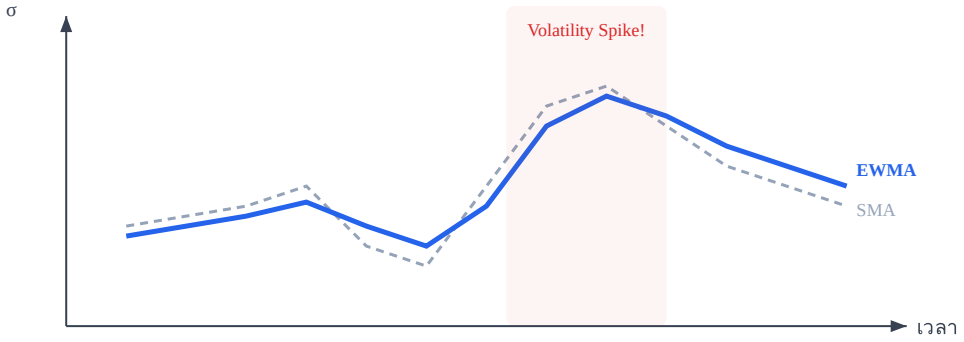
12.3 Moving Average & EWMA

Simple MA Volatility: σ = std(returns ใน window n วัน)

```
σ²_SMA = (1/n) Σ r²ₜ₋ᵢ     (สมมติ μ ≈ 0)
```

EWMA (Exponentially Weighted): ให้น้ำหนักข้อมูลล่าสุดมากกว่า

```
σ²ₜ = λ × σ²ₜ₋₁ + (1-λ) × r²ₜ₋₁
λ = decay factor (RiskMetrics ใช้ λ = 0.94)
```



12.4 GARCH Model

GARCH(1,1) = model ที่ใช้มากที่สุดสำหรับ volatility forecasting:

```
σ²ₜ = ω + α × r²ₜ₋₁ + β × σ²ₜ₋₁

ω = baseline variance (ค่าคงที่)
α = "ข่าวเมื่อวานส่งผลแค่ไหน" (news impact)
β = "volatility เมื่อวานส่งต่อแค่ไหน" (persistence)
α + β < 1 → volatility mean-reverts!
```

เชื่อมกับ Options

- **Forecast σ** → เทียบกับ Implied Volatility (IV) ของตลาด
- ถ้า GARCH forecast < IV → options "แพงเกินไป" → อาจ **sell options**
- ถ้า GARCH forecast > IV → options "ถูกเกินไป" → อาจ **buy options**
- **BS สมมติ σ คงที่** ← **ผิด!** GARCH บอกว่า σ เปลี่ยนตลอดเวลา

12.5 Mean Reversion

Volatility มักจะ "กลับสู่ค่าเฉลี่ย" — ถ้าสูงมากจะค่อยๆ ลง ถ้าต่ำมากจะค่อยๆ ขึ้น

เชื่อมกับ Options

- ถ้า IV สูงมาก (เช่น หลัง market crash) → มักจะลดลง → **sell high IV**
- Long-term $\sigma \approx \omega/(1 - \alpha - \beta)$ จาก GARCH → ใช้เป็น "anchor"

บทที่ 13: วิธีเชิงตัวเลข — IV Solver

บางสมการแก้แบบ closed-form ไม่ได้ — ต้องใช้คอมพิวเตอร์หาคำตอบ ตัวอย่างสำคัญที่สุด: **หา Implied Volatility**

13.1 Bisection Method — "แบ่งครึ่ง"

ถ้ารู้ว่าคำตอบอยู่ระหว่าง a กับ b → ลอง midpoint → ดูว่าคำตอบอยู่ครึ่งซ้ายหรือขวา → แบ่งครึ่งอีก

```
1. เลือก a, b ที่ f(a) × f(b) < 0 (คนละเครื่องหมาย = คำตอบอยู่ระหว่าง)
2. m = (a+b)/2
3. ถ้า f(m) × f(a) < 0 → b = m, มิฉะนั้น a = m
4. ทำซ้ำจนกว่า |b-a| < tolerance
```

รอบ	a	b	m = (a+b)/2	f(m)	ช่วงใหม่
1	0.05	1.00	0.525	+3.2	[0.05, 0.525]
2	0.05	0.525	0.288	+0.8	[0.05, 0.288]
3	0.05	0.288	0.169	-0.5	[0.169, 0.288]
4	0.169	0.288	0.228	+0.1	[0.169, 0.228]
...	**→ converge ไปที่ σ ≈ 0.20 (IV = 20%)**				

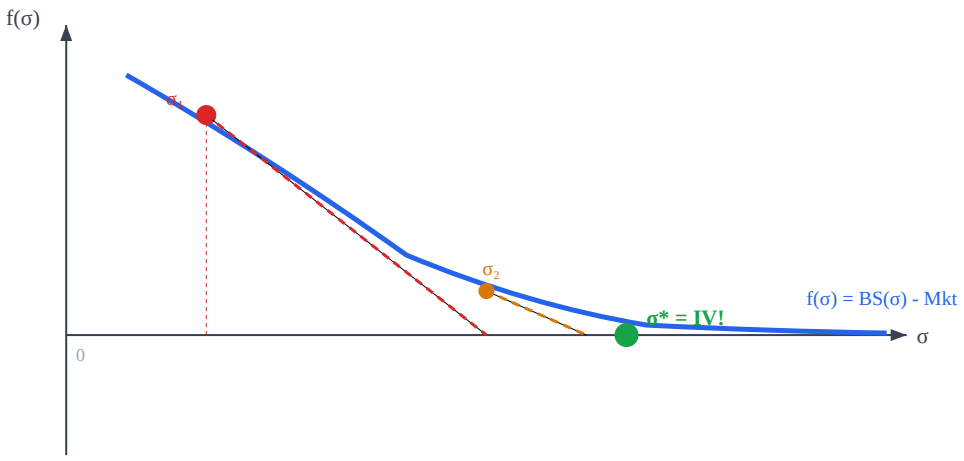
13.2 Newton-Raphson Method — เร็วกว่า!

ใช้ **derivative** ช่วยเดาได้แม่นกว่า Bisection:

```
x(n+1) = x(n) - f(x(n)) / f'(x(n))

สำหรับ IV Solver:
f(σ) = BS_Price(σ) - Market_Price    (ต้องการให้ = 0)
f'(σ) = Vega                        (derivative ของราคาเทียบกับ σ)

σ(n+1) = σ(n) - (BS_Price(σ(n)) - Market_Price) / Vega(σ(n))
```



เชื่อมกับ Options — IV Solver

Newton-Raphson ใช้ **Vega** เป็น derivative → converge ใน 3-5 รอบ!
ทุกครั้งที่คุณเห็น "IV = 25%" บนหน้าจอ Bloomberg — เบื้องหลังคือ Newton-Raphson กำลังทำงาน

13.3 Numerical Differentiation

```
f'(x) ≈ [f(x+h) - f(x-h)] / (2h)    (central difference)
```

เชื่อมกับ Options

คำนวณ Greeks จาก pricing model ที่ไม่มีสูตร closed-form:

Delta ≈ [V(S+h) - V(S-h)] / (2h)

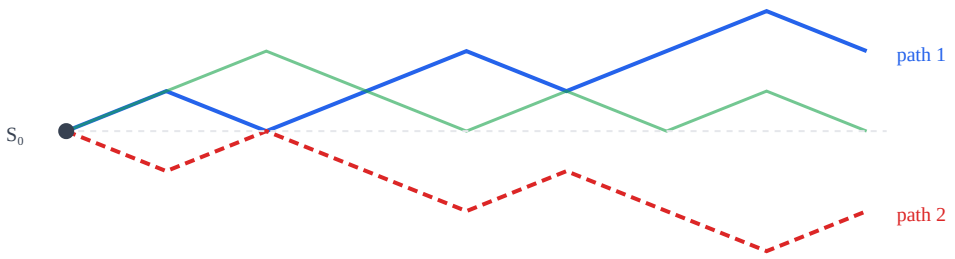
Gamma ≈ [V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)] / h^2

บทที่ 14: Stochastic Processes & Ito's Lemma

บทนี้คือ "ยอดเขา" ของเล่ม — เข้าใจบทนี้ = เข้าใจที่มาของ Black-Scholes

14.1 Random Walk & Binomial Tree

Random Walk: ทุก step ราคาขึ้น (+1) หรือลง (-1) ด้วยโอกาส 50/50



Binomial Tree: ราคาขึ้น u หรือลง d ในแต่ละ step

```
u = e^{σ√Δt} (up factor)
d = e^{-σ√Δt} = 1/u (down factor)
p* = (e^{rΔt} - d) / (u - d)    ← risk-neutral probability
```

เชื่อมกับ Options — Binomial Option Pricing

1. สร้าง tree ราคาหุ้น n steps
2. คำนวณ payoff ที่ปลาย tree (วันหมดอายุ)
3. ย้อนกลับทีละ step: $V = e^{-r\Delta t} \times [p^* \times V(up) + (1-p^*) \times V(down)]$
4. ค่าที่ node แรก = **ราคา Option!**

เมื่อ $n \to \infty$ → converge สู่ **Black-Scholes price**

14.2 Risk-Neutral Pricing

หลักการสำคัญที่สุดใน Derivatives Pricing

เราสามารถ price option ได้โดย **ไม่ต้องรู้ว่าหุ้นจะขึ้นหรือลง!**

ทำได้โดยใช้ **"โลก risk-neutral"** ที่สมมติว่า:

• ทุกสินทรัพย์มี expected return = risk-free rate (r)

• ใช้ probability p* (ไม่ใช่ real probability p)

• **Option Price = e^{-rT} × E*[Payoff]**

ทำไมใช้ได้?

เพราะเราสามารถ **replicate** payoff ของ option ได้ด้วย stock + bond (hedging)
ดังนั้นราคาของ option ต้อง = ต้นทุนของ replicating portfolio
ต้นทุนนี้ **ไม่ขึ้นกับว่าหุ้นจะขึ้นหรือลง** → ไม่ต้องรู้ real probability!

14.3 Brownian Motion

Brownian Motion W(t) = continuous limit ของ random walk สมบัติ:

- W(0) = 0
- Independent increments: $W(t_2)-W(t_1)$ ไม่ขึ้นกับ $W(t_1)-W(t_0)$
- $W(t_2)-W(t_1) \sim \text{Normal}(0, t_2-t_1)$ → ยิ่งเวลานาน variance ยิ่งมาก
- Continuous paths (ไม่กระโดด)

14.4 Geometric Brownian Motion (GBM)

สมการการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นใน Black-Scholes model:

$$dS/S = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

อ่านว่า: "% การเปลี่ยนแปลงราคา = drift + สุ่ม"

- **μ dt** = drift (ทิศทางเฉลี่ย × เวลา) → deterministic
- **σ dW** = volatility × Brownian shock → stochastic (สุ่ม)

ทำไม Geometric?

เพราะ dS/**S** (% change) เป็น normal ไม่ใช่ dS (absolute change)
→ ราคาเป็น **Lognormal** (เชื่อมกับบท 6.4!) → ราคา > 0 เสมอ

14.5 Ito's Lemma — "Chain Rule ของโลกสุ่ม"

ถ้า S เป็น stochastic process และ V(S,t) เป็นฟังก์ชันของ S:

$$dV = (\partial V/\partial t)dt + (\partial V/\partial S)dS + \mathbf{\tfrac{1}{2}(\partial^2 V/\partial S^2)(dS)^2}$$

ทำไมมี term $\frac{1}{2}(\partial^2 V/\partial S^2)(dS)^2$ พิเศษ?

ในโลกปกติ $(dt)^2 \approx 0$ ตัดทิ้งได้ แต่ในโลกสุ่ม $\mathbf{(dW)^2 = dt \neq 0}$**!**
ดังนั้น $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$ → term Gamma ไม่หายไป!
นี่คือเหตุผลว่าทำไม Gamma สำคัญ — มันเป็น "ค่าแก้" ที่โลกสุ่มบังคับให้ใส่

14.6 Black-Scholes PDE

ใช้ Ito's Lemma + hedging argument → ได้สมการ:

$$\partial V/\partial t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2(\partial^2 V/\partial S^2) + rS(\partial V/\partial S) - rV = 0$$

แต่ละ term คือ Greek:

Term	Greek	ความหมาย
$\partial V/\partial t$	**Theta (Θ)**	Time decay
$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(\partial^2 V/\partial S^2)$	**$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$ × Gamma (Γ)**	Convexity benefit
$rS(\partial V/\partial S)$	**rS × Delta (Δ)**	Cost of carry
$-rV$		Discounting

Greeks Balance!

$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta = rV$

หมายความว่า: Time decay (Theta) **ถูก offset** ด้วย Convexity gain (Gamma term)
สำหรับ Long Option: Theta เป็นลบ แต่ Gamma term เป็นบวก → สมดุลกัน!
ไม่มี "free lunch" — ได้ Gamma ต้องจ่าย Theta

สรุป Part VI

✓ Autocorrelation → Volatility Clustering
✓ EWMA, **GARCH** → Forecast Volatility → เทียบกับ IV
✓ Mean Reversion → จังหวะเข้า/ออก
✓ Bisection, **Newton-Raphson** → **IV Solver** (ใช้ Vega!)
✓ Numerical Greeks → Delta, Gamma จาก model ใดก็ได้
✓ Random Walk → Binomial Tree → Option Pricing
✓ **Risk-Neutral Pricing** → ไม่ต้องรู้ทิศทางหุ้น!
✓ GBM → สมการราคาหุ้นใน BS
✓ **Ito's Lemma → ที่มาของ Gamma term**
✓ **BS PDE: $\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta = rV$**

จบ Part VI

Part VII: ประมวลรวม → อ่าน Black-Scholes ออกทุกตัว + Monte Carlo