คณิตศาสตร์พื้นฐาน สำหรับ Options Trading

Part III: แคลคูลัส — ภาษาของ Greeks (v2)

บทที่ 7: Limit · Derivative · Chain · Product/Quotient · Partial · Real Greeks · Gamma · Integration · Expected Payoff · Taylor · Full P&L

เรียนแบบ 3 ชั้น: อุปมา → เหตุ→ผล → ตัวเลขจริง

บทที่ 7: แคลคูลัส — "ภาษาของ Greeks"

Greeks ทุกตัวคือ **อนุพันธ์ (derivatives)** ของราคา Option — ถ้าไม่รู้จักแคลคูลัส ก็ไม่เข้าใจว่า Delta, Gamma, Theta, Vega มาจากไหน บทนี้อธิบาย intuition ก่อนสูตร

7.1 Limit — แนวคิด "เข้าใกล้"

🔍 **อุปมา: วิ่งเข้าหากำแพงครึ่งนึงทุกครั้ง**

สมมติวิ่งเข้าหากำแพงที่ระยะ 1 เมตร
ก้าวแรก: วิ่ง 0.5 เมตร → เหลือ 0.5 เมตร
ก้าวที่ 2: วิ่งอีก 0.25 เมตร → เหลือ 0.25 เมตร
ก้าวที่ 3: วิ่งอีก 0.125 เมตร → เหลือ 0.125 เมตร...

วิ่งไปกี่ก้าวก็ไม่ถึงกำแพง แต่ **เข้าใกล้ 1 เมตรมากขึ้นเรื่อยๆ** — นี่คือ Limit!
lim = "ค่าที่เข้าใกล้ แต่ไม่จำเป็นต้องถึง"

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ตัวอย่าง: lim(h→0) [f(x+h) – f(x)] / h

นี่คือ "อัตราการเปลี่ยนแปลง ถ้า h เล็กมากๆ" → นิยามของ Derivative!
เมื่อ h เข้าใกล้ 0 (แต่ไม่ถึง 0) → ค่า limit คืออัตราการเปลี่ยนแปลง ณ จุดนั้น

เชื่อมกับ Options — Delta ใช้แนวคิด Limit

Delta = "ถ้าราคาหุ้นเปลี่ยน ΔS นิดเดียว ราคา Option เปลี่ยน ΔV เท่าไหร่"
Delta = lim(ΔS→0) ΔV/ΔS = **อัตราการเปลี่ยนแปลงทันที** ไม่ใช่ค่าเฉลี่ย

7.2 Derivative — อัตราการเปลี่ยนแปลงทันที

🔍 **อุปมา: มาตรวัดความเร็วรถ**

คุณขับรถจาก กทม. → เชียงใหม่ 700 กม. ใน 7 ชั่วโมง
ความเร็วเฉลี่ย = 700/7 = 100 กม./ชม. (คล้าย slope ของเส้นตรง)
มาตรวัดความเร็ว บอกความเร็ว "ตอนนี้" = 120 กม./ชม. (= Derivative ณ จุดนั้น)

Derivative = "ความเร็วทันที" ไม่ใช่ความเร็วเฉลี่ย
Delta = "อัตราการเปลี่ยน Option ตอนนี้" ณ ราคาหุ้นปัจจุบัน

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(slope ของเส้นสัมผัส)

🔍 **ทำไม Power Rule: $d/dx(x^n) = nx^{n-1}$?**

ลองแทน $f(x) = x^2$:

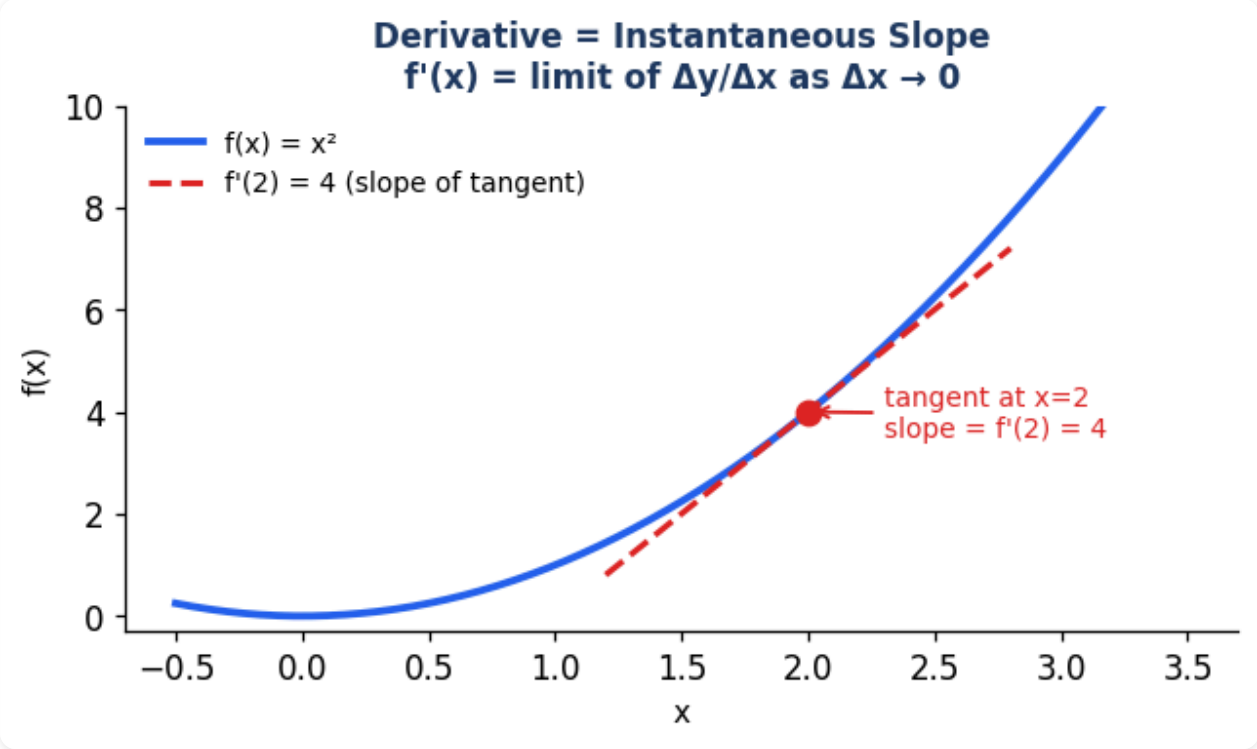
$f'(x) = \lim(h \to 0)\ [(x+h)^2 - x^2] / h$

$= \lim(h \to 0)\ [x^2 + 2xh + h^2 - x^2] / h$

$= \lim(h \to 0)\ [2xh + h^2] / h$

$= \lim(h \to 0)\ [2x + h] =$ **$2x$** ✓ (= nx^{n-1} เมื่อ $n=2$)

f(x)	f'(x)	ทำไม?
x^n	nx^{n-1}	Power Rule (พิสูจน์ข้างต้น)
c (ค่าคงที่)	0	ไม่เปลี่ยนแปลง → slope = 0
c × f(x)	c × f'(x)	scale ทั้งกราฟ → slope ×c ด้วย
f(x) + g(x)	f'(x) + g'(x)	slope รวม = slope แต่ละส่วนรวมกัน
e^x	e^x	← **อนุพันธ์ของตัวเอง! (special property)**
ln(x)	1/x	ย้อนกลับจาก $d/dx(e^x)=e^x$



f'(x) = instantaneous slope of tangent line at x

เชื่อมกับ Options — Delta!

Delta (Δ) = ∂V/∂S = derivative ของราคา Option เทียบกับราคาหุ้น
= slope ของ payoff curve ณ จุดนั้น
ATM Call: Delta ≈ 0.5 → ราคาหุ้นขึ้น ฿1 → Option ราคาขึ้น ≈ ฿0.50

7.3 อนุพันธ์ของ e^x — ทำไม e สำคัญที่สุด

🔍 **อุปมา: แบคทีเรียที่โตตามขนาดตัวเอง**

แบคทีเรีย 1,000 ตัว แบ่งตัวในอัตรา 10%/ชม. ต่อ "ตัวเอง"
ถ้ามี 1,000 ตัว → โตชั่วโมงนี้: 100 ตัว
ถ้ามี 5,000 ตัว → โตชั่วโมงนี้: 500 ตัว

"อัตราการเปลี่ยนแปลง = สัดส่วนของจำนวนปัจจุบัน"
นี่คือสมบัติ unique ของ e^x: f'(x) = f(x) → derivative = ตัวเอง!

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(e^{ax}) = a\,e^{ax} \qquad \frac{d}{dx}(e^{-rT}) = -r\,e^{-rT}$$

🔍 **ทำไม $d/dx(e^x) = e^x$?**

ใช้นิยาม limit:

$d/dx(e^x) = \lim(h \to 0)\ [e^{x+h} - e^x] / h$

$= \lim(h \to 0)\ e^x \times [e^h - 1] / h$

$= e^x \times \lim(h \to 0)\ [(e^h - 1) / h]$

พิสูจน์ได้ว่า $\lim(h \to 0)\ (e^h - 1)/h = 1 \to d/dx(e^x) = e^x \times 1 = \mathbf{e^x}$ ✓

7.4 Chain Rule — กฎลูกโซ่

🔍 **อุปมา: แปลงสกุลเงินหลายขั้น**

ถ้าอัตราแลกเปลี่ยน: 1 ดอลลาร์ = 36 บาท (rate = 36 บาท/ดอลลาร์)

และ: 1 บาท = 4 เยน (rate = 4 เยน/บาท)

แล้ว: 1 ดอลลาร์ = 36 × 4 = **144 เยน** (rate = 144 เยน/ดอลลาร์)

Chain Rule คูณ **"อัตรา" (rate) ของแต่ละขั้น** ไม่ใช่คูณเปอร์เซ็นต์ — ถ้าดอลลาร์แข็งขึ้น dollar 1 หน่วย ทำให้บาทขยับ 36 หน่วย และบาท 1 หน่วยทำให้เยนขยับ 4 หน่วย → ดอลลาร์ขยับ 1 หน่วยทำให้เยนขยับ 36×4 หน่วย

Chain Rule: "อัตราการเปลี่ยนแปลงสุดท้าย = ผลคูณของอัตรา (slope) แต่ละขั้น"

$$y = f(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง: หา dy/dT ของ $y = e^{-rT}$ (Discount Factor)

1. กำหนด $u = -rT \to y = e^u$
2. $dy/du = e^u$ (derivative ของ e^u)
3. $du/dT = -r$ (derivative ของ $-rT$ เทียบ T)
4. Chain Rule: $dy/dT = e^u \times (-r) = \mathbf{-r \times e^{-rT}}$

แปลว่า: discount factor ลดลงเร็วแค่ไหน? → −r × (ค่า discount ปัจจุบัน)

เปลี่ยน T → เปลี่ยน u=−rT → เปลี่ยน u → เปลี่ยน e^u → รวม: $dy/dT = -r \cdot e^{-rT}$

เชื่อมกับ Options — Theta!

Theta = −∂C/∂T = "Option ราคาลดลงเท่าไหร่ต่อวัน" (time decay) โดย T = เวลาที่เหลือก่อน expire

ใน BS: Theta ใช้ Chain Rule ผ่าน d_1, d_2 ที่เป็น function ของ t

Chain Rule ยังเป็นพื้นฐานของ **Ito's Lemma** ที่ใช้ derive Black-Scholes

7.5 Product Rule & Quotient Rule — กฎผลคูณ-ผลหาร

🔍 **อุปมา: พื้นที่สี่เหลี่ยมที่ทั้งกว้างและยาวเปลี่ยนพร้อมกัน**

สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านกว้าง u และด้านยาว v → พื้นที่ = u·v

ถ้าทั้งสองด้าน "ขยาย" พร้อมกันนิดเดียว พื้นที่เพิ่มจาก 2 ส่วน:

- ด้านกว้างขยาย (u') × ความยาวเดิม (v) → แถบเพิ่มด้านบน = u'·v
- ด้านยาวขยาย (v') × ความกว้างเดิม (u) → แถบเพิ่มด้านข้าง = u·v'

(มุมเล็กๆ ที่ขยายทั้ง 2 ด้าน u'·v' เล็กจนทิ้งได้เมื่อ Δ→0)

(uv)' = u'v + uv' — "เปลี่ยนตัวแรกค้างตัวหลัง บวก เปลี่ยนตัวหลังค้างตัวแรก"

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

ตัวอย่าง: หา d/dS ของ S·N(d_1) (พจน์แรกของสูตร Black-Scholes Call)

เทอม S·N(d_1) เป็น "ผลคูณ" ของ u = S และ v = N(d_1) — ต้องใช้ Product Rule!

1. u = S → u' = du/dS = 1
2. v = N(d_1) → v' = dv/dS = N'(d_1)·(∂d_1/∂S) (Chain Rule! เพราะ d_1 เป็น function ของ S)
3. Product Rule: d/dS[S·N(d_1)] = u'v + uv' = **N(d_1) + S·N'(d_1)·(∂d_1/∂S)**

นี่คือเหตุผลที่การ differentiate สูตร Black-Scholes ต้องใช้ Product Rule — ราคา Call มีเทอม S·N(d_1) ที่ทั้ง S และ N(d_1) เปลี่ยนตาม S พร้อมกัน

เชื่อมกับ Options — พจน์ $S \cdot N'(d_1)$ ที่ "หายไป" อย่างมหัศจรรย์

เมื่อ differentiate สูตร Call ครบทุกเทอม จะได้เทอม $S \cdot N'(d_1) \cdot (\partial d_1/\partial S)$ โผล่มา
แต่เทอมนี้ **หักล้าง (cancel) กับเทอมที่มาจาก $K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$** พอดี
ทำให้ผลลัพธ์เหลือเพียง **Delta = $N(d_1)$** เกลี้ยงสวยงาม (ดูรายละเอียดใน §7.7)

7.6 Partial Derivatives — Greeks ทุกตัว

🔍 **อุปมา: ความสุขขึ้นกับหลายปัจจัย**

สมมติความสุข H = f(ห้องอุณหภูมิ T, เพลง V, แสง L)
"ถ้าอยากรู้ว่าอุณหภูมิมีผลแค่ไหน" → เปิดแอร์ แต่ค้างเพลงและแสงไว้ → วัด $\partial H/\partial T$

Partial Derivative = "เปลี่ยนตัวแปรเดียว ค้างตัวอื่น" = **Greeks ทุกตัว!**

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \text{ ถือ } y \text{ คงที่ แล้ว differentiate เทียบ } x$$

ตัวอย่าง: $f(x, y) = x^2y + 3xy$

∂/ treat y เป็นคงที่: $\partial f/\partial x = 2xy + 3y$

∂/ treat x เป็นคงที่: $\partial f/\partial y = x^2 + 3x$

ราคา Option V ขึ้นกับหลายตัวแปร: **$V(S, t, \sigma, r)$**

Greek	สูตร	ความหมาย	เปลี่ยนอะไร ค้างอะไร
Δ Delta	$\partial V/\partial S$	Option เปลี่ยนเท่าไหร่ต่อหุ้นขยับ ฿1	เปลี่ยน S, ค้าง t,σ,r
Θ Theta	$-\partial C/\partial T$	Option เปลี่ยนเท่าไหร่ต่อวัน (T = time to expiry)	เปลี่ยน T, ค้าง S,σ,r
ν Vega	$\partial V/\partial \sigma$	Option เปลี่ยนเท่าไหร่ต่อ σ เพิ่ม 1%	เปลี่ยน σ, ค้าง S,t,r
ρ Rho	$\partial V/\partial r$	Option เปลี่ยนเท่าไหร่ต่อดอกเบี้ยเพิ่ม 1%	เปลี่ยน r, ค้าง S,t,σ

เชื่อมกับ Options — เข้าใจ Greeks ทุกตัวแล้ว!

Greeks ทุกตัวคือ "อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคา Option เมื่อปรับตัวแปรทีละตัว"
ไม่ใช่ตัวเลขลอยๆ — แต่ล้วนมาจาก partial derivative ของสูตร Black-Scholes

7.7 Partial Derivative บนสูตร Black-Scholes จริง — The Real Greeks

🔍 **อุปมา: เปิดฝากล่อง Black-Scholes ดูว่า Delta มาจากไหนจริงๆ**

หนังสือส่วนใหญ่บอกแค่ "Delta = $N(d_1)$" แล้วจบ — แต่ไม่บอกว่า **ทำไม**
สูตร Call มีตั้ง 2 เทอม ($S \cdot N(d_1)$ และ $K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$) ทั้งคู่ขึ้นกับ S
ตอน differentiate ควรได้เทอมยุ่งๆ เต็มไปหมด — แต่กลับเหลือแค่ $N(d_1)$ เกลี้ยง
ความ "มหัศจรรย์" นี้คือการหักล้างของพจน์ ที่เราจะเปิดให้ดูในหัวข้อนี้

$$C = S\,N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

← เหลือเท่านี้เท่านั้น!

เหตุ → ผล: ทำไม $\partial C/\partial S = N(d_1)$ เกลี้ยงๆ

differentiate ทั้ง 2 เทอมเทียบ S (ใช้ Product Rule + Chain Rule จาก §7.5):

1. เทอม 1: $\partial/\partial S[S \cdot N(d_1)] = N(d_1) + S \cdot N'(d_1) \cdot (\partial d_1/\partial S)$
2. เทอม 2: $\partial/\partial S[-K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)] = -K \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2) \cdot (\partial d_2/\partial S)$
3. เพราะ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \rightarrow \partial d_2/\partial S = \partial d_1/\partial S$ (ต่างกันแค่ค่าคงที่)
4. พิสูจน์ได้ว่า $\mathbf{S \cdot N'(d_1) = K \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2)}$ พอดี (เอกลักษณ์ของ lognormal)
5. ดังนั้น 2 พจน์ที่มี N' **เท่ากันและตรงข้าม → หักล้างกันหมด!**

เหลือเพียง $\partial C/\partial S = \mathbf{N(d_1)}$ — นี่คือ "ความมหัศจรรย์" ที่หนังสือส่วนใหญ่ข้ามไป

ตัวอย่างตัวเลขจริง: คำนวณ Delta ของ Call ATM

กำหนด S=100, K=100, r=5%, σ=25%, T=1 ปี

1. $d_1 = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\cdot T] / (\sigma\sqrt{T}) = [\ln(1) + (0.05 + 0.03125)\cdot 1] / (0.25\cdot 1) = 0.08125 / 0.25 =$ **0.325**

2. Delta = $N(d_1) = N(0.325) \approx$ **0.627**

3. ตีความ: หุ้นขยับขึ้น ฿1 (จาก ฿100 → ฿101) → ราคา Option ขยับขึ้น ≈ **฿0.627**

Delta = 0.627 > 0.5 เพราะ drift $(r + \sigma^2/2)$ ดันให้ Call ATM เอนไปทาง ITM เล็กน้อย

Greeks ตัวอื่น = partial derivative ตัวอื่นของสูตรเดียวกัน

เมื่อเข้าใจว่า Delta = $\partial C/\partial S$ แล้ว Greeks ที่เหลือก็คือ partial derivative คนละตัว:

- **Gamma = $\partial^2 C/\partial S^2$** = $\partial(\text{Delta})/\partial S = N'(d_1)/(S\cdot\sigma\sqrt{T})$ — ความโค้ง (ดู §7.8)
- **Vega = $\partial C/\partial \sigma$** = $S\cdot N'(d_1)\cdot\sqrt{T}$ — ไวต่อความผันผวน
- **Theta = $-\partial C/\partial T$** (เครื่องหมายลบ เพราะเวลาเหลือน้อยลง) — time decay
- **Rho = $\partial C/\partial r$** = $K\cdot T\cdot e^{-rT}\cdot N(d_2)$ — ไวต่อดอกเบี้ย

โจทย์ฝึก §7.7

Call: S=50, K=50, r=4%, σ=20%, T=1 ปี

(ก) คำนวณ d_1 (ข) หา Delta = $N(d_1)$ เมื่อกำหนด N(0.3)≈0.618 (ค) ถ้าหุ้นขยับ +฿1 ราคา Option ขยับประมาณเท่าไหร่?

▶ ดูเฉลย

🏛️ **Quant Desk: Delta Hedging — ปรับพอร์ต ทุก ΔS ที่มีนัยสำคัญ**

Market maker ที่ขาย options มักทำ **delta-neutral hedging** ทุกวัน:

• Short 1 Call (Delta = −0.6) → ซื้อหุ้น 0.6 หุ้น → net delta = 0

• เมื่อหุ้นขยับ delta เปลี่ยน → ต้อง rebalance → **Gamma ≠ 0 ทำให้ต้อง rebalance บ่อย**

• ต้นทุน rebalancing = **Theta** ที่จ่าย (time value ที่ decay ทุกวัน)

กำไรของ market maker = Gamma P&L − Theta = ทำงานได้เมื่อ realized vol > IV ที่ขายไว้

7.8 อนุพันธ์อันดับสอง — Gamma

🔍 **อุปมา: ความโค้งของถนน**

ขับรถบนถนนตรง: Slope = ทิศทาง, Gamma = ความโค้ง

ถนนตรง: slope คงที่, Gamma = 0 (ไม่โค้ง)

ถนนเลี้ยว: slope เปลี่ยนตลอด, Gamma > 0 (โค้ง)

Gamma ของ Option = ความโค้งของ payoff curve

Gamma สูง = เส้น payoff โค้งมาก = Delta เปลี่ยนเร็ว = ต้อง rehedge บ่อย

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial(\Delta)}{\partial S}$$

"Delta เปลี่ยนเท่าไหร่ เมื่อราคาหุ้นเปลี่ยน ฿1"

🔍 **ทำไมต้อง differentiate 2 ครั้ง?**

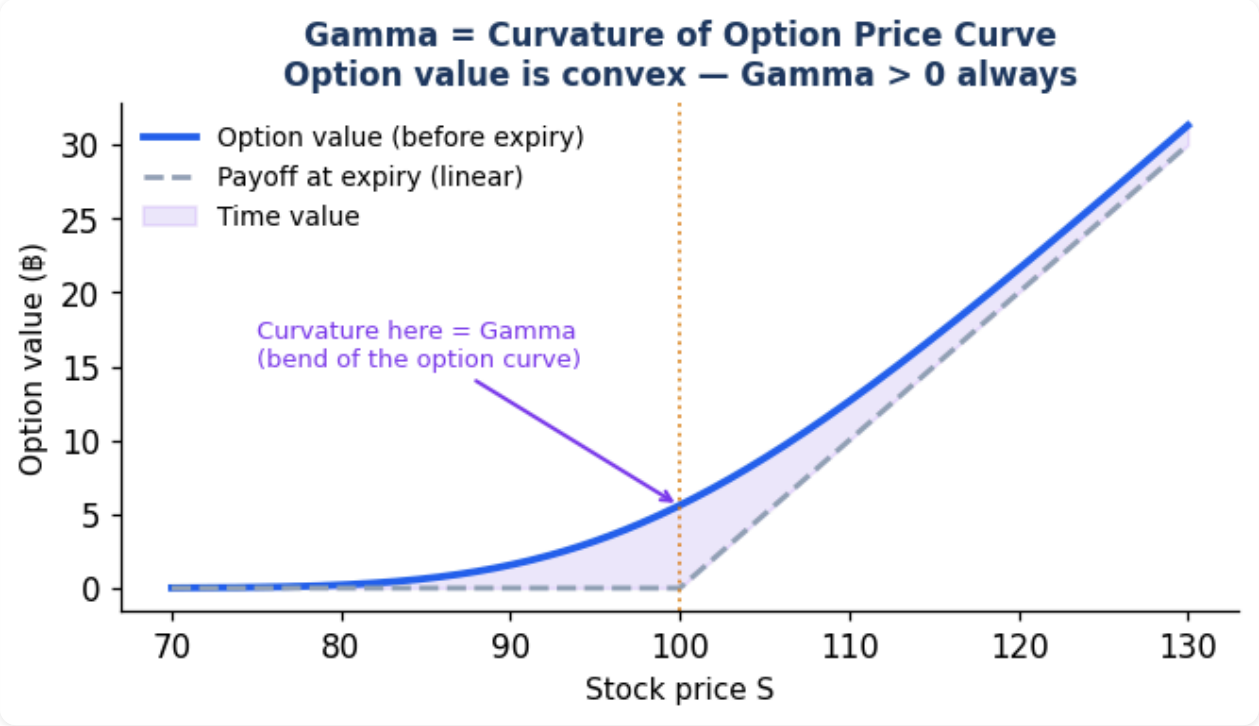
Delta = f'(S) = slope ณ จุดนั้น

Gamma = f''(S) = slope ของ slope = "Delta เปลี่ยนเร็วแค่ไหน"

ตัวอย่าง: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ (slope)

$f''(x) = 6x$ (slope เปลี่ยนเร็วแค่ไหน ณ x นั้น)



Gamma = curvature of option value curve; always positive (convex)

ทำไม Gamma สำคัญสำหรับ Trader?

- **Long Gamma** (ซื้อ options): ได้ประโยชน์เมื่อตลาดเคลื่อนไหวมาก — "กำไรจาก vol"
- **Short Gamma** (ขาย options): เสียเมื่อตลาดเคลื่อนไหวมาก — ต้อง rehedge ตลอด
- **Gamma สูงสุดที่ ATM**: Options ATM โค้งมากที่สุด = ไวต่อการเคลื่อนไหวของราคา

7.9 Integration — พื้นที่ใต้กราฟ

🔍 **อุปมา: คิดระยะทางจากความเร็ว**

ขับรถที่ 100 กม./ชม. เป็นเวลา 2 ชั่วโมง → ระยะทาง = 100 × 2 = 200 กม.
"ระยะทาง = พื้นที่ใต้กราฟ velocity vs time"

Integration คือการ "ย้อนกลับ" ของ derivative:
ถ้า derivative วัด "เปลี่ยนเร็วแค่ไหน" → integral สะสม "เปลี่ยนไปเท่าไหร่รวม"

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

🔍 **ทำไม $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1)$?**

เพราะเราต้องการ $F(x)$ ที่ $F'(x) = x^n$

ลองดู: $d/dx[x^{n+1}/(n+1)] = (n+1)x^n/(n+1) = x^n$ ✓

→ Antiderivative ของ x^n คือ $x^{n+1}/(n+1)$ นั่นเอง

เชื่อมกับ Options

- **N(d) = CDF ของ Normal = ∫ bell curve** → พื้นที่ใต้กราฟทางซ้ายของ d
- **E[X] = ∫ x × f(x) dx** (expected value ของ continuous distribution)
- **ราคา Option = ∫ payoff × probability density** = E*[payoff] ที่ discount แล้ว

7.10 Integration หา Expected Payoff — ราคา Option = ∫ payoff × density

🔍 **อุปมา: รวมพื้นที่ใต้กราฟ payoff×ความน่าจะเป็น = ราคายุติธรรม**

ถ้าจะตั้งราคา "ลอตเตอรี่" ที่ยุติธรรม → คิดทุกผลลัพธ์ที่เป็นไปได้:
(เงินที่ได้ในผลลัพธ์นั้น) × (ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์นั้น) แล้วรวมกันทุกผล

Option ก็เหมือนกัน: ราคายุติธรรม = รวม (payoff ของแต่ละราคาหุ้น) × (ความน่าจะเป็นที่หุ้นจบที่ราคานั้น)
"รวมทุกผลลัพธ์ต่อเนื่อง" = **Integration** → แล้ว discount กลับมาเป็นมูลค่าวันนี้

$$C = e^{-rT} \int_0^\infty \max(0,\ S - K) \cdot f(S)\, dS$$

$f(S)$ = risk-neutral lognormal density; $\max(0, S - K)$ = payoff

ตัวอย่าง: ประมาณราคา Call แบบ discrete (แบ่ง bucket) — K=100, r=5%, T=1

แทน integral ต่อเนื่องด้วยการแบ่งราคาหุ้นจบเป็น 5 bucket พร้อม risk-neutral probability (รวม = 1.00):

S (ราคาจบ)	payoff = max(0, S−100)	p (prob)	payoff × p
80	0	0.10	0.00
90	0	0.20	0.00
100	0	0.35	0.00
110	10	0.22	2.20
120	20	0.13	2.60
รวม		**1.00**	**4.80**

1. Σ payoff × p = 0 + 0 + 0 + 2.20 + 2.60 = **฿4.80** (= expected payoff ที่ครบกำหนด)
2. discount กลับมาวันนี้: $e^{-rT} = e^{-0.05} \approx 0.9512$
3. ราคา Call ≈ 4.80 × 0.9512 ≈ **฿4.57**

นี่เป็นเพียงการประมาณหยาบด้วย 5 bucket — ถ้าใช้ bucket ละเอียดขึ้นเรื่อยๆ จนเป็น integral ต่อเนื่องกับ lognormal density จริง จะได้สูตร Black-Scholes แบบเป๊ะ

เชื่อมกับ Options

สูตร Black-Scholes ที่ดูน่ากลัว แท้จริงคือ **integral ก้อนนี้ที่แก้ออกมาเป็น closed form**
$S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$ คือผลลัพธ์ของ $\int \max(0, S-K) \cdot f(S)\, dS$ เมื่อ f เป็น lognormal

โจทย์ฝึก §7.10

Put option, K=100, r=0% (เพื่อความง่าย, $e^{-rT}=1$). ใช้ราคาจบและ probability ชุดเดิม:
S = 80, 90, 100, 110, 120 กับ p = 0.10, 0.20, 0.35, 0.22, 0.13
payoff ของ Put = max(0, K − S). ประมาณราคา Put

▶ ดูเฉลย

7.11 Taylor Series — ประมาณค่าจาก Derivative

🔍 **อุปมา: ประมาณค่าจากข้อมูลใกล้เคียง**

คุณรู้ว่า ณ วันนี้ หุ้น ฿100, Delta=0.5, Gamma=0.03
ถ้าหุ้นขึ้นเป็น ฿102 (+฿2) → Option ราคาเปลี่ยนเท่าไหร่?

ประมาณ: ΔV ≈ 0.5 × 2 + ½ × 0.03 × 2^2 = 1.0 + 0.06 = **+฿1.06**
(ดีกว่าแค่ Delta × ΔS = +฿1.00 เพราะ Gamma ช่วย correct ความโค้ง)

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h + \tfrac{1}{2} f''(x)\,h^2$$

$$\Delta V \approx \Delta \cdot \Delta S + \tfrac{1}{2}\,\Gamma\,(\Delta S)^2$$

🔍 **ทำไมสูตรถึงมีรูปแบบนี้?**

term แรก f(x+h) ≈ f(x): ถ้า h = 0 → ไม่เปลี่ยน
+ f'(x)·h: การประมาณเชิงเส้น (slope × ระยะทาง)
+ ½f''(x)·h^2: correction สำหรับความโค้ง (Gamma × ½ × ΔS^2)

ยิ่งเพิ่ม term มาก ยิ่งแม่นขึ้น — แต่ 2 terms มักพอสำหรับ options risk

เชื่อมกับ Options — Delta-Gamma Approximation ใช้ทุกวัน!

ΔV ≈ Delta × ΔS + ½ × Gamma × $(\Delta S)^2$
ใช้ใน P&L estimation, risk limit checking, scenario analysis
ถ้า ΔS ใหญ่ (crash) → Gamma term สำคัญมาก! Short Gamma trader ระวัง

7.12 Multivariate Taylor & The Full Options P&L — สมการกำไร-ขาดทุนที่เทรดเดอร์ใช้จริง

🔍 อุปมา: ประมาณการเปลี่ยนแปลงราคา Option จากหลายปัจจัยพร้อมกัน

ใน §7.11 เราประมาณ ΔV จากการขยับของหุ้น (S) อย่างเดียว — แต่ในชีวิตจริง
ภายในวันเดียวกัน มีหลายอย่างเปลี่ยนพร้อมกัน: หุ้นขยับ, เวลาเดินไป 1 วัน, ความผันผวนเปลี่ยน

Multivariate Taylor คือการ "บวกผลจากทุกปัจจัยเข้าด้วยกัน" — แต่ละ Greek คือ slope ของแต่ละแกน
รวมทุก slope × ระยะที่ขยับ = ประมาณการเปลี่ยนแปลงราคา Option รวม

$$\Delta V \approx \underbrace{\Delta \cdot \Delta S}_{\text{directional}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2}_{\text{convexity}} + \underbrace{\Theta \cdot \Delta t}_{\text{time decay}} + \underbrace{\nu \cdot \Delta\sigma}_{\text{vol P\&L}}$$

แต่ละเทอมหมายถึงอะไร

- **Delta·ΔS** — กำไร/ขาดทุนจากทิศทาง (หุ้นขึ้น/ลง) = directional P&L
- **½·Gamma·(ΔS)²** — กำไรจากความโค้ง = convexity / gamma P&L (เป็นบวกเสมอถ้า long gamma ไม่ว่าหุ้นขึ้นหรือลง)
- **Theta·Δt** — time decay = มูลค่าที่ลดตามเวลา (มักเป็นลบสำหรับคนถือ option)
- **Vega·Δσ** — กำไร/ขาดทุนเมื่อความผันผวน (vol) เปลี่ยน = vol P&L

ตัวอย่างตัวเลขจริง: แตก P&L 1 วันของ position

Position: Delta=0.5, Gamma=0.03, Theta=−0.05/วัน, Vega=0.12 (ต่อ 1 vol point = 1%)
เหตุการณ์ในวันนั้น: หุ้นขยับ ΔS=+฿2, เวลาเดิน Δt=1 วัน, vol เพิ่ม Δσ=+1% (=+0.01)

1. Delta·ΔS = 0.5 × 2 = **+฿1.00** (directional)
2. ½·Gamma·(ΔS)² = 0.5 × 0.03 × 2² = 0.5 × 0.03 × 4 = **+฿0.06** (convexity/gamma)
3. Theta·Δt = −0.05 × 1 = **−฿0.05** (time decay)
4. Vega·Δσ = 0.12 × 1 = **+฿0.12** (Vega ใช้ convention "ต่อ 1 vol point" → vol +1% → คูณ 1)
5. รวม: ΔV ≈ 1.00 + 0.06 − 0.05 + 0.12 = **+฿1.13**

Delta +฿1.00 + Gamma +฿0.06 + Theta −฿0.05 + Vega +฿0.12 = ΔV +฿1.13

เชื่อมกับ Options — นี่คือวิธี attribute P&L รายวันของเทรดเดอร์จริง

คำถาม "**ทำไมวันนี้กำไร/ขาดทุน?**" ตอบได้ด้วยการแยกเป็นรายปัจจัย:

• กำไรเพราะเดาทิศถูก (delta) หรือเพราะตลาดเหวี่ยงแรง (gamma)?

• ขาดทุนเพราะเวลาผ่านไป (theta) หรือเพราะ vol ตก (vega)?

การแตก P&L แบบนี้เรียกว่า **P&L attribution / Greeks explain** — ใช้ทุกวันบนโต๊ะเทรด

⚠️ Model Risk: Taylor P&L ดีแค่ Small Move — ระวัง Gap/Jump

สมการ $\Delta V \approx \Delta \cdot \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2 + \Theta \cdot \Delta t + \nu \cdot \Delta\sigma$ ใช้ได้ดีเมื่อ ΔS เล็ก แต่:

• **Gap opening**: หุ้นเปิดตลาดต่าง −10% (หลังข่าวใหญ่กลางคืน) → Γ term underestimate P&L มาก

• **Vol jump**: $\Delta\sigma$ +10 vol points ใน 1 วัน (ช่วง Lehman / COVID) → $\nu \cdot \Delta\sigma$ อาจไม่เพียงพอ

• **Cross-gamma** ($\partial^2 V/\partial S \partial \sigma$) ถูก neglect — เมื่อหุ้นตก vol มักพุ่งขึ้นพร้อมกัน ปฏิสัมพันธ์นี้ไม่อยู่ในสมการ

ใช้ full repricing (Monte Carlo หรือ binomial tree) เมื่อ $\Delta S > 2$–3%

โจทย์ฝึก §7.12

Position: Delta=−0.4, Gamma=0.02, Theta=−0.03/วัน, Vega=0.10 (ต่อ 1 vol point)

ในวันนั้น: หุ้นขยับ ΔS=−฿3, Δt=1 วัน, vol ลด $\Delta\sigma$=−2% (=−0.02)

แตก ΔV เป็น 4 เทอม แล้วรวม

▶ ดูเฉลย

สรุปบทที่ 7

✓ Limit = "เข้าใกล้" → นิยามของ Derivative

✓ Derivative = slope ณ จุดนั้น (ไม่ใช่เฉลี่ย) = **Delta**

✓ $d/dx(e^x) = e^x$ ← อนุพันธ์ตัวเอง = ทำไม e^x ปรากฏทุกที่ใน finance

✓ Chain Rule = "ส่งต่อ" การเปลี่ยนแปลง → พื้นฐานของ Ito's Lemma

✓ **Product/Quotient Rule**: $(uv)' = u'v+uv'$ → ใช้ differentiate $S \cdot N(d_1)$

✓ **Partial Derivatives = Greeks ทุกตัว**: $\Delta\ \Theta\ \nu\ \rho$

✓ **The Real Greeks**: Delta = $N(d_1)$ เพราะพจน์ $S \cdot N'(d_1)$ หักล้างกันพอดี

✓ **อนุพันธ์อันดับ 2 = Gamma** = ความโค้ง → Long/Short Gamma

✓ Integration = ย้อนกลับ derivative → CDF, Expected Payoff

✓ **ราคา Option = $e^{-rT} \cdot \int \max(0, S-K) \cdot f(S)\, dS$** = รวม payoff × density

✓ **Taylor: $\Delta V \approx \text{Delta} \times \Delta S + \frac{1}{2}\text{Gamma} \times (\Delta S)^2$** = ใช้ทุกวัน

✓ **Full P&L: $\Delta V \approx \text{Delta} \cdot \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta S)^2 + \text{Theta} \cdot \Delta t + \text{Vega} \cdot \Delta\sigma$** = P&L attribution

โจทย์ฝึกหัด บทที่ 7

ข้อ 1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$

คำนวณ (ก) $f'(x)$ (ข) $f''(x)$ (ค) $f'(2)$

▶ ดูเฉลย

ข้อ 2. Option: Delta = 0.45, Gamma = 0.025

ราคาหุ้นขึ้นจาก ฿100 → ฿104 (+฿4)

(ก) ประมาณ ΔV ด้วย Delta เพียงอย่างเดียว

(ข) ประมาณ ΔV ด้วย Delta + Gamma (Taylor 2 terms)

(ค) Gamma correction มีผลเท่าไหร่?

▶ ดูเฉลย

ข้อ 3. สูตร Black-Scholes Call: $C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$

(ก) $\partial C/\partial S$ คืออะไร? (= Greek ตัวไหน)

(ข) $\partial C/\partial r$ มีค่าบวกหรือลบ? (= Greek ตัวไหน)

(ค) $\partial C/\partial t$ มีค่าบวกหรือลบ? (= Greek ตัวไหน และทำไม?)

▶ ดูเฉลย

จบ Part III

ตอนนี้คุณเข้าใจ **Greeks ทุกตัว** ในเชิงคณิตศาสตร์:

Delta = $\partial V/\partial S$ | Gamma = $\partial^2 V/\partial S^2$ | Theta = $-\partial C/\partial T$ | Vega = $\partial V/\partial \sigma$

Part IV: Linear Algebra & Regression → จัดการ Portfolio หลายตัวแปร