# คณิตศาสตร์พื้นฐาน
# สำหรับ Options Trading

## Part I: เครื่องมือพื้นฐาน — อ่านจบแล้วอ่าน Payoff Chart ได้ (v2)

บทที่ 1–3: ฟังก์ชัน · ความชัน · max() · พีชคณิต · ดอกเบี้ยทบต้น · PV(K)

เรียนแบบ 3 ชั้น: อุปมา → เหตุ→ผล → ตัวเลขจริง

# บทที่ 1: เครื่องมือพื้นฐาน — "ภาษาที่ใช้พูดเรื่อง Options"

ก่อนจะเข้าใจ Options ได้ คุณต้องอ่าน "ภาษา" ที่ใช้พูดเรื่องนี้ให้ออกก่อน บทนี้สอนเครื่องมือคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ปรากฏในทุกสูตรของ Options

## 1.1 เปอร์เซ็นต์และอัตราส่วน

🔍 **อุปมา: ราคาของเปลี่ยน**

หุ้น ฿100 → ฿120 — ขึ้นไปกี่เปอร์เซ็นต์?
ได้กำไร ฿20 และ "ฐาน" คือ ฿100 → ขึ้น 20/100 = **20%**

ทำไมต้องหารด้วยราคาเก่า? เพราะเราอยากรู้ว่า "ขึ้น X% จากจุดเริ่ม" — ฐานคือที่ออกเดินทาง

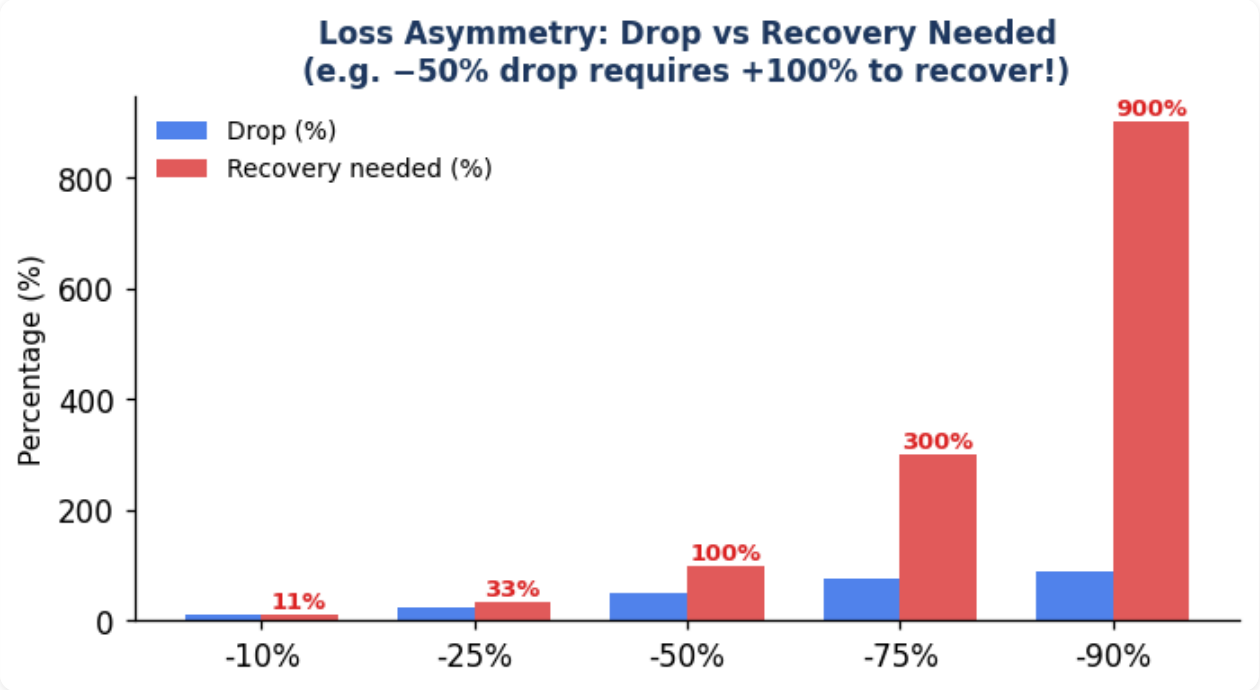
$$\%\,\text{Change} = \frac{\text{ค่าใหม่} - \text{ค่าเก่า}}{\text{ค่าเก่า}} \times 100$$

หาส่วนต่าง (ค่าใหม่−ค่าเก่า) → หารด้วยฐาน (ค่าเก่า) → คูณ 100 → เป็น %

**กับดัก: ตก 50% แล้วขึ้น 50% ≠ กลับที่เดิม!**

฿100 ตก 50% = ฿50 → ขึ้น 50% = ฿75 ← **ไม่ใช่ ฿100!**
ต้องขึ้น 100% จาก ฿50 (= ฿50 กำไร) ถึงจะกลับ ฿100
**สาเหตุ:** % ตอนขึ้นคิดจาก "ฐานที่เล็กลงแล้ว" — ฐานเปลี่ยน ผลลัพธ์จึงไม่สมมาตร

| ราคาลดลง | ต้องขึ้นกลับ | เหตุผล |
|---|---|---|
| −10% | +11.1% | ฿90 → ต้องขึ้น 10/90 = 11.1% |
| −25% | +33.3% | ฿75 → ต้องขึ้น 25/75 = 33.3% |
| −50% | **+100%** | ฿50 → ต้องขึ้น 50/50 = 100% |
| −75% | **+300%** | ฿25 → ต้องขึ้น 75/25 = 300% |
| −90% | **+900%** | ฿10 → ต้องขึ้น 90/10 = 900% |




Drop vs recovery needed — -50% requires +100% to recover

**เชื่อมกับ Options — Log Return แก้ปัญหานี้**

ความไม่สมมาตรนี้ทำให้วิเคราะห์ยาก → Options ใช้ **log return** แทน simple return
log return สมมาตร: ขึ้น 40.55% (log) แล้วลง 40.55% (log) กลับที่เดิมพอดี
จะเรียนละเอียดในบท 3.6

## 1.2 ฟังก์ชันและกราฟ

🔍 **อุปมา: เครื่องทำกาแฟ**

เครื่องทำกาแฟ: ใส่เมล็ดกาแฟ (input = x) → เครื่องบด (function = f) → ได้กาแฟ (output = f(x))
กฎของฟังก์ชัน: **เมล็ดเดียวกันได้รสเดียวกันเสมอ** — ไม่มีวันใส่ Colombia Supremo แล้วได้ชาเขียว

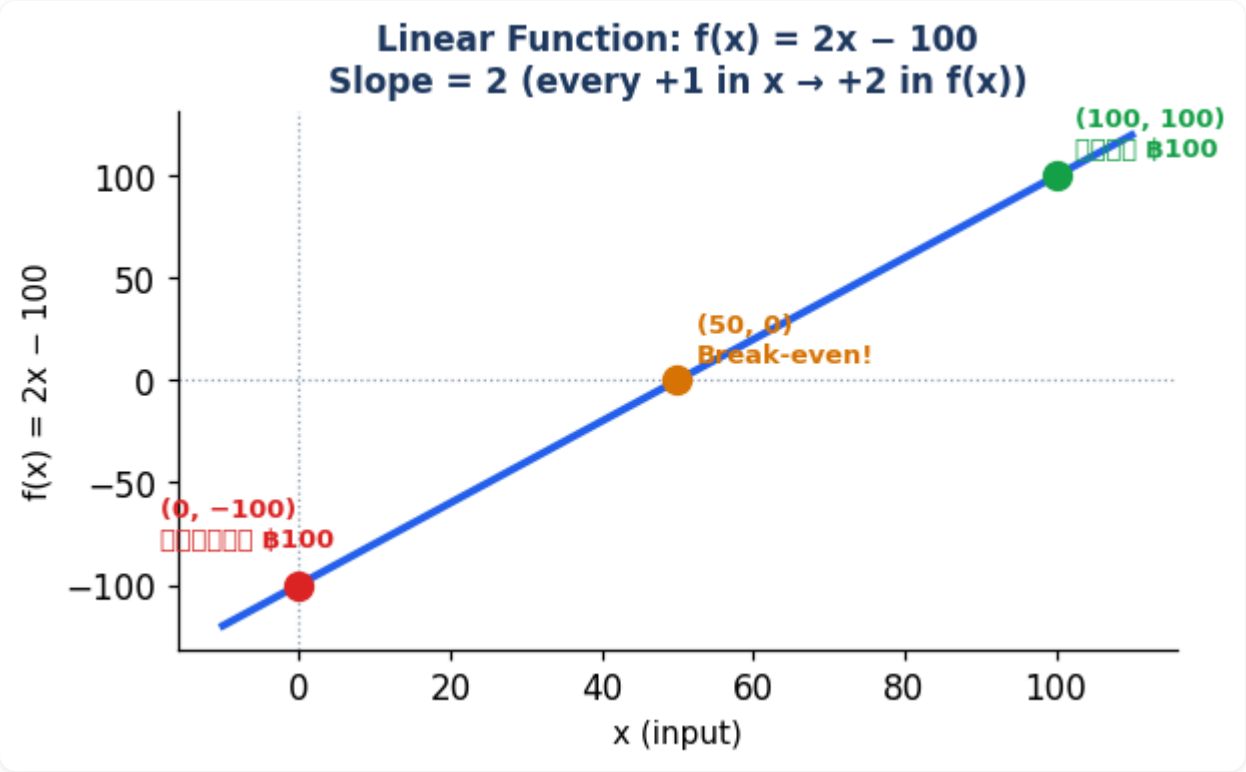
ฟังก์ชันใน Options: ใส่ราคาหุ้น S (input) → payoff formula (function) → ได้กำไร/ขาดทุน (output)

$$f(x) = \text{"กล่องดำ"} : \text{input } x \longrightarrow \text{output } f(x)$$

ทุก input มี output เดียว (แต่ output เดียวกันอาจมาจากหลาย input)

**ตัวอย่าง:** f(x) = 2x – 100

| x (ราคาหุ้น) | f(x) = 2x – 100 | จุดบนกราฟ | ความหมาย |
|---|---|---|---|
| 0 | –100 | (0, –100) | ขาดทุน ฿100 |
| 50 | 0 | (50, 0) | Break-even! |
| 100 | 100 | (100, 100) | กำไร ฿100 |




f(x) = 2x – 100: slope=2, break-even at x=50

**เชื่อมกับ Options**

**Payoff(S) = max(0, S – K) – Premium** คือฟังก์ชันที่รับ S → คืนกำไร/ขาดทุน

ทุก Payoff Chart คือกราฟของฟังก์ชันนี้ เพียงแต่ max() ทำให้เส้นกราฟ "หักศอก"

## 1.3 เส้นตรงและความชัน (Slope)

🔍 **อุปมา: ทางลาดจักรยาน**

Slope = "ขึ้นเท่าไหร่ต่อเดิน 1 เมตร" — ทางลาดชัน slope สูง ทางแบนราบ slope = 0

ใน Options: **slope ของ payoff chart คือ Delta**

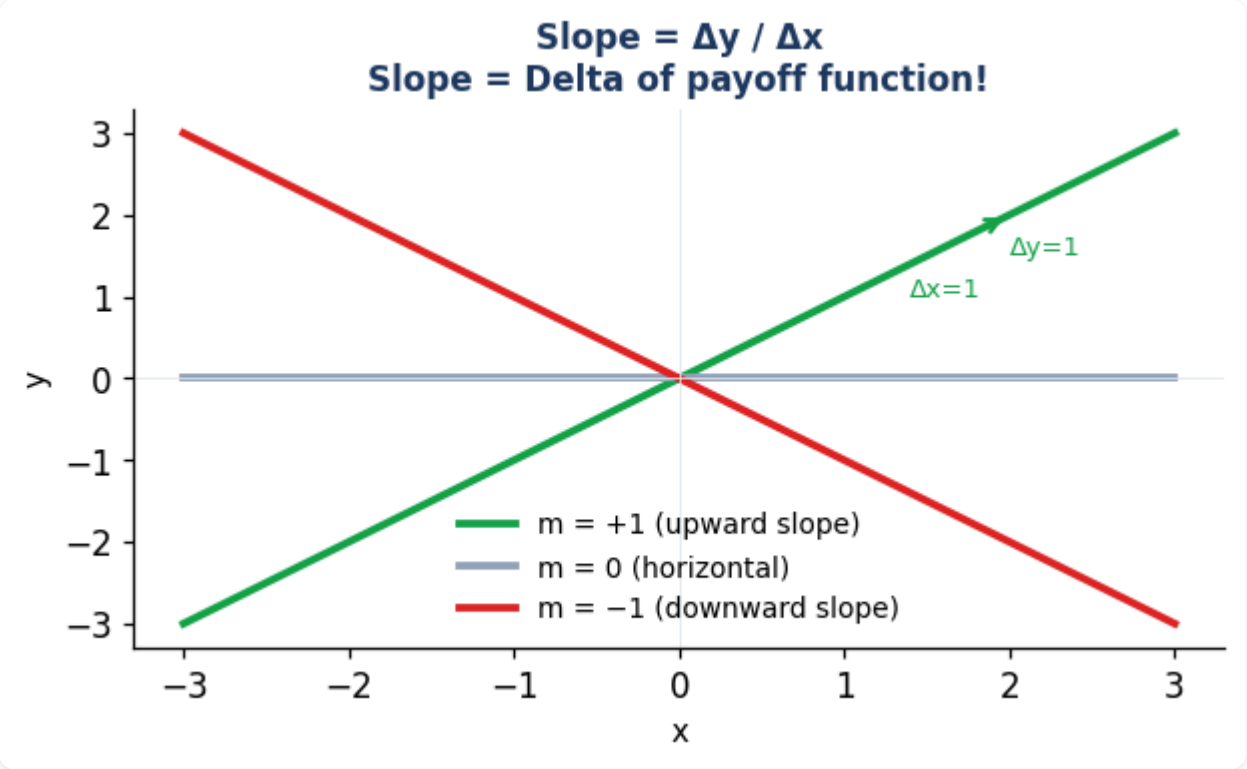
Payoff ขึ้น ฿1 ต่อราคาหุ้นที่ขึ้น ฿1 → slope = +1 → Delta = 1.0

$$y = mx + b \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

🔍 **ทำไม slope = Δy / Δx?**

คิดแบบ "ถ้าเดินหน้า Δx หน่วย ขึ้นสูง Δy หน่วย"
ยิ่ง Δy มาก ต่อ Δx น้อย → slope ยิ่งชัน
ยิ่ง Δx มาก ต่อ Δy น้อย → slope ยิ่งราบ
อัตราส่วน Δy/Δx วัด "ความชัน" ได้พอดี — ไม่ขึ้นกับว่าเดินไปเท่าไหร่

| Slope | ความหมาย | ใน Options |
|---|---|---|
| m = +1 | ขึ้น ฿1 ต่อทุก ฿1 ที่เพิ่ม | Long Call หลัง Strike (กำไรไม่จำกัด) |
| m = −1 | ลง ฿1 ต่อทุก ฿1 ที่เพิ่ม | Short Call หลัง Strike (ขาดทุนไม่จำกัด) |
| m = 0 | แบนราบ ไม่เปลี่ยน | Payoff ก่อน Strike (flat zone) |
| m = +0.5 | ขึ้น ฿0.50 ต่อ ฿1 | Delta ≈ 0.5 (ATM option) |




Slope m = Δy/Δx — positive, zero, and negative slopes

**เชื่อมกับ Options — Delta = Slope!**

**Long Call หลัง Strike: slope = +1** → กำไรเพิ่ม ฿1 ต่อราคาขึ้น ฿1
**Short Call หลัง Strike: slope = −1** → ขาดทุนเพิ่ม ฿1 ต่อราคาขึ้น ฿1
Delta ของ Option = slope ของ payoff curve ณ จุดนั้น (จะเรียนในบท 7)

## 1.4 ฟังก์ชัน max() — หัวใจของ Options Payoff

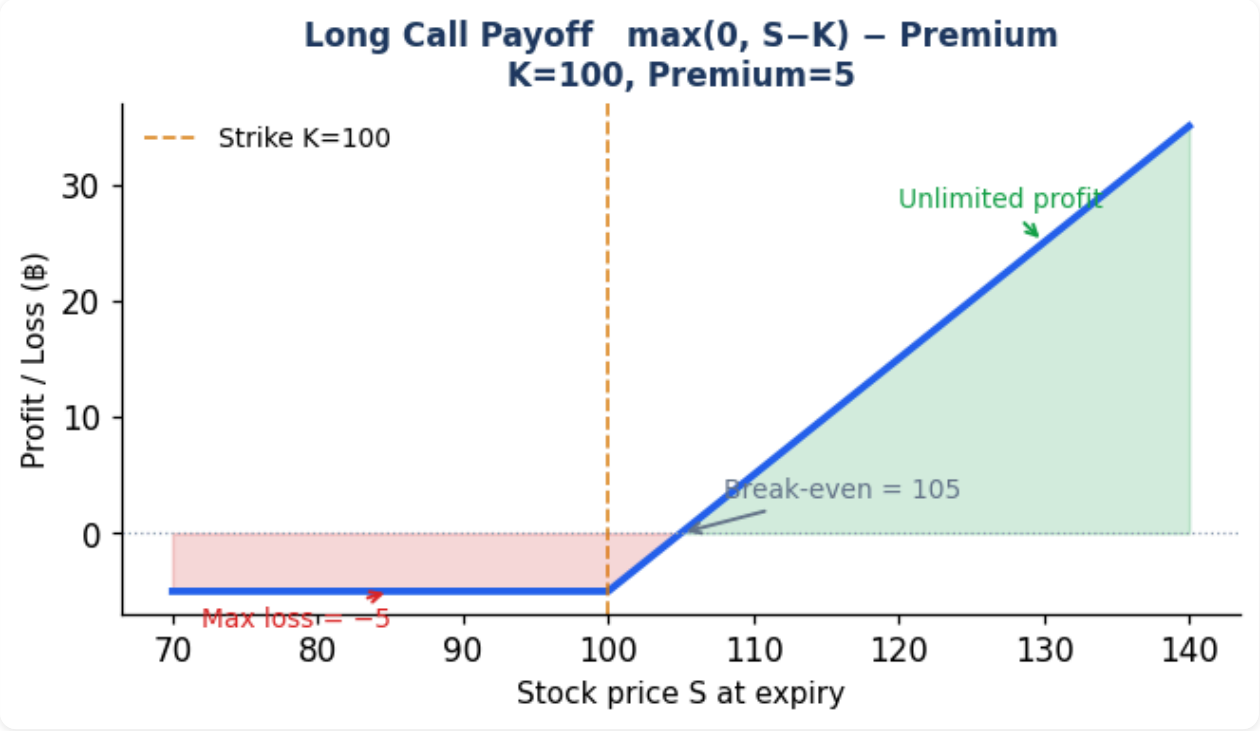
🔍 **อุปมา: ประกันรถยนต์**

ถ้ารถเกิดอุบัติเหตุ บริษัทประกันจ่าย = max(0, ค่าซ่อม – ค่าเสียหายส่วนแรก)
ถ้าค่าซ่อมน้อยกว่า deductible → ได้ 0 (คุ้มครองไม่เพียงพอ)
ถ้าค่าซ่อมเกิน deductible → ได้เงินชดเชย

**Call Option Payoff = max(0, S – K)** ทำงานเหมือนกัน:
ถ้า S < K → ไม่ใช้สิทธิ์ → Payoff = 0
ถ้า S > K → ใช้สิทธิ์ → Payoff = S – K

$$\max(a, b) = \text{ค่าที่มากกว่า} \qquad \max(0, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

| x | max(0, x) | ความหมายใน Options |
|---|---|---|
| −20 | 0 | S ต่ำกว่า K → ไม่ใช้สิทธิ์ |
| 0 | 0 | จุดหักศอก (S = K, ATM) |
| +10 | 10 | S สูงกว่า K 10 บาท → ใช้สิทธิ์ |
| +25 | 25 | S สูงกว่า K 25 บาท → กำไรยิ่งมาก |




Long Call: max(0, S−K) − Premium | K=100, Premium=5

**เชื่อมกับ Options**

**max(0, S − K) = Intrinsic Value ของ Call Option**

จุดหักศอกในกราฟทุก options คือ "จุดที่ max() เปลี่ยนจาก 0 เป็น S−K"

**Long Call:** max(0, S−K) − P | **Long Put:** max(0, K−S) − P

## 1.5 ค่าสัมบูรณ์และการกลับเครื่องหมาย

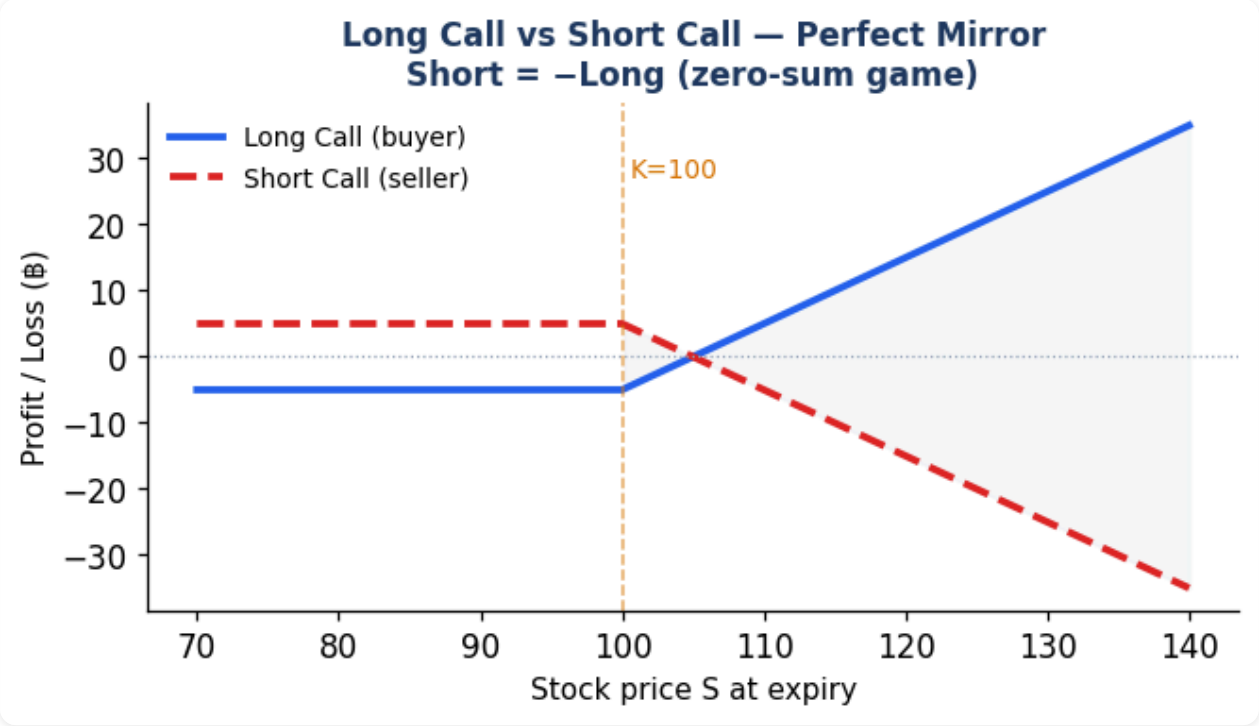
🔍 **อุปมา: กระจก**

−f(x) คือกราฟ f(x) ที่สะท้อนผ่านกระจก (แกน x)

Long Call (กำไรไม่จำกัด ขาดทุนจำกัด) → พลิก → Short Call (กำไรจำกัด ขาดทุนไม่จำกัด)

ไม่ต้องจำรูปร่างของ Short position ใหม่ — **แค่พลิกกราฟ Long position!**

Long position = f(S) → Short position = −f(S) → พลิกผ่านแกน x ทุกจุด




Short Call = mirror of Long Call (zero-sum game)

## 1.6 Piecewise Functions — ฟังก์ชันแบ่งช่วง

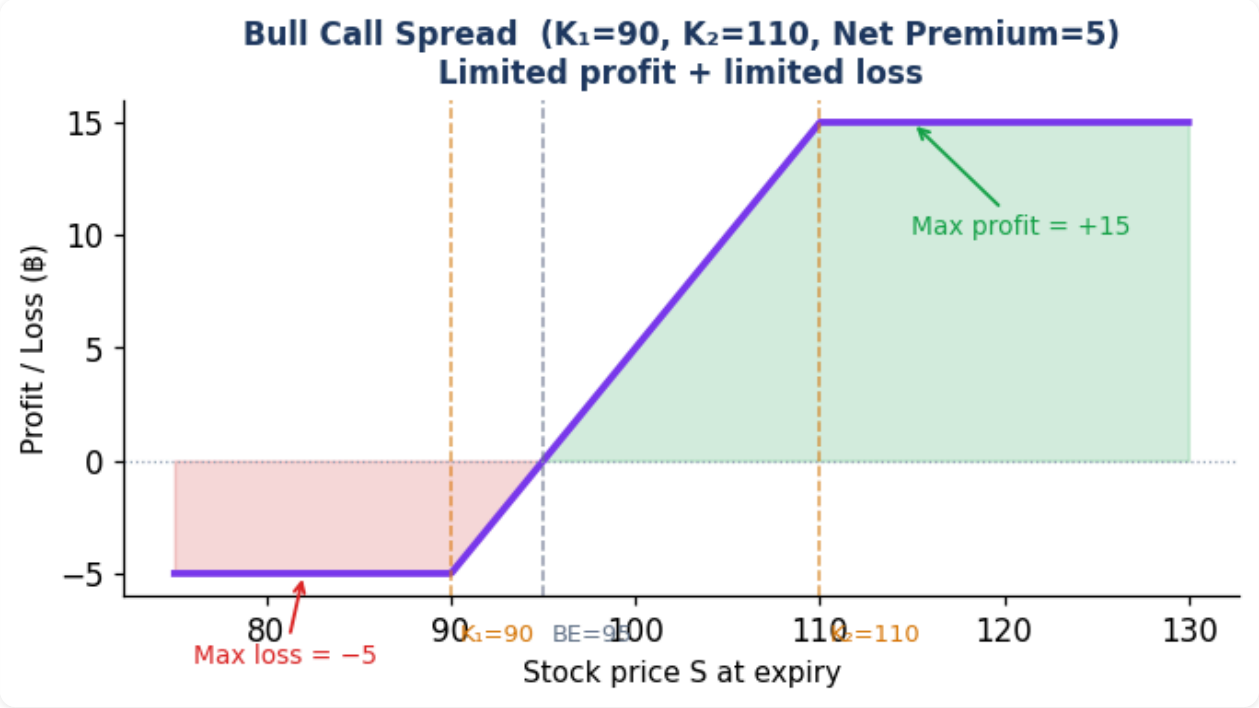
🔍 **อุปมา: อัตราค่าไฟฟ้า**

ค่าไฟฟ้าในไทย: ใช้ไม่เกิน 150 หน่วย คิด ฿1.50/หน่วย
ใช้เกิน 150 หน่วย (ส่วนเกิน) คิด ฿2.50/หน่วย
— สูตรเปลี่ยนตามช่วง = Piecewise function!

Options ทุกกลยุทธ์มีรูปแบบนี้ เพราะ payoff เปลี่ยนรูปแบบเมื่อราคาหุ้นผ่าน Strike

**ตัวอย่าง:** Bull Call Spread ($K_1$=90, $K_2$=110, Net Premium=5)

$$\text{Payoff} = \begin{cases} -5 & S < 90 \\ S - 90 - 5 & 90 \leq S \leq 110 \\ 15 & S > 110 \end{cases}$$




Bull Call Spread $K_1$=90, $K_2$=110 — limited profit, limited loss

**เชื่อมกับ Options**

**ทุกกลยุทธ์ Options เป็น piecewise linear function!**

Long Call = 2 ช่วง | Spread = 3 ช่วง | Iron Condor = 5 ช่วง | Butterfly = 5 ช่วง

เข้าใจ piecewise = เข้าใจ payoff chart ทุกกลยุทธ์

## 1.7 สัญกรณ์คณิตศาสตร์ที่ใช้บ่อย

| สัญลักษณ์ | ชื่อ | ความหมาย | ใน Options |
|---|---|---|---|
| Σ | Sigma | บวกทุกค่า | Payoff = Σ payoff ของแต่ละขา |
| Π | Pi product | คูณทุกค่า | $(1+r_1)(1+r_2)...(1+r_n)$ |
| ∂ | partial | อนุพันธ์ย่อย | Delta = ∂V/∂S |
| ∞ | infinity | อนันต์ | Max Profit = ∞ (Long Call) |
| √ | square root | รากที่สอง | σ = √Var, vol × √T |
| Δ | Delta | การเปลี่ยนแปลง | ΔS = ราคาหุ้นเปลี่ยนไป |
| ≈ | approximately | ประมาณ | e ≈ 2.71828 |

**สรุปบทที่ 1**

✓ % change = ความเปลี่ยนแปลงสัมพัทธ์ — ตก 50% ต้องขึ้น 100% กลับ

✓ ฟังก์ชัน f(x): input เดียวกัน output เดียวกันเสมอ

✓ Slope = Delta ของ payoff

✓ **max(0, S−K) = ที่มาของกราฟหักศอก** ทุก options

✓ Short = −1 × Long = พลิกกราฟ

✓ Piecewise = ทุกกลยุทธ์ Options

## โจทย์ฝึกหัด บทที่ 1

**ข้อ 1.** หุ้น ฿200 ตก 40% แล้วขึ้น 30%
(ก) ราคาสุดท้ายคือเท่าไร? (ข) ต้องขึ้นอีกกี่ % จากราคาสุดท้ายเพื่อกลับ ฿200?

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 2.** Long Put K=100, Premium=4
เขียนสูตร Payoff และหา (ก) Break-even (ข) Payoff ถ้า S=85 (ค) Payoff ถ้า S=105

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 3.** Bull Call Spread: Long Call K=90 (P=12), Short Call K=110 (P=4)
(ก) Net Premium (ข) Max Profit (ค) Max Loss (ง) Break-even

▶ ดูเฉลย

# บทที่ 2: พีชคณิตและสมการ — "จัดรูป Put-Call Parity ได้เอง"

Put-Call Parity คือสมการสำคัญที่สุดในโลก Options — ถ้าจัดรูปสมการได้ คุณจะสร้าง Synthetic Positions ได้ทุกแบบโดยไม่ต้องจำ

## 2.1 สมการเชิงเส้น — หา Break-even

🔍 **อุปมา: ตาชั่ง**

สมการ = ตาชั่งที่สมดุล — ทำอะไรข้างหนึ่ง ต้องทำเหมือนกันกับอีกข้าง
ถ้าเอา 3 ออกจากข้างซ้าย → ต้องเอา 3 ออกจากข้างขวาด้วย มิฉะนั้นตาชั่งเอียง

**หา Break-even ของ Long Call: Payoff = 0**

1. เริ่ม: 0 = max(0, S – K) – P → ที่ BE: S > K ดังนั้น max(0,S–K) = S–K
2. แทน: 0 = S – K – P
3. ย้าย K และ P: S = K + P
4. ตัวอย่าง: K=100, P=5 → BE = **105**

## 2.2 Put-Call Parity — สมการที่ทรงพลังที่สุดใน Options

🔍 **อุปมา: ความสมดุลของตลาด**

ถ้า "Long Call + Bond" มีราคาต่างจาก "Long Put + Stock" → นักอาร์บิทราจจะซื้อตัวที่ถูก ขายตัวที่แพง จนราคาปรับเท่ากัน
ดังนั้น **C + PV(K) = P + S ต้องเป็นจริงเสมอ** (ไม่งั้นกำไรฟรีจะเกิดขึ้น)

$$C + PV(K) = P + S \qquad \Longleftrightarrow \qquad C + Ke^{-rT} = P + S$$

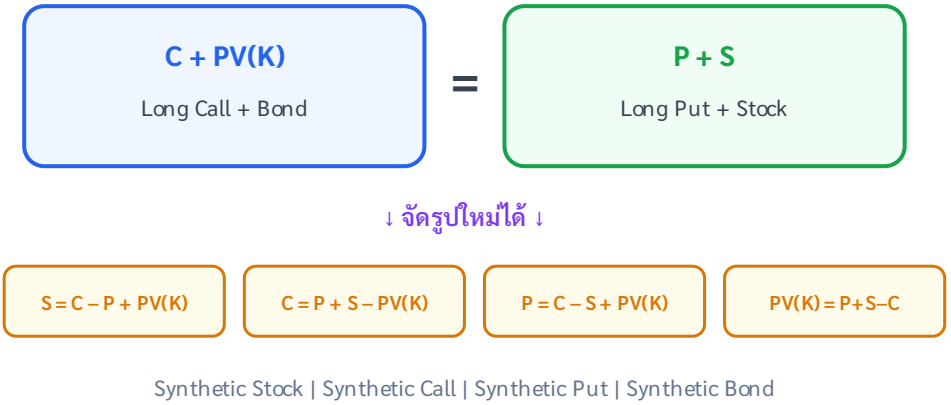
🔍 **ทำไมสมการถึงเป็นแบบนี้?**

**ฝั่งซ้าย (C + PV(K)):** ซื้อ Call + ฝากเงิน PV(K) ไว้ (ครบอายุได้ K พอดี)
**ฝั่งขวา (P + S):** ซื้อ Put + ซื้อหุ้น

ทั้งสองฝั่งมี **payoff เดียวกัน** เมื่อ option expire:
• ถ้า S > K: ฝั่งซ้าย Call = S–K, Bond = K → รวม S | ฝั่งขวา Put = 0, หุ้น = S → รวม S ✓
• ถ้า S < K: ฝั่งซ้าย Call = 0, Bond = K → รวม K | ฝั่งขวา Put = K–S, หุ้น = S → รวม K ✓

จากสมการเดียว จัดรูปใหม่ได้ทุก Synthetic Position:

| ต้องการหา | จัดรูปสมการ | Synthetic Position |
|---|---|---|
| S | S = C – P + PV(K) | Long Stock = Long Call + Short Put + Bond |
| C | C = P + S – PV(K) | Long Call = Long Put + Long Stock – Bond |
| P | P = C – S + PV(K) | Long Put = Long Call + Short Stock + Bond |
| PV(K) | PV(K) = P + S – C | Bond = Long Put + Long Stock + Short Call |




แผนภาพ: Put-Call Parity — Synthetic Positions ทั้ง 4 จาก C–P = S–PV(K)

**เชื่อมกับ Options**

**ทุก Synthetic Position มาจากการย้ายข้างสมการ Put-Call Parity!**
ไม่ต้องจำว่า Synthetic Stock ประกอบจากอะไร — แค่จัดรูปสมการก็ได้คำตอบ

## 2.3 ระบบสมการ — Zero-Cost Collar

**ตัวอย่าง: หา Strike ของ Call ที่ทำให้ Zero-Cost Collar**

ต้องการ Collar ราคา ฿0: ซื้อ Put K=95 ราคา ฿3
ต้องขาย Call ที่ Strike ไหน ให้ได้ ฿3 พอดี?
→ ค้นหา Call Strike ที่มี Premium = ฿3 จาก options chain
(สมการ: Premium(Call ที่ K_c) = ฿3)

**วิธี Substitution:**

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \implies x = 5,\ y = 5$$

## 2.4 อสมการ — Arbitrage Bounds

**กฎสำคัญ: คูณ/หารด้วยจำนวนลบ → กลับทิศเครื่องหมาย!**

−2x > 6 → หารด้วย −2 → x < −3 (เครื่องหมายกลับ!)

**เชื่อมกับ Options — American Put-Call Parity เป็นอสมการ**

S − K ≤ C − P ≤ S − K·\(e^{-rT}\)
American Options สามารถ early exercise ได้ → equality กลายเป็น inequality
ถ้า C − P ออกนอกช่วงนี้ → มี arbitrage!

**สรุปบทที่ 2**

✓ แก้สมการหา Break-even: Payoff = 0 → S = K + P (Call) หรือ K − P (Put)
✓ **Put-Call Parity: C + PV(K) = P + S** → จัดรูปได้ทุก Synthetic Position
✓ ระบบสมการ: หาค่าที่เหมาะสม (Zero-Cost Collar, Strike selection)
✓ อสมการ: Arbitrage bounds ของ American Options

**โจทย์ฝึกหัด บทที่ 2**

**ข้อ 1.** Long Straddle: Long Call K=100 (P=8) + Long Put K=100 (P=6)
(ก) Net Premium (ข) Break-even ด้านบน (ค) Break-even ด้านล่าง

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 2.** Put-Call Parity: S = ฿500, C (K=500) = ฿30, r = 4%, T = 0.5 ปี
(ก) PV(K) (ข) ราคา Put ที่ถูกต้อง (ตาม PCP)

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 3.** ต้องการ Synthetic Long Stock จาก Options เท่านั้น
บอกว่าต้องทำอะไรและแต่ละตำแหน่งมี payoff อย่างไร

▶ ดูเฉลย

# บทที่ 3: เลขยกกำลัง ลอการิทึม ดอกเบี้ย — "เข้าใจ PV(K)"

ใน Put-Call Parity มีตัว **PV(K) = K × $e^{-rT}$** — ถ้าไม่เข้าใจ e, ln, ดอกเบี้ยทบต้น ก็อ่าน PV(K) ไม่ออก บทนี้อธิบายทีละชั้น

## 3.1 เลขยกกำลัง (Exponents)

🔍 **อุปมา: พับกระดาษ**

พับกระดาษ 1 ครั้ง: หนา 2 เท่า → $2^1$ = 2
พับ 2 ครั้ง: 4 เท่า → $2^2$ = 4
พับ 10 ครั้ง: 1,024 เท่า → $2^{10}$ = 1,024
พับ 42 ครั้ง: หนาเกินระยะทางจากโลกถึงดวงจันทร์ → **growth แบบ exponential ทรงพลังมาก**

| กฎ | สูตร | ตัวอย่าง | ทำไม? |
|---|---|---|---|
| คูณฐานเดียวกัน | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ | $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$ | นับจำนวนคูณรวมกัน |
| หารฐานเดียวกัน | $a^m / a^n = a^{m-n}$ | $2^5 / 2^2 = 2^3 = 8$ | หักออกจำนวนคูณ |
| ยกกำลังซ้อน | $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(2^3)^2 = 2^6 = 64$ | คูณ m, n ครั้ง |
| ยกกำลัง 0 | $a^0 = 1$ | $5^0 = 1$ | $a^n/a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$ |
| ยกกำลังลบ | $a^{-n} = 1/a^n$ | $2^{-3} = 1/8$ | หมายถึง "หาร" n ครั้ง |

**เชื่อมกับ Options**

$(1+r)^n$ = ดอกเบี้ยทบต้น n ปี → $e^{rT}$ = ดอกเบี้ยทบต้นแบบ continuous
$e^{-rT}$ = "ลดค่า" ฝั่งตรงข้าม → PV(K) = K × $e^{-rT}$

## 3.2 Geometric Series — ดอกเบี้ยทบต้นหลายงวด

🔍 **อุปมา: ออมทรัพย์รายปี**

ฝากเงินปีละ ฿1,000 ดอกเบี้ย 5%/ปี — เงินแต่ละก้อนทบต้นต่างจำนวนปี:
ก้อนแรก (ฝากปีที่ 1) ทบต้น 5 ปี: ฿1,000 × $1.05^5$
ก้อนที่ 2 (ฝากปีที่ 2) ทบต้น 4 ปี: ฿1,000 × $1.05^4$
... รวมเป็น Geometric Series!

| ปี | ฝาก | มูลค่ารวมปลายปี |
|---|---|---|
| 1 | ฿1,000 | ฿1,000 × 1.05 = ฿1,050 |
| 2 | ฿1,000 | (1,050 + 1,000) × 1.05 = ฿2,153 |
| 3 | ฿1,000 | (2,153 + 1,000) × 1.05 = ฿3,310 |
| 5 | ฿1,000 | **฿5,802** (ฝากรวม ฿5,000 แต่ได้ ฿5,802) |

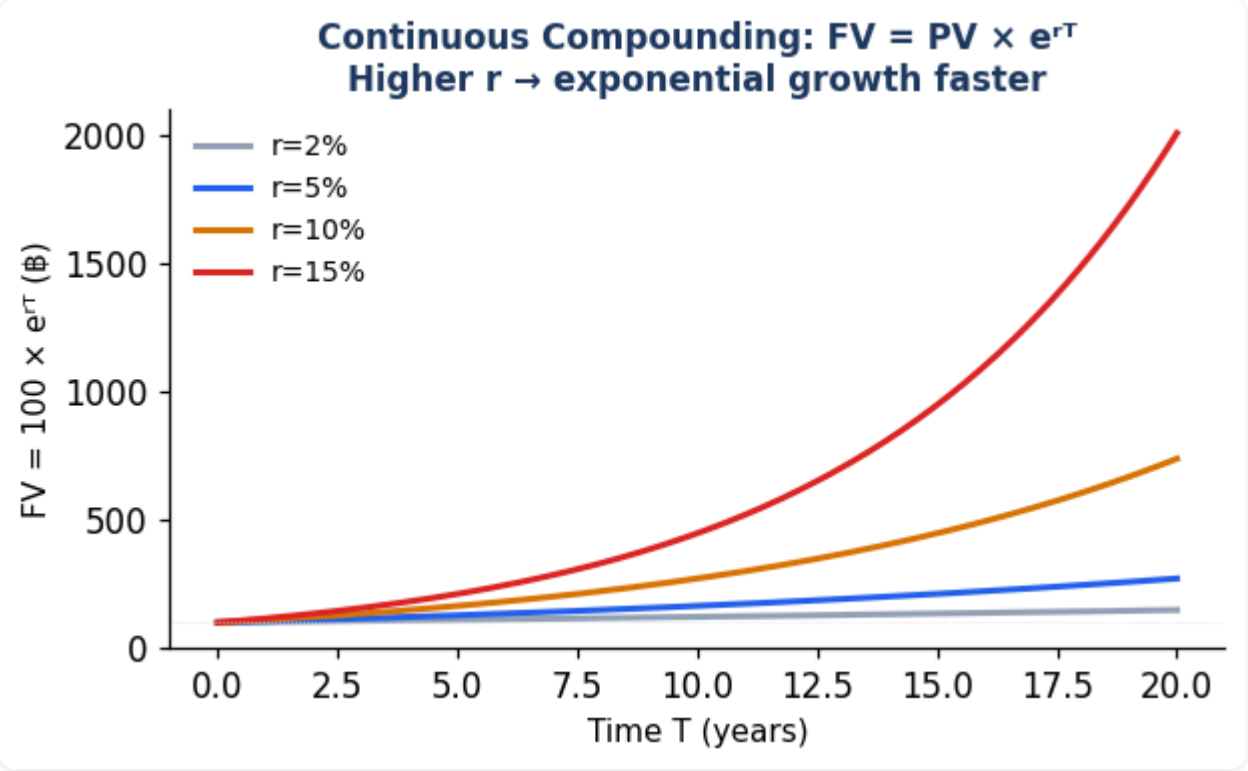
$$\text{Geometric Series} = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

## 3.3 ดอกเบี้ยทบต้น — ทำไมถึงมี e

🔍 **อุปมา: ทบต้นถี่ขึ้นเรื่อยๆ**

ฝาก ฿10,000 ดอกเบี้ย 10%/ปี แต่เปลี่ยนความถี่ทบต้น:
ทบต้นรายปี: ฿10,000 × 1.1 = ฿11,000
ทบต้นราย 6 เดือน: ฿10,000 × $(1 + 0.1/2)^2$ = ฿11,025
ทบต้นรายวัน: ฿10,000 × $(1 + 0.1/365)^{365}$ = ฿11,052
ทบต้นทุกวินาที: ฿10,000 × $e^{0.1}$ = ฿11,052 ← ค่าสูงสุดที่เป็นไปได้!

| วิธีทบต้น | สูตร | ผลลัพธ์ 10 ปี |
|---|---|---|
| เชิงเดี่ยว | 10,000 × (1 + 0.1×10) | ฿20,000 |
| ทบต้นรายปี | 10,000 × $(1.1)^{10}$ | **฿25,937** |
| ทบต้นรายเดือน | 10,000 × $(1+0.1/12)^{120}$ | **฿27,070** |
| **Continuous ($e^{rT}$)** | 10,000 × $e^{0.1\times10}$ | **฿27,183 (ค่าสูงสุด)** |




FV = PV × $e^{rT}$ — exponential compounding at different rates

## 3.4 จำนวน e — ที่มาจากดอกเบี้ย

🔍 **ทำไม e ถึงเท่ากับ 2.71828...?**

สมมติฝาก ฿1 ดอกเบี้ย 100%/ปี ถ้าทบต้น n ครั้งต่อปี:

$FV = (1 + 1/n)^n$

เมื่อ n → ∞ (ทบต้นถี่ขึ้นเรื่อยๆ) ค่านี้ converge ไปที่ **e = 2.71828...**

e ไม่ใช่ตัวเลขลอยๆ — มันคือ "ขีดจำกัดของการทบต้นถี่ที่สุด"

| n (ความถี่ทบต้น) | $(1 + 1/n)^n$ | เข้าใกล้ e |
|---|---|---|
| 1 (รายปี) | 2.000000 | |
| 12 (รายเดือน) | 2.613035 | |
| 365 (รายวัน) | 2.714567 | ใกล้มากแล้ว! |
| 10,000 | 2.718146 | |
| **∞ (continuous)** | **e = 2.718282...** | ค่าสูงสุด! |

$$FV = PV \cdot e^{rT} \qquad PV = FV \cdot e^{-rT}$$

**เชื่อมกับ Options — PV(K) ใน Put-Call Parity!**

**PV(K) = K × $e^{-rT}$**

ตัวอย่าง: K=100, r=5%, T=1 ปี

PV(K) = 100 × $e^{-0.05}$ = 100 × 0.9512 = **฿95.12**

หมายถึง: ฝาก ฿95.12 วันนี้ที่ r=5% → ครบ 1 ปีได้ ฿100 พอดี

## 3.5 ลอการิทึม — ฟังก์ชันย้อนกลับของ e

**🔍 อุปมา: ย้อนเวลา**

$e^x = y$ คือ "เดินหน้า" — ใส่ x ได้ y

ln(y) = x คือ "ย้อนกลับ" — ใส่ y กลับมาได้ x

เหมือน: คูณ 3 → ย้อนกลับด้วยหาร 3

ยกกำลัง e → ย้อนกลับด้วย ln

$$\ln(x) = y \iff e^y = x$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

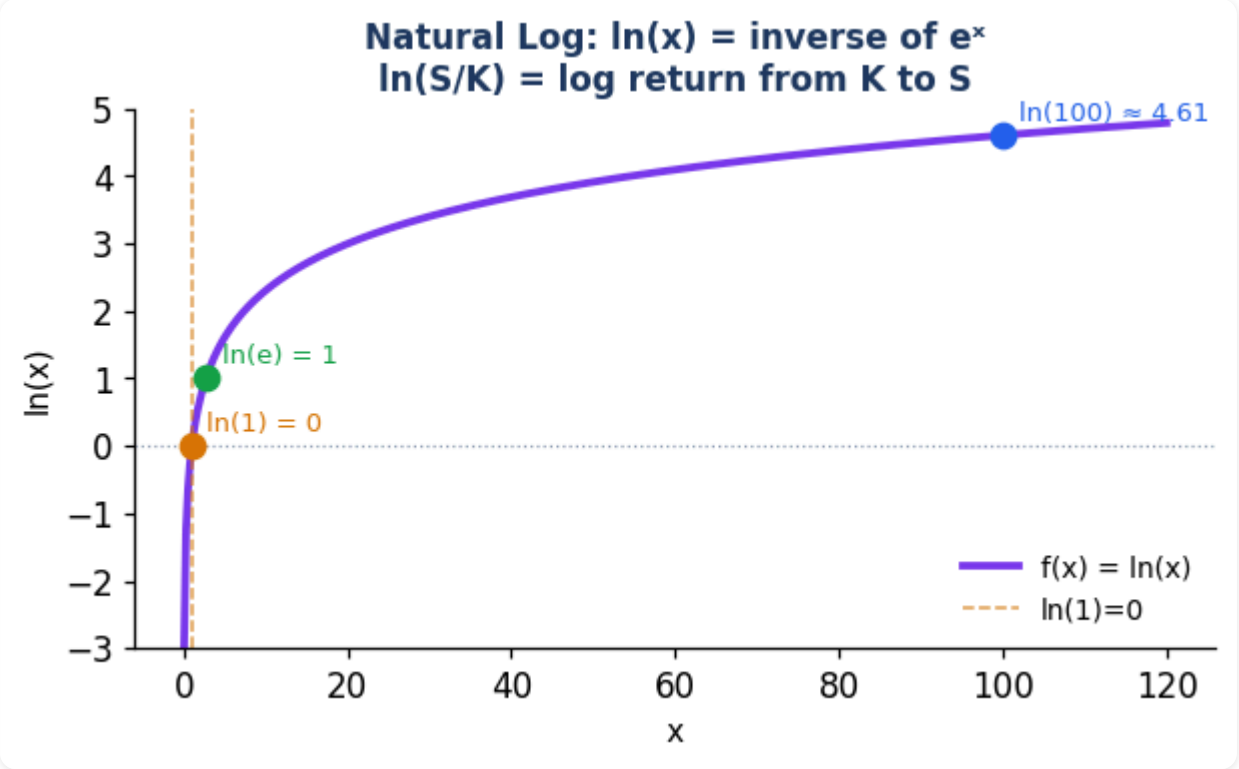
**🔍 ทำไมกฎ ln(a×b) = ln(a) + ln(b) จึงเป็นจริง?**

ถ้า ln(a) = x และ ln(b) = y → แปลว่า a = $e^x$ และ b = $e^y$

a × b = $e^x \times e^y = e^{x+y}$ (กฎเลขยกกำลัง: คูณฐานเดียวกัน บวก exponent)

ดังนั้น ln(a × b) = x + y = ln(a) + ln(b) ✓

| x | ln(x) | ตรวจ $e^{\ln(x)}$ = x |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $e^0 = 1$ ✓ |
| e ≈ 2.718 | 1 | $e^1 = e$ ✓ |
| 10 | 2.303 | $e^{2.303} \approx 10$ ✓ |
| 100 | 4.605 | $e^{4.605} \approx 100$ ✓ |




ln(x) = inverse of $e^x$; ln(S/K) = log return in Black-Scholes

## 3.6 Simple Return vs Log Return — ทำไม Options ใช้ ln

🔍 **อุปมา: การวัดระยะทาง**

Simple return เหมือนวัดระยะทางจากจุดอ้างอิงแบบสัมบูรณ์ → ฐานเปลี่ยนทุกครั้ง
Log return เหมือนวัดความเปลี่ยนแปลงใน "สเกล log" → **บวกกันข้ามเวลาได้เลย**

ตัวอย่างง่ายๆ: เดินหน้า 5 ก้าว แล้วถอยหลัง 5 ก้าว = กลับที่เดิม
Log return ทำงานแบบนี้ได้ Simple return ทำไม่ได้!

$$R = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \qquad r = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = \ln S_1 - \ln S_0$$

| การเคลื่อนไหว | Simple Return | Log Return | ต่างกัน? |
|---|---|---|---|
| ฿100 → ฿110 | +10.00% | +9.53% | ใกล้เคียง (ขยับน้อย) |
| ฿100 → ฿150 | +50.00% | +40.55% | เริ่มต่าง |
| ฿100 → ฿200 | +100.00% | +69.31% | ต่างมาก |
| ฿100 → ฿50 | −50.00% | **−69.31%** | สมมาตรกับ +100%! |

**เหตุผลที่ 1: บวกกันข้ามเวลาได้**

฿100 → ฿110 (+10%) → ฿99 (−10%) ≠ กลับที่เดิม! ได้ −1% (Simple return ผิด)
ln(110/100) + ln(99/110) = ln(99/100) = −1.005% ← **ถูกต้อง**
r(0→2) = r(0→1) + r(1→2) ← Simple return ทำแบบนี้ไม่ได้

**เหตุผลที่ 2: สมมาตร**

Simple: ขึ้น 50% แล้วลง 50% = ฿75 ≠ ฿100 (asymmetric!)
Log: ขึ้น 40.55% (log) แล้วลง 40.55% (log) = กลับที่เดิมพอดี ✓
ln(200/100) = +69.31% และ ln(50/100) = −69.31% ← สมมาตรเป๊ะ

**เหตุผลที่ 3: เป็น Normal Distribution ได้**

Simple return มีขอบล่างที่ −100% → ไม่สมมาตร → ไม่เป็น Normal
Log return อยู่ใน (−∞, +∞) → สมมาตร → **เป็น Normal Distribution ได้!**
→ log return ~ Normal → ราคาหุ้น ~ Lognormal (บทที่ 6)

**เชื่อมกับ Options — ที่มาของ ln(S/K) ใน Black-Scholes**

ใน $d_1$ ของ BS: $\mathbf{d_1 = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T] / (\sigma\sqrt{T})}$
ln(S/K) = log return จาก K ไป S = "ราคาหุ้น 'ห่าง' จาก Strike กี่หน่วย log"
นี่คือเหตุผลที่ Black-Scholes ใช้ ln ไม่ใช่ simple %

**🏛️ Quant Desk: Log Return คือภาษากลางของ Vol Trading**

Traders รายงาน PnL ใน **log return** เพราะบวกข้ามวันได้ทันที:
r_weekly = r_Mon + r_Tue + r_Wed + r_Thu + r_Fri — บวกตรงๆ ถูกเป๊ะ ไม่ต้องปรับ base
**Historical vol (σ)** = std ของ daily log returns × √252 → annualize ด้วยหลัก square-root of time
ความสัมพันธ์นี้มาจากการที่ log returns เป็น Normal → variance ∝ T → σ ∝ √T

## 3.7 Present Value & Future Value — สรุป

$$PV = FV \cdot e^{-rT} \qquad FV = PV \cdot e^{rT}$$

| r | T | $e^{-rT}$ | PV ของ ฿100 | ตีความ |
|---|---|---|---|---|
| 2% | 0.25 ปี | 0.9950 | ฿99.50 | ดอกเบี้ยต่ำ + เวลาสั้น = แทบไม่ discount |
| 5% | 1 ปี | 0.9512 | ฿95.12 | Strike ที่ K=100 มีมูลค่าวันนี้ = ฿95.12 |
| 10% | 1 ปี | 0.9048 | ฿90.48 | ดอกเบี้ยสูง = discount มาก |

**⚠️ Model Risk: r คงที่ใน BS — แต่โลกจริงมี Term Structure**

BS ใช้ r เดียวตลอดอายุ option แต่ในตลาดจริง:

- **Yield curve ไม่ flat**: r_1month ≠ r_1year ≠ r_5year
- **Rate เปลี่ยนทุกวัน** ตาม Fed/BOT policy → Rho risk
- สำหรับ short-dated options (≤3 เดือน) error เล็กน้อย แต่ long-dated (≥1 ปี) Rho ใหญ่มาก

แก้ไข: ใช้ forward rate ที่ตรงกับ maturity ของ option แทน overnight rate คงที่

**เชื่อมกับ Options — อ่าน Put-Call Parity ออกครบแล้ว!**

$$C + K \cdot e^{-rT} = P + S$$

- C = ราคา Call (บทที่ 1: ฟังก์ชัน + max)
- $K \cdot e^{-rT}$ = PV(K) = มูลค่าปัจจุบันของ Strike (**บทนี้!**)
- P = ราคา Put (บทที่ 1: การกลับเครื่องหมาย)
- S = ราคาหุ้น
- การจัดรูปสมการ → Synthetic Positions (บทที่ 2)

**สรุปบทที่ 3**

✓ เลขยกกำลัง: กฎ 5 ข้อ — $e^{-rT}$ คือ "ลดค่า"
✓ ดอกเบี้ยทบต้น: ยิ่งถี่ยิ่งได้มาก → ขีดจำกัดคือ $e^{rT}$
✓ **e = 2.71828** มาจากดอกเบี้ยทบต้นไม่ใช่ตัวเลขลอยๆ
✓ ln(x): ย้อนกลับ $e^x$ — กฎ ln(a×b) = ln(a)+ln(b)
✓ **Log return ดีกว่า simple return**: บวกได้, สมมาตร, เป็น Normal ได้
✓ **PV(K) = K·$e^{-rT}$**: อ่าน Put-Call Parity ออกครบแล้ว!

**โจทย์ฝึกหัด บทที่ 3**

**ข้อ 1.** ฝาก ฿50,000 ที่ r = 3% ต่อปี Continuous Compounding
(ก) มูลค่า 2 ปี (ข) ต้องฝากกี่บาทวันนี้ เพื่อให้ได้ ฿60,000 ใน 3 ปี?

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 2.** หุ้นราคา ฿100 → ฿85 → ฿95
(ก) Simple return ช่วงแรก (ข) Simple return รวม 2 ช่วง (ค) Log return รวม 2 ช่วง
(ง) ทำไม (ข) ≠ Simple return ช่วง 1 + ช่วง 2?

▶ ดูเฉลย

**ข้อ 3.** Black-Scholes: S=฿105, K=฿100, r=5%, T=0.5, σ=20%
คำนวณ ln(S/K) และ $(r + \sigma^2/2)\times T$ ซึ่งเป็น 2 ส่วนหลักของ $d_1$

▶ ดูเฉลย

---

## จบ Part I

ตอนนี้คุณมีพื้นฐานเพียงพอที่จะไปอ่าน
**"บทเรียน Payoff Chart Interactive"** ได้แล้ว!

Part II: สถิติ ความน่าจะเป็น Distributions → เข้าใจ Volatility & Normal Distribution